2021牛客寒假算法基础集训营第一场

出题大佬：神崎兰子

讲题菜鸡：邓丝雨

牛客竞赛
AC.NOWCODER.COM

总体情况：

- **预估:**

题号	类型	思维	代码	综合难度
F	签到	0	0	0
B	构造	2	1	2
I	构造	2	1	2
E	几何	1	3	2
A	dp	3	2	3
C	构造	3	2	3
D	并查集+计数	2	3	3
H	降幂/找规律	3	2	3
J	数学	3	2	3
G	模拟	1	4	3

- **实际:**

F	对答案一时爽	3036/6622
B	括号	1646/10642
I	限制不互素对的排列	657/2104
A	串	352/1999
J	一群小青蛙呱蹦呱蹦呱	297/1379
E	三棱锥之刻	173/1613
C	红和蓝	72/497
D	点一成零	43/346
H	幂塔个位数的计算	43/973
G	好玩的数字游戏	5/47

A-串

- 长度不超过n，且包含子序列“us”的字符串有多少个？ 答案对取模。所谓子序列，指一个字符串删除部分字符（也可以不删）得到的字符串。例如，"unoacscc"包含子序列"us"，但"scscucu"则不包含子序列"us “
- N <= 10^6

- 直接算比较难算，我们考虑一个字母一个字母往已有的串后面添加——如果我们知道了长度为i-1的字符串有us的数量，能求出长度为i的吗？

- 如果前面已经填好了，第i个字符的添加有两种情况：
- 1.之前已经有完整的us ，所以第i个位置随便添加
- 2.之前没有us，但是有一个或者多个u，当前位置必须加一个s

- **法一：**
- **f[i]表示长度为i的有us的串的数量**
- **1.之前已经有完整的us， 所以第i个位置随便添加**
- **f[i] += f[i-1] * 26**
- **2.之前没有us，但是有一个或者多个u，当前位置必须加一个s**
  - 先算之前有u但是u后面没有s的串的数量：
  - 总数-没有u的-有us的
  - 26^(i-1) – 25^(i-1) – f[i-1]
- **f[i] += (26^(i-1) – 25^(i-1) – f[i-1])*1**
- **综上：f[i] = 26^(i-1) – 25^(i-1) + 25f[i-1]**

A. f[i] 长i的，有us的串的数量

(解法一)
(出题人)

1° 前i-1个字符已有us，再加任意字符

$f[i] = f[i-1] \times 26$

2° 前i-1个有u，但不含us

有u的：总数－无u的

$26^{(i-1)} - 25^{(i-1)}$

含us的：$f[i-1]$

$\therefore f[i] = 26^{(i-1)} - 25^{(i-1)} - f[i-1]$

综上 $f[i] = 26^{(i-1)} - 25^{(i-1)} + 25f[i-1]$

注意：不等于 $C \times 26^{(i-2)}$

选一个地方放"u"

其它位置随意

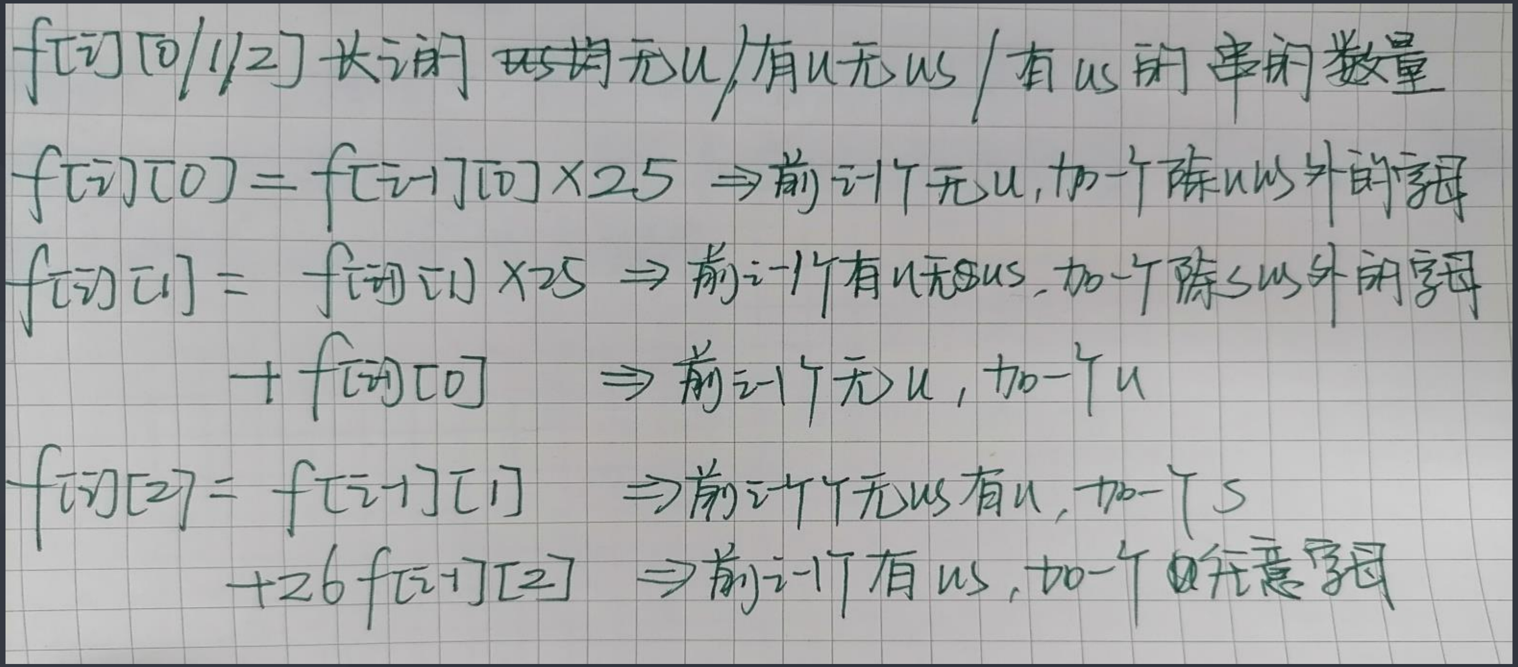
因为对诸如：

uuu 这样的串

C_{n-1} 会把3个位置都选一次

就计算重复了

- 法二：
- 既然我们需要前i-1个有u没有s的，就把所有点情况都放在状态里
- f[i][0/1/2]表示长度为i的 没有u的串/有u但是u后面没有s的串/有us的串的数量


f[i][0/1/2] 长i的 无u/有u无us/有us的串的数量

f[i][0] = f[i-1][0]×25 ⇒ 前i-1个无u，加一个除u,s外的字母

f[i][1] = f[i-1][1]×25 ⇒ 前i-1个有u无us，加一个除s,u外的字母

+ f[i-1][0] ⇒ 前i-1个无u，加一个u

f[i][2] = f[i-1][1] ⇒ 前i-1个无us有u，加一个s

+26 f[i-1][2] ⇒ 前i-1个有us，加一个任意字母

B-括号

- 请你构造一个非空的括号字符串，包含k个不同合法括号对。所谓括号字符串，是指由'('和')'这两种字符构成的字符串。要求构造的字符串长度不超过100000。
- K<=10^9

B: 《括号》 〈一〉

手工尝试 构造

$k=2$ ()) / (()

2 $1+1$

$k=3$ ())) / ((() / ()()

3 $1+1+1$ $2+1$

⇒ 每个左括号右边有多少个右括号 加起来要为k

⇒ 先画一堆右括号，再在合适的地方加上左括号

构造的串长度不超过 100000，$k \le 10^9$

考虑先画 50000个右括号（在最左边填 50000个左括号肯定够）

计算左括号位置

放a个在最左边 ：$a=k/50000$

零头由一个括号去满足：即放一个在右数第 $k\%50000$ 个右括号左边

△左右括号个数尽量均匀怎么做？

画 $\lfloor\sqrt{a}\rfloor$ 个右括号，$k/\lfloor\sqrt{a}\rfloor$ 个左括号在最左边

再用一个把零头凑上，即在从右往左数第 $k\%(k/\lfloor\sqrt{a}\rfloor)$ 的位右括号左边放一个左括号

C-红和蓝

- 你拿到了一棵树，请你给每个顶点染成红色或蓝色。要求：每个红点周围有且仅有一个红点，每个蓝点周围有且仅有一个蓝点。所谓树，即没有自环、重边和回路的无向连通图。
- $1 \le n \le 100000$

C. 《红和蓝》 <一>

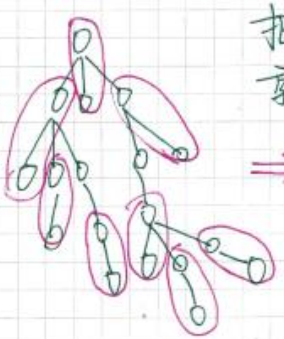
(解法一) 从特殊到一般，从简单到复杂

⇒ 对于叶子节点来说，周围只有一个点：它父亲

∴ 它必须与它父亲的颜色相同

(一个点最多只有一个儿子是叶子节点)

把所有叶子及其父圈一起 ⇒ 这两同色且与其它相邻的异色



把这些点去掉之后

就会有新的叶子，它们还是要满足这个要求

⇒ dfs：1° 这个点若是叶子节点

⇒ 标记它和它父亲同色(赋予一个共同的编号)

2° 这个点不是叶子但未~~被~~与子树中任何点~~配到~~同色

标记它和它父亲同色

某一个点被2个点标记 ⇒ 无解

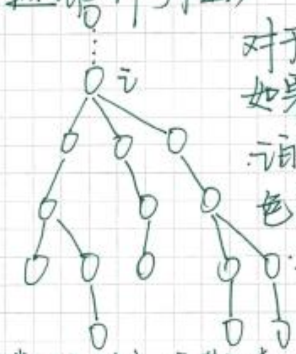
若根节点孤寡 ⇒ 无解

若一个点与父亲编号相同 则颜色相同，否则颜色相反

(再来一遍dfs 即可求出)

(解法二)

(出题人)



对于以i为根的这棵子树

如果除了i都涂好，i该涂什么颜色？

i的某棵子树若有偶数个点显然相邻同色的一对一对全部消化了

某一棵子树若奇数个点，则有个点需与i凑一对

(否则就无解了)

∴ 1° 全是偶数大小子树，i和其父凑一对，同色 2° 只有一个奇子树，i和这个子树根同色

D-点一成零

- 牛牛拿到了一个n*n的方阵，每个格子上面有一个数字：0或1行和列的编号都是从0到n-1现在牛牛每次操作可以点击一个写着1的格子，将这个格子所在的1连通块全部变成0。牛牛想知道，自己有多少种不同的方案，可以把全部格子的1都变成0？这个问题对于牛牛来说可能太简单了。于是他将这个问题变得更加复杂：他会选择一个格子，将这个格子上的数字修改成1（如果本来就是1，那么不进行任何改变），再去考虑“点一成零”的方案数。牛牛想知道，每次“将某个格子修改成1”之后，“把全部格子的1都变成0”的方案数量。
- ps：请注意，每次“将某个格子修改成1”之后，状态会保留到接下来的询问。具体请参考样例描述。由于方案数可能过大，请对10^9 +7取模
- 1≤n≤500

D.《点一成零》 〈一〉

先考虑没有改变操作

⇒ 按照一定顺序在每个连通块里挑个位置

顺序有 $x!$ 种 (x 为连通块数量)

在每个连通块里选1个有 $C_{连通块大小}^{1}$ 种

∴ $x! *$ (连通块大小乘积)

再考虑每次"变0为1"操作后引起什么?

→ 某个连通块变大

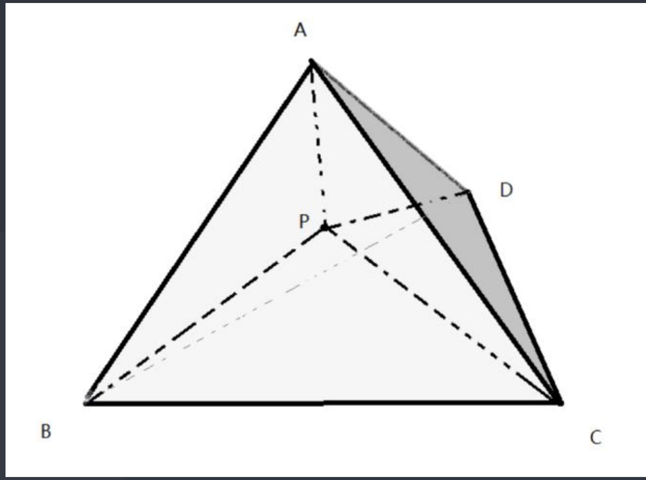
or 产生一个新连通块

or 某两个连通块合并

} 并查集维护现存连通块即可

E-三棱锥之刻

- 牛牛站在一个棱长为的正三棱锥内部的中心。（牛牛是不可移动的）（所谓正三棱锥，指六条棱都相等的三棱锥。正三棱锥的中心指到 4 个顶点距离都相等的那个点）\
- 如上图，牛牛站在P点，他拿着一个染色喷雾，可以用来给正三棱锥的内表面染色。已知喷雾能喷洒的距离为。也就是说，三棱锥内表面距离牛牛不超过的点才有可能被染色。牛牛想知道，正三棱锥内表面能被他染色的最大面积是多少?
- ps：牛牛可看成一个无大小的点。重力对于喷雾的影响忽略不计。
- $1 \le a, r \le 1000$



- 高中数学推一推就有了~~~~
- 注意别算错
- （这个时候就体现了数学好的作用！）

F-对答案一时爽

- 考试结束了，牛牛和牛妹开始对答案。每道题有 ABCD 四个选项，一共有n道题，全部是单选题，每道题正确得 1 分，错误不得分。牛牛和牛妹互相知道了他们每道题选择的选项。他们想知道，两个人得分之和有可能达到的最大值和最小值是多少?
- N<=100

F.《对答案一时爽》

max：两人答案相同时 → 都对 +2分

不同时 → 对一个 +1分

min：两人都错 → 0

G-好玩的数字游戏

- 题目咋说就咋写的模拟

H-幂塔个位数的计算

求底数为a，层数为n 的幂塔的个位数是多少?

定义a 为底，n 层的幂塔为$a \uparrow\uparrow n$

例如

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^{2^{2}}} = 2^{2^{4}} = 2^{16} = 65536$$

$$7 \uparrow\uparrow 6 = 7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}} = ????(\text{too big to calculate QAQ})$$

用数学语言表示，

$$a \uparrow\uparrow i = \begin{cases} a^{a \uparrow\uparrow (i-1)} & i > 1 \\ a & i = 1 \end{cases}$$

求$a \uparrow\uparrow n$的个位数。

H《幂塔个位数的计算》 ←→

(打表找规律或手工找规律)

先看 a^i：

0 : $\boxed{0}$ 0 0 0 ⋯

1 : $\boxed{1}$ 1 1 1 ⋯

2 : $\boxed{2\ 4\ 8\ 6}$ 2 4 8 6 ⋯

3 : $\boxed{3\ 9\ 7\ 1}$ 3 9 7 1 ⋯

4 : $\boxed{4\ 6}$ 4 6 ⋯

5 : $\boxed{5}$ 5 5 5 ⋯

6 : $\boxed{6}$ 6 6 6 ⋯

7 : $\boxed{7\ 9\ 3\ 1}$ 7 9 3 1 ⋯

8 : $\boxed{8\ 4\ 2\ 6}$ 8 4 2 6 ⋯

9 : $\boxed{9\ 1}$ 9 1 9 1 ⋯

循环节为1的 0 1 5 6 个位始终不变，只考虑剩下的

1° a最后一位是2，循环节4：

a^a：考虑 $a\%4=?$　2和4，2种

$a\%4=2$ 时 a^a 为4；$a\%4=4$ 时 a^a 为6

a^{a^a}：考虑 $a^a\%4$　∵a为10x+2，偶数 ∴$a^a\%4=0$

∴后一直为4的倍数 为6

2° a最后一位是3；循环节4：

a^a：$a\%4=?$　1和3，2种

$a\%4=1$ 时：3；$a\%4=3$ 时：7

a^{a^a}：$a^a\%4=?$

{ $a\%4=3$，⋯ 1个3%4=3　2个3%4=1　3个3%4=3，a为奇数 ∴$a^a\%4=3$ 取7

{ $a\%4=1$ 无非多个%4=1的数相乘来，%4都=1，取3

即 $a\%4=1$ 时 为3

$a\%4=3$ 时 为7

3° a最后一位是4，循环节2：a^a　a^{a^a}　$a^{a^{a^a}}$ 指数始终偶数

∴一直是6

4° a最后一位是7：a^a：$a\%4=?$　1和3，2种

$a\%4=1$：a^a，a^{a^a}　$a^{a^{a^a}}$ 指数%4始终1　取7

$a\%4=3$：a^a　a^{a^a}　$a^{a^{a^a}}$ 指数%4 〃〃 3　取3

5° a 〃〃〃〃是8 (同2)

6° a 〃〃〃〃是9 (同4) 一直奇，是9

牛客竞赛 AC.NOWCODER.COM

I-限制不互素对的排列

- 输入一个数，请构造一个长度为 n的排列，使得其中正好有 k对相邻的数gcd（最大公约数）大于 1 。
- 排列是指1到n一共n个数，每个数都出现过且仅出现过1次。例如，{1，3，2，5，4}是一个排列，而 {1，3，4，5，3}、{1，2，4} 则不是排列.
- N<=100000
- k <= n/2

I.《限制不互素对的排列》

≥ 2的相邻两数都互素；相邻两奇数也互素

如果把所有偶数放一起，奇数放一起（从小到大）

偶数们都不互素，奇数们都互素

$n/2-1$ 对

若 $k \leq n/2-1$ 前边放k对组偶数（从小到大）

即：$\underbrace{2\ 4\ 6\ 8\ \cdots\cdots}_{\text{(最后一个偶)}k+1\text{个数}}$

然后接与其相邻的奇数 ~~逐渐~~ 再不断+1，最后把小的未用的奇数放最后

eg：$n=25$ $k=5$

$$\underbrace{2\ 4\ 6\ 8\ 10\ 12}_{k+1\text{个连续偶数}}\ \underbrace{13\ 14\ 15\ 16\ 17\cdots 25}_{>\text{最后一个偶数的所有数}}\ \underbrace{1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 11}_{\text{还未用的奇数}}$$

$k=\frac{n}{2}$：这堆偶数不够用 $\Rightarrow$ 让这堆偶数的最后一个和第一个奇数不互素：选3.6 即偶数是6结尾，奇数用3开头，其它的顺着排

J-一群小青蛙呱蹦呱蹦呱

- 有n个格子，每个格子里有一个数，1,2,3,4...n牛牛放出无穷只青蛙。
- 第一只青蛙的路线是：1->2->4->8->16->....
- 第二只青蛙的路线是：1->3->9->27->81->....
- 第三只青蛙的路线是：1->5->25->125....
- 第四只青蛙的路线是：1->7->49........。。。。。。
- 用数学语言描述，第i只青蛙的路线是首项为1，公比为p(i)的等比数列，其中p(i)代表第个素数。
- 当青蛙跳到一个格子上，如果这个格子上面有一个数，青蛙就会把这个数吃掉。牛牛想知道，所有没有被吃掉的数的lcm（最小公倍数，Least common multiple）是多少？由于这个lcm可能非常大，请输出它对10^9+7取模的值。
- N<=1.6*10^8

J. 《一群小青蛙呱蹦呱蹦呱》 〈—〉

2划掉2^k，3划掉3^k，~~4~~5划掉5^k ……

没被划掉的数满足什么条件？

$\Rightarrow$ 不具有2种以上类型不同的质因子

我们求的是LCM

$p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_n^{a_n}$ 与 $p_1^{b_1}p_2^{b_2}p_3^{b_3}\cdots p_n^{b_n}$ 求LCM的结果

$$\Rightarrow p_1^{\max(a_1,b_1)}p_2^{\max(a_2,b_2)}\cdots p_n^{\max(a_n,b_n)}$$

∴对于每个质因子p，我们求出其最高次数即可

对于p=2 ~~来~~，不止一个因子2又能达到的最大数为：

$$3\times 2^k \quad k=\lfloor \log_2 \frac{n}{3} \rfloor$$

$p=x\ (x>2)$，不止一个因子x又能达到的最大数为：

$$2\times x^k \quad k=\lfloor \log_x \frac{n}{2} \rfloor$$

注意，因为至少2个质因子 ∴p最大为$\frac{n}{2}$

∴从$2\sim\frac{n}{2}$打质数表即可

(且需使用线性筛)

```cpp
    for(int i = 2;i <= n/2; i++)
    {
        if(b[i])
        {
            p[cnt++] = i;
            ans = (ans * calc(i)) % mod;
        }
        for(int j = 0;j < cnt && i*p[j] <= n/2; j++)
        {
            b[i*p[j]] = 0;
            if(i % p[j] == 0) break;
        }
    }
```