

# 2021牛客寒假算法基础集训营第三场

出题大佬：米咔

讲题菜鸡：邓丝雨





# 总体情况:

## • 预估:

题号	类型	思维	代码	综合难度
A	数学	4	3	3
B	尺取	3	2	3
C	枚举	2	2	2
D	签到	0	0	0
E	数据结构	3	4	3
F	字符串	3	2	3
G	并查集	2	2	2
H	模拟	1	2	1
I	dp	2	2	2
J	博弈	3	1	2

## • 实际:

```
1 A (31/443)
2 B (31/186)
3 C (331/1686)
4 D (2552/4134)
5 E (100/761)
6 F (397/1004)
7 G (1144/7116)
8 H (1038/4796)
9 I (720/2330)
10 J (1060/4506)
```



## A-模数的世界

牛牛非常喜欢模数的世界。有一天他想到了一个问题：如果已知  $x \equiv a \pmod{p}$  ,  $y \equiv b \pmod{p}$ , 那么  $\gcd(x, y) \pmod{p}$  最大是多少呢? 此时的  $x$  和  $y$  又可以怎么取值呢?

稍加思索后, 牛牛找到了自己的答案, 可惜这个地方太小, 写不下。

聪明的你们可以写一个程序, 帮帮牛牛算出这个问题的答案吗?

注意你取的  $x$  和  $y$  必须在  $[0, 2^{63} - 1]$  范围以内。

$\gcd(x, y)$  指  $x$  和  $y$  的最大公约数。

$\gcd(x, 0) = x$ ,  $\gcd(0, 0) = 0$

### 输入描述:

第一行为一个整数  $T$ , 代表测试组数

接下来  $T$  行, 每行都是以空格分隔的三个整数  $a, b, p$ , 其中。

$1 \leq T \leq 10^6$

$0 \leq a, b < p \leq 2 \times 10^4$

题目保证  $p$  是素数



## B-内卷

- 在一个班级里有 $n$ 个同学，在这个即将进行数据结构期末考试的关头，为了减少内卷，他们决定聚在一起商量对策。

每个人在考试后会得到一个A,B,C,D,E,的等级和一个分数，学校要求得到等级A的人不超过 $k$ 个。

已知第 $i$ 个同学在得到五个等级时预期的分数分别为 $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i$ 。

请问在最理想的情况且不违反上述条件的情况下，他们的预期分数最大值和最小值之差最小为多少。

## B. 内卷

C, D, E 等级如果比对应的 B 级分数低则必然不选  
(把 B 等级分数更新为 BCDE 最高分, 则 CDE 分数就可以扔了)

将每个人的分数 (A 类, B 类) 放在一起排序

排序之后问题转化为:

选一个区间使区间内每个人的分数都存在, 且只有 A 等级的人数不超过  $k$ , 区间的最大分-最小分尽量小。

怎么选?

暴力的话  $\text{for } i = 1 \sim n$   
 $\text{for } j = a[i] + 1 \sim n$

$i, j$  为区间左右界再判断区间是否满足要求

1° 对每个  $i$  找到其对应的  $j$  之后不需要再增大  $j$

2° 当  $i$  变成  $i+1$ ,  $j$  没必要从  $i+1$  开始循环

$j$  从  $j$  开始即可:  $i \sim j-1$  不满足条件

$i+1 \sim j-1$  也不满足条件

$i > i+1$  时  $j$  无需从  $i+1$  开始



尺取法



## C-重力坠击

- 在一个二维平面上有 $n$ 个敌人，第 $i$ 个敌人可以描述为一个以 $(x_i, y_i)$ 为圆心， $r_i$ 为半径的圆。你每次可以对一个半径为 $R$ 的圆范围内进行攻击（圆心自选，但圆心的横纵坐标必须为整数），对于与你攻击范围有交点的敌人都会被消灭。
- 你总共可以发动 $k$ 次攻击，问最多能消灭多少敌人。



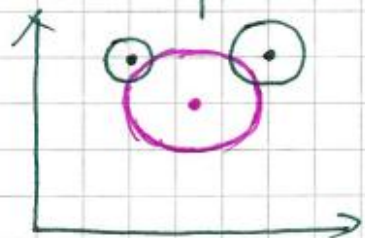
C. 重力坠击 — dfs(暴力)

$n \leq 10$     $k \leq 3$     $r, R \leq 7$     $|x_2 - y_2| \leq 7$

只有最多3次攻击  $\Rightarrow$  暴力枚举即可

炸弹的范围(下标)也在  $[-7, 7]$  内

(在靠内炸肯定更优)





## D-Happy New Year!

- 还有一个周就要过年啦！这一天牛牛盯着新的台历出神，他突然想知道对于第 $n$ 年来说，大于 $n$ 且与 $n$ 的数位和相同的最小年份是多少。





## E-买礼物

- 在卖礼物的超市中有 $n$ 个柜子，每个柜子里都摆放了一个礼物，每个礼物有自己的一个编号，第 $i$ 个柜子里的礼物编号为 $a_i$ 。

茶山牛想给牛牛和牛妹买相同编号的礼物，但礼物有可能在某个时刻被其他人买走，而且柜子数量太多，因此茶山牛在某个时刻只想知道某一个柜子区间是否能买到两件相同编号的礼物。

具体来说，有 $q$ 次操作，格式如下：

1  $x$ ，第 $x$ 个柜子里的礼物被买走，保证此时这个柜子里的礼物还在。

L  $r$ ，茶山牛询问第 $l$ 到第 $r$ 个柜子未被买走的礼物中是否有两个礼物编号相同。

## E. 买礼物 (数据结构)

直接维护区间内有没有2个相同的数不行

如果已知每个数的下一个相同数在哪, 查区间内下一个数最早出现的位置是不是在区间内即可。

(即查区间最小值是否小于  $r$ , 用  $\text{PST}$  线段树 / ST表实现)

买走物品怎么办?

除了记每个数的下一个数在哪 ( $\text{next}[i]$ ) 还记它前一个数在哪 ( $\text{last}[i]$ ), 于是  $\text{next}[\text{last}[i]] = \text{next}[i]$

$$\text{last}[\text{next}[i]] = \text{last}[i]$$

$$\text{next}[i] = \text{last}[i] = \infty$$



## F-匹配串

- 一个模式串指仅包含小写英文字母和至少一个'#'的字符串，其中'#'可以匹配一段任意长度的任意小写字母字符串。
- 一个匹配串指待匹配的只包含小写字母的字符串。
- 一个模式串和一个匹配串相匹配当且仅当把模式串里面的'#'全部分别替换成空或一段小写字母字符串后，两个串完全相同。
- 现在给出n个模式串，问有多少不同的匹配串与这些模式串全部相匹配。
- 如果答案有无穷多个，输出-1。

## F. 匹配串 (枚举优化)

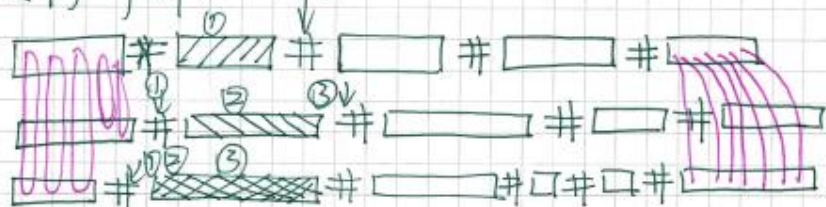
结果要么是0, 要么是无穷

因为井可以任意替换, 且每个模式串都有一个井

∴ 每个模式串都可以利用井填加一些东西

eg.  $abc\#e \Rightarrow \underline{abcde} / \underline{abcabcode}$   
 $a\#cde \Rightarrow \underline{abcde} / \underline{abcabcode}$

如何判断? ②③



所有解都有

当一段字符串被2个井夹在中间, 他们都能变得一样  
(且还能一起加东西)

∴ 只有第一个井前和最后一个井后的东西影响结果

以第一个井前为例

得到n个串  $t_1, t_2 \dots t_n$

~~它们的公共前缀长度~~

设  $t_n$  是其中最长的一个

则  $t_1 \sim t_{n-1}$  都是  $t_n$  的前缀





## G-糖果

- 在一个幼儿园里面有 $n$ 个小朋友，分别编号 $1, 2, \dots, n$ 。在这些小朋友中有一些小朋友互为朋友关系，总共有 $m$ 对朋友。  
作为幼儿园老师，你想买一些糖果分给小朋友，你知道第 $i$ 个小朋友想要至少 $a_i$ 个糖果，否则他就会不开心。  
同时，如果一个小朋友得到的糖果数小于他某个朋友得到的糖果数，他也会不开心。  
请问你最少买多少糖果才能保证每个小朋友都不会不开心呢？

C. 糖果(并查集)

每个小朋友的糖果数要  $\geq$  他的朋友

他的朋友  $\geq$  他的朋友的朋友

∴ 当一群小朋友有直接或间接朋友时糖果数必须相同, 为需要糖果数最多的小朋友  $a_i$

并查集维护朋友关系, 同一个连通块就是有直接或间接朋友关系的



## H-数字串

- 牛牛发现了一种方法可以将只包含小写字母的字符串按照以下方式使其转换成一个数字串：取其中的每个字母，a转换为1，b转换为2.....z转换为26，然后将这些数字拼接起来。例如，abcz可以转换为12326。  
现在给出一个只包含小写字母的字符串S，你需要找到一个只包含小写字母的字符串T，使得两个串不相同但是能转换成相同的数字串。





## I-序列的美观度

- 设一个长度为 $m$ 的序列 $S$ 的美观度等于有多少个整数 $i$ 满足 $1 \leq i \leq m-1$ 且 $S_i = S_{i+1}$ ，其中 $S_i$ 代表序列 $S$ 的第 $i$ 个元素。
- 给出一个长度为 $n$ 的序列 $a$ ，问在他的所有子序列美观度最大是多少。  
某个序列的子序列是从最初序列通过去除某些元素（也可以不去除，即序列本身也是子序列）但不破坏余下元素的相对位置（在前或在后）而形成的新序列。

## 2. 序列的美观度

用  $dp[i]$  表示前  $i$  个数字 ~~第  $i$  个必须选~~ 的最大美观度

1<sup>0</sup> 不选 / 选了但它与前一个 <sub>(选明)</sub> 不一样:

$$dp[i] = dp[i-1]$$

2<sup>0</sup> 选  $i$ , 且  $i$  是接在和它一样的数后的

$$dp[i] = dp[\text{last}[a[i]]] + 1$$

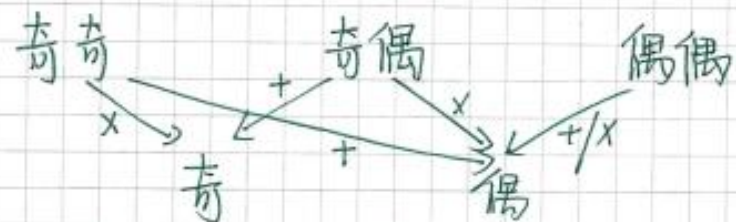
$\text{last}[a[i]]$  为前一个  $a[i]$  的位置 (用数组或 map 维护均可)



## J-加法和乘法

- 有一天牛牛和牛妹在做游戏，规则如下：  
桌面上摆着 $n$ 张纸牌，每张纸牌上写着一个正整数，由牛牛先手轮流执行以下操作：
  - 1.如果桌面上只剩一张纸牌，游戏结束，这张纸牌上的数字如果是奇数则牛牛胜利，反之牛妹胜利。
  - 2.当前行动玩家选择两张纸牌，设上面的数字分别为 $X, Y$ ，接下来玩家从加法和乘法中选择一个并应用到这两个数字上，得到结果为 $Z$ ，接下来将选择的两张纸牌丢弃，并拿一张新的纸牌放到桌面上，在上面写上 $Z$ 。假设双方均以最优策略行动，最后谁会赢？

## J. 加法和乘法



∴ 若牛妹执行最后一次操作  $\Rightarrow$  牛妹必胜

再看牛牛执行最后一次操作的情况:

只有面对2个偶数时他才会输

即牛妹在之前会努力制造偶数  $\Rightarrow$  2个奇数加起来

而牛牛在之前会努力消除偶数  $\Rightarrow$  奇加一偶

∴ 实际的过程为:

牛牛消偶数  $\rightarrow$  牛妹造偶数  $\rightarrow$  牛牛消  $\rightarrow$  牛妹造  $\rightarrow$  ...

...  $\rightarrow$  牛牛执行最后一次操作

∴ 偶数的个数不会变

即 多于2个偶数牛妹胜

只有1个/0个偶数牛牛胜

但前提  
是有至少  
1个奇数  
(不然若全  
偶牛牛也  
没法了)



牛客竞赛  
AC.NOWCODER.COM