2021牛客寒假算法基础集训营第四场

出题大佬：九峰&wcy

讲题菜鸡：邓丝雨

牛客竞赛

AC.NOWCODER.COM

总体情况：

- **预估:**

题号	类型	思维	代码	综合难度
A	签到	1	0	1
J	分解质因数	1	1	1
H	遍历树	1	2	2
B	二分+hash等	2	3	2
F	贪心+并查集	3	2	3
G	各种暴力优化	3	2	3
D	二分	3	2	3
E	Dp/折半搜索	3	3	3
I	Dp+线段树	3	4	3
C	模拟	1	4	4

- **实际：**

```
A (1601/8573)
J (633/4305)
B (140/1435)
H (122/588)
G (106/1484)
E (26/290)
F (13/319)
D (12/130)
I (9/109)
C (1/15)
```

A-九峰与签到题

- 九峰正在准备一场毒瘤比赛，他是如此毒瘤以致于他想方设法降低通过率，他认为任意时间内通过率大于等于50%的题为签到题，现按照时间顺序给出整场比赛提交记录，请你输出哪些是签到题。
- $M<=10^5$ $n<=20$

从语文的角度

任意的解释

副词

[wantonly;arbitrarily;willfully] 任随其意,不受约束

从流飘荡,任意东西。——吴均《与朱元思书》

向东向西

详细解释

(1).任随其意，不受约束。 汉 刘向 **《九叹·思古》**：“播规榘以背度兮，错权衡而任意。”**《北史·叔孙建传》**：“初， 俊 卒， 明元 命其妻 桓氏 曰：‘夫生既共荣，没宜同穴。能殉葬者，可任意。’” 宋 梅尧臣 **《送新安张尉乞侍养归淮甸》**诗：“任意归舟驶，风烟亦自如。” 明 李贽 **《答刘宪长书》**：“纵不落髪，亦自不妨，在彼在此，可以任意，不必立定跟脚也。” 清 叶名沣 **《桥西杂记·丛书》**：“后 陶 氏 宗仪 刻**《説郛》**，所録不下千餘种，卷帙虽云繁富，然任意芟削，颇失原书之真。” 巴金 **《家》**九：“他们在街上任意横行，没有人敢出来干涉。”

(2).没有任何条件的。如：任意三角形。

从数学的角度

- 关于“任意”和“存在”
- /*任意的整数是有理数 */
- /*三角形中任意两边之和大于第三边*/
- /*任意两条直线确定一个平面*/
- /*floyd能求任意两点间的最短路*/
- /*任意正整数可以分解为若干个素数之积*/

B-武辰延的字符串

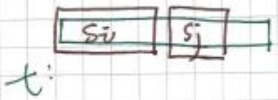
- 众所周知，武辰延很喜欢字符串。
- 这天，他对着两个字符串 s 和 t 发呆，他发现这两个串的前缀有很多相似的地方，s 的两个前缀连接起来竟也是 t 的前缀。
- 武辰延想知道有多少对 s 的非空前缀连接起来是 t 的前缀。
- 形式化地讲，我们把 sis_isi 看作字符串 s 长度为 i 的前缀。
- 对于一对前缀 (si,sj)(允许 i=j)而言，当满足 si+sj=ti+j时，我们认为这两个 s 的前缀拼接后等于 t 的一个前缀。
- 两对 s 的前缀 (si,sj) 与 (si',sj') 不同当且仅当 i≠i'或 j≠j' 。

B-武辰延的字符串

枚举S的一个前缀S_i

另一个前缀S_j需要与t的i+1位到i+j位完全相同

枚举j不可行



其实是t的i+1位开始的后缀
与S有一个长度不为0的公共前缀

二分公共前缀长度
用字符串hash判断是否相等

△字符串hash:

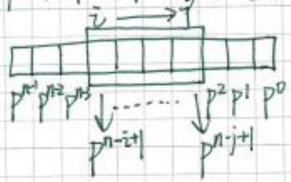
串"233" ⇒ 数字233

串"abc" ⇒ 数字$(((3\times \overset{p}{233}+2)\times 233+1)\times 233 \;\%\; \overset{mod}{(1e9+7)})$

hash值不同串一定不同，hash值相同则认为相同

(p, mod任取，p一般大于字符集大小，mod取大素数)

子串hash值:



(本题还可以扩展kmp，学有余力的同学自行探索)

在维护hash值把每个前缀hash值保留下来

i~j的hash值为:
$S_j - p^{j-i+1} S_{i-1}$

C-

- 大模拟不讲

D-温澈滢的狗狗

- 众所周知，温澈滢在宿舍养了一排 n 只狗狗，每只狗狗都有一个颜色 c_i 。同时，它们只喜欢和不同颜色的狗狗玩，否则它们会觉得很单调无趣。
  也就是说，如果第 i 只狗狗和第 j 只狗狗颜色不同，那么它们可以拥有亲密关系，它们亲密度可以表示成 $|i-j|$，否则它们就不能建立亲密关系。
  当 n 只狗狗颜色两两不同时，它们有 $n(n-1)/2$对亲密关系；当 n 只狗狗的颜色完全一致时，它们之间就不存在任何一对亲密关系。
- 我们把这么多对亲密关系取出来，以亲密度为第一关键词，编号较小的狗狗的编号为第二关键词，编号较大的狗狗的编号为第三关键词排序（三维都按照升序排序）。
- 现在温澈滢想知道第 k 对亲密关系是哪一对狗狗，当然，必要的时候你可以告诉温澈滢这些狗狗之间不存在这么多的亲密关系。

牛客竞赛
AC.NOWCODER.COM

D-温澈滢的狗狗

暴力枚举：枚举每对狗算亲密度，排序 $O(n^2\log n)$；

枚举亲密度(即狗的下标差)，扫一遍看该亲密度的狗有哪些(几对) $O(n^2)$ (直到找到第k对)

若第k对的亲密度为x ⇒ 小于x的那些狗什么顺序也不关心

能否快速求出(亲密度)小于x的狗的对数？

⇓

距离小于x的异色狗的对数

⇓

距离≤x的总对数 — 距离<x的同色对数

$(x-1)+(x-1)+\cdots+(x-1)+(x-2)+(x-3)\cdots+1$

将同一个颜色的狗的下标存一个数组，尺取求解

eg: x=5: ①色狗的下标为: 3 4 6 7 10 23

∴二分x值，计算小于x的狗的对数

再数"=x"的有几对，如果<x的对数比k小而≤k的对数比k大则找到答案；<x的对数比k大则x大了；≤x的对数比k小则x小了。

E-九峰与子序列

- 学会字符串哈希后，动态规划选手九峰想要出一道解法为字符串哈希题，于是wcy给他口胡了一道题，却把九峰难倒了，你能帮他解决这个问题吗?
- 给定长度为n的字符串序列a和字符串k，询问a有多少子序列拼接起来等于k。

E-九峰与子序列

法一: $\boxed{n \le 40}$ ($n\le 20$就直接暴搜了不废话)

40可以分两半暴搜

前20个串去和k的前i位匹配

(即记录有多少种方式使k的前i位组成: cnt_1[i])

后20个串去和k的后j位匹配: cnt_2[j]

用 ~~cnt[i]~~ cnt_1[i] + cnt_2[i+1] 组成答案

法二: f[i][j] 前i个串匹配到第j位的方法数
(出题人)

若 a[i]与k的第 j-len_i+1 到第j位匹配

则 f[i][j] = f[i-1][j-len_i] + f[i-1][j]

否则 f[i][j] = f[i-1][j]

滚一维数组可省

F-魏迟燕的自走棋

- 众所周知，魏迟燕正带领着他的自走棋小队驰骋疆场。
- 自走棋这个游戏不需要过硬的操作能力，只需要搭配阵容并分配装备即可，非常适合魏迟燕这种手残党。
- 现在魏迟燕的小队中有 n 个人，仓库中有 m 件装备，每个人只能装备一件装备，每件装备只能分配给一个人。
- 其中，第 i 件装备可以给 ki个人中的一个，分别为 p1,⋯ ,pki，获得的战力提升为 wi，总战力提升即为所有士兵战力提升之和。
- 魏迟燕想知道他能获得的最大总战力提升为多少?

F-魏迟燕的自走棋

· 一个"显然"的贪心：要提高战斗力多的装备优先选（只要能用就用）

→能用而不用，那么它对应的1/2个人至少有1个比它差的装备，换成好装备不香吗？

⇒怎样判断某件装备目前能不能装？（在比它好的都已尽量装上之后）

{ k=1 它对应的那个人还没有装备
{ k=2 它对应的那2个人至少有一个没装备

⇓

看个栗子：(1)之前已选了(①,③)这个装备和(②,③)这个装备
⇒ ① √ ② √ ③ √

(2)之前选(①,③)(②,③)(③,④)(④,①)
① × ② × ③ × ④ ×

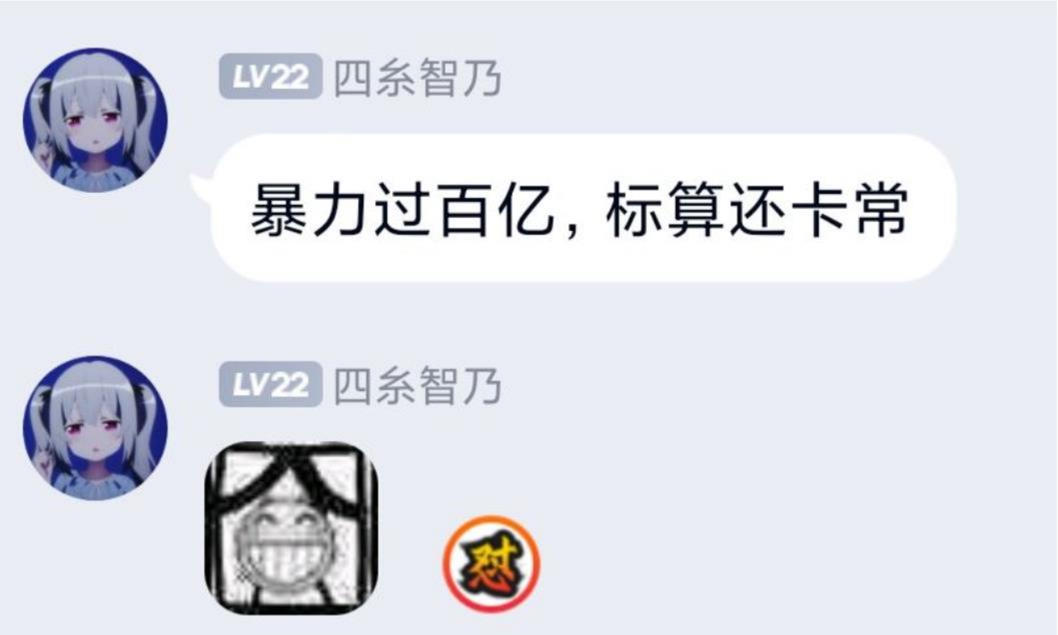
⇒选(x,y)装备 ⇒ x,y中有一个人有装备了
把x y放入一个集合并标记它俩之中还有一个可以用
再选(y,z) ⇒ x,y,z中有2个人有装备
z也合并进这个集合，并标记它仨中还有一个可以用

⇒并查集维护集合及每个集合中还有没有无装备的人（只有有一个和无两种可能）

G-九峰与蛇形填数

- 蛇形填数是一道经典的入门题，但是九峰有自己的想法，他认为盘着的蛇不是一条好蛇，只有不断前进才能突破自我，变成真龙，因此，相比于将矩阵填数成回型(盘踞的蛇)：
  九峰更喜欢将矩阵填成"S"型(行走的蛇)：
  现在给你一个n*n的初始全零的矩阵，请你将其按第二种方法填数，但是这样子太过简单，所以每一次操作九峰会选择一个子矩阵，请你在其子矩阵上进行填数，并在最后输出整个矩阵

1	2	3
6	5	4
7	8	9



H-吴楚月的表达式

- 众所周知，吴楚月在数据结构课的大作业环节选择了表达式求值。
- 他觉得实现一个线性的表达式求值太无聊了，于是他把问题丢到了一棵树上。
- 形式化地讲，这棵树有 n 个节点，1 号点为根，每个节点上都有一个权值 vi，代表参与运算的值。每条边都有一个 opi ，代表运算符。
- 于是树上一条路径变成了 v–op–v–⋯–v–op–v 的形式，对应一个表达式。
- 吴楚月希望你对树上每一个节点 u ，计算出根到 u 的简单路径所对应的表达式的值。
- 由于计算结果可能很大，所以你需要对 1e9+7 取模 。
- 注：表达式优先级即正常的加减乘除的优先级，从左往右，乘除优先级高于加减。

牛客竞赛
AC.NOWCODER.COM

H-吴楚月的表达式

从根往下搜下去即可

每个点维护2个值 即 a+b形式

b是最后一个数(方便之后出现乘法)

+/- x 则 变成 a+b

变成 $\underbrace{(a+b)}_{\text{新}a}\underbrace{\pm x}_{\text{新}b}$

*// x 则 变 a+b

变成 $\underbrace{a}_{\text{新}a} + \underbrace{b*/x}_{\text{新}b}$

I-九峰与分割序列

- 给出一个序列，将其分割成若干个子区间，子区间的贡献为：若前一个子区间的长度大于k且该区间长度小 于等于k，则贡献为区间和的两倍，否则贡献为区间和，求一种分割方法，使得所有子区间贡献之和最大，输出最大贡献。

I. 山峰与分割序列

$f[i][0/1]$ 前i个数都分好了，(最后一段的最后一个数是i)

最后一段长度 $\le k$ / $>k$ 的最大贡献

$$f[i][0]=\max\begin{cases}f[j][0]+sum[j][i] \\ f[j][1]+2sum[j][i]\end{cases}\quad (i-j\le k)$$

$$f[i][1]=\max\begin{cases}f[j][0]+sum[j][i] \\ f[j][1]+sum[j][i]\end{cases}\quad (i-j>k)$$

($sum[j][i]$ 可以用前缀和维护)

但枚举j无法承受

$\Rightarrow$ 用线段树维护 $f[j][0]+sum[j][i]$

$f[j][1]+sum[j][i]$

$f[j][1]+2sum[j][i]$

(i增大时执行区间加操作)

max即为查询区间最大值

若第i个数未必是一段的最后一个(认为可以直接插在后面)

$$f[i][1]=\max\begin{cases}f[i-1][0]+sum[j][i] \\ f[i-1][1]+sum[j][i]\end{cases}$$

牛客竞赛
AC.NOWCODER.COM

J-邬澄瑶的公约数

- 众所周知，邬澄瑶正在学习欧几里得算法。
- 现在她已经可以轻松求解 gcd(x1,⋯ ,xn)，并为此洋洋得意。为了整治狂妄自大的邬澄瑶，她的室友把 gcd(x1p1,⋯ ,xnpn)这个式子甩给了他。
- 邬澄瑶被难住了，只好来求助于你，希望你帮她求出这个式子。
- 由于结果可能很大，你需要对 1e9+7 取模。
- 特别地，邬澄瑶的室友认为 gcd(x)=x。

J. 邹澄瑶的公约数

$$\gcd(x_1^{p_1}, x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n})$$

当x_i拆成质因子相乘：

$$x_1 = q_1^{k_1} q_2^{k_2} \cdots q_t^{k_t}$$

$$x_1^{p_1} = q_1^{k_1 p_1} q_2^{k_2 p_1} \cdots q_t^{k_t p_1}$$

$\Rightarrow$ 只需要知道每个质因子在x_i中的次数

$\Rightarrow$ 求每个质因子在x_i中的次数

gcd中每个质因子的次数都应取最小值