线性代数笔记[1]

范李勇

2019 年 11 月 12 日

[1]edit by LaTeX

目录

Chapter 1

行列式

1.1 行列式的定义

1.1.1 二阶行列式

定义一个

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为二阶行列式，主对角线为 a_{11} 和 a_{22}，副对角线为 a_{12} 和 a_{21}。并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

值相等的两个行列式称为这两个行列式相等。

1.1.2 n 阶行列式

称用 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,...,n)$ 组成的如下对象

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\det(a_{ij})=|a_{ij}|_n$$

为一个 n 阶行列式 (determinant)。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$$

定义：在 n 阶行列式 D 中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和 j 列，剩下的 $n-1$ 阶行列式被称为元素 a_{ij} 在 D 中的余子式，记作 M_{ij}。称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 在 D 中的代数余子式。

定义：在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 等于它的任意一行（列）的所有元素与其他代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

其中 i,j 可以取 $1,2,\cdots,n$ 中任一数值

推论：若行列式某行（列）的元素全为零，则行列式的值为零。

结论：下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

结论：上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

结论：对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

1.2 行列式的性质

1.2.1 行列式的性质

定义：称将行列式 D 中的行列互换所得的新的行列式为 D 的转置，记作 D^T

例

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, D^T = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

即 D^T 亦可以视为由 D 以主对角线为轴旋转 $180°$ 而得

结论：二阶行列式与它的转置相等。由二阶行列式与它的转置相等可以推出三阶行列式也与它的转置相等

性质 1：行列式与它的转置相等，即 $D = D^T$

注：性质 1 说明行列式中行与列的地位是对等的。因此，凡是对行成立的性质也对列成立

性质 2：交换行列式的两行（列），行列式的值变号 (展开后可以用数学归

纳法证得)。

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = D_1$$

推论：如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式等于零

性质 3：如果行列式的某一行 (列) 中所有元素有公因子, 则公因子可以提到行列式符号的外面, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论：如果行列式有两行 (列) 的对应元素成比例, 则行列式的值等于零。

性质 4：若行列式的某一列 (行) 的元素都是两数之和

即，如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j}+a_{1j}^{'} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j}+a_{2j}^{'} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj}+a_{nj}^{'} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j}^{'} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j}^{'} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj}^{'} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注：一次只能拆一行或一列

性质 5：把行列式的某一列 (行) 的各元素乘以同一数 k 后加到另一列 (行)

对应的元素上去, 行列式的值不变。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{c_i+kc_j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.2.2 行列式的计算

行列式的计算方法 1： 利用性质将行列式化为三角行列式 (特殊行列式)。

注：这种方法是计算机程序计算行列式的一种常用的方法。利用该方法计算 n 阶行列式大约需要 $\frac{2n^3}{3}$ 次运算，在不到一秒钟内就可以计算一个 25 阶的行列式

计算行列式的方法 2(主要方法)：利用性质和展开公式。

基本思路：

1. 选择一列 (行), 利用性质 5 将该列 (行) 化出较多的零。
2. 利用展开定理将行列式按该列 (行) 展开。
3. 重复以上两步操作。

技巧 1：选择数字简单的一行 (列)

技巧 2：如果某行 (列) 只有 1 或 2 个元素 $\neq 0$, 可按该行 (列) 直接展开。

技巧 3：如果每行和列都只有 2 个元素不等于 0, 一般按第 1 行 (列) 或最后一行 (列) 直接展开。

技巧 4：行和行列式的计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_4]{\substack{c_1+c_2\\ c_1+c_3}} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}$$

$$= x \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ x & 0 & -x \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = x \times x \times (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} x & -x \\ 0 & -x \end{vmatrix} = x^4$$

例：

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_n]{\substack{c_1+c_2 \\ c_1+c_3 \\ \cdots}} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$D \xlongequal[r_n-r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ \cdots}} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

1.2.3 行列式的性质 (II)

例：试计算范德蒙德 (Vandermonde) 行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2-x_1r_1]{\substack{r_4-x_1r_3 \\ r_3-x_1r_2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 \\ 0 & x_2^2-x_1x_2 & x_3^2-x_1x_3 & x_4^2-x_1x_4 \\ 0 & x_2^3-x_1x_2^2 & x_3^3-x_1x_3^2 & x_4^3-x_1x_4^2 \end{vmatrix}$$

技巧 5：逐行相减 (相加)

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第一列}} \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 \\ x_2^2-x_1x_2 & x_3^2-x_1x_3 & x_4^2-x_1x_4 \\ x_2^3-x_1x_2^2 & x_3^3-x_1x_3^2 & x_4^3-x_1x_4^2 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{公因子}]{\text{提取每列}} (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix}$$

技巧 6：数学归纳法 (递推公式)

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

$$=(x_n-x_1)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_3-x_1)(x_2-x_1)$$

$$(x_n-x_2)(x_{n-1}-x_2)\cdots(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_{n-2})(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})$$

技巧 7：利用性质化为特殊行列式

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\b+c&c+a&a+b\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_1}\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\a+b+c&a+b+c&a+b+c\end{vmatrix}\xlongequal[\text{公因子}]{\text{提取}}(a+b+c)\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\1&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2\leftrightarrow r_1]{r_3\leftrightarrow r_2}(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$$

结论：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1m}&0&\cdots&0\\\vdots&m\times n&\vdots&\vdots&0&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mm}&0&\cdots&0\\c_{11}&\cdots&c_{1m}&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&*&\vdots&\vdots&n\times n&\vdots\\c_{n1}&\cdots&c_{nm}&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}_{m+n}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1m}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mm}\end{vmatrix}_m\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}_n$$

1.3 克莱姆法则（cramer）

定义：包含未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的形如

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

的方程称为线性方程，形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

定义：对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

称行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为方程组的系数行列式。

定理：如果线性方程组的系数行列式不等于 0, 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots\vdots\vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么线性方程组有惟一解, 并且解可以表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注：如果线性方程组的系数行列式 $D = 0$ 则方程组无解或有无穷多解。其中 $b_1, \cdots, b_n$ 为方程组的等号右边部分行成的向量

称线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

为齐次线性方程组。显然 $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$ 是线性方程组的一个解，称为零解。

注：齐次线性方程组的解只有两种情况：惟一解或无穷多解。和非齐次线性方程组不同, 它没有“无解”这种情况。

推论：如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$, 则方程组只有零解。注： 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D = 0$, 则方程组必有非零解 (即有无穷多解)。