Asignatura

MATEMÁTICA FINANCIERA

Autor: JORGE A. RIVAS

AUTOR

JORGE RIVAS ARIAS:

Ingeniero Comercial de la Universidad de Concepción, ha ocupado cargos de importancia en la Administración Pública ejerciendo como jefe de Serplac en los Municipios de Curanilahue, Cobquecura y Penco de las provincias de Arauco, Chillan y Concepción, respectivamente, y posteriormente, como Alcalde en estas mismas comunas.

Su experiencia laboral y preparación universitaria lo lleva a proyectarse como docente del Diego Portales, en el área Contable, Financiera y de la Administración para las diversas carreras que dicta tanto el Centro de Formación Técnica como su Instituto Profesional.

Su vasta experiencia en educación y el conocimiento de la empresa privada y pública, le permiten asumir funciones de Coordinador de la Carrera de Administración de Empresas y, consecutivamente como Secretario de Estudios del C.F.T. Diego Portales de Concepción.

En 1998 es nombrado Director Académico del Diego Portales, para su Casa Central y Sede ?5 de la ciudad de Concepción, cargo que ejerce en la actualidad.

En el presente Programa de Educación a Distancia es el Coordinador encargado de la VIII Región.

INVITACIÓN AL MÓDULO

Estimado alumno

Hablar de matemáticas financieras implica entrar de lleno en el contexto de conocer que sucede con nuestro dinero y con el de nuestra empresa en el tiempo, sea este presente o futuro, a tasas de interés simple o compuesto. De ahí radica la tremenda importancia de esta asignatura, pues ella nos proporciona el instrumental básico para decidir que hacer con nuestros fondos. ¿invierto en el banco?...¿Guardo mi dinero bajo el colchón o le busco un uso alternativo?... Estas son interrogantes cuya respuesta podrás obtener utilizando los conocimientos adquiridos en esta asignatura.

Como puedes apreciar, estas interrogantes son a las que tú habitualmente das respuestas cuando te solicitan depositar el dinero en la institución bancaria o elaborar un proyecto. En el primero de los casos, nadie te dice en que banco debes hacerlo...Eres tú el que busca que entidad del sistema financiero es la mas adecuada, la que tiene los menores riesgos. Lo mismo te sucede cuando tienes que realizar un proyecto que presenta variadas alternativas de ejecución. Tu preocupación apunta a ¿Con cuál me quedo?.... Tú lo decides en función de la variable económica, salvo que existan otras causales (externalidades) que te impulsen a preferir un proyecto que desde el punto de vista absolutamente económico no es el mejor. NUEVAMENTE, y con mayúsculas ¡TÚ DECIDES!..

En síntesis, lo que te queremos decir, es que en las páginas que siguen encontrarás elementos que formalizan tu conocimiento, pero que lo que hoy te exponemos, TU YA LO DOMINAS... Entonces, con mucho ánimo, siéntate, respira profundo y adelante..

¡¡Mucha suerte y hasta pronto!!

ASIGNATURA
MATEMÁTICA FINANCIERA

OBJETIVO GENERAL

Al término del curso, el alumno será capaz de:

- Calcular operaciones financieras de aplicación en actividades profesionales.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Calcular porcentajes.
- Resolver problemas sobre descuentos.
- Aplicar fórmulas de interés compuesto e interés simple.
- Calcular anualidades.
- Resolver situaciones problemáticas de amortización.

UNIDADES TEMÁTICAS DE LA ASIGNATURA

Unidad Temática N° 1: Operaciones con Números

Unidad Temática N° 2: El interés y su operatoria**.**

Unidad Temática N° 3: Anualidades.

Unidad Temática N° 4: Amortización.

PRIMERA UNIDAD
OPERACIONES CON NÚMEROS

OBJETIVO GENERAL DE LA UNIDAD TEMÁTICA

- Conocer reglas de operaciones con números.
- Establecer las diferencias existentes entre razón y proporción.
- Calcular porcentajes, descuento comercial, descuento pago al contado, precio al por menor y depreciación.

INTRODUCCIÓN

En este capitulo se presentan las herramientas básicas de las matemáticas, que le ayudarán a comprender y desarrollar los ejercicios de los capítulos siguientes.

Esta primera unidad está diseñada para que el alumno inicie sus estudios a partir de los elementos básicos de las matemáticas, como operaciones con decimales, proporciones y porcentajes.

La unidad contiene ejercicios de aplicación de los distintos temas, problemas resueltos para el aprendizaje del alumno y su autoevaluación.

1.1. OPERACIONES CON DECIMALES, UTILIZANDO POTENCIAS DE 10.

Recordando el estudio de las operaciones con potencias, sabemos que:

$$\frac{1}{10} = 10^{-1} = 0{,}1$$

$$\frac{1}{100} = 10^{-2} = 0{,}01$$

Así:

$$0{,}435 = 435 \text{x} 10^{-3}$$

Productos de decimales, utilizando potencias de 10.

$$\begin{aligned} 0{,}326 \text{x} 6{,}37 &= 326 \text{x} 10^{-3} \text{ x } 637 \text{x} 10^{-2} \\ &= 326 \text{x} 637 \text{ x } 10^{-3+(-2)} \\ &= 207662 \text{ x } 10^{-5} \\ &= \mathbf{2{,}07662} \end{aligned}$$

División entre decimales, utilizando potencias de 10.

$$\begin{aligned} 30{,}3267:2{,}61 &= (303267 \text{ x } 10^{-4}) : (261 \text{ x } 10^{-2}) \\ &= (303267: 261) \text{ x } 10^{-4-(-2)} \\ &= 1.161{,}94 \text{ x } 10^{-4+2} \\ &= 1.161{,}94 \text{ x } 10^{-2} \\ &= \mathbf{11{,}6194} \end{aligned}$$

1.2. PROPORCIONALIDAD.

El cociente entre dos cantidades es la *razón o proporcionalidad* entre ellas.

X/Y = q (q es la razón entre X e Y)

Al aumentar **X**, **q** aumenta en la misma proporción, 2X/Y = 2q; nX/Y = nq, en matemáticas, esto se expresa diciendo que el valor de q es directamente proporcional al valor de X.

Al aumentar el valor de Y, el valor de q disminuye en la misma proporción, X/2Y = q/2; X/nY = q/n, lo que se expresa diciendo que el valor de q es inversamente proporcional al valor de Y.

Ampliando a varios factores:

$$q = \frac{abc}{de}$$

El valor de **q** es directamente proporcional a los valores de: **a, b y c**, e inversamente proporcional a los valores de: **d** y **e.**

1.3. CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD.

Si se tiene la igualdad: $q = \frac{a}{b} k$

El valor de **q** es directamente proporcional al valor de **a**, inversamente proporcional al valor de **b** y depende del valor de la constante de proporcionalidad **k**. Conocido el valor de **q**, para ciertos valores de **a** y **b**, queda determinado el valor de **k**.

Ejemplo N° 1: Si 20 obreros construyen 50 metros de carretera en 10 días, ¿cuántos obreros se requieren para construir 1200 metros en 60 días?.

El número de obreros es directamente proporcional a los metros que deban construirse, e inversamente proporcional al tiempo en que deba construirse. Si designamos por **O** el número de obreros, por **M** los metros y por **t** el tiempo, tendremos:

$$\boxed{O = \frac{M}{t} k}$$

Cálculo de k:

$$20 = \frac{50}{10} k \quad \text{para } O = 20,\ M = 50,\ t = 10$$

$$k = \frac{200}{50} = 4$$

Para M = 1200, t = 60, k = 4

$$O = \frac{1200}{60} \times 4 = \mathbf{80}$$

Respuesta: Se necesitan 80 obreros para construir 1200 metros en 60 días.

Ejemplo N° 2: Si 8 obreros tejen 12 metros de tela de 0,5 metros de ancho en cada semana, ¿cuántos metros de la misma tela de 0,7 metros de ancho, producen en una semana 35 obreros?.

Designaremos por **M** los metros, por **A** el ancho y por **n** el número de obreros, se tiene:

$$\boxed{M = \frac{n}{A} k}$$

Cálculo de k:

$$12 = \frac{8}{0,5} k \quad \text{para } M = 12,\ n = 8,\ A = 0,5$$

$$k = \frac{12 \times 0,5}{8} = 0,75$$

Para n = 35, A = 0,7, k = 0,75

$$M = \frac{35}{0{,}7} \times 0{,}75 = \mathbf{37{,}5}$$

Respuesta: Se producen 37,5 metros de tela.

1.4. PROPORCIONES.

Una proporción es la igualdad de dos razones.

Si $\frac{a}{b} = q$ y $\frac{c}{d} = q$ entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y se lee **a** es a **b** como **c** es a **d**.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Donde **a** y **d** son **extremos** y **b** y **c** son **medios**.

Multiplicando ambos miembros por **bd**, se tiene: **ad = bc.**

Teorema: En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Ejercicio N° 1: En la siguiente proporción calcule el valor de X.

a) $\frac{X}{2} = \frac{8}{4}$ multiplicando los extremos y los medios: 4X = 2 x 8; X = 16/4
X = 16/4 = **4**

b) $\frac{8}{X} = \frac{2}{3}$ multiplicando los extremos y los medios: 24 = 2X
X = 12

1.5. PORCENTAJE.

El término **porcentaje o por ciento** es una proporcionalidad que se establece con relación a cada 100 unidades. Es simplemente otra manera de representar 25/100, 25 ó 1/4. Se expresa con el símbolo %.

Ejercicios de aplicación.

Ejercicio N°1. Si se dice que Jorge cobra el 20% por intereses correspondientes a préstamos que él realiza. Significa que Jorge cobra $20 por cada $100 que presta.

Ejercicio N°2. Si se dice que una inversión tiene un rendimiento de 10% anual. Significa que, la inversión producirá una ganancia de $ 10 anuales por cada $ 100 invertidos.

Ejercicio N°3. Si con una inversión de $ 8.000 se obtiene un rendimiento de $ 400, ¿qué rendimiento se obtendrá si la inversión asciende a $ 100?.

En este caso, se debe establecer la siguiente proporción:

$$\frac{400}{8.000} = \frac{X}{100}$$

En esta proporción, 400 y X son los antecesores y 8.000 y 100 los consecuentes. Para resolver, se aplica el teorema que plantea que "**en toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos**", es decir, dos fracciones son iguales, si sus productos cruzados son iguales; de esta manera se obtiene la siguiente ecuación:

$8.000 x X = 400 x 100$

$8.000 x X = 40.000$

Ahora, para completar la operación, lo que resta es despejar el valor de X. Para ello se debe dividir a ambos lados de la ecuación por 8.000, es decir:

$$\frac{8.000 x X}{8.000} = \frac{40.000}{8.000}$$

Esto es:

$$\boxed{X = \frac{40.000}{8.000} = 5}$$

Ejercicio N°4. Una inversión de $ 4.000 en una empresa le produce a Bárbara un rendimiento de $ 240.

a) Encontrar el rendimiento que obtendría Javiera con una inversión de $ 7.000 en la misma empresa.

b) ¿Cuánto debe invertir Marisol para obtener un rendimiento de $ 600?

Desarrollo:

a) Sea r=rendimiento e i=inversión, igualando las razones, tenemos: $\frac{r}{7.000} = \frac{240}{4.000}$

$$4.000xr=240x7.000$$

$$r = \frac{1.680.000}{4.000}$$

$$\boxed{\mathbf{r = \$\ 420}}$$

b) $\frac{600}{i} = \frac{240}{4.000}$

$$600x4.000 = 240xi$$

$$\boxed{\mathbf{i = \$\ 10.000}}$$

1.6. DESCUENTOS COMERCIALES.

En el comercio, es costumbre ofrecer una rebaja sobre el precio de lista de algún producto; por ejemplo en las promociones especiales de venta, por compras al por mayor, por pronto pago y por otras razones.

Los descuentos se expresan en tanto por ciento y en su valor no interviene el tiempo.

Sea **r%** el descuento que se concede sobre alguna factura de valor **$S**, siendo **i** el tanto por uno, se tiene:

Descuento = D = S i

Valor neto de la factura

Es igual al valor facturado menos el descuento.

Sean: S = monto facturado o valor de la factura

C = valor neto de la factura

D = tanto por ciento de descuento (i=r/100 tanto por uno de descuento)

$C = S – D$

$C = S – Si$

$$\boxed{C = S(1 – i)}$$

Ejercicio N°1: Calcular el valor neto a pagar por una factura de $ 275.000, sobre la que se concede un descuento del 40%.

S = $ 275.000 ; i = 0,4

C = S(1 – i) = $ 275.000(1- 0,4)

C = $ 165.000

1.7. DESCUENTOS POR PRONTO PAGO.

El comercio mayorista acostumbra a ofrecer descuentos por pronto pago, que permiten al comprador escoger su forma de pago, entre varias alternativas, según el tiempo en que anticipen el pago sobre el plazo que expresa la lista de precios del mayorista.

Si un mayorista indica sus precios con plazos de pago de 60 días, esto significa que el comprador queda obligado a pagar a los 60 días contados desde la fecha de la factura; sobre el precio facturado, se ofrecen los descuentos por pronto pago.

- Un comerciante factura el primero de marzo $ 100.000, con las siguientes condiciones: neto a 60 días; 4% por pago a 30 días, 6% por pago a 15 días y 8% por pago al contado.

Esto significa que:

Por pago al contado contra factura, se paga con el 8% de descuento, es decir, el valor neto de la factura será de $ 92.000 ($100.000x(1-0,08)).

Por pago a 15 días plazo, se paga la factura con el 6% de descuento, es decir, el valor neto de la factura será de $ 94.000 ($100.000x(1-0,06)).

Por pago a 30 días plazo, se paga la factura con el 4% de descuento, es decir, el valor neto de la factura será de $ 96.000 ($100.000x(1-0,04)).

1.8. DESCUENTO EN CADENA O EN SERIE.

Con frecuencia ocurre que, sobre una misma factura se hacen varios descuentos por diferentes razones independientes entre sí. Estos descuentos sucesivos reciben el nombre de d**escuento en cadena o en serie.** Por ser los descuentos independientes, cada uno de ellos se efectúa sobre el valor neto de la factura, después de deducir el descuento anterior.

Ejercicio N°1: Sobre el valor de una factura de $ 40.000 se conceden los siguientes descuentos: Por compras al por mayor un 6%; por promoción especial de ventas un 5% y por despachos sin empaques un 5%.

Estos descuentos en cadena operan así:

Valor neto de la factura	% descuento	Valor neto de la factura
$ 40.000	6%	$ 37.600
$ 37.600	5%	$ 35.720
$ 37.720	55	$ 33.577

Valor neto a pagar: $ 33.577.

Descuento comercial único equivalente a varios descuentos en cadena:

Sean los descuentos d1, d2,.......,dn, que se conceden en cadena, sobre una misma factura.

El valor neto es dado por la fórmula: C = S(1-i), en la que i es el tanto por uno correspondiente al descuento d%. Designando por Ck el valor neto después de aplicado el descuento dk, tendremos:

Valor neto de la factura	% descuento	Valor neto de la factura
S	d1	C1 = S(1-i1)
C1	d2	C2=C1(1-i2)=S(1-i1)(1-i2)
C2	d3	C3=C2(1-i3)=S(1-i1)(1-i2)(1-i3)
.	.	.
Cn-1	dn	Cn=Cn-1(1-in)=S(1-i1)(1-i2)...(1-in)

Sustituyendo los diferentes valores netos de la cadena, se tiene:

$$\boxed{\mathbf{C_n = S(1-i_1)(1-i_2)(1-i_3)........(1-i_n)}}$$

Del análisis de esta última expresión se deduce que, por ser el producto de una operación conmutativa, en que el orden en que se efectúan los descuentos en cadena, no altera el valor neto final.

Para calcular el **descuento único equivalente** a una cadena de descuentos, establecemos la ecuación de equivalencia entre los valores netos de una factura de $ 1, con descuentos en cadena. Sea i el tanto por uno equivalente a la cadena i_1, i_2, i_3.....i_n, entonces tendremos.

Para S = $ 1 $1 - i$ = valor neto con descuento único.

$C_n = 1(1-i_1)(1-i_2).....(1-i_n)$ = valor neto con descuento en cadena.

O sea $1 - i = (1-i_1)(1-i_2)....(1-i_n)$

$$\mathbf{i = 1 - (1-i_1)(1-i_2)......(1-i_n)}$$

Ejercicio N° 1: Calcular el valor neto de una factura de $ 120.000, con los descuentos en cadena del 8%, 7% y 5%, calcular además, el descuento equivalente único.

Aplicando la fórmula, $C_n = S(1-i_1)(1-i_2)......(1-i_n)$

$i_1 = 0{,}08$; $i_2 = 0{,}07$; $i_3 = 0{,}05$

C_3 = $ 120.000(1-0,08)(1-0,07)(1-0,05)

C_3 = $ 120.000(0,92)(0,93)(0,95)

C_3 = $ 97.538 (valor neto)

El descuento equivalente único es según fórmula.

i = 1 – (1-0,08)(1-0,07)(1-0,05)

i = 1 – 0,81282

i = 0,18718 = 18,718% (descuento único)

1.9. PRECIO AL POR MENOR.

A la diferencia entre el costo de un artículo para un comerciante y el precio en que es marcado para su venta, se le conoce como margen de utilidad. Es común calcular dicho margen como un porcentaje del precio de venta.

Ejercicio N° 1: Que precio debe cobrar un comerciante por el artículo X, el cual tuvo un costo de $ 250, si se espera obtener un margen de utilidad de un 40%.

Es sabido que:

Utilidad (U) = Precio de venta (P) – Costo (C)

Reemplazando los valores del ejercicio, se tiene:

0,4 P = P – 250
250 = P – 0,4P
250 = 0,6P
P = $ 417

1.10. DEPRECIACIÓN.

Es el concepto que representa la pérdida de valor de un activo fijo, como los edificios y las maquinarias como consecuencia del uso.

La forma más común de calcular el monto a depreciar de un activo fijo, es utilizando el método lineal, que considera las siguientes variables:

- Valor de adquisición: que corresponde al valor del activo fijo en el momento de la compra.
- Valor residual: que corresponde al valor del activo fijo al final de su vida útil.
- Vida útil: corresponde al período de tiempo, en que el activo será productivo. Generalmente, la vida útil se estima en años.

El monto a depreciar se obtiene de la siguiente forma:

$$\boxed{\text{Depreciación} = \frac{\text{Valor de adquisición} - \text{Valor residual}}{\text{vida útil}}}$$

Ejercicio N° 1: Se estima que una máquina cuyo costo fue de $ 2.500.000, tendrá una vida útil de 10 años y al final de dicho período un valor residual de $ 100.000. Determinar el monto a depreciar anualmente.

$$\text{Depreciación} = \frac{\$\ 2.500.000 - \$\ 100.0000}{10} = \mathbf{\$\ 240.000}$$

Una vez obtenido el monto a depreciar, y luego que transcurre el primer año de uso, puede obtenerse el valor de libro del activo fijo, el cual corresponde a la diferencia entre el valor de libro del año anterior y el monto que se deprecio en el periodo.

El valor libro al final año 1= valor adquisición – depreciación del periodo.

En nuestro ejemplo el valor libros al final del año 1 sería: $ 2.500.000 – 240.000 = 2.260.000.-

Revisa tu aprendizaje

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN Nº 01

1. Una inversión de $ 14.000 le produce a la compañía Alfa un rendimiento de $ 400.

   a) Encontrar el rendimiento que obtendría la compañía Alfa si el monto de la inversión ascendiera a $ 20.000.

   b) ¿Cuánto debería invertir la compañía Alfa para obtener un rendimiento de $ 1.000?.

2. Encontrar el valor de X, si el 7% de X es 5,25.

3. Un abogado recupera el 80% de una demanda de $ 3.000.000 y cobra por concepto de servicios el 15% de la suma recuperada. ¿Qué cantidad recibirá su cliente?

4. Encuentra los siguientes valores:

   a) ¿De qué número es 20 el 25%?

   b) ¿De qué cantidad es $ 42 el 3,5%?

   c) ¿De qué cantidad es $ 531,55 el 125%?

   d) Encontrar:

      - El 4% de 725.
      - El 175% de 800
      - El 21/2% de 20.000

5. Encuentre el valor de X, en los siguientes ejercicios de proporciones:

   a) $\frac{0,1}{0,3} = \frac{X}{1,5}$

   b) $\frac{X}{0,5} = \frac{2}{0,1}$

   c) $\frac{1}{3} = \frac{2}{X}$

   d) $\frac{0,2}{X} = \frac{0,3}{0,4}$

6. Si un alumno obtiene en un certamen 70 puntos, le corresponde como nota un 5.0, ¿cuántos puntos debería obtener para sacarse un 7.0?.

7. Si un automóvil recorre 120 kilómetros en una hora, ¿cuántos kilómetros recorrerá en 3,5 horas?.

8. Si en un curso, la razón de hombres a mujeres es de 2 a 3 y el total de hombres en el curso asciende a 16, ¿cuántas mujeres hay en el curso? ¿A qué cantidad asciende el total de alumnos?

9. Si las edades de dos hermanos están en la razón 5 a 2 y el hermano menor tiene 8 años, ¿cuál es la edad del hermano mayor? ¿A cuánto asciende la diferencia de sus edades?.

Comprueba tus respuestas

SOLUCIONES EJERCICIOS AUTOEVALUATIVOS Nº 01

1. sean r= rendimiento e i= inversión, entonces:

a) $\frac{r}{20.000} = \frac{400}{14.000}$

14.000xr = 8.000.000

$\boxed{\mathbf{r = 571}}$

b) $\frac{1.000}{i} = \frac{400}{14.000}$

14.000.000 = 400i

$\boxed{\mathbf{I = \$\ 35.000}}$

2. Para encontrar el valor de X, es necesario plantear la siguiente ecuación:

0,07X = 5,25

Despejando el valor de X, nos queda: $X = \frac{5,25}{0,07}$

X = 75

$\boxed{\mathbf{X = 75}}$

3. El abogado recupera $ 3.000.000x0,80 = $ 2.400.000

Sus honorarios son $ 2.400.000x0,15 = ($ 360.000)

El cliente recibe: $ 2.040.000

4. Encontrar los siguientes valores:

a) $\frac{20}{0,25}$ = **80**

b) $\frac{42}{0,035}$ = **$ 1.200**

c) $\frac{531,55}{1,25}$ = **$ 425,24**

d) 4% de 725 = 0,04x725 = **29**

175% de 800 = 1,75x800 = **1.400**

21/2% de $ 20.000 = 5/2% x$ 20.000 = **$ 500**

5.

a) $0,1 \times 1,5 = 0,3 \times X$

$X = 0,15 / 0,3$

$\mathbf{X = 0,5}$

b) $0,1 \times X = 2 \times 0,5$

$X = 1 / 0,1$

$X = 10$

c) $1X = 2 \times 3$

$\mathbf{X = 6}$

d) $0,2 \times 0,4 = 0,3 \times X$

$0,08 / 0,3 = X$

$\mathbf{X = 0,27}$

6. Este es un problema de proporciones:

$$\frac{70}{5} = \frac{X}{7}$$

$70 \times 7 = 5 \times X$

$490 / 5 = X$

$\mathbf{98 = X}$

Respuesta: para sacarse un 7.0 en el certamen, hay que tener 98 puntos.

7. Solución: $\frac{120}{1} = \frac{X}{3,5}$

$120 \times 3,5 = 1 \times X$

$\mathbf{420 = X}$

Respuesta: En 3,5 horas un automóvil recorre 420 kilómetros.

8. Sean H = hombres y M = mujeres, reemplazando los valores, tenemos:

$$\frac{16}{M} = \frac{2}{3}$$

$16 \times 3 = 2 \times M$

$48/2 = M$

$\mathbf{24 = M}$

El total de alumnos del curso es de 40.

9. Sean X = el hermano mayor e Y = hermano menor

$$\frac{X}{8} = \frac{5}{2}$$

$X = 5 \times 8$

$2X = 40/2$

$\mathbf{X = 20}$

Respuesta: El hermano mayor tiene 20 años y la diferencia de edad de 12 años.

SEGUNDA UNIDAD
EL INTERÉS Y SU OPERATORIA

OBJETIVO GENERAL DE LA UNIDAD TEMÁTICA

- Definir el concepto de interés simple.
- Calcular montos de interés simple.
- Aplicar interés simple a la resolución de problemas comerciales.

INTRODUCCIÓN

Todas las actividades financieras descansan en la costumbre de pagar un precio por el uso del dinero prestado.

Toda persona que obtiene un préstamo queda obligada a pagar un rédito o interés, por el uso del dinero tomado en préstamo. En general, el dinero genera dinero, acumulando valores que varían en el tiempo; el análisis de las causas de la acumulación del dinero en el tiempo, es el problema fundamental de las finanzas.

El alumno aprenderá a calcular los distintos tipos de intereses, en función de las diferentes variables que influyen en su cálculo, como **el capital, la tasa de interés y el tiempo.**

Podrá aplicar sus aprendizajes, en la resolución de ejercicios y cuyas respuestas correctas, las encontrará continuación de los ejercicios propuestos.

2.1. INTERÉS SIMPLE.

2.1.1. LA TASA DE INTERÉS.

La tasa de interés es el alquiler o rédito que se conviene pagar por un dinero tomado en préstamo. El valor del interés a pagar depende de las condiciones contractuales y varía en razón directa con la cantidad de dinero prestada y con el tiempo de duración del préstamo.

Las variables que intervienen en su determinación son:

* **Capital**: es el valor en dinero o documentos recibidos o entregados en préstamo, se designa con la letra **C**.
* **Interés**: es la ganancia a ser percibida por el dueño del capital al haberlo facilitado en préstamo, se designa con la letra **I**.
* **Tasa de interés**: es la cantidad pactada por cada cien unidades monetarias, será pagada o recibida en un periodo determinado de tiempo, el cual generalmente es un año, se designa con la letra **i**.
* **Tiempo**: es el lapso existente entre la fecha de inicio de la operación del préstamo y la fecha en que debe ser devuelto, se designa con la letra **t**.

Debido a que el interés o ganancia del capital es directamente proporcional a las variables capital, tasa de interés y tiempo, ya que a mayor valor de cualquiera de ellas, mayor será el interés obtenido, se puede representar esa relación matemática como sigue: $\mathbf{I = C\ i\ t}$

La fórmula anterior es básica en cualquier cálculo de interés.

Ejercicio N° 1: Determine la ganancia que percibirá después de ocho meses, por un préstamo que efectuó de $ 75.000, con un interés del 3,2% mensual.

C = $ 75.000
i = 0,032
t = 8 meses
I = ?
I = C i t
I = 75.000x0,032x8
I = $ 19.200

Ejercicio N° 2: Determine el capital que produce un interés de $ 50, después de un año a la tasa de interés del 8% anual.

C = ?
i = 0,08
t = 1 año
I = 50
I = C i t
50 = Cx0,08x1
50/ 0,08 = C
C = $ 625

Ejercicio N° 3: Determine que tasa de interés produce una ganancia de $ 25, para un capital de $ 1.000 después de medio año.

C = $ 1.000
T = ½ año
I = $ 25
i = ?
I = C i t

25 = 1.000xix1/2

50/1.000 = i

i = 0,05 = 5% anual.

Ejercicio N° 4: Determine después de cuánto tiempo un capital de \$ 500 produce un interés de \$ 40 a la tasa de interés del 4% mensual.

C = \$ 500

i = 0,04 mensual

I = \$ 40

t = ?

I = C i t

40 = 500x0,04xt

40/20 = t

t = 2 meses

2.1.2. MONTO A INTERÉS SIMPLE.

Al finalizar el período convenido para efectuar la devolución del préstamo, se tiene la acumulación de capital más intereses ganados en el período. La suma de estos conceptos se denomina monto y se designa por la letra M, por lo tanto:

$$\boxed{M = C + I}$$

Pero sabemos que: **I = C i t,** reemplazando en la fórmula anterior:

M = C + C i t
M = C (1 + it)

$$\boxed{C = \frac{M}{(1 + it)}}$$

2.1.3. VALOR ACTUAL.

Esta fórmula se conoce como el valor presente o valor actual de un monto, al cual se le ha deducido el interés que corresponde al lapso existente entre hoy y el vencimiento.

Ejercicio N° 1: Determine el monto que acumulará en el banco, donde se depositó la suma de $ 160.500 durante un año y cuatro meses, sabiendo que el interés es del 2,8% mensual.

M = ?
C = $ 160.500
i = 0,028
t = 16 meses
M = C (1+ it)
M = 160.500 (1 + 0,028x16)
M = $ 232.404

Ejercicio N° 2: Determine el valor que tiene hoy un documento de $ 77.000 y que vence en cuatro meses más, con una tasa de interés del 36%, convertible mensualmente.

M = $ 77.000
C = ?
i = 0,36/12 = 0,03 mensual
t = 4 meses

$$C = \frac{M}{(1 + it)} = \frac{\$\ 77.000}{(1+0{,}03x4)} = \frac{\$\ 77.000}{(1{,}22)} = \mathbf{\$\ 68.750}$$

2.1.4. CÁLCULO DE TIEMPO.

Existen dos procedimientos generales para determinar el tiempo transcurrido entre dos fechas, a saber:

* Considerando el año con la cantidad natural de días.

* Considerando el año con meses de 30 días.

Considerando el año con la cantidad natural de días. En este procedimiento, para determinar los días transcurridos entre dos fechas, se consideran los días naturales que tienen los meses respectivos, excluyendo el primer día de la fecha inicial e incluyendo el último día de la fecha final. Este procedimiento se conoce con el nombre de **tiempo exacto**.

Considerando el año con meses de 30 días. En este procedimiento, sea que se conozcan las fechas iniciales y finales de la operación o se proporcionan totales de días, que es necesario reducirlos a meses, se deben considerar estos como formados por 30 días y se conoce como **cálculo de tiempo aproximado**.

2.1.5. CÁLCULO DE INTERÉS SIMPLE.

En la determinación del interés simple, cuando el tiempo corresponde a fracciones de año, existen dos métodos para efectuar el cálculo, éstos son:

a) **Interés exacto**: es aquel que se calcula sobre la base de que el año tiene 365 días o 366 días si es bisiesto.

b) **Interés ordinario**: es aquel que se calcula sobre la base de que el año tiene 360 días.

Para comprender mejor las implicancias que originan lo expuesto, se resolverán ejercicios para clarificar su uso por ambos métodos.

Ejercicio N° 1: Con fecha 20 de junio se recibió un préstamo de $ 10.000 para ser cancelado el 24 de agosto del mismo año, considerando una tasa de interés anual del 10% anual.

1.1. Determine con tiempo exacto el interés exacto del ejercicio.

Cantidad de días: junio 10 días (30-20)
Julio 31 días
Agosto 24 días
Total 65 días

I = C i t

I = $ 10.000x0,1x(65/365)

I = $ 178,08

1.2. Determine con tiempo aproximado el interés exacto del ejemplo.

Cantidad de días: junio 10 días (30-20)
Julio 30 días
Agosto 24 días
Total 64 días

I = C i t

I = $ 10.000x01x(64/365)

I = $ 175,34

1.3. Determine con tiempo exacto el interés ordinario del ejercicio.

Cantidad de días: junio 10 días (30-20)

Julio 31 días

Agosto 24 días

Total 65 días

I = C i t

I = $ 10.000x0,1x(65/360)

I = $ 180,55

Esta es la forma de cálculo que utilizan las instituciones financieras y bancarias, ya que es la opción que arroja el mayor interés.

1.4. Determine con tiempo aproximado el interés ordinario del ejercicio.

Cantidad de días: junio 10 días (30-20)

Julio 30 días

Agosto 24 días

Total 64 días

I = C i t

I = $ 10.000x0,1x(64/360)

I = $ 177,77

Ejercicios.

1. Determinar el interés simple y el monto para un capital de $ 5.000.

a) tasa de interés del 4%, durante un año.

I = C i t

I = $ 5.000x0,04x1

I = $ 200

M = C(1+it)

M = $ 5.000(1+0,4x1)

M = $ 5.200

b) tasa de interés del 6%, durante medio año.

I = $ 5.000x0,06x1/2

I = $ 150

M = C(1+it)

M = $ 5.000(1+0,06x1/2)

M = $ 5.150

c) tasa de interés del 3%, durante dos años.

I = $ 5.000x0,03x2

I = $ 300

M = C+I

M = $ 5.000+$ 300

M $ 5.300

2. ¿A qué tasa de interés un capital de $ 3.000 se convierte en $ 3.500después de un año?

C = $ 3.000; M = $ 3.500; t= 1 año

I = M-C

I = $3.500-$3.000

I = $ 500

i = 300/5.000

i = 0,1666 = 16,66%

3. ¿En que tiempo se duplica una cantidad de dinero al 4% de interés simple?

$C = M$

$2C = M$

$I = C$

Aplicando $I = C\ i\ t$

$I = C \times 0{,}04 \times t$

$C = C \times 0{,}04 \times t$

$1 = 0{,}04\ t$

$t = 1/0{,}04$

$t = 25$ años.

4. Determina en forma aproximada y exacta, el tiempo transcurrido entre el 25 de marzo de 2003 y el 15 de mayo de 2003.

Forma exacta: usando un calendario daría: 6+30+15 = 51 días.

Forma aproximada (todos los meses tienen 30 días): 5+30+15 = 50 días.

5. Compara el interés exacto y ordinario sobre $ 4.500 al 7%, del 15 de abril de 2003 al 25 de julio de 2003, con tiempo aproximado.

Tiempo es de 100 días.

Interés exacto: $I = 4.500 \times 0{,}07 \times (100/365) = \$\ 86{,}3$

Interés ordinario: $I = 4.500 \times 0{,}07 \times (100/360) = \$\ 87{,}5$

2.1.6. DESCUENTO SIMPLE A UNA TASA DE INTERÉS.

El valor presente C de una cantidad S, con vencimiento en una fecha posterior, puede ser interpretado como el valor descontado de S, o sea, el descuento racional sobre S.

Descuento Racional

Dr = S - C

Ejercicio N° 1: Determinar el valor presente, al 5% de interés simple de $ 700.000 con vencimiento en 9 meses, ¿Cuál es el descuento racional.

S = $ 700.000

I = 0,05

T = 9/12 = ¾ años

S = C(1+it)

$ 700.000 = C (1+0,05x3/4)

$ 700.000/ 1,0375 = C

C = $ 674.699.

Dr = S – C

Dr = $ 700.000 - $ 674.699 = $ 25.301

2.1.7. DESCUENTO SIMPLE A UNA TASA DE DESCUENTO.

La tasa de descuento se define como la razón del descuento dado, en la unidad de tiempo, al capital sobre el cual está dado el descuento. La tasa de descuento anual se expresa como un porcentaje.

El descuento simple D, conocido como descuento bancario, sobre una cantidad S por t años a la tasa de descuento d, está dada por:

Descuento Bancario

$$\mathbf{D = S\ d\ t}$$

El valor presente de S está dado por:

$$C = S - D$$

$$C = S - S\ d\ t$$

$$\boxed{C = S\ (1 - d\ t)}$$

Ejercicio N° 1: Encontrar el descuento bancario o simple sobre una deuda de $ 8.500 con vencimiento en 8 meses a una tasa de descuento del 5%. ¿Cuál es el valor presente de la deuda?

D = Sdt = 8.500x0,05x8/12 = $ 283,33 descuento simple
C = S – D = $ 8.500 – 283,33 = $ 8.216,67 valor presente.

Revisa tu aprendizaje

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN Nº 02

1. Si Juan obtiene de Pedro un préstamo de $ 600.000 y al final de un año debe pagar $ 650.000. Determine que tasa de interés esta pagando Juan.

2. A que tasa de interés un capital de $ 8.000.000se convertirá en $ 12.500.000 después de un año.

3. Determinar el interés simple sobre $ 1.000.000 al 5% durante ¾ año, ¿Cuál será el monto final?

4. Determine el interés simple y el monto de $ 212.000

    - Al 3% durante 1,5 años.
    - Al 6% durante ½ año.
    - Al 8% durante 2,3 años.

5. Determine el interés ordinario sobre $ 8.000.000 al 6% durante 70 días.

6. Determine el interés exacto sobre $ 3.000.000 al 6% durante 85 días.

7. Determine en forma exacta y aproximada, el tiempo transcurrido desde el 25 de junio de 2003 al 29 de agosto de 2003.

8. Determine en forma exacta y aproximada, el tiempo transcurrido desde el 15 de febrero de 2003 al 05 de agosto de 2003.

9. Determine en forma exacta y aproximada, el tiempo transcurrido desde el 17 de febrero de 2003 al 27 de septiembre de 2003.

10. Determine con tiempo exacto el interés ordinario para un préstamo de $ 15.000.000 que se pidió el 2 de enero de 2003 y que debe pagarse el 20 de septiembre del mismo año, si la tasa de interés anual es del 8% anual.

11. Determine con tiempo aproximado el interés exacto para un préstamo de $ 25.000.000 que se pidió el 15de marzo de 2003 y que debe pagarse el 08 de agosto del mismo año, si la tasa de interés anual es del 7% anual.

12. Un pagare por $ 68.000 vence el 18 de septiembre; se descuenta el 20 de junio al 10%. Calcular el valor descontado y el valor presente del pagaré.

13. Un pagaré por $ 22.000 se descuenta 120 días antes de su vencimiento. Calcular el valor presente, si su descuento se hace al 9%.

14. Una persona necesita $ 105.000 y para obtenerlos, firma un pagaré a 90 días con una tasa de descuento bancaria del 14%. Calcular el valor del pagaré que firmó.

15. Alguien vende una propiedad por la que recibe los siguientes valores el 09 de julio de un año:

    a) $ 20.000.000 al contado.
    b) Un pagaré por $ 20.000.000, con vencimiento el 09 de octubre del mismo año.
    c) Un pagaré por $ 30.000.000, con vencimiento el 09 de diciembre del mismo año.

Si la tasa de descuento bancario en la localidad es del 9%, calcular el valor real de la venta.

16. Un pagaré de $ 100.000 se descuenta al 10% y se reciben del banco $ 97.890. Calcular la fecha de vencimiento del pagaré.

Comprueba tus respuestas

SOLUCIONES EJERCICIOS AUTOEVALUATIVOS Nº 02

1. Variables a considerar:

C = $ 600.000

M = $ 650.000

t = 1 año

i = ?

Para calcular la tasa de interés, es necesario saber cual fue el interés ganado por Pedro en el transcurso del año.

I = M – C

I $ 650.000 - $ 600.000 = $ 50.000

I = C i t

$ 50.000 = $ 600.000 x i x 1

$ 50.000/$ 600.000 = i

i = 0,0833 = 8,33%

2. Variables:

C = $ 8.000.000

M = $ 12.500.000

I = ?

I = M – C

I = $ 12.500.000 - $ 8.000.000 = $ 4.500.000

I = C i t

$ 4.500.000 = $ 8.000.000 x i x 1

$ 4.500.000/$ 8.000.000 = i

i = 0,5625 = 56,25%

3. Cálculo de interés simple.

I = C i t

I = $ 1.000.000 x 0,05 x ¾ = $ 37.500

Monto final:

M = C + I

M = $ 1.000.000 + $ 37.500 = $ 1.037.500

4.

a) I = Cit = $ 212.000 x 0,03 x 1,5 = $ 9.540

M = C (1+ it) = $ 212.000 (1 + 0,03x 1,5) = $ 221.540

b) I = Cit = $ 212.000 x 0,06 x 1/2 = $ 6.360

M = C (1+ it) = $ 212.000 (1 + 0,06x 1/2) = $ 218.360

c) I = Cit = $ 212.000 x 0,08 x 2,3 = $ 39.008

M = C (1+ it) = $ 212.000 (1 + 0,08x 2,3) = $ 251.008

5. Cálculo en base a 360 días

I = C i t

I = $ 6.000.000 x 0,06 x 70/360 = $ 70.000

6. el interés exacto se calcula sobre 365 días.

I = C i t = $ 3.000.000x 0,06x85/365 = $ 41.918

7.

Tiempo exacto = 5+31+29 = 65 días

Tiempo aproximado = 5+30+29 = 64 días

8.

Tiempo exacto = 13+31+30+31+30+31+5 = 171 días

Tiempo aproximado = 15+30+30+30+30+30+5 = 170 días

9.

Tiempo exacto = 11+31+30+31+30+31+31+27 = 222 días

Tiempo aproximado = 13+31+30+31+30+31+31+27 = 220 días

10.

Tiempo exacto = 29+28+31+30+31+30+31+31+20 = 261 días

Interés Ordinario = C i t = $ 15.000.000x0,08x261/360 = $ 870.000

11.

Tiempo aproximado = 15+30+30+30+30+8 = 143 días

Interés exacto = C i t = $ 25.000.000x0,07x143/365 = $ 685.616

12.

Tiempo exacto = 10+31+31+18 = 90 días

Cálculo valor de descuento.

D = S d t = $ 68.000x0,1x90/360 = $ 1.700

Valor presente del pagaré: C = S – D = $ 68.000- $ 1.700 = $ 66.300

13. Valor Presente del pagaré.

C = S(1 – dt) = $ 22.000(1 – 0,09x120/360) = $ 21.340

Reemplazando los valores en la fórmula:

14.

C = S(1 – dt) = $ 105.000(1 – 0,14x90/360) = $ 101.325

15. a) $ 20.000.000

b) Aquí es necesario calcular la cantidad de días entre las fechas señaladas.

Tiempo exacto = 22+31+30+9 = 92 días.

Valor presente del pagaré:

C = S(1 –dt) = $ 20.000.000(1-0,09x92/360) = $ 19.540.000

c) Cálculo de días entre fechas señaladas:

Tiempo exacto = 22+31+30+31+30+9 = 153 días.

Ahora es necesario calcular valor presente.

C = S(1- dt) = $ 30.000.000(1 – 0,09x153/360) = $ 28.852.500

El valor real de la venta es = $ 20.000.000+$ 19.540.000+$ 28.852.500

El valor real de la venta es = $ 68.392.500.

17. En este caso, de la fórmula del cálculo del valor presente de un pagaré, es necesario despejar la variable tiempo, es decir:

C = S(1 – dt)

C/S = 1-dt

dt = (1 –C/S)

$$\boxed{t = \frac{(1 - C/S)}{d}}$$

Reemplazando los valores, tenemos:

$$t = \frac{(1- \$\ 97.890/\$\ 100.000)}{0,1}$$

t = 0,21

Ahora, debemos multiplicar el factor 0,21 por 360 para obtener la cantidad de días.

t = 0,21x360 = 76 días.

Respuesta: La fecha de vencimiento del pagaré ocurrirá dentro de 76 días.

2.2. INTERÉS COMPUESTO.

Es aquel que se calcula sobre el capital modificado con los intereses acumulados en períodos sucesivos anteriores.

Los elementos que intervienen son los siguientes:

C : Capital inicial recibido o entregado en préstamo.

I : tasa de interés por período de capitalización.

n : períodos de conversión, es decir, la cantidad de capitalizaciones que se efectuarán entre el momento de la operación y el vencimiento.

k : frecuencia de conversión, es decir, el número de veces que se efectúan las capitalizaciones en un año.

Si son mensuales k = 12, bimensuales k = 6

Trimestrales k = 4, semestrales k = 2

M : monto que representa la acumulación del capital con los intereses convenidos.

Forma de determinar las variables "i" y "n":

La variable "i" se determina: $$\mathbf{i = \frac{\text{Tasa anual de interés}}{\text{Frecuencia de conversión}}}$$

La variable "n" se determina: **n = Tiempo en años x Frecuencia de Conversión**

Ejercicios:

1) 10% capitalizable trimestralmente durante un año y medio.

i = 0,10/4 = 0,025 trimestral n = 1,5 x 4 = 6 semestres.

2) 12% convertible mensualmente durante 8 meses.

i = 0,12/12 = 0,01 mensual n = 8/12 x 12 = 8 meses.

3) 5% convertible semestralmente durante dos años.

$i = 0{,}05/2 = 0{,}025$ $\qquad$ $n = 2 \times 2 = 4$ semestres.

2.2.1. DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DEL MONTO.

Sea:

$M0 = C$

$M1 = M0 + M0i \qquad = C + Ci \qquad = C(1+i)$

$M2 = M1 + M1i \qquad = C(1+i) + Ci(1+i) \qquad = C(1+i)(1+i) \qquad = C\,(1+i)^{2}$

$M3 = M2 + M2i \qquad = C(1+i)^{2} + Ci(1+i)^{2} \qquad = C(1+i)^{2}(1+i) \qquad = C\,(1+i)^{3}$

.

$Mn = Mn\text{-}1 + Mn1i \qquad = C(1+i)^{n-1} + Ci(1+i)^{n-1} \qquad = C(1+i)^{n-1}\,(1+i) \qquad = C\,(1+i)^{n-1}$

Como el exponente corresponde al sufijo de cada período, se deduce que la fórmula del monto para el período "n" es:

$$\boxed{\mathbf{M = C\,(1 + i)^{n}}}$$

La razón de esta progresión es (1+i) y representa el factor de capitalización a interés compuesto por cada período, donde el exponente corresponderá a la cantidad de convertibilidades que existan desde el inicio de la operación, hasta el período donde está determinado el monto final.

Despejando el capital de la fórmula, se obtiene:

$$\mathbf{C = \frac{M}{(1+i)^{n}} = M\,(1+i)^{-n}}$$

La razón $(1 + i)^{-n}$ representa el factor de descuento a interés compuesto en cada período, es decir, la deducción que se efectúa al monto para obtener el valor actual. El exponente negativo corresponderá a la cantidad de convertibilidades que existen, desde la fecha donde está determinado el valor actual y la fecha del vencimiento.

En el régimen de interés compuesto, al trasladar un valor hacia la derecha en el eje del tiempo, debe emplearse el factor de capitalización (1+i) por cada período de convertibilidad que se desplace en ese sentido y el exponente positivo, representará la cantidad de capitalizaciones existentes entre la fecha donde estaba y la fecha hacia donde se le está desplazando.

En el caso de que el valor se lleve hacia la izquierda en el eje del tiempo, se debe emplear el factor de descuento $(1+i)^{-1}$ por cada período que se retrotraiga en ese sentido. También en este caso, el exponente negativo representa la cantidad de períodos de convertibilidad que abarca el desplazamiento.

Ejercicio N°1: Determine el fondo que tiene en un banco, donde depositó la suma de $ 1.200.000 hace 8 meses, considerando que le otorgan el 24% convertible bimensualmente.

M =?   C = $ 1.200.000

n = 8 meses, que corresponden a 4 períodos bimensuales (8/2 = 4)

i = 0,24/6 = 0,04 bimensual

Reemplazando los datos en la fórmula de interés compuesto, se tiene:

$$M = C\,(1 + i)^{n}$$

$$M = \$\ 1.200.000\ (1 + 0{,}04)^{4}$$

M = $ 1.403.830,3

2.2.2. DIFERENCIA ENTRE INTERÉS SIMPLE E INTERÉS COMPUESTO.

Para visualizar las diferencias que existen entre ambos regímenes se determinarán los montos parciales en cada período, aplicando la tasa de interés del 4% mensual, sobre $ 50.000.

PERÍODO	INTERÉS SIMPLE	INTERÉS COMPUESTO
0	$ 50.000	$ 50.000
1	4% SOBRE 50.000 = 2.000 $ 52.000	4% SOBRE 50.000 = 2.000 $ 52.000
2	4% SOBRE 50.000 = 2.000 $ 54.000	4% SOBRE 52.000 = 2.080 $ 54.080
3	4% SOBRE 50.000 = 2.000 $ 56.000	4% SOBRE 54.080 = 2.163 $ 56.243

Luego, las cantidades de interés simple e interés compuesto, sólo son iguales para el primer período.

Ejercicios de Aplicación.

1. Determine en que tiempo logrará reunir la suma de $ 1.051.950, considerando lo siguiente:

* Durante 18 meses mantuvo en un banco, sin efectuar retiros, la suma de $ 447.958 con la tasa de interés del 36% convertible bimensualmente.

* Hoy retiró lo acumulado en el fondo y lo depositó en una institución financiera que le ofrece la tasa del 3,32 mensual.

C = $ 477.958

M =?

¡ = 0,36/6 = 0,06 bimensual

n = 9 períodos bimensuales

$M = C\,(1 + i)^{n}$

$M = \$\ 477.958(1 + 0,06)^{9}$

M = $ 807.500

C = $ 807.500

M = $ 1.501.950

i = 0,0332 mensual

n = ? mensual

$\dfrac{M}{C} = (1 + i)^{n}$

$(1,0332)^{n} = \dfrac{\$\ 1.501.950}{\$\ 807.500} = 1,86$

Para despejar el valor de n, es necesario aplicar logaritmos, de la siguiente manera:

n log (1,0332) = log 1,86

n (0,014184397) = (0,269512944)

$$\mathbf{n = \frac{(0,269512944)}{(0,014184397)} = 19\ meses}$$

Ejercicio N° 2: Determine la tasa de interés compuesto que le otorgó el banco al depositar $ 150.000 hace 14 meses, considerando que hoy tiene acumulado $ 375.000.

i = ?
C = $ 150.000
M = $ 375.000
n = 14 meses

$$\frac{M}{C} = (1 + i)^n$$

$$\left(\frac{\$\ 375.000}{\$\ 150.000}\right)^{1/14} - 1 = i$$

$$2,5^{(0,071428571)} - 1 = i$$

1,067638647 – 1 = i

0,067638647 = i

i = 6,76%

Ejercicio N° 3: Un cliente aceptó un documento a su empresa, comprometiéndose a pagar en 15 meses, más la suma de $ 300.000 y los intereses correspondientes al 20% convertible trimestralmente. Hoy, después de transcurrir 9 meses, su empresa acuerda vender el documento a una empresa de cobranzas, quienes están dispuestos a ganar la tasa de interés del 12% semestral.

¿Cuánto pagará la empresa de cobranzas por el documento?.

C = $ 300.000

M =?

i = 0,20/4 = 0,05 trimestral

n = 5 trimestres

$M = C\,(1 + i)^n$

$M = \$\ 300.000\,(1 + 0{,}05)^5$

M = $ 382.884,47

n = 15 – 9 = 6 meses = 1 semestre

i = 0,12 semestral

M = $ 382.884,47

C = ?

$$\frac{M}{(1 + i)^n} = C$$

$$C = \frac{\$\ 382.884{,}47}{(1{,}12)^1} = \$\ 341.861{,}13$$

Ejercicio N° 4: Determine el capital que estando depositado durante 18 meses en una institución financiera, que otorga el 32% capitalizable trimestralmente, permite acumular $ 562.416.

M = $ 562.416

i = 0,32/4 = 0,08

n = 6 trimestres

$$\frac{M}{(1+i)^n} = C$$

$$\frac{562.416}{(1{,}08)^6} = C$$

C = $ 354.417,48

Ejercicio N° 5: Se le pide determinar en cuanto tiempo un capital de $ 100.000 se sextuplica, colocado en una institución financiera que otorga la tasa de interés del 48% convertible trimestralmente.

i = 0,48/4 = 0,12 trimestral

C = $ 100.000

M = $ 600.000 ($100.000 x 6)

n = ?

$$M = C\,(1 + i)^n$$

$$\$\ 600.000 = \$\ 100.000\ (1{,}12)^n$$

$6 = 1{,}12^n$ Se debe aplicar logaritmo.

Log 6 = n log 1,12

$$n = \frac{0{,}77815125}{0{,}049218022} = 15{,}81029079 = \textbf{16 trimestres}$$

6. Como un capital de \$ 185.000 se ha triplicado en 18 bimestres, se pide determinar la tasa de interés convertible bimensualmente, que otorgaba la financiera.

n = 18 bimestres

i = ? bimensual

C = \$ 185.000

M = \$ 555.000 (\$ 185.000 x 3)

i = ?
C = \$ 150.000
M = \$ 375.000
n = 14 meses

$$\frac{M}{C} = (1 + i)^{n}$$

$$\left(\frac{\$\,555.000}{\$\,185.000}\right)^{1/18} - 1 = i$$

$$3^{(0,055555555)} - 1 = i$$

1,06293507 – 1 = i
0,06293507 = i
i = 6,29% bimensual.

Revisa tu aprendizaje

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN Nº 03

1. En que tiempo el monto de $ 2.500.000 será $ 3.500.000 al 6% convertible trimestralmente.

2. Determine el valor actual de $ 2.000.000 pagaderos en 6 años, suponiendo un rendimiento a la tasa del 5% convertible semestralmente.

3. El señor Mandiola debe a Pinto Paredes $ 1.000.000 pagaderos en dos años y $ 3.000.000 pagaderos en 5 años. Acuerdan que liquide sus deudas mediante un pago único al final de 3 años, sobre la base de un interés del 6% convertible semestralmente (fecha focal, hoy)

Comprueba tus respuestas

SOLUCIONES EJERCICIOS AUTOEVALUATIVOS Nº 03

1. En este ejercicio hay que despejar la variable tiempo.

$M = C\,(1 + i)^{n}$

$i = 0{,}06/4 = 0{,}015$

$3.500.000/\ 2.500.000 \;=\; (1 + 0{,}015)$

$\log 1{,}4 = n \log 1{,}015$

n = 23 trimestres.

2. Determinar el valor actual:

$i = 0{,}05/2 = 0{,}025$

$n = 12$

$M = C\,(1 + i)^{n}$

$2.000.000 = C\,(1 + 0{,}025)^{12}$

$2.000.000/\ 1{,}344888824 = C$

C = $ 1.487.112.

3. La deuda de $ 1.000.000 pagadera a 2 años, se pagará el año 3, por lo tanto, el monto de $ 1.000.000 al 6% convertible semestralmente es:

$i = 0{,}06/2 = 0{,}03$

$n = 6$

$M1 = \$\ 1.000.000\ 1+0{,}03)^{6} = \$\ 1.194.052$

La deuda de $ 5.000.000 pagadera a 5 años, también se pagará el año 3, por lo tanto, hay que calcular el monto de $ 5.000.000 a 3 años, con el 6% semestral.

$i = 0{,}06/2 = 0{,}03$

$n = 6$

$M2 = \$\ 5.000.000\ (1+ 0{,}03)^6 = \$\ 5.970.262$

Por lo tanto el pago único después de 3 años será:
M1 + M2 = $ 1.194.052 + $ 5.970.262 = $ 7.164.314

2.3. INFLACIÓN.

La inflación es el fenómeno económico que corresponde al aumento general de los precios, lo que trae como consecuencia la disminución del poder adquisitivo del dinero, es decir, reduce su valor.

Las reducciones del valor del dinero hacen disminuir la capacidad de compra de las personas que tienen ingresos fijos, por ejemplo pensiones, jubilaciones, etc.

En períodos de inflación, los precios de los bienes y servicios no varían en una misma proporción; por ello se utilizan los costos de vida como una medida de la desvalorización de la moneda; estos costos se expresan por medio de coeficientes numéricos, que se denominan **índices de precios**.

Los índices de costo de vida se expresan por comparación, con un valor índice básico 100, que corresponde a un determinado período de tiempo.

Si el índice es comparativamente mayor que el obtenido en el período inmediatamente anterior, se dice que hay inflación (En Chile el Instituto Nacional de Estadística -INE- es el encargado de determinarla).

Ejercicio N° 1: Si para cierto año con relación al período básico, el índice es igual a 130, esto significa que el costo de la vida ha aumentado en 30%. En otras palabras, que es necesario disponer de 130 unidades monetarias para adquirir los mismos artículos que en el período básico se compraban con 100 unidades monetarias, o sea, la moneda ha perdido poder adquisitivo.

El INE debe:

- Fijar la metodología para determinar los índices a ser construidos.
- Obtener los precios en las diferentes regiones del país, de aquellos productos servicios considerados como parte integrante de la muestra; controlando que los procedimientos utilizados sean consistentes en el tiempo, para obtener como resultado de las comparaciones, índices homogéneos.
- Confeccionar un **índice general** obtenido, indicando su tendencia y variaciones.
- Confeccionar un **índice general** que corresponda al promedio ponderado de los precios de bienes y servicios de la muestra.

2.3.1. CÁLCULO DE LA VARIACIÓN DEL I.P.C.

Para calcular la variación del índice de precios al consumidor (IPC) existen los siguientes métodos:

a) Por índices.

b) Por tasas porcentuales.

a) Método por índices.

Disponiéndose de los índices necesarios se plantea la siguiente ecuación:

$$\textbf{Variación en \% del IPC} = \frac{C - S}{S} \times 100$$

Donde:

C = Indice del último mes que se desea incorporar en el cálculo.

S = Indice del mes anterior del mes inicial que se desea incorporar en el cálculo.

Ejercicio N° 1: Durante 4 años sucesivos, se han registrado los siguientes índices de precios: 120, 135, 154 y 174. Determinar el porcentaje de aumento para cada año y el porcentaje de aumento del último año en relación con el primero.

Alza del 2° año, en relación con el 1°: $\frac{135 - 120}{120} \times 100 = 12{,}50\%$

Alza del 3° año, en relación con el 2°: $\frac{154 - 135}{135} \times 100 = 14{,}07\%$

Alza del 4° año, en relación con el 3°: $\frac{174 - 154}{154} \times 100 = 12{,}99\%$

Alza del 4° año, en relación con el 1°: $\frac{174 - 120}{120} \times 100 = 45{,}00\%$

b) Método por tasas porcentuales.

En este caso, es necesario disponer de la tasa porcentual de cada mes incluido en la operación del cálculo y plantearse la siguiente ecuación:

Variación en % del IPC = ((1+L1)(1+L2)(1+L3)........(1+Ln) - 1) x 100

Donde:

L = tasa porcentual en tanto por uno que corresponde a cada mes que integra el período que cubrirá la variación a ser calculada.

Ejercicio N° 1: Determine la variación del IPC entre noviembre de 2002 y marzo de 2003, conocido lo siguiente:

Tiempo	Indice	%
Noviembre 2002	294,89	1,3
Diciembre 2002	296,75	0,6
Enero 2003	296,96	0,1
Febrero 2003	296,49	-0,2
Marzo 2003	304,01	2,5

Método por índices:

Variación en % del IPC = $\frac{C - S}{S}$ x 100

Variación = $\frac{304{,}01 - 294{,}89}{294{,}89}$ x 100 = **3,0926%.**

Variación por tasa porcentuales:

Variación = ((1+L1)(1+L2)(1+L3)........(1+Ln) - 1) x 100

Variación = ((1+0,006)(1+0,001)(1-0,002)(1+0,025) 1)x100

Variación = 0,030116787 x 100

Variación = 3,011678%.

2.4. INTERÉS REAL.

Es aquella tasa de interés simple o de interés compuesto (nominal o efectiva) a las cuales se les ha eliminado el efecto inflacionario.

2.4.1. RÉGIMEN DE INTERÉS SIMPLE.

M = MONTO

Mr = monto real = $\frac{M}{1+v}$

Considerando que t = 1, se igualan ambos montos (real y con inflación)

Mr = M

$$C\,(1+irt) = C\,\frac{(1+it)}{(1+v)}$$

Se divide por Ct, obteniéndose:

$$1+ir = \frac{1+i}{1+v}$$

Despejando ir, tenemos:

$$\boxed{\mathbf{ir = \frac{(1+it)}{(1+v)} - 1}}$$

Donde:
ir = es la tasa de interés sin inflación, correspondiente al período de la variación del IPC.
i = es la tasa de interés con inflación.
v = es la variación del IPC por un período determinado.

Ejercicio N° 1: Determine la tasa de interés real que ganó una institución que ha estado recargando sus operaciones en el semestre, con la tasa de interés del 22%, si la variación del IPC en el mismo período fue de 21,4%.

ir = ?

i = 0,22 semestral

v = 0,214

$$ir = \frac{1+0{,}22}{1+0{,}214} - 1 = 0{,}004942339 = \mathbf{0{,}5\%} \text{ semestral.}$$

2.4.2. RÉGIMEN DE INTERÉS COMPUESTO.

Al comparar el monto real (sin inflación) con el monto que incluye inflación, se tiene:

Monto real es menor que el monto con inflación

Por lo tanto, para igualarlos se debe deflactar, es decir, descontar la inflación del segundo miembro, como sigue:

$$Mr = \frac{M}{1+v}$$

Sustituyendo los valores conocidos, se tiene:

$$\boxed{C(1+ir)^n = \frac{C\,(1+i)^n}{1+v}}$$

Donde:

n = años por frecuencia de conversión en un año.

i = tasa nominal.

v = variación del IPC.

ir = tasa real a interés compuesto, referida al período de conversión.

Ejercicio N° 1: La suma de $ 155.000 es colocada durante 9 meses a interés compuesto capitalizables mensualmente, se convierten en $ 185.299,35 y la variación del IPC en el período fue de 16%, determine:

a) Tasa de interés implícito en la operación.

b) Tasa de interés real ganada.

Desarrollo.

a)

$$M = C\,(1 + i)^{n}$$

$$185.299{,}35 = 155.000\,(1 + i)^{9}$$

$$185.299{,}35/155.000 = (1+i)^{9}$$

$$1{,}195479677 = (1+i)^{9}$$

$$(1{,}195479677)^{1/9} - 1 = i$$

$$i = 1{,}020036705 - 1$$

$i = 0{,}020036705 = 2\%$ mensual

b) $i = 0{,}02$ mensual

$v = 0{,}16$

$i = ?$

$$ir = \frac{(1 + i)}{(1 + v)^{n}} - 1$$

$$ir = \frac{(1 + 0{,}02)}{(1 + 0{,}016)^{\mathbf{1/9}}} - 1$$

$$ir = \frac{1{,}02}{1{,}0166278} - 1 = 0{,}003317004 = \mathbf{0{,}33\%}$$

Revisa tu aprendizaje

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN Nº 04

1. Como asesor financiero, se le pide que determine la tasa de interés con inflación a ser utilizado en la compra de instrumentos financieros, que vencen en 98 días más; si la tasa de interés real que se desea ganar es del 8%, en el período. Para el cálculo, considere que la empresa estima las siguientes tasas de IPC: 3,2%, 2,.3% y 1,4% respectivamente.

2. Como el IPC, en los últimos dos meses ha sido del 2,21% y del 2,2%, se le pide determinar el IPC para este mes que le permitirá al banco obtener la tasa de interés real del 8%, que pensó ganar al descontar documentos a 90 días, considerando que en esa oportunidad, fijó la tasa de descuento en el 13,3%, para ese tipo de operaciones.

Comprueba tus respuestas

SOLUCIONES EJERCICIOS AUTOEVALUATIVOS Nº 04

1.

$$1+ir = \frac{1+i}{1+v}$$

En este caso:

ir = 0,08

1+v = 1,032x1,0203x1,04 = 1,095

Por lo tanto, la tasa de interés con inflación será:

i = (1+ir) x(1+v) –1= (1,08x1,095) – 1 = 0,1826 = **18,26%.**

2.

$$1+ir = \frac{1+i}{1+v}$$

En este caso, la tasa de interés con inflación es 13,3% y la tasa de interés real es del 8%, por lo tanto, con estos datos podemos obtener la inflación del período.

$$1{,}08 = \frac{1{,}133}{1+v}$$

$$1+v = \frac{1{,}133}{1{,}08} = 1{,}049$$

Esto significa que la inflación del período fue del 4,9%, que es equivalente al IPC de los últimos 3 meses. Ahora si el IPC de los dos primeros meses fue de 2,21% y del 2,2% tendremos que, para encontrar el valor del IPC para el tercer mes, debemos resolver la siguiente ecuación:

1,049 = (1,0221)x(1,022)x(1+p)

1,049 = 1,045x(1+p)

$$p = \frac{1{,}049}{1{,}045} - 1$$

Donde **p** representa la inflación del tercer mes, correspondiente al 0,4%.

TERCERA UNIDAD
ANUALIDADES

OBJETIVO GENERAL DE LA UNIDAD TEMÁTICA

- Determinar el concepto, la fórmula y las características esenciales de las anualidades.
- Resolver ejercicios de cálculo de diversas anualidades.

INTRODUCCIÓN

En matemáticas financieras, la expresión anualidad se emplea para indicar el sistema de pago de sumas fijas, a intervalos iguales de tiempo. Así, son anualidades: los dividendos sobre acciones, los fondos de amortización, los pagos a plazos, los pagos periódicos de las compañías de seguros y, en forma más general, los sueldos y todo tipo de rentas.

En este capítulo, nos dedicaremos a su estudio y análisis, a sus formas de cálculo de los distintos tipos de anualidades existentes y, a distinguir respecto de los cálculos de intereses simples y compuestos.

El conocimiento adquirido, podrá instrumentalizarlo a partir de la ejercitación y comprobación de las respuestas que aparecen en anexo.

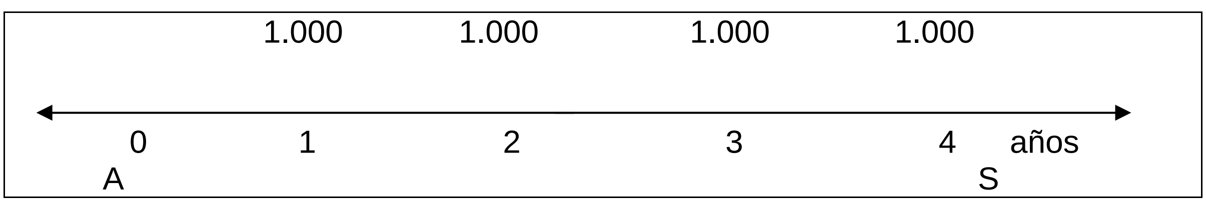
3.1 . ANUALIDAD.

Es una serie de pagos iguales efectuados a intervalos iguales de tiempo. Ejemplos de anualidades son: abonos semanales, pagos de rentas mensuales, dividendos, pago de intereses, primas de seguros, etc.

El tiempo transcurrido entre cada pago sucesivo de la anualidad, se conoce como **intervalo de pago.** El tiempo desde el principio del primer intervalo de pago, hasta el final del último intervalo de pago, se conoce como **plazo** de la anualidad**.** La suma de todos los pagos hechos en un año, se conocen como **renta anual;** en consecuencia, una renta anual de $4.000 pagaderos trimestralmente, significa el pago de $1.000 cada 3 meses.

3.2 MONTO Y VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD.

El monto S de la anualidad es la suma de los montos compuestos de los distintos pagos, cada uno acumulado hasta el término del plazo.
Ejercicio N° 1: Consideramos una anualidad ordinaria (se paga al final del período) de $1.000 anuales, durante 4 años al 5% de interés anual. En una línea de tiempo, esto puede ser expresado de la siguiente manera:



El valor del monto de la anualidad, se obtiene realizando el siguiente cálculo:

$$S = 1.000x(1,05)^3 + 1.000\,(1,05)^2 + 1.000\,(1,05)^1 + 1.000$$
$$S = \$\ 4.310,12$$

El valor presente **A** de una anualidad, es la suma de los valores presentes de los distintos pagos, cada uno descontado al principio del plazo. Calculando el valor presente de la anualidad ordinaria del ejemplo anterior, tenemos:

$$A = \frac{1.000}{(1+0,05)^1} + \frac{1.000}{(1+0,05)^2} + \frac{1.000}{(1+0,05)^3} + \frac{1.000}{(1+0,05)^4}$$

$$A = \$\ 3.545,95$$

Dado este ejercicio, puede comprobarse que:

El monto compuesto correspondiente al valor actual de la anualidad, es igual al monto de una anualidad ordinaria, en un determinado número de años y a su vez, el valor actual de una anualidad, es igual al valor presente correspondiente al monto de la anualidad por un determinado número de años. Esto es:

$$M = C\ (1+i)^n$$

$$M = 3.545,95\ (1+0,05)^4$$

$$M = \$\ 4.310,12$$

$$C = \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$C = \frac{\$\ 4.310,12}{(1+0,05)^n}$$

$$C = \$\ 3.545,95$$

3.3 . FÓRMULAS DE ANUALIDAD.

Dadas las siguientes variables, que representan:

S = Monto Final de la anualidad.

A = El valor actual o presente de la anualidad.

C = El pago periódico de una anualidad (renta).

i = La tasa de interés por periodo de pago.

n = El número de intervalos de pagos o el número de períodos.

Pueden determinarse las siguientes fórmulas:

$$\boxed{S = \frac{C\,(1+i)^{n} - 1}{i}}$$

$$\boxed{A = \frac{C(1 - (1+i)^{-n})}{i}}$$

Ejercicio N° 1: Determinar el monto y el valor presente de una anualidad de $1.500 anuales durante 4 años al 6% de interés anual. En este caso, las variables utilizadas, tendrían los siguientes valores:

C = 1.500

i = 6 / 100 = 0,06

n = 4 años

El monto de la anualidad es:

$$S = \frac{1.500\,((1+0{,}06)^{4} - 1)}{0{,}06} = \$\ 6.561{,}92$$

El valor Actual o presente de la anualidad es:

$$A = \frac{1.500(1 - (1+0{,}06)^{-4})}{0{,}06} = \$\ 5.197{,}66$$

Ejercicio N° 2: Hallar el monto y valor presente de una anualidad de \$ 3.200 cada 6 meses durante 3 años, si la tasa de interés es del 5% convertible semestralmente. En este caso, las variables utilizadas, tendrían los siguientes valores:

C = 3.200

i = 0,05 / 2 = 0,025 semestral

n = 6 semestres

S =?

A =?

El monto de la anualidad es:

$$S = \frac{3.200\,((1+0{,}025)^{6} - 1)}{0{,}025} = \$\ 20.440{,}76$$

El valor actual o presente de la anualidad es:

$$A = \frac{3.200(1 - (1+0,025)^{-6})}{0,025} = \$\ 17.626,00$$

3.4 . ANUALIDAD CIERTA.

Es una anualidad en la cual los pagos se inician y terminan en fechas fijas.

3.5. ANUALIDAD CIERTA ORDINARIA.

Es aquella en la cual los pagos son efectuados al final de cada intervalo de pago, es decir, que el primer pago se hace al final del primer intervalo de pago; el segundo, al final del segundo intervalo de pago y así sucesivamente. La determinación de la anualidad cierta ordinaria, ayuda a conocer el importe de los pagos periódicos, para lograr un determinado resultado. Por ejemplo ¿Cuál es el pago mensual que debe hacerse para cancelar el valor de una propiedad en un cierto número de años?

3.5 .1. CÁLCULO DE LA CUOTA A PARTIR DEL MONTO.

$$C = \frac{S}{\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}}$$

Ejercicio N° 1: Calcular el valor del depósito semestral, que se debe realizar en una cuenta de ahorro que paga 8% convertible semestralmente, para obtener dentro de 5 años un capital de \$20.000. En este caso, las variables utilizadas, tendrían los siguientes valores:

S = \$20.000

i = 0,08 / 2 = 0,04

n = 10 semestres

C =?

$$C = \frac{20.000}{\frac{(1+0,04)^{10} - 1}{0,04}} = \$\ 1.665,82$$

Respuesta: Para tener \$20.000 dentro de 5 años, es necesario depositar semestralmente \$1.665,82 al 4% de interés.

3.5.2. CÁLCULO DE LA CUOTA, CUANDO SE CONOCE EL VALOR ACTUAL.

$$\boxed{C = \frac{A}{\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}}}$$

Ejercicio N° 1: Calcular los pagos por semestre vencido, necesarios para cancelar una propiedad cuyo valor actual es de \$100.000 a 8 años plazo con el interés del 9% capitalizable semestralmente. En este caso, las variables utilizadas, tendrían los siguientes valores:

A = \$100.000

i = 0,09 / 2 = 0,045

n = 16 semestres

C =?

$$\boxed{C = \frac{100.000}{\dfrac{1-(1+0{,}045)^{-16}}{0{,}045}} = \$\ 8.901{,}54}$$

Respuesta: Para cancelar una propiedad cuyo valor es de \$100.000, a 8 años plazo al 9% de interés capitalizable semestralmente, es necesario realizar pagos semestrales de \$8.901,54.

3.6. CÁLCULO DEL TIEMPO A PLAZO DE UNA ANUALIDAD.

$$\boxed{S = \frac{C\,(1+i)^n - 1}{i}}$$

$S\,i = C((1+i)^n - 1)$

$S\,i = C(1+i)^n - C$ Aplicando logaritmos, se tiene:

Log (S i +C) = LogC + n Log (1+i)

$$\boxed{\mathbf{n = \frac{\log(S\,i+C) - \log C}{\log(1+i)}}}$$

Ejercicio N° 1: ¿Cuántos pagos semestrales de $600 deberán hacerse, para obtener un monto de $4.500, con el 7% de interés convertible semestralmente?

S = $4.500

C = 600

i = 0,07/2 = 0,035

n = ?

$$n = \frac{\log(4.500x0,035i+600) - \log 600}{\log(1+0,035)}$$

n = 6,77

n = 7

Revisa tu aprendizaje

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN Nº 05

1. Un comerciante vende productos eléctricos en $ 6.500. Para promover sus ventas ideó un plan, que estipulaba el pago en un plazo máximo de 18 abonos con un interés mensual del 1%. ¿Calcular cuál fue el valor de los pagos mensuales?

2. Una obligación debe cancelarse en 4 años, con pagos semestrales de $10.000. El deudor planifica cancelar su deuda en 6 años, con pagos semestrales, con una tasa pactada del 10% convertible semestralmente. Calcular el valor de la cuota semestral.

3. Un empleado puede ahorrar $800 mensuales e invertirlos en depósitos financieros que entregan un interés del 9% convertible mensualmente. ¿En cuanto tiempo juntará $55.000?

Comprueba tus respuestas

SOLUCIONES EJERCICIOS AUTOEVALUATIVOS Nº 05

1. En este caso corresponde aplicar la fórmula que determina la cuota, en una anualidad cierta ordinaria; esto es:

$$\boxed{C = \frac{A}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}}$$

En este caso, las variables utilizadas tienen los siguientes valores:

A = $ 6.500

i = 0,01 = 1% mensual

n = 18

C =?

Luego, el valor de la cuota es:

$$\boxed{C = \frac{\$\,6.500}{\frac{1-(1{,}01)^{-18}}{0{,}01}} = \$\,396{,}38}$$

2. Este ejercicio consta de dos pasos:

En primer lugar, se debe determinar el valor presente o actual de la deuda que consta de pagos semestrales de $10.000 durante 4 años.   Para esto, se utiliza la siguiente fórmula:

$$A = \frac{C(1 - (1+i)^{-n})}{i}$$

Reemplazando los datos, tenemos:

$$A = \frac{10.000(1 - (1{,}05)^{-8})}{0{,}05} = \$\ 64.632{,}13$$

Ahora que está determinado el valor actual o presente de la deuda, es posible realizar el siguiente paso, cual es, calcular el valor de la cuota con el nuevo plan de pago que incluye pagos semestrales a 6 años plazo.   Para esto se utilizará nuevamente la fórmula del cálculo de la cuota, para una anualidad cierta ordinaria:

$$C = \frac{64.632{,}13}{\frac{1 - (1{,}05)^{-12}}{0{,}05}} = \$\ 7.292{,}15$$

3. El cálculo del tiempo en una anualidad cierta ordinaria, esta dado por la siguiente fórmula:

$$n = \frac{\log(S\,i+C) - \log C}{\log (1+i)}$$

Reemplazando los datos, tenemos:

$$n = \frac{\log(55.000x0{,}0075+800) - \log 800}{\log(1{,}0075)} = 56 \text{ meses}$$

3.7. ANUALIDAD ANTICIPADA.

Es una anualidad cuyo pago periódico vence al principio del intervalo de pago. Ejemplo, el pago de la renta de una casa es una anualidad anticipada. El plazo de una anualidad anticipada se define como el intervalo que va desde la fecha del primer pago, hasta la fecha del último período de pago.

Anualidad ordinaria

	C	C	C	C	C	C	C	C	C	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	período de tiempo

Anualidad anticipada

C	C	C	C	C	C	C	C	C		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	período de tiempo

Nótese que las anualidades ordinarias no tienen pago al principio del plazo;
la anualidad anticipada tiene pago al principio del plazo.

Ejercicio N° 1: La prima de un seguro es de $500, pagadera la primera por adelantado, esto es, al principio de cada mes. ¿Cuál es la renta anual equivalente X pagada por adelantado al 6% convertiblemente mensualmente?

C = 500

i = 0,06 / 12 =0,005 mensual

n = 11

$$X = 500 + \frac{500(1 - (1+0{,}005)^{-11})}{0{,}005} = \$\ 5.838{,}51$$

3.7.1. MONTO Y VALOR ACTUAL DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA

El monto final de una anualidad anticipada, se determina con la siguiente fórmula:

$$\mathbf{S = C \quad \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} \quad - 1}$$

Ejercicio N°1: Una empresa deposita en un banco al principio de cada año $20.000 en una cuenta de ahorros que abona el 7% ¿A cuanto ascenderían los depósitos al cabo de 5 años?

$$S = 20.000 \quad \frac{(1+0{,}07)^{6} - 1}{0{,}07} \quad - 1 = \$\ 123.065{,}81$$

$$\mathbf{A = C \quad \left(\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1\right)} \quad \textbf{Valor actual de una anualidad anticipada.}$$

Ejercicio N° 1: Una empresa arrienda una oficina en $40.000 mensuales y propone al propietario pagarle el arriendo anual al principio de cada año, con una tasa del 12% convertible mensualmente. Se pide determinar el valor del arriendo anual.

$$\mathbf{A = 40.000 \quad \left(\frac{1 - (1+0{,}01)^{-(12-1)}}{0{,}01} + 1\right) = \$\ 454.705{,}1}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

a) El dueño de un terreno cobra de arriendo $50.000 por mes, el primer pago es anticipado. El arriendo será por 2 años con una tasa de interés del 12% convertible mensualmente.

$$S = 50.000 \quad \frac{(1+0{,}01)^{24+1} - 1}{0{,}01} \quad - 1 = \$\ 1.362.160{,}0$$

b) Un comerciante estima que puede aumentar sus ventas, en 13 cuotas mensuales, sin cuota inicial, los cuales tienen un precio de $4.200 al contado, ofreciendo sus productos. Hallar el valor de las cuotas, si se carga el 18% de interés, convertibles mensualmente.

$$C = \frac{4.200}{\frac{1-(1,015)^{-13}}{0,015}} = \$\ 358$$

3.8. ANUALIDAD DIFERIDA.

Es aquella cuyo plazo comienza después de transcurrido un intervalo de tiempo.

Ejercicio N°1: Un puente recién construido no necesita reparación hasta el término de 6 años, cuando se requieran $300 para reparaciones. Se estima que de ahí en adelante se necesitarán $300 al final de cada año en los próximos 20 años. Se pide encontrar el valor presente X del mantenimiento del puente, sobre la tasa de interés del 3%.

Respuesta. La anualidad esta diferida por 6 períodos y después continua 21 períodos.

$$X = 300\left(\frac{1-(1+0,03)^{-21}}{0,03}+1\right) \times (1+0,03)^{-6} = \$\ 3.872,95$$

3.9. PERPETUIDAD.

Es una anualidad cuyo pago se inicia en una fecha fija y continua, para siempre. Ejemplo: supongamos que una empresa paga siempre dividendos sobre sus acciones preferentes, esto, puede considerarse como una perpetuidad. Es importante destacar que no se puede hablar del monto de una perpetuidad, sin embargo, tiene un valor presente definido.

Considérese una perpetuidad de $C pagaderos al final de cada periodo de interés, sobre la base de un interés y por el período. El valor presente de la perpetuidad es simplemente la cantidad A que en un período de interés produce C de interés, esto es, Ai = C o sea que:

$$\boxed{A = \frac{C}{i}}$$

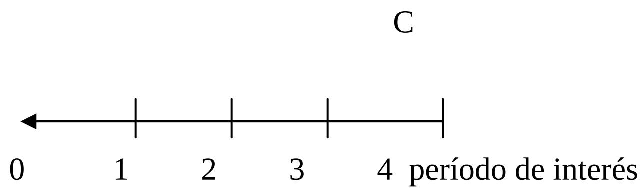
Ejercicio N° 1: La empresa ZZ espera pagar $3.000 cada año, indefinidamente, como dividendo sobre sus acciones preferentes. Suponiendo un rendimiento del 5% anual. ¿Cuánto debería estar dispuesto a pagar la empresa por cada acción?

$$\boxed{A = \frac{3.000}{0,05} = \$\ 60.000}$$

3.10. ANUALIDAD GENERAL.

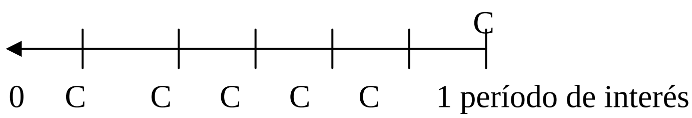
Es aquella cuyo pago periódico de interés e intervalo de pago, no coinciden. Las anualidades generales que más frecuentemente se presentan, tienen:

a) Un número entero de periodos de interés por intervalo de pago.



(4 períodos de interés por intervalo de pago)

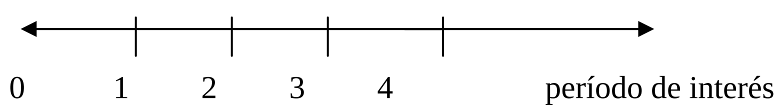
b) Un número entero de intervalos de pago por periodo de interés.



(6 por intervalo de pago por períodos de interés)

Una anualidad general, puede ser transformada en una anualidad simple equivalente, de dos formas: primero, cambiando la tasa de interés dada en una equivalente, en la cual, el nuevo período de interés coincide con el intervalo de pago. Y segundo, reemplazando los pagos dados C, por pagos equivalentes X al final de los períodos de interés.

4. Ejercicio N°1: Si el interés es del 6% convertible trimestralmente, reemplazar un pago de $ 4.000 al final de cada año por pagos equivalentes X al final de cada trimestre.



$$\boxed{X = \frac{4.000}{\frac{(1+0,015)^{4} - 1}{0,015}} = \$\ 977,78}$$

3.11. MONTO Y VALOR PRESENTE.

Después de distribuir o agrupar los pagos periódicos dados para tener un pago al final de cada período de interés, el monto y el valor presente de una anualidad son:

Ejercicio N° 1: Determinar el valor presente y el monto de una anualidad de $2.000 anuales por 5 años con intereses al 8% convertible semestralmente.

Respuesta: El intervalo de pago es 1 año y el período de intereses es de 6 meses; hay 2 periodos de interés por intervalo de pago.

$$C = \frac{2.000}{\frac{1 + 0,04)^{2} - 1}{0,04}} = \$\ 980,39$$

$$S = 980,39 \; \frac{(1+0,04)^{10} - 1)}{0,04} = \$\ 11.770,66$$

$$A = C \; \frac{(1 - (1+i)^{-n})}{i}$$

$$A = 980,39 \; \frac{(1 - (1+0,04)^{-10})}{0,04} + 1) = \$\ 7.951,84$$

3.12. PAGO PERIÓDICO.

Cuando se requiera el pago periódico C de una anualidad ordinaria general:

a) Escribir la expresión dando el pago X por periodo de interés requerido.

b) Expresar la relación entre X y C.

c) Eliminar X entre las dos relaciones y resolver para C.

Revisa tu aprendizaje

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN Nº 06

1. Calcular el monto y el valor actual de las siguientes anualidades ciertas ordinarias.
a) $500 semestrales durante 8 años al 5%, capitalizable semestralmente.
b) $10.000 anuales durante 4 años al 6% capitalizable semestralmente.
c) $50.600 mensuales durante 3 años capitalizables mensualmente al 7%, con capitalización mensual.

2. Una persona deposita $12.000 cada final de año en una cuenta de ahorro que abona el 3% de interés. Hallar la suma que tendrá en su cuenta al cabo de 10 años.

3. ¿Cuál es el valor al contado de un equipo industrial comprado así: $5.000 mensuales durante 2 años con un último pago de $8.500, si se carga un interés del 10% capitalizable mensualmente?

4. Una persona deposita en un banco $5.000 cada final de mes, durante 4 años consecutivos. Determinar la suma que tendrá en su cuenta 7 años después del ultimo deposito, si el banco abona el 6% convertible mensualmente.

5. Una institución de beneficios recibió un legado de $190.000 anuales a perpetuidad. Cede los derechos por $5.000.000, hallar la tasa de interés de la operación.

6. Un automóvil cuyo valor de contado es de $5.500.000 es vendido con $200.000 de cuota inicial y 18 cuotas mensuales, con tasa efectiva del 8%. Hallar el valor de las cuotas mensuales.

7. Hallar el monto y el valor actual de 28 cuotas de $500 que se recibirán cada final de mes, a la tasa efectiva del 7%.

Comprueba tus respuestas

SOLUCIONES EJERCICIOS AUTOEVALUATIVOS Nº 06

1. Para calcular el monto y el valor actual de una anualidad cierta ordinaria, se utilizan las siguientes formulas:

$$S = \frac{C\left((1+i)^{n} - 1\right)}{i}$$

$$A = \frac{C\left(1-(1+i)^{-n}\right)}{i}$$

a)

$$S = \frac{500\left((1{,}025)^{16} - 1\right)}{0{,}025} = \$\ 9.690$$

$$A = \frac{500\left(1-(1{,}025)^{-16}\right)}{0{,}025} = \$\ 6.527{,}5$$

b)

$$S = \frac{10.000\left((1{,}0609)^{4} - 1\right)}{0{,}0609} = \$\ 43.804{,}6$$

$$A = \frac{10.000\left(1-(1{,}0609)^{-4}\right)}{0{,}0609} = \$\ 34.579{,}8$$

c)

$$S = \frac{50.600\,((1{,}0058)^{36} - 1)}{0{,}0058} = \$\ 2.019.250$$

$$A = \frac{50.600\,(1-(1{,}0058)^{-36})}{0{,}0058} = \$\ 1.639.726$$

2.

$$S = \frac{12.000\,((1{,}03)^{10} - 1)}{0{,}03} = \$\ 137.567$$

3.

$$A = \frac{5.000\,(1-(1{,}0083)^{-23})}{0{,}0083} + \frac{8.500}{(1{,}0083)^{24}} = \$\ 111.268$$

4. Este ejercicio consta de dos partes:

En primer lugar se debe determinar el monto que tendría la persona después de depositar la suma de $ 5.000 cada fin de mes durante 4 años..

$$S = \frac{5.000\,((1{,}005)^{48} - 1)}{0{,}005} = \$\ 270.489$$

Ahora, se puede determinar la cantidad que tendrá la persona después de 7 años de realizar el último depósito; para esto, se utiliza la fórmula del monto compuesto.

$$S = 270.489\,(1{,}062)^{7} = \$\ 412.118$$

5.

$$i = \frac{C}{A} = \frac{190.000}{5.000.000} = 0{,}038 = 3{,}8\%$$

6. El saldo por pagar del automóvil es igual al valor contado menos el pié inicial.

Saldo \$ 5.500.00 - \$ 200.000 = \$ 5.300.000

$$\boxed{C = \frac{5.300.000}{\frac{1-(1{,}0067)^{-18}}{0{,}0067}} = \$\ 313.540}$$

7.

$$S = 500\ \frac{((1{,}0058)^{28} - 1)}{0{,}0058} = \$\ 15.153$$

$$A = 500\ \frac{(1-(1{,}0058)^{-28})}{0{,}0058} = \$\ 12.888$$

CUARTA UNIDAD
AMORTAZACIONES

OBJETIVO GENERAL DE LA UNIDAD TEMÁTICA

- Aplicar los flujos de caja constantes a amortización de deudas, aplicando las características de los métodos progresivos y acumulativos.

INTRODUCCIÓN

La expresión amortizar, se utiliza para denominar un proceso financiero mediante el cual se extingue, gradualmente, una deuda por medio de pagos periódicos, que pueden ser iguales o diferentes.

En la amortización de una deuda, cada pago o cuota que se entrega, sirve para pagar los intereses y reducir el importe de la deuda.

El monto a amortizar, dependerá del monto de la deuda que se deba cancelar, de la tasa de interés involucrada en la operación y del número de períodos establecidos, para cancelar la deuda.

Se presentan ejercicios, donde se calcula en primer lugar, el monto de la cuota a cancelar, con la cual se construye el correspondiente cuadro de amortización, que serán los ejercicios de aplicación para el alumno.

4.1 AMORTIZACIÓN

Es el proceso de cancelar una deuda y sus intereses por medio de pagos periódicos. Se dice que un documento que causa interés, está amortizando cuando todas las obligaciones contraídas, son liquidadas mediante una serie de pagos, hechos en intervalos de tiempos iguales.

Ejercicio N° 1: Amorticemos una deuda A amparada con un documento que causa interés, mediante una serie de n pagos de $C cada uno. Cada pago C se aplica en primer lugar para el pago de interés vencido en la fecha de pago; la diferencia se utiliza para disminuir la deuda. En consecuencia, la cantidad disponible para disminuir la deuda aumenta con el transcurso del tiempo.

La parte de la deuda no cubierta en una fecha dada, se conoce como **Saldo Insoluto o Capital Insoluto** en la fecha. El capital al inicio del plazo es la deuda original. El capital insoluto al final del plazo es 0 en teoría, sin embargo, debido a la práctica de redondear a la unidad más próxima, puede variar ligeramente de 0. El capital insoluto, justamente después de que se ha efectuado un pago, es el valor presente de todos los pagos que aún faltan por hacerse.

4.1.1 PRINCIPIO DE LA AMORTIZACIÓN.

El interés que se paga debe cancelarse al final de cada período calculado sobre el saldo de los capitales adeudados.

4.1.2 TABLA DE AMORTIZACIÓN.

Para efectos contables, es conveniente preparar una tabla que muestre la distribución de cada pago de la amortización, respecto a los intereses que cubre y a la reducción de la deuda. La tabla de amortización consta básicamente de los siguientes campos:

Período	Cuota	Interés	Amortización	Saldo

EJERCICIO N° 1: Una deuda de $800.000 se debe amortizar en 5 años con pagos iguales con el 5% efectivo sobre el saldo insoluto. Determinar el valor de cada pago y hacer el cuadro de amortización de la deuda.

Deuda = $800.000

Tasa de Interés efectiva = 5%

Para calcular el valor de la cuota se aplica las mismas fórmulas de anualidades calculando el pago anual:

A = $800.000

n = 5 años

i = 0,05

$$C = \frac{800.000}{\frac{1-(1,05)^{-5}}{0,05}} = \$\ 184.779,83$$

Tabla de amortización:

Período	Pago anual	Interés sobre saldos	Amortización	Saldo
Comienzo del año				800.000
Final del año 1	184.779,83	40.000	144.779,83	655.220,17
Final del año 2	184.779,83	32.761	152.018,83	503.201,34
Final del año 3	184.779,83	25.160,06	159.619,77	343.581,57
Final del año 4	184.779,83	17.179,07	167.600,73	175.980,84
Final del año 5	184.779,83	8.799,04	175.980,79	0
Totales	**923.899,15**	**123.899,17**	**800.000**	

NOTA: Cabe señalar que la amortización es el saldo entre el valor de la cuota y el monto de interés.

4.2 INTERÉS EN EL VALOR DE UN BIEN ADQUIRIDO.

Cuando se compra un bien mediante una serie de pagos parciales, el interés del comprador del bien, en cualquier tiempo, es aquella parte del precio del bien que ha pagado. Al mismo tiempo, el interés del vendedor del bien, es aquel que queda por pagarse, esto es, el capital insoluto a la fecha.

Interés del comprador + interés del vendedor = precio de venta

4.3 EXTINCIÓN DE DEUDAS CONSOLIDADAS.

Cuando una deuda contraída mediante la emisión de bonos con intereses es amortizada cada pago se aplica para cubrir los intereses correspondientes vencidos y para redimir unos ciertos números de bonos. Los pagos periódicos no pueden permanecer iguales, sin embargo tienen que ser lo más similares que sean posibles.

4.4 FONDO DE AMORTIZACIÓN.

Es el método para liquidar una deuda, el acreedor recibe el interés pactado en su vencimiento y el valor nominal de la deuda al término del plazo. Con el objeto de poder hacer el último pago el deudor crea un fondo por separado en el cual hace depósitos periódicos iguales durante un plazo, del tal forma que, justamente después del último depósito, el fondo importa el valor de la deuda original. Es de suponerse que el fondo gana intereses, pero no necesariamente a la misma tasa que carga el acreedor.

4.5 SISTEMAS DE AMORTIZACIÓN.

4.5.1 AMORTIZACIÓN GRADUAL.

Es un sistema de amortización por cuotas de valor constante, con intereses sobre saldos. En este tipo los pagos son iguales y se hacen en intervalos iguales de tiempo. Esta forma de amortización fue creada en Europa y es la más generalizada y la de mayor aplicación financiera.

4.5.2 AMORTIZACIÓN CONSTANTE.

A diferencia de la amortización gradual, mantiene el valor igual para la amortización en cada periodo y, como consecuencia, la cuota de pago periódico es variable decreciente por ser decrecientes los intereses sobre los saldos.

4.5.3 AMORTIZACIÓN POR CUOTAS INCREMÉNTALES.

Este sistema consiste en incrementar periódicamente la cuota de pago.

4.5.4 AMORTIZACIÓN DECRECIENTE.

Este sistema tiene modelos matemáticos similares a los de amortización por cuotas incrementadas, para estos sistemas de factor de variación es negativo, convirtiéndose los incrementos en decrementos. En estos sistemas de amortización decreciente, el deudor paga cuotas mayores en los primeros periodos, lo que tienen alguna importancia, si el clima económico es de desvalorización monetaria creciente y se prevé un aumento futuro en las cuotas por corrección monetaria.

Revisa tu aprendizaje

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN Nº 07

1. La empresa que usted asesora ha recibido un préstamo de $5.000.000 por 10 años que deberá amortizar en cuotas anuales iguales con la tasa de interés del 5,5%. Se pide:

   a) Determinar el valor de la cuota anual que deben cancelar
   b) Confeccionar el cuadro de amortización

2. Una deuda de $200.000 debe ser cancelada en 4 pagos trimestrales vencidos iguales, con intereses del 8% nominal convertible trimestralmente (amortización constante y cuota variable decreciente).

3. Del problema anterior, se exige el pago de intereses por trimestre anticipado.

4. Una propiedad se vende en $1.200.000; el comprador paga $400.000 al contado y se compromete a cancelar el saldo en 8 años, con cuotas anuales con el 6% de interés efectivo del saldo.

5. Una deuda de $1.000.000, con la tasa del 18% efectivo, se debe amortizar en 4 años con el siguiente plan; cuotas semestrales iguales más cuotas extraordinarias de $100.000 cada final de año. Hallar el valor de las cuotas y preparar el cuadro de amortización.

Comprueba tus respuestas

SOLUCIONES EJERCICIOS AUTOEVALUATIVOS Nº 07

1. Desarrollo:

a) El valor de la cuota se determina mediante una fórmula del valor actual de una anualidad vencida.

$$A = \frac{C\,(1-(1+i)^{-n})}{i}$$

Donde:

A = representa el valor actual de la deuda

i = tasa de interés expresada en porcentaje

n = número de períodos

C = valor de la cuota

Reemplazando los datos, se tiene:

$$5.000.000 = \frac{C\,(1-(1{,}055)^{-10})}{0{,}055}$$

C = $ 663.338,84

Determinado el valor de la cuota, se puede desarrollar el cuadro de amortización.

b) Cuadro de amortización

Período	Interés	Cuota	Amortización	Saldo
0				5.000.000
1	275.000	663.338,84	388.338,84	4.611.661
2	253.641	663.338,84	409.697	4.201.964
3	231.108	663.338,84	432.231	3.769.733
4	207.335	663.338,84	456.004	3.313.729
5	182.255	663.338,84	481.084	2.832.646
6	155.796	663.338,84	507.543	2.325.102
7	127.881	663.338,84	535.458	1.789.644
8	98.430	663.338,84	564.908	1.224.736
663.338,84	67.360	663.338,84	595.978	628.757
10	34.582	663.338,84	628.757	0

2.

$$C = \frac{\$200.000}{4}$$

C = $50.000 valor de la amortización

Tasa de interés = 0,08/4

i = 0,02

Tabla de amortización:

Fecha	Interés	Amortización	Pago trimestral	Saldo
Inicial				200.000
Final trimestre 1	4.000	50.000	54.000	150.000
Final trimestre 2	3.000	50.000	53.000	100.000
Final trimestre 3	2.000	50.000	52.000	50.000
Final trimestre 4	1.000	50.000	51.000	0
Totales	10.000	200.000	210.000	

3. Del problema anterior, se exige el pago de intereses por trimestre anticipado.

Fecha	Interés	Amortización	Pago trimestral	Saldo
Inicial	4.000	0	4.000	200.000
Final trimestre 1	3.000	50.000	53.000	150.000
Final trimestre 2	2.000	50.000	52.000	100.000
Final trimestre 3	1.000	50.000	51.000	50.000
Final trimestre 4	0	50.000	50.000	0
Totales	10.000	200.000	210.000	

4. Determinar el valor de la cuota y el derecho del vendedor y del comprador al pagar la quinta cuota.

Valor de la cuota:

S = $1.200.000 - $400.000 = $800.000

n = 8 años

i = 0,06

$$C = \frac{800.000}{\dfrac{1-(1{,}06)^{-8}}{0{,}06}} = \$\ 128.828$$ valor de pago de las cuotas de la deuda

Derechos vendedor + derechos comprador = precio de compra

Derechos vendedor: corresponde al valor actual de las cuotas por pagar

$$DV = \frac{128.828}{\dfrac{1-(1{,}06)^{-3}}{0{,}06}} = \$\ 344.358{,}78$$

Derechos comprador:

DC = $800.000 - $344.358,78

DC = $455.641,21

Nota: son los derechos del vendedor y comprador al quinto año.

5. Solución:

Analizando los flujos de caja

1.000.000 100.000 100.000 100.000

1 2 3 4 ---- 7 8

C C C C C C

El flujo de caja muestra dos anualidades agregadas, el valor actual de $1.000.000 es la suma de los valores de ella.

Tasa equivalente semestral a 0,18 efectiva anual es:

$$(1+i) = (1+0{,}18)^{1/2}$$

$$i = 0{,}08627$$

$$1.000.000 = \frac{C}{\frac{1-(1{,}086)^{-8}}{0{,}086}} + 100.000\,\frac{1-(1+0{,}18)^{-4}}{0{,}18}$$

$$C = \$\ 130.250{,}46$$

Tabla de amortización:

Semestre	**Cuotas**	**Intereses**	**Amortización**	**Saldo**
0				1.000.000
1	130.250,46	86.300	43.950,46	956.049,54
2	230.250,46	82.507,08	147.743,38	808.306,16
3	130.250,46	69.756,82	60.493,64	747.812,52
4	230.250,46	64.536,22	165.714,24	582.098,28
5	130.250,46	50.235,08	80.015,38	502.082,90
6	230.250,46	43.329,75	186.920,71	315.162,19
7	130.250,46	27.198,5	103.051,96	212.110,23
8	230.250,46	18.305,11	211.945,35	

BIBLIOGRAFÍA

Colección SCHAUM'S Matemática Financiera

S. Lazzarini- G. Goldsmith Elementos de Matemática Financiera

Lincoyán Portus G. Matemática Financiera