

2021牛客寒假算法基础集训营第五场

出题大佬：泽哥哥

讲题菜鸡：邓丝雨





总体情况:

• 预估:

题号	类型	思维	代码	综合难度
A	二分+搜索	3	2	3
B	组合	2	3	2
C	数学	3	2	3
D	差分	3	2	3
E	状压+dp	3	4	3
F	签到	1	0	0
G	贪心	2	2	2
H	扫描线	2	3	3
I	并查集	3	2	3
J	点分治	2	4	3

• 实际:

1	A	(18/263)
2	B	(358/2199)
3	C	(4/91)
4	D	(219/1762)
5	E	(15/204)
6	F	(1407/3375)
7	G	(17/340)
8	H	(2/22)
9	I	(8/111)
10	J	(0/23)



A-美丽的路径

- 叶妹妹非常喜欢图论题，这天她出了一个图论题，有一个 n 个点 m 条边的无向图，其中第 i 个点的点权为 a_i ，她定义一条点数为 k 路径： b_1, b_2, \dots, b_k ；其中点 b_{i-1} 与点 b_i 通过一条边直接相连($2 \leq i \leq k$)，所以路径中可以出现重复的点。她将一条路径的美丽值定义为：假设这条路径的点数为 k ，那么这条路径的美丽值就是此路径上的所有点的点权中第 $\lfloor k/2 + 1 \rfloor$ 小的点权。现在她会询问你是否存在起点为 s 号点并且终点为 t 号点的路径，如果存在则先输出YES，再输出存在的所有路径中的最大的美丽值；否则直接输出NO。

A-美丽的路径

是否存在 \rightarrow 最短路是否存在
(dfs 能否搜过去)

二分答案 x

小于 x 的点权为 1

大于等于 x 点权为 0

0 \rightarrow 0 的点数要过半, 可以反复走

$\Rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$ 在 $2 \times D$ 之间来回走肯定能过半

$\Rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \dots$ 交错出现 0 和 1
且 0 的个数 \geq 1 的个数

用搜索即可判断



B-比武招亲（上）

- 众所周知，天姐姐只喜欢天下最聪明的人，为了找到这样的人，她决定比武招亲！只见天姐姐在榜上留下了这样一道问题，谁做出来了就可以俘获她的芳心！爱慕天姐姐已久的泽鸽鸽问询赶来，只见榜上写着：给定 n, m ，定义一种序列，构造方法如下：
- 泽鸽鸽心有余而力不足，而你作为他最好的基友决定帮助泽鸽鸽俘获美人心！现在，这个重任就交给你啦！

给定 n, m ，定义一种序列，构造方法如下：

1. 在 $[1, n]$ 中任意选择 m 次，得到了 m 个整数（显然数字可能相同）；
2. 将选出的 m 个数字排序之后得到一个序列 $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 。

定义一个序列的贡献为 $\max\{a_1, a_2, \dots, a_m\} - \min\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ，求所有本质不同的序列的贡献和。

为了防止结果过大，将答案为 998244353 取模后输出。

（对于两个序列长度为 m 的序列 A, B ，若 $\exists i \in [1, m], A_i \neq B_i$ ，则序列 A, B 本质不同）

B-比武招亲(上)

贡献是最大值减最小值

⇒ 一个序列最大值和最小值定了的话, 其他数在这个范围内任意选(然后排序④就更好)

⇒ $\max=10$ $\min=1$

和 $\max=11$ $\min=2$

和 $\max=12$ $\min=3$

方法数是一样的

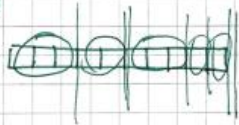
1. 枚举差值 X

当 $\max - \min = X$ 时

\min 从 $1 \sim n-X$ 取值, 共 $n-X$ 种

\min 到 \max 之间是一个不减的序列

共 $m-2$ 个数, 最多 d 个变化



把每次数字+1 看成 一个隔板

$m-2$ 个空位放 d 个隔板, 隔板可挨着

隔板相

⇒ 强制给每个隔板自带一个空位 (这个空位认为带在 \wedge)

和 $m+d$ 个空位放 d 个隔板: C_{m+d-2}^d



第一个隔板只能从第2位置开始放 (否则它自带的空位就没用了)



D-石子游戏

- 叶妹妹很喜欢玩石头，于是这天泽鸽鸽给她出了一道石子游戏，规则是这样的：有 n 堆石子排成一行，其中第 i 堆石子有 a_i 个，叶妹妹可以选择做无数次这种操作：每次操作把连续相邻的 k 个石子堆中的每堆石子数目加一，请问叶妹妹能否让每堆石子的数目都相同呢？叶妹妹觉得这题太简单了，于是丢给了聪明的你，快来解决这个问题吧！

D-石子游戏

首先,若2个位置下标差值 $\geq k$,它两肯定不会一起改

若我们给每个数染不同颜色依次循环;

(即 $k=4$ 时染成 123412341234...)

每次+1操作的区间都是k个不同颜色的区间,即每个颜色的石子都多3个

(\Rightarrow 若最开始每种颜色的石子数不同 \Rightarrow 无解)

如果我们知道最后相等时变成几就好了)

没最后变成 $3X$

000400040004

① 一共有 ① 的个数 X 个
已有 $sum[1]$ 个
(颜色为1的石子数)
 \therefore 预加上 $num[1] * X - sum[1]$

②, ③, ④... 依此类推

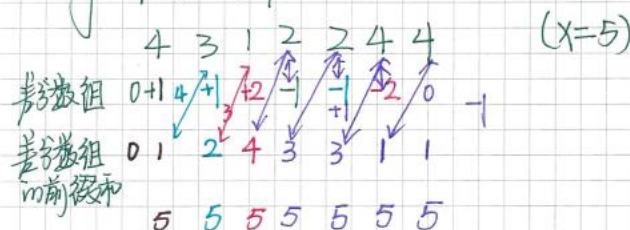
又每个数+1次数是一样 m :
 $num[i] * X - sum[i] = num[j] * X - sum[j]$
 $\rightarrow num[i] * X - sum[i] = num[j] * X - sum[j]$

若不满足则无解

满足的话 $X = \frac{sum[i] - sum[j]}{num[i] - num[j]}$

知道 X 后从 ① 开始依次加到 X 并对相应区间做加法
即可计算出操作数 (注意, 区间+用差分维护即可)

eg: $k=3 \quad n=7$



特殊情况: $n \% k = 0$ 即每种颜色堆数相等

$num[i] - num[j] = 0$

X 需要靠二分来求 (很大都不行时也无解)

eg: $k=4 \quad n=8$
1234 4321



E-树上博弈

- 叶妹妹非常喜欢在树上玩博弈游戏，这天叶妹妹和泽鸽鸽遇到了一个有趣的树上博弈游戏。
- 游戏规则是：给定一颗有 n 个点的无根树，第 i 个点的权值为 a_i ，叶妹妹与泽鸽鸽轮流执行操作。
- 操作如下：
- 选择一个度数为1的节点(即叶子节点)，自己的得分加上该点的权值
- 删去这个节点以及该节点的所有邻接的边
- 当树上没有点了则表示游戏结束，现在规定由叶妹妹先执行操作，双方都想让自己得分与对方得分的差值尽可能大(即尽可能让自己多得分，并且尽可能让对方少得分)，假设叶妹妹和泽鸽鸽都以最优的策略玩这个游戏，求游戏结束时叶妹妹与泽鸽鸽分数的差值是多少？

E-树上博弈

$$n \leq 20$$

可以把树在删若干个位之后的所有状态全部枚举出来

当状态 S 可以通过一次操作变成状态 T , S 向 T 连一条边, 边权为删掉该点的点权

从初始状态到末状态的所有路径即游戏的所有取法

用 $f[st]$ 表示在 st 状态时“叶妹妹-泽哥哥”的值

$$f[st] = \max_{st'} (f[st'] \pm a[st'][st])$$

一个可以变到 st 的状态 删掉那点的权值

当前这一步是叶妹妹 \rightarrow 加法

否则 \rightarrow 减法

注意: 因为叶妹妹和泽哥哥都会选最大的给自己

是叶妹妹操作时取 \max

泽哥哥操作时取 \min



F-我的心是冰冰的

- 泽鸽鸽很喜欢王冰冰，为了证明他是否配得上冰冰，叶妹妹出了一道题来考他：给定了一棵有 n 个点的树，你需要对树的每个点进行染色，且要求每两个相邻(即有边相连)的点颜色不同，叶妹妹想知道至少需要拥有多少种不同的颜色才能完成这种染色？泽鸽鸽觉得这题太简单了，于是聪明的你快来解答吧！



G-模仿游戏

- 有一天叶妹妹和泽鸽鸽他们一起参加一个模仿游戏，这个游戏主要任务是打怪兽，每个怪兽都有一个权值，如果两个怪兽的权值相同，那么表示这两个怪兽是同一类型的怪兽。对于任何一个怪兽，只能由一个人去打败它，并且一个人无法同时打两只及两只以上的怪兽。泽鸽鸽和叶妹妹打败任何一个怪兽都只需要花费一分钟，并且他们只能在整数分钟去打怪兽，不能出现小数分钟。由于这是模仿游戏，因此叶妹妹只能模仿泽鸽鸽去打败怪兽。比如，当泽鸽鸽在之前已经打败了权值为xxx的怪兽后，叶妹妹才能去打权值为xxx的怪兽（即相同类型的怪兽）。现在给出每个怪兽的出现时间和权值，请你设计一个最优的顺序使得所有怪兽都被打败后的时间最早！

G-模拟游戏

泽哥哥优先开新怪如果有多种新怪要开泽哥哥显然应该先打第二次出现早的,这样叶妹妹才能尽早开工

1. 对每只怪兽标记其是否为同类第一只,以及它下次出现的位置

将怪兽按照出现时间排序,同一出现时间是第一只的在前,同是第一只的下次出现的早的在前。

枚举时间,能打的~~最靠前~~
将已出现的怪放到容器里,每次把容器里最靠前(第一只且下次最早)的怪拿出来让叶泽哥哥打,把非第一次出现的怪随便给一个让叶妹妹打即可

1. 第一次出现的怪和非第一次放于容器

第一次的容器支持插入和查最小值 \rightarrow set 或 堆
(取)

非第一次的可以在前每次打死了怪后把它的下次放进去,然后按时间排序,取出时判断是否已经出现即可 \rightarrow 堆 or set)
最早出现的

泽哥哥比叶妹妹多打怪1次

⇒ 如果让叶妹妹按出现顺序打她可以打(不是第一次出现的)的怪, 泽哥哥一定能在她之前把第一次的怪打死

∴ 并不是很关心泽哥哥打怪的具体顺序

(即有多第一次出现的怪同时出现时, 泽哥哥可以任意顺序去打 → 实际打的顺序由叶妹妹决定, 但算时间的时候不关心)

⇒ 第一次的怪: 泽哥哥的时间++
或 等于出现时间 (max)

非第一次: 叶妹妹时间++
或 等于出现时间 (+1)
↓ 第一次和第二次一起出现

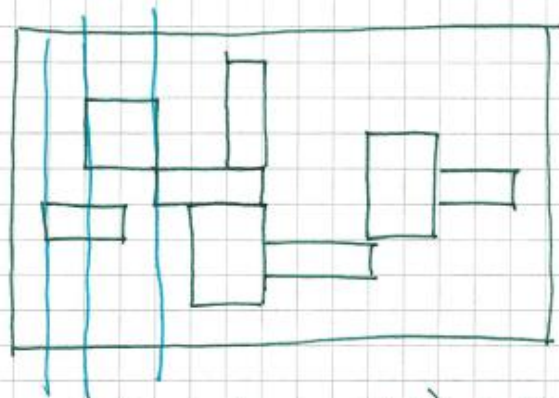
注意: 当泽哥哥闲着(没有第一次的怪)
且叶妹妹已经加到巧 ~~有怪~~
让泽哥哥来分担一个怪



H-白色长方形

- 叶妹妹喜欢长方形，有一天她拿到了一个关于长方形的简单题：在一个长为 C 宽为 V 的网格上，一开始网格上的每个点都是白色，然后给定 n 个互不相交的矩形区域，将这些矩形区域上的点全部染成黑色，我们将长为 a 宽为 b 并且所有点为白色的长方形与长为 bbb 宽为 aaa 并且所有点为白色的长方形都称为白色长方形，请问此时的网格中最多可以构成多少种不同的白色长方形呢？叶妹妹觉得这个题太简单了，于是她丢给了你，聪明的你快来解决这个问题吧！
- 注意：两种不同的白色长方形指两种白色长方形至少有一个点不相同，网格是从点 $(1,1)$ 到点 (C,V) ，矩形的长和宽指的是矩形长边的点数和矩形宽边的点数。

H-白色正方形



$a=1$

竖着扫时考虑

横着扫考虑

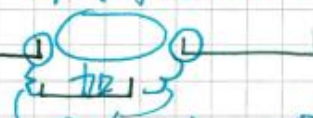
扫描线 每根扫描线维护那些区间是黑的
长度 $\geq a$ 的白区间 答案即可加上 (长度 $- a$)

用 set / 线段树维护 (两矩形无公共点只记有无即可)

set: 存黑区间左右端点

新加一个黑区间: 已有

中间的贡献会消失



新加这两段贡献

删一个黑区间

已有



这两段贡献减掉

新加这两段贡献



I-正十字

- 叶妹妹最近遇到了一个简单题，在一个 $n*$ 的网格中，每个格子的权值要么是0，要么是1。0表示这个格子为空，可以停留或者经过这个格子；1表示这个格子有障碍物，无法停留也无法经过这个格子。现在定义一个边长为 k 的正十字是以一个格子为中心，然后这个格子连续向上，向下，向左，向右都连续拓展 k 个格子，这 $4*k+1$ 格子都属于这个边长为 k 的正十字，并且正十字里面的所有格子权值都必须为0。我们规定正十字能经过一个点，表示这个正十字的中心能经过这个点。在不越界和不遇到障碍物的情况下，正十字可以通过上下左右四个方向进行平移。现在有QQ询问，每次给你两个格子的坐标 $(x1,y1)$ 和 $((x2,y2)$ ，请问以 $(x1,y1)$ 为起点并且能通过平移到达 $(x2,y2)$ 的正十字的边长最大是多少呢？如果无法到达则输出-1（正十字一定要经过起点）

I. 正十字

首先, 每个点的十字大小肯定要求

→ $f(i, j)$: 以 (i, j) 为中心的十字大小

$$f(i, j) = \min[l(i, j), r(i, j), u(i, j), d(i, j)]$$

(i, j) 分别向上/下/左/右能连上延伸多远

$$l(i, j) = 0 / l(i, j-1) + 1$$

之后若只有少量查询, 可以每次认为是从 (i, j) 出发
到另一个点的所有路径上最小 f 值最大是多少

但现在 Q 很大, 每次找路径不行 → 考虑把询问离线
(即所有询问存下来), 从大到小枚举答案 → 即先把
所有的 $f(i, j)$ 最大的格子设为可以经过, 然后看它们将
哪些点连起来了, 再加入 $f(i, j)$ 次大的格子们, 依此类推
(询问当中)

直到把所有询问都处理了。(连通用并查集维护)