工程数学笔记[1]

范李勇

2019 年 12 月 15 日

[1]edit by LaTeX

目录

Chapter 1

行列式

1.1 行列式的定义

1.1.1 二阶行列式

定义一个

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为二阶行列式，主对角线为 a_{11} 和 a_{22}，副对角线为 a_{12} 和 a_{21}。并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

值相等的两个行列式称为这两个行列式相等。

1.1.2 n 阶行列式

称用 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,...,n)$ 组成的如下对象

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\det(a_{ij})=|a_{ij}|_n$$

为一个 n 阶行列式 (determinant)。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$$

定义：在 n 阶行列式 D 中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和 j 列，剩下的 $n-1$ 阶行列式被称为元素 a_{ij} 在 D 中的余子式，记作 M_{ij}。称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 在 D 中的代数余子式。

定义：在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 等于它的任意一行（列）的所有元素与其他代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

其中 i,j 可以取 $1,2,\cdots,n$ 中任一数值

推论：若行列式某行（列）的元素全为零，则行列式的值为零。

结论：下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

结论：上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

结论：对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

1.2 行列式的性质

1.2.1 行列式的性质

定义：称将行列式 D 中的行列互换所得的新的行列式为 D 的转置，记作 D^T

例

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, D^T = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

即 D^T 亦可以视为由 D 以主对角线为轴旋转 $180°$ 而得

结论：二阶行列式与它的转置相等。由二阶行列式与它的转置相等可以推出三阶行列式也与它的转置相等

性质 1：行列式与它的转置相等，即 $D = D^T$

注：性质 1 说明行列式中行与列的地位是对等的。因此，凡是对行成立的性质也对列成立

性质 2：交换行列式的两行（列），行列式的值变号 (展开后可以用数学归

纳法证得)。

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} \xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = D_1$$

推论：如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式等于零

性质 3：如果行列式的某一行 (列) 中所有元素有公因子, 则公因子可以提到行列式符号的外面, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论：如果行列式有两行 (列) 的对应元素成比例, 则行列式的值等于零。

性质 4：若行列式的某一列 (行) 的元素都是两数之和

即，如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j}+a_{1j}^{'} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j}+a_{2j}^{'} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj}+a_{nj}^{'} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j}^{'} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j}^{'} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj}^{'} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注：一次只能拆一行或一列

性质 5：把行列式的某一列 (行) 的各元素乘以同一数 k 后加到另一列 (行)

对应的元素上去, 行列式的值不变。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{c_i+kc_j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.2.2 行列式的计算

行列式的计算方法 1： 利用性质将行列式化为三角行列式 (特殊行列式)。

注：这种方法是计算机程序计算行列式的一种常用的方法。利用该方法计算 n 阶行列式大约需要 $\frac{2n^3}{3}$ 次运算，在不到一秒钟内就可以计算一个 25 阶的行列式

计算行列式的方法 2(主要方法)：利用性质和展开公式。

基本思路：

1. 选择一列 (行), 利用性质 5 将该列 (行) 化出较多的零。
2. 利用展开定理将行列式按该列 (行) 展开。
3. 重复以上两步操作。

技巧 1：选择数字简单的一行 (列)

技巧 2：如果某行 (列) 只有 1 或 2 个元素 $\neq 0$, 可按该行 (列) 直接展开。

技巧 3：如果每行和列都只有 2 个元素不等于 0, 一般按第 1 行 (列) 或最后一行 (列) 直接展开。

技巧 4：行和行列式的计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_4]{\substack{c_1+c_2\\c_1+c_3}} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}$$

$$= x\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}0 & x & -x\\ x & 0 & -x\\ 0 & 0 & -x\end{vmatrix} = x\times x\times(-1)^{2+1}\times\begin{vmatrix}x & -x\\ 0 & -x\end{vmatrix} = x^4$$

例：

$$D=\begin{vmatrix}a & b & b & \cdots & b\\ b & a & b & \cdots & b\\ b & b & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b & b & b & \cdots & a\end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_n]{\substack{c_1+c_2\\ c_1+c_3\\ \cdots}} \begin{vmatrix}a+(n-1)b & b & b & \cdots & b\\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b\\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}$$

$$D \xlongequal[r_n-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \cdots}} \begin{vmatrix}a+(n-1)b & b & b & \cdots & b\\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b\end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

1.2.3 行列式的性质 (II)

例：试计算范德蒙德 (Vandermonde) 行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2\\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3\end{vmatrix} \xlongequal[r_2-x_1r_1]{\substack{r_4-x_1r_3\\ r_3-x_1r_2}} \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1\\ 0 & x_2^2-x_1x_2 & x_3^2-x_1x_3 & x_4^2-x_1x_4\\ 0 & x_2^3-x_1x_2^2 & x_3^3-x_1x_3^2 & x_4^3-x_1x_4^2\end{vmatrix}$$

技巧 5：逐行相减 (相加)

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第一列}} \begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1\\ x_2^2-x_1x_2 & x_3^2-x_1x_3 & x_4^2-x_1x_4\\ x_2^3-x_1x_2^2 & x_3^3-x_1x_3^2 & x_4^3-x_1x_4^2\end{vmatrix} \xlongequal[\text{公因子}]{\text{提取每列}} (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_2 & x_3 & x_4\\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2\end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_3 & x_4\end{vmatrix}$$

技巧 6：数学归纳法 (递推公式)

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

$$=(x_n-x_1)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_3-x_1)(x_2-x_1)$$

$$(x_n-x_2)(x_{n-1}-x_2)\cdots(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_{n-2})(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})$$

技巧 7：利用性质化为特殊行列式

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\b+c&c+a&a+b\end{vmatrix}\overset{r_3+r_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\a+b+c&a+b+c&a+b+c\end{vmatrix}\underset{\text{公因子}}{\overset{\text{提取}}{=\!=\!=}}(a+b+c)\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\1&1&1\end{vmatrix}$$

$$\underset{r_2\leftrightarrow r_1}{\overset{r_3\leftrightarrow r_2}{=\!=\!=}}(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$$

结论：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1m}&0&\cdots&0\\\vdots&m\times n&\vdots&\vdots&0&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mm}&0&\cdots&0\\c_{11}&\cdots&c_{1m}&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&*&\vdots&\vdots&n\times n&\vdots\\c_{n1}&\cdots&c_{nm}&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}_{m+n}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1m}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mm}\end{vmatrix}_m\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}_n$$

1.3 克莱姆法则（cramer）

定义：包含未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的形如

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

的方程称为线性方程，形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

定义：对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

称行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为方程组的系数行列式。
根据

$$Ax = b$$
$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)}C^Tb$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \cdots + b_nC_{n2} \\ \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \cdots + b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{\det(A)} \frac{b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1}}{a_{11}c_{11} + a_{21}c_{21} + \cdots + a_{n1}c_{n1}}$$

$$x_1 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} b_1 & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即可得出结果

定理：如果线性方程组的系数行列式不等于 0, 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots\vdots\vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么线性方程组有惟一解, 并且解可以表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注：如果线性方程组的系数行列式 $D = 0$ 则方程组无解或有无穷多解。其中 $b_1, \cdots, b_n$ 为方程组的等号右边部分行成的向量

称线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

为齐次线性方程组。显然 $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$ 是线性方程组的一个解，称为零解。

注：齐次线性方程组的解只有两种情况：惟一解或无穷多解。和非齐次线性方程组不同, 它没有“无解”这种情况。

推论：如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$, 则方程组只有零解。

注： 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D = 0$, 则方程组必有非零解 (即有无穷多解)。

克莱姆法则为方程组的解提供了一个代数表达式，让你能使用代数运算，而不只是写算法，但是如果真的用它来解方程将变成一个灾难，因为你必须对 $n+1$ 个行列式求值。克莱姆法则研究了方程组的系数与方程组解的存在性与唯一性关系。与其在计算方面的作用相比，克莱姆法则更具有重大的理论价值。

Chapter 2

矩阵

2.1 矩阵

2.1.1 矩阵的概念

定义：有 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 排成的一个 m 行 n 列矩形数表，称为一个 $m \times n$ 矩阵，记作

$$A_{m\times n} = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}$$

称 a_{ij} 为这个矩阵的第 i 行第 j 列的元素, 称 $m \times n$(即：行数 $\times$ 列数) 为该矩阵的型

2.1.2 矩阵的相等

1. 如果两个矩阵的型相同, 称为同型矩阵。

2. 两个矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 为同型矩阵, 且对应元素均相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则称矩阵 A 和 B 相等，记作 A=B

2.1.3 特殊矩阵

1. 行矩阵 (或行向量)：只有一行的矩阵称为行矩阵 (或行向量)。

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

2. 列矩阵 (或列向量)：只有一列的矩阵称为列矩阵 (或列向量)

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

3. 方阵：如果矩阵 $A=(a_{ij})$ 的行数与列数都等于 n, 则称 A 为 n 阶矩阵 (或称 n 阶方阵)。

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

注　矩阵与行列式有本质区别：
行列式是表示一个数值, 而矩阵仅表示数表本身。矩阵的行数和列数可以不同, 符号不同。

4. 零矩阵：元素全为零的矩阵称为零矩阵。$m\times n$ 零矩阵记作 $0_{m\times n}$ 或 0。

注　不同型的零矩阵是不相等的

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. 上三角形矩阵和下三角形矩阵：称形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的矩阵为上三角矩阵。

性质　如果矩阵 $A = a_{ij}$ 是上三角矩阵，则当 $i > j$ 时，必有 $a_{ij} = 0$。

类似的，称形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的矩阵为下三角矩阵。

6. 对角矩阵, 称形如

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

的矩阵为对角矩阵, 可记作 $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$

性质　如果矩阵 $A = (a_{ij})$ 是对角矩阵，则当 $i \neq j$ 时，必有 $a_{ij} = 0$

注　对角矩阵既是上三角矩阵, 也是下三角矩阵

7. 数量矩阵, 单位矩阵

   称形如

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

   的矩阵为数量矩阵

   称

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

   为 n 阶单位矩阵　记为 E_n 或 E

2.2 矩阵的基本运算

定义：设 $A = (a_{ij}, B = (b_{ij}))$ 是两个 $m \times n$ 矩阵（即同型），则记举证 A 与 B 的和为 $A + B$ 规定

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

即 $A + B$ 的每个元素就是 A 与 B 的对应元素相加

注:　仅当 A 与 B 为同型矩阵时，$A + B$ 才有定义

矩阵加法的运算规律

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$

3. $A+0=0+A=A$

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$
称

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

为矩阵 A 的负矩阵, 记为 $-A$
定义矩阵的减法:$A-B=A+(-B)$
注: 仅当 A 与 B 为同型矩阵时，$A-B$ 才有定义

2.2.1 矩阵的数量乘法

设 A 时一个矩阵，k 时一个数，则数量乘法 kA 也是一个矩阵，定义为

$$kA = \begin{bmatrix} \mathrm{k}a_{11} & \mathrm{k}a_{12} & \cdots & \mathrm{k}a_{1n} \\ \mathrm{k}a_{21} & \mathrm{k}a_{22} & \cdots & \mathrm{k}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{k}a_{m1} & \mathrm{k}a_{m2} & \cdots & \mathrm{k}a_{mn} \end{bmatrix}$$

数乘矩阵的运算规律:

1. $k(A+B)=kA+kB$
2. $(k+l)A=kA+kB$
3. $k(lA)=(kl)A$

加法和数乘合称为矩阵的线性运算
性质

1. $1A = A, 0A = 0, (-1)A = -A$

2. 数量矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} = \lambda E$$

2.2.2 矩阵的乘法

定义： 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix}_{m\times s}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}_{s\times n}$$

则定义

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

其中 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$

注 两个矩阵相乘，前面矩阵的列数必须等于后面矩阵的行数 (用前面的行乘后面的列)

2.2.3 矩阵乘法的运算规律

1. $(AB)C = A(BC)$ 结合律

2. $A(B+C)=AB+AC,(B+C)A=BA+CA$ 分配律
3. $(kA)(lB)=(kl)(AB)$(其中 k,l 为常数)
4. $A0=0,0A=0$
5. $AE=EA=A,A(\lambda E)=(\lambda E)A=\lambda A$

矩阵乘法不满足的运算规律

1. 矩阵乘法不满足交换律
   即：一般情况下 $AB\neq BA$
2. 存在零因子
   即：存在矩阵 $A\neq 0,B\neq 0$ 但 $AB=0$
   结论:$AB=0\not\Rightarrow A=0$或$B=0$
3. 消去律不成立
   即：$AB=AC,A\neq 0\not\Rightarrow B=C$
   同理 $BA=CA,A\neq 0\not\Rightarrow B=C$

2.2.4 矩阵的方幂

定义设 A 为 n 阶方阵，则定义 A 的方幂为

$$A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k\text{个}}=A^{k-1}A,k\text{为整数}$$

规定 $A^0=E$ 性质 对任意的非负整数 k,l 有

$$A^kA^l=A^{k+l},(A^k)^l=A^{kl}$$

注 由于没有乘法交换律, 对非负整数 k, 一般有

$$(AB)^k\neq A^kB^k$$

如 $(AB)^2=(AB)(AB)=A(BA)B\neq A(AB)B=A^2B^2$

2.2.5 矩阵的转置

定义:把矩阵 A 的行列互换得到的新矩阵, 称为 A 的转置矩阵, 记作 A^T
结论: 若 A 是 $m \times n$ 矩阵，则 A^T 是 $n \times m$ 矩阵
转置矩阵的运算性质

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(kA)^T = kA^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$
5. 由上条可推广到多个矩阵 $(A_1 A_2 \cdots A_s)^T = A_s^T \cdots A_2^T A_1^T$

2.2.6 对称矩阵与反对称矩阵

定义 设 A 为 n 阶方阵, 如果满足 $A^T = A$, 即

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

那么称 A 为对称矩阵, 对称阵的元素以主对角线为对称轴对应相等
定义 设 A 为 n 阶方阵, 如果满足 $A^T = -A$, 即

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

那么称 A 为反对称矩阵, 反对称阵的元素关于主对角线互为相反数
推论 反对称阵的对角元全为零
性质 设 B 是一个 $m \times n$ 矩阵, 则 $B^T B$ 和 BB^T 都是对称矩阵
因为 $(B^T B)^T = B^T (B^T)^T = B^T B$, 同理 BB^T 是 m 阶对称矩阵
性质 若 A, B 为同阶对称阵 (反对称阵), 则 $kA, A \pm B$ 仍为对称阵 (反对称阵)
注 即使 A, B 为同阶对称阵, 乘积 AB 未必对称, 但是如果 A, B 是可交换的同阶对称阵, 则 AB 对称

2.2.7 方阵的行列式

定义　由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式, 叫做方阵 A 的行列式, 记作 $|A|$ 或 $\det(A)$

性质

1. $\left|A^T\right| = |A|$
2. $|kA| = k^n |A|$
3. $|AB| = |A| \times |B|$ 注　这儿 A, B 为同阶方阵
4. $|A_1 A_2 \cdots A_s| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_s|$
5. $|A^m| = |A|^m$

注　设 A, B 均为n 阶方阵，一般情况下,$|A+B| \neq |A| + |B|$

2.3 矩阵的初等变换与初等矩阵

2.3.1 矩阵的初等变换

2.3.2 矩阵的等价

2.3.3 阶梯形矩阵与等价标准形

2.3.4 初等矩阵

2.3.5 初等矩阵与初等变换的关系

Chapter 3

错题集

3.1 行列式