2021牛客寒假算法基础集训营第二场

出题大佬：四糸智乃

讲题菜鸡：邓丝雨

牛客竞赛
AC.NOWCODER.COM

总体情况：

- 预估:

题号	类型	思维	代码	综合难度
A	单调队列+线段树	3	3	3
B	图论	4	3	4+
C	思维	3	1	2
D	规律	2	1	2
E	双指针+bfs	2	3	3
F	双端队列翻转	3	2	3
G	离散化差分	2	3	3
H	签到	0	0	0
I	筛法dp	2	2	2
J	构造	4	1	3

- 实际：

A (20/247)
B (5/17)
C (11/98)
D (207/2027)
E (27/138)
F (524/3068)
G (73/801)
H (2839/3339)
I (523/7326)
J (265/4071)

A-牛牛与牛妹的RMQ

- 某天，牛妹来找牛牛学习RMQ算法(Range Minimum/Maximum Query),即区间最值查询。也就是给定一个数组区间[L,R]，查询该子区间的最大值。
  假设子数组的两端点下标分别为L,R的话RMQ(L,R)就表示数组区间[L,R]的最大值。
  因为牛妹学会了RMQ算法，所以牛牛准备和她玩个游戏验证她真的学会了。
- 牛牛有一个长度大小为n的全排列数组，即数组中的数字是1~n，且每个数字仅出现1次。
  她们一共玩了m轮游戏，在每轮游戏中，牛牛都准备了k个不同的下标。
  然后牛牛和牛妹各自随机选出一个下标，并且两人所选下标可以是相同的。
  假设牛牛选出的下标为a，牛妹选出的下标为b的话，那么本轮游戏的得分就是RMQ(min(a,b),max(a,b))。
- 请你告诉牛牛，对于每轮游戏可能的得分都有哪几种情况，以及这些情况出现的概率各是多大?

寒假集训营第二场

A.牛牛与牛妹的RMQ

RMQ(min(a,b),max(a,b)) ⇒ [a,b]区间内的max值

算样例: 1 3 5 2 4

[1,1] 1　[2,2] 3　[3,3] 5　[4,4] 2　[5,5] 4

[1,2][2,1] 3　[2,3][3,2] 5　[3,4][4,3] 5　[4,5][5,4] 4

[1,3][3,1] 5　[2,4][4,2] 5　[3,5][5,3] 5

[1,4][4,1] 5　[2,5][5,2] 5

[1,5][5,1] 5

每个数都有可能成为最大值，但每个数机会不同

如: 5: 区间 $l \le 3, r \ge 3$ 时 max都为5

4: 区间 $4 \le l \le 5, 5 \le r \le 5$ 时 max为4

⇒如果知道每个数做为最大值时的取数的左右界范围就可以通过计算对应取间内能取值的个数计算出~~总的~~ max为该值的区间个数(取值)

如: 1 3 5 2 4

l: [1,1] [1,2] [1,3] [4,4] [4,5]

r: [1,1] [2,2] [3,5] [4,4] [5,5]

l,r的范围怎么求: l:它及它左边连续第一个≤它的数 (单调栈)(以l为例)

对于a[i]与a[i+1]，若a[i+1]比a[i]小则 l[a[i+1]]=i+1

若a[i+1]比a[i]大，需要一直向前找吗?

当 a[i+1]>a[i]　a[i]就不可能在作为右边的数的左界 (in左边)

即 a[i+1]彻彻底底剥夺了a[i]的机会

∴用一个容器将所有还可以是左界(in左边)的数存起来

当从左向右枚举时,当 ~~a[i+1]~~ a[x] >容器里最靠右的数

就将它删除,直到最靠右的数比a[x]小

(此时容器里的数单调递减)

a[x]应放在容器里最后一个数右边，其左界l也由这个数决定。

这个容器需要在一侧加入元素/删除元素，且容器内单调

∴单调栈(队列)即可

l,r求出之后，求区间内可选元素个数

⇒线段树/树状数组即可

注意,不是对每个元素去算，只算有贡献的
当前选出来的元素

什么样的是有贡献的呢?

1 3 5 2 4

若k个可选数为第1,3,5个(即1,5,4)

1:只贡献自己　5贡献自己　4:贡献自己　15贡献3

6 4 2 1 3 5 7

⇒6贡献自己,1自己,7自己　61:6　17:7

[6] 9 4 2 [1] 5 [3]

6 1 : 9　1 3 : 5

即: 自己和相邻两数之间的max值

⇒共2k-1个

$\Sigma k <= 2\times10^5$ ∴完全可行 ☺

(我代码写假了也过了2333)

B-牛牛抓牛妹

- 牛牛和牛妹在下棋，棋盘的地图可以看成是一个n个点,m条边组成的图模型。牛妹控制一个棋子从1号点移动到n号点。
- 棋子可以在有边相邻的节点之间移动，且每次移动都只能走一步。
- 牛牛可以操作地图中k个关卡的通行状态，当关卡处于封锁状态时，棋子不能再移动到该节点。但是如果棋子已经位于关卡上面，不会立刻受到影响，但是在离开该节点后无法再返回处于封锁状态的节点。
- 牛妹的操作很简单，她每回合都会寻找当前位置到终点的最短路线移动，如果最短路线不唯一，她总是会选择移动到节点编号较小的节点。
- 牛牛可以在牛妹移动之前进行操作，改变关卡节点的状态（封锁关卡或者通行）。如果在牛牛操作之后，从牛妹到终点n不存在任何一条可行的通路，就认为牛牛困住了牛妹，此时就认为牛牛赢了牛妹。
- 现在请你帮助牛牛困住牛妹，牛牛会送你一个牛清楚作为帮助他的礼物。
- 输入的测试数据保证，游戏开始时牛牛至少存在一种可以成功困住牛妹取得胜利的方案。

C-牛牛与字符串border

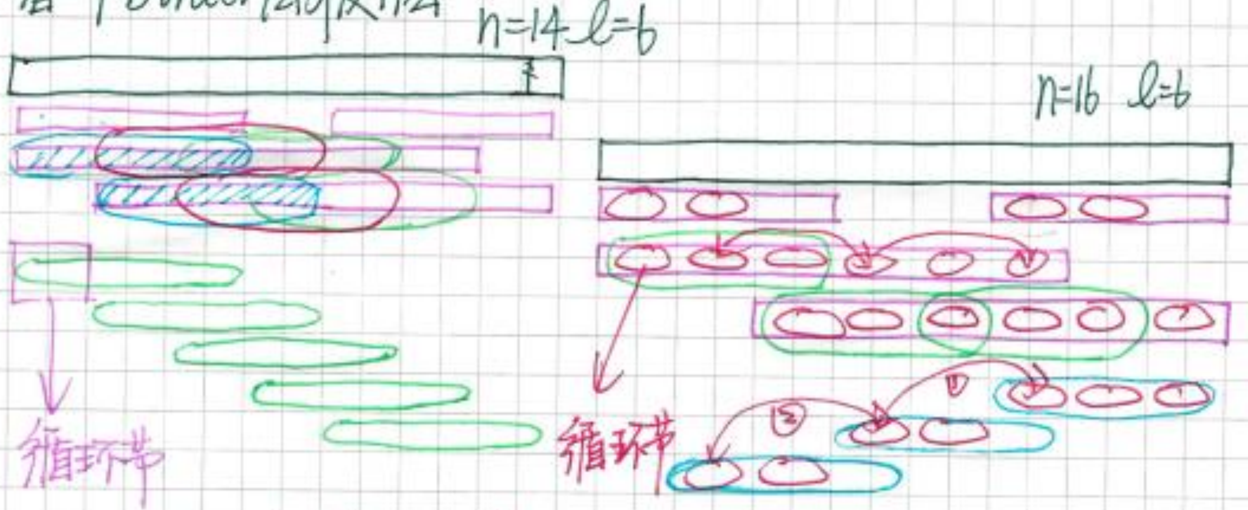
对于一个长度为n的字符串S,我们称字符串$S_0S_1S_2...S_i$为字符串的一个前缀，称字符串$S_iS_{i+1}S_{i+2}...S_{n-1}$为字符串的一个后缀。
牛牛最近学习了KMP算法，该算法可以在$O(n)$的复杂度内求出字符串所有前缀非自身的最长border。
用KMP的预处理函数处理长度大小为n的S串后，$fail[n]$的值就是S串的非自身最长border。
同时，$fail[fail[n]]$是S串第二长的border，$fail[fail[fail[n]]]$是S串第三长的border...以此类推,直到该变量的值为0。

字符串border是字符串匹配中的重要概念，它的定义如下：
若字符串S存在一个前缀$S_0S_1S_2...S_{k-1}$与后缀$S_{n-k}S_{n-k+1}S_{n-k+2}...S_{n-1}$完全匹配，则称S有一个长度大小为k的border。

现在给你一个长度大小为n的S串和一个正整数l，牛牛想要让S串满足同时具有长度大小为$l, 2\times l, 3\times l...k\times l(k\times l<n)$的border。
请你修改S串使得它满足条件，并且要求你修改的次数尽可能少。
如果满足修改次数最小的情况下有多种修改方案，你可以输出任意一种。

C-牛牛与字符串border

看一下border会引发什么

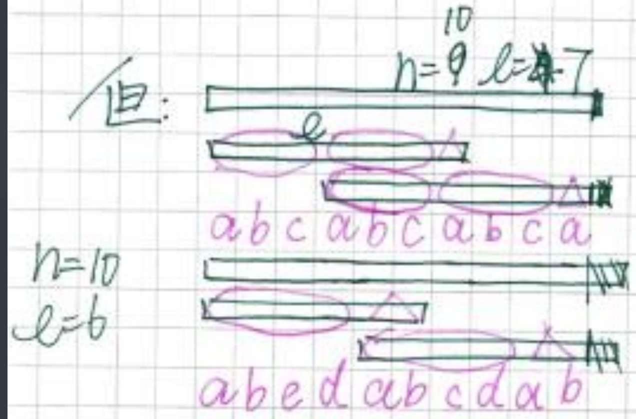


⇒ 循环节长度 $\gcd(n,l)$

即每 $\gcd(n,l)$ 个相同 ⇒ 统一成谁呢?

⇒ 看哪个字母出现得多

但:



当 $2l>n$ 时

循环不需要完整, 循环节长度 $n-l$

(最右边可以不够)

D-牛牛与整除分块

整除分块，又称数论分块。是数论算法中的重要技巧，你可以在各种需要枚举因子的连续求和类问题中见到它的身影。如杜教筛，莫比乌斯反演化简后的整除分段求和等。

整除分块基于这样一个数学现象：对于任意正整数N，集合$S=\{x:x=\lfloor\frac{N}{i}\rfloor,i\in1,2,3...N\}$的大小总是严格小于$2\sqrt{N}$。

例如当N=10时S={10,5,3,2,1}，这就使得对于$\lfloor\frac{N}{i}\rfloor$类型的求和类问题，只要快速枚举S集合，就能在$\sqrt{N}$级别的复杂度内解决问题。

$\lfloor\ \ \rfloor$符号是向下取整符，$\lfloor x\rfloor$表示不大于x的最大正整数

牛牛在学习整除分块这一算法后提出了一个新的问题，对于给定正整数N,x，令$S=\{x:x=\lfloor\frac{N}{i}\rfloor,i\in1,2,3...N\}$，时$\lfloor\frac{N}{x}\rfloor$在S中是第几大呢（去重降序排序后第几个）？

D.牛牛与整除分块

S里的数究竟如何:

$N=25$

$25 \quad 12 \quad 8 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 2$

$S:\{\frac{25}{1},\frac{25}{2},\frac{25}{3},\frac{25}{4},\frac{25}{5},\frac{25}{6},\frac{25}{7},\frac{25}{8},\frac{25}{9},\frac{25}{10},\frac{25}{11},$

$2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$

$\frac{25}{12},\frac{25}{13},\frac{25}{14},\frac{25}{15},\frac{25}{16},\frac{25}{17},\frac{25}{18},\frac{25}{19},\frac{25}{20},\frac{25}{21},\frac{25}{22},$

$1 \quad 1 \quad 1$

$\frac{25}{23},\frac{25}{24},\frac{25}{25}\}$

当 $x \le \sqrt{N}$ 时，$\lfloor \frac{N}{x} \rfloor$ 是唯一的 $\Rightarrow$ 输出 x

$x > \sqrt{n}$ 时，把唯一的前面所有多少个算出来($\sqrt{n}$个)

之后是连续的 $\Rightarrow$ $n/(\sqrt{n}+1) \sim n/x$ 每一个数都会有的

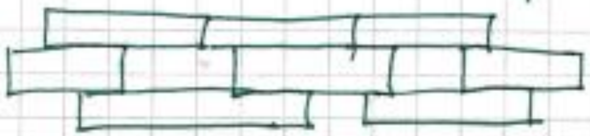
E-牛牛与跷跷板

- 牛牛最近在玩“糖豆人”，其中有一关需要在跷跷板之间跳来跳去，达到终点。 游戏的界面可以抽象成一个2D的平面。 玩家一开始出生在第1块跷跷板上，然后需要到达终点所在的第n块跷跷板。
- 玩家可以在相邻的跷跷板之间跳跃，由于牛牛的操作不是很好，他总是会在跳跃时掉下悬崖。所以牛牛拜托你来规划他的路线，使得他在跷跷板之间跳跃的次数尽可能少。
- 在这个问题中，所有的跷跷板都被抽象成是一个1×n的矩形，每个矩形较长的边都与坐标x轴平行。玩家可以矩形中自由移动，并且如果两个矩形相邻，则可以“跳跃”一次移动到相邻的矩形上面。我们认为两个矩形是相邻的，当且仅当他们接触边的接触长度不为0。即两矩形仅有一个角有公共点时不认为他们是相邻的。
- 输入数据保证，至少存在一种从1号板移动到n号板的移动方案。所有跷跷板都是有实体的，所以保证它们不会“叠在一起”，即所有跷跷板两两的面积交
- $(1 \le n \le 10^5)$

三、牛牛与跳跳板

相邻跳跳板连边以后就是一个裸的dfs/bfs
(你用最短路也行)

建图：暴力两两看相邻会tle



将跳跳板从上到下从左到右排好

与左边一个：可能相邻

与上一行：若第i个与上一行[x,y]相邻

第i+1个可以从[y+1]开始往后找

F-牛牛与交换排序

- 牛牛有一个数组，数组元素是1到n的排列，即数组的值在1~n范围内，且每个数字仅出现1次。牛牛想要将该数组变为升序排列的，他可以进行如下的操作。首先他要确定一个长度k，k的范围在1~n之间。接下来他将会进行若干次操作。在每轮操作中他都可以选择一段长度为k的子数组，然后进行区间的翻转操作。
- 他可以做任意次数的操作，但是要求他每次选择的子数组区间满足$l_i \le l_{i+1}$，并且区间长度等于一开始选定的k，也就是说一旦某一次操作选择了数组的某个位置进行区间翻转操作，下一次做区间翻转的位置将会比上一次更靠右。
- 牛牛发现，并不总是存在一个k可以使得数组排序变为有序，请你告诉牛牛是否存在一个k能够在满足规则的情况下完成排序。
- $(1 \le n \le 10^5)$

F-牛牛与交换排序

因为每一次反转的区间必须在上一次的右边

所以第一次如果不把1翻到位，1就回不去了

⇒ k就知道了：1的位置和1的差值（如果1已经到位就是2和2的位置的差值……）

然后模拟翻转操作就可以

eg：

6 3 5 4 1 2

1 4 5 3 6 2

1 2 6 3 5 4

后面就没办法了

6 3 1 4 5 2

1 3 6 4 5 2

无序2且不来了，无解

直接暴力翻转的区间会TLE，考虑一下优化

首先，什么时候需要翻：当前从i开始位置的值不是i

就考虑把i开始的长为k的区间翻了

什么情况无解：翻完第i个位置还不是i

（也即i想翻但翻转区间最后一个不是i）

或者翻了翻不动的位置不对

其次，翻 i到i+k-1 与翻 i+1 到 i+k 有什么联系

⇒ 交叉的部分被翻了两次，相对顺序不变

⇒ 用个数组模拟当前考虑要不要翻的长为k的区间

用一个数标记其为顺序还是倒序（翻转偶数次还是奇数次）

比如从 i-1 到 i 时，先从"最左边"（顺序的最左边，倒序的最右边）把 i-1 拿走（这个时候判断 i-1 位置是否正确），然后看当前最左的 i 位置要不要翻转操作，~~要翻~~ 加入 i+k-1 这个点到"最右边"，然后要翻则取反翻转标记

G-牛牛与比赛颁奖

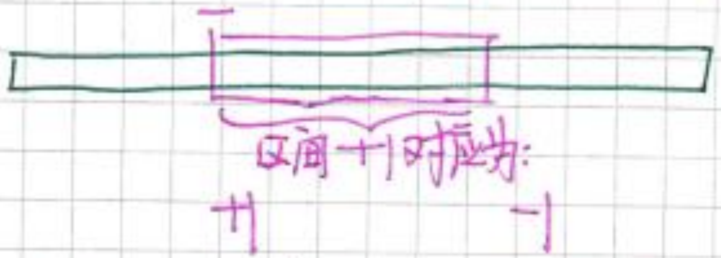
- 牛牛举办了一场比赛，共有n支队伍来到现场参加比赛。该比赛共有m道题目，牛牛发现比赛的结果非常有意思，对于每一道题目。最终成功做出它的队伍都是连在一起的。即做出第i道题目的队伍是从li到ri连号的。
- 比赛结束后，牛牛准备为获奖队伍颁奖。由于比赛规则没有罚时这一项，为了保证相同AC数的队伍所获奖项相同，所以牛牛采取如下的方案颁奖。
  首先是确定奖牌线，牛牛将所有参赛队伍按照最终通过题目总数降序排序。
- 分别取排名为 $\lceil \frac{n}{10} \rceil, \lceil \frac{n}{4} \rceil, \lceil \frac{n}{2} \rceil$ 队伍的通过题目总数作为金、银、铜的奖牌线。特别的，要求奖牌线不得少于1题，当所划奖牌线为0题时，应视为1题。
- 当某支队伍通过题目的总数大于等于金、银、铜对应奖牌线的题目数时，就获得对应的奖牌。同时满足多个奖牌线要求时，取满足奖项中的最高奖项，例如同时满足金、银、铜时应颁发金牌，同时满足银、铜时颁发银牌。
- 请你模拟比赛的颁奖过程，最后输出获得金、银、铜牌的队伍数目。

G-牛牛与比赛颁奖

L_i到R_i的人做出了第i题

→即L_i到R_i的人题数加1

用差分数组维护　delta[i]表示第i个数与第i-1个数差值



数轴太长？⇒离散化(只有 100，1000 为什么要开1000的数轴，2n的数轴就够)

之后求前缀和维持做出i题的队伍数

H-牛牛与棋盘

- 牛牛发现国际象棋的棋盘图案特别好看，是黑白相间的。
- 众所周知，国际象棋的棋盘是8*8大小的，不过他现在想让你打印出一个n*n(n为偶数)的国际象棋棋盘。
- 我们用字符'1'表示黑格，'0'表示白格。
- 棋盘左上角的格子为白格，规定与白格相邻的格子全部为黑格，与黑格相邻的格子全部为白格。

I-牛牛的“质因数”

- 牛牛定义了一个函数F(x)，它表示将x做质因数分解后得到的数字从小到大升序排列，然后将其“拼接”成一个大整数。
  例如1500=2*2*3*5*5*5,F(1500)=223555。
  牛牛现在想要知道∑F(i)的值。
  由于这个结果非常大，所以你只用告诉牛牛最终答案对10^9+7取余数的结果即可。
- N<=4*10^6

牛客竞赛
AC.NOWCODER.COM

2. 牛牛的质因数

若 $x = p_i * y$　p_i 是 x 最大的质因子

显然 $f[x] = (f[y] * 10^k) + p_i$

⇒ 筛法过程中维护即可

eg:

$f(2)=2$　　$f(4)=2\times10+2=22$　~~$f(6)=f(3)\times10+2=0$~~

$f(8)=f(4)\times10+2=222$

⋮

$f(3)=3$　　$f(6)=f(2)\times10+3=23$　　$f(9)=f(3)\times10+3=33$

$f(12)=f(4)\times10+3=223$　~~$f(15)=f(5)\times10+3=$~~

⋮

J-牛牛想要成为hacker

- 在算法竞赛中"hack"一般指用一组测试数据触发程序的缺陷，从而导致本来通过题目的AC代码无法通过该测试数据。
  一般情况见得比较多的是用hack数据导致别人WA掉，当然也有一些会导致原本的AC代码TLE和MLE。
- 牛牛在一些简单的练习题时遇到了这样一个问题。
  给定一个大小为n的数组a(1≤ai≤109)，然后请你判断数组元素是否能够从中选出三个组成一个三角形。
- 牛牛发现AC通过的代码中有这样一种暴力逻辑，该逻辑的伪代码如下。

- 其实就是三重循环枚举数组的三个元素，检查是否为三角形。这段代码很取巧的地方在于它存在一种“短路”逻辑，一旦发现存在三角形就立刻终止程序。
  这样在随机数据下其实很容易发现三角形，所以如果数据纯随机，显然这就是一段AC代码。
- 牛牛当然知道这个代码很明显就存在缺陷，如果数据构造的好的话应该可以卡TLE，但是牛牛发现，他并不会构造出能够hack这个暴力算法的数据，所以他请你来帮他。
- 我们以这段程序调用isTriangle的次数作为时间复杂度的计算依据，请你构造数据hack这段暴力程序，使它TLE掉。

```
FOR i = 1 ... n
    FOR j = i + 1 ... n
        FOR k = j + 1 ... n
            IF isTriangle(a[i],a[j],a[k])
                print("yes")
                EXIT
            END IF
        END FOR
    END FOR
END FOR
print("no")
EXIT
```

> 输出n个正整数，正整数的范围在$[1,10^9]$之间，要求该暴力程序在运行过程中调用isTriangle函数的次数不得少于$min(C_n^3, n^2\lfloor log_2 n\rfloor)$

②.牛牛想要成为hacker

函数调用次数不少于$n^2\lfloor\log_2 n\rfloor$ $n=10^5$时 即不少于$16n^2$

⇒ i小于某范围时都没有三角形才行

即这个范围内(前k个)任意~~两两~~三个不能组成三角形

或其中某一个和后面的两个也不能三角形

任意~~两~~三个不能三角形: 任意2个数之和都小于第3个数:

比如: Fib数列 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34……

: 2^i 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64……

⇒先搞个长度为k的Fib数列/2^i数列(2开始), 之后全为1

⇒k要取多少? $n=10^5$时 调用次数不少于16×10^{10}

$n=10^5$ $n^2\lfloor\log_2 n\rfloor = \cancel{16\log_2 n}\ 16n^2$

$i=1$: $j: 2\sim n$ $k: j+1\sim n$ $(n-1)+(n-2)+(n-3)\cdots+1 = \frac{n^2-n}{2}$

$i=2$: $j: 3\sim n$ $k: j+1\sim n$ $\frac{n^2-3n+2}{2}$

$i=3$ $\frac{n^2-5n+6}{2}$

$i=k$ $\frac{n^2-(2k-1)n+(k-1)k}{2}$

和: $\frac{kn^2-k^2n+1^2+2^2+3^2\cdots k^2-1-2\cdots-k}{2} \geq \cancel{16\log_2 n}\ 16n^2$

$(k-32)n^2-k^2n+(1^2+2^2\cdots+k^2)-\frac{(1+k)k}{2} \geq 0$

k取33即可

(其实是31的Fib数列加后面2个1)

⇒ 2^k 这个构造法数字不够

(①Fib 31项 加等差 数字也不够)