

# 2021牛客寒假算法基础集训营第六场

出题大佬：Alan233

讲题菜鸡：邓丝雨





# 总体情况:

## • 预估:

题号	类型	思维	代码	综合难度
A	签到	2	0	1
B	数学	3	2	3
C	签到	0	0	0
D	签到	1	0	0
E	dp	3	2	3
F	数学	3	2	3
G	贪心/状压			2
H	树上并查集	4	4	4
I	广搜	2	1	1
J	最小生成树	2	2	2

## • 实际:

```
1 A (873/2179)
2 B (8/81)
3 C (1640/3716)
4 D (1134/4865)
5 E (49/117)
6 F (413/1273)
7 G (337/2258)
8 H (123/338)
9 I (1186/2504)
10 J (514/2105)
```



## A-回文括号序列计数

- 我们定义一个字符串S是回文的，表示S的左右反转和S相同。
- 我们定义一个字符串是括号序列：
  1. 空串是括号序列。
  2. 两个括号序列P和Q的拼接是括号序列。
  3. 如果P是括号序列， $'(' + P + ')'$ 是括号序列。
- 求长度为  $n$  ( $0 \leq n \leq 10^9$ ) 的回文括号序列的方案数，对 998244353 取膜。

## A-回文括号序列计数

$() \Rightarrow$  这个东西不回文!!!

① 对于任意括号序列:  $(\dots)$  第一个必须左括号  
最后一个必须右括号  $\} \Rightarrow$  它必然不回文

∴ 长度  $> 0$  的回文括号序列不存在  
( $= 0$  时 空串是回文的)



## B-系数

给定一个多项式  $f(x) = (x^2 + x + 1)^n$ ，求它的第  $k$  项系数。



## C-末三位

- $5^n$ 的末三位是多少?

C-末三位

$$5 \xrightarrow{\times 5} 25 \xrightarrow{\times 5} 125 \xrightarrow{\times 5} 625 \rightarrow \dots 125 \rightarrow \dots 625 \dots$$

Handwritten calculation for the last three digits of  $5^n$  for  $n \geq 3$ :

$$\begin{array}{r} \cancel{6}25 \\ \times 5 \\ \hline \cancel{3}0 \end{array}$$

The boxed result  $25$  indicates that the last three digits of  $5^n$  for  $n \geq 3$  are 125, 625, 125, 625, etc., repeating every two numbers.

从  $n \geq 3$  开始每2个数一循环



## D-划数

- 一个智能机器人在黑板上写了 $n$ 个数，它每次划去任意两个数，并在数列的后面写上这两个数的和对11取模的值。例：5 6 7 8 9，划去5 6后，数列变为7 8 9 0.有趣的是，机器人在还剩下两个数的时候突然“罢工”了，已知其中一个数 $cnt$  ( $cnt \geq 11$ )，求另外一个数的值。



D-划数

只剩一个时的值是  $sum \% 11$

剩两个  $cnt, x$

$$\therefore (cnt + x) \% 11 = sum \% 11$$

又  $cnt \geq 11$  即  $cnt$  还未与别数相加取模过

$\therefore$  当  $n > 2$  时  $x < 11$

$$x = (sum - cnt) \% 11$$

( $n=2$  时 直接选另一个就好)



## E-网格

- 有一个  $n$  行  $m$  列的网格，第  $i$  行  $j$  列上有数字  $a_{i,j}$ 。每个位置需要从上下左右四个方向中选择互相垂直的两个。
- 定义  $w(x) = x + \text{popcnt}(x)$ ，其中  $\text{popcnt}(x)$  表示  $x$  的二进制位中 1 的位的数量。
- 如果两个相邻的位置  $(x1, y1), (x2, y2)$  互相位于对方选择的某个方向上，则对答案由  $w(a[x1][y1] \text{ xor } a[x2][y2])$  的贡献，其中  $\text{xor}$  表示二进制中的按位异或。
- 小 Z 想问你答案的最大值是多少。

## E-网格

4个方向选垂直的两个  $\Rightarrow$  上下中选一个, 左右中选一个

$\Rightarrow$  可以分开选 (水平和垂直方向分开考虑)

设  $f[i][j][0/1]$  表示第  $i$  行, 第  $j$  个格子向左选, 上和第  $j$  行前

$f[i][j][0/1]$  表示第  $i$  行, 第  $j$  个格子选左边/右边时第  $j$  行前  
个格子的得分

$$f[i][j][0] = \max \begin{cases} f[i][j-1][0] & ((i, j-1) \text{ 选左边}) \\ f[i][j-1][1] + W(a[i][j] \wedge a[i][j-1]) & ((i, j-1) \text{ 选右边} \rightarrow \text{它俩互选了}) \end{cases}$$

( $i, j$ ) 选了它左边

$$f[i][j][1] = \max \begin{cases} f[i][j-1][0] \\ f[i][j-1][1] \end{cases}$$

每行最后一个相加为总得分; 列的竖着再来一遍



## F-组合数问题

小 M 很喜欢组合数。

小 Z 给了她一个数  $n$  ( $n$  为偶数), 让她计算  $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} \dots + \binom{n}{n}$ , 小 M 一下子就秒掉了, 觉得题好简单。

因此, 小 Z 给了她一个难题: 给定一个数  $n$  ( $n$  是 4 的倍数), 计算  $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots + \binom{n}{n}$ , 答案对 998244353 取模。

小 M 不会做, 请你来帮帮她吧!



在②的基础上需要  $\binom{n}{0}$   $\binom{n}{4}$   $\binom{n}{8}$  ... 为负系数项式子  
才能使得得到  $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} \dots \binom{n}{n}$

还是考虑用  $(a+b)^n + (a-b)^n$  通过奇数项符号不同消除奇数项

$a=1$   $b$  取  $n$ ?

$$\begin{aligned}(a+b)^n + (a-b)^n &= (1+b)^n + (1-b)^n \\&= \binom{n}{0} 1^n b^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} 1^{n-3} b^3 + \binom{n}{4} 1^{n-4} b^4 \\&\quad \dots + \binom{n}{n} 1^0 b^n \\&+ \binom{n}{0} 1^n b^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} b^2 - \binom{n}{3} 1^{n-3} b^3 + \binom{n}{4} 1^{n-4} b^4 \\&\quad \dots + \binom{n}{n} 1^0 b^n \\&= 2(\binom{n}{0} 1^n b^0 + \binom{n}{2} 1^{n-2} b^2 + \binom{n}{4} 1^{n-4} b^4 + \dots + \binom{n}{n} 1^0 b^n)\end{aligned}$$

$b^0$   $b^4$   $b^8$   $b^{12}$  ... 即  $b^{4x}$  为 1

$b^2$   $b^6$   $b^{10}$   $b^{14}$  ... 即  $b^{2x}$  奇数为 -1

$b$  取  $i$  (虚数单位)

$$\therefore (1+i)^n + (1-i)^n = 2(\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots + \binom{n}{n})$$

$$\therefore (1+1)^n + (1-1)^n + (1+i)^n + (1-i)^n = 4 \text{ 倍目标式子}$$

$$\therefore \text{ans} = \frac{0 + 2^n + (1+i)^n + (1-i)^n}{4} \quad \text{快速幂即可}$$

## F-组合数问题

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n} \text{ ① 这是啥东西?}$$

先看更简单的:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} \text{ ②} \Rightarrow 2^n \text{ 即 } (1+1)^n$$

①式即②式把奇数项丢了

考虑用  $(1+1)^n + (1-1)^n$

$$\text{得到 } \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$+ \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2(\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n})$$

$$\therefore \text{①} = \frac{(1+1)^n + (1-1)^n}{2} = \frac{(1+1)^n}{2}$$



## G-机器人

- 有  $n$  个机器人，每个机器人会读入一个  $x$ ，并返回  $ax+b$ 。
- 现在银临姐姐手里有一个数  $x$ ，她想将机器人按某种顺序排列，使得最终返回得到的  $x$  尽可能大。
- 但是计算量太大啦，请你编个程序帮帮她吧。



G-机器人

状压dp

$f[st]$ 表示已经经过 $st$ 状态的机器人时最大得分是多少

$$f[st] = \max (f[st'] \times a_j + b_j)$$

$st'$ 中第 $j$ 位为0 (即第 $j$ 个机器人还没用)

$st$ 中第 $j$ 位为1, 其它位与 $st'$ 相同

G-机器人

$$a_i x + b_i$$

设有2个机器人 $p, q$  (它们在最终序列里相邻),  $p$ 排在 $q$ 前比 $q$ 在 $p$ 前更好

$$q \text{ 前 } q \text{ 后: } q_a(p_a x + p_b) + q_b \quad ①$$

$$q \text{ 前 } p \text{ 后: } p_a(q_a x + q_b) + p_b \quad ②$$

$$① \geq ② \Rightarrow q_a p_a x + q_a p_b + q_b \geq p_a q_a x + p_a q_b + p_b$$

$$q_a p_b + q_b - p_a q_b - p_b \geq 0 \quad (\text{它俩顺序与传入的数无关})$$

(此时 $p$ 在 $q$ 前) (按此排好序即可)



## H-动态最小生成树

- 小 Z 喜欢最小生成树。
- 小 Z 有一张  $n$  个点  $m$  条边的图，每条边连接点  $u_i, v_i$ ，边权为  $w_i$ 。他想进行  $q$  次操作，有如下两种类型：
  1. 修改第  $x$  条边为连接点  $y, z$ ，边权为  $t$ ;
  2. 查询只用编号在  $[l, r]$  范围内的边，得到的最小生成树权值是多少。
- 由于修改和查询量实在是太大了，小 Z 想请你用程序帮他实现一下。





# I-贪吃蛇

- 无限增长的贪吃蛇小游戏：
- 在一个 $n*m$ 的迷宫中，有一条小蛇，地图中有很多围墙，猥琐的出题者用“#”表示，而可以走的路用“.”表示，小蛇他随机出生在一个点上，出生点表示为“S”，他想抵达的终点表示为“E”，小蛇有一个奇怪的能力，他每走一格便会增长一格，即他走了一格后，他的尾巴不会缩回。
- 小蛇想知道他怎么到达他想去的地方，请你帮助他。
- PS：每格长1米，贪吃蛇规定不能撞墙，不能咬自己的身体。

I-贪吃蛇

尾巴不缩回，即走过m点不能再走  $\Rightarrow$  广搜即可  
(求最短其实也不会再走)



## J-天空之城

- 天空之城有5个小镇，名字分别为Ada, Aed, Akk, Orz, Apq，他们也有相互的路径长度。
- 希达早已期盼着天空之城，如今她登上了天空之城，就想走遍天空之城的每一个城市，但是她希望自己走的路的长度越小越好，以节省体力和节约时间。
- 巴鲁同意了，但由于他是主力（男孩子嘛），需要帮希达计算出走遍所有城市的最短路径长度。
- 由于天空之城具有魔力，如果希达想再走一次自己之前走过的路，则她可以在这条路上不花费任何时间。
- 但是天空之城的城市太多了，他实在计算不过来，只得请你来帮帮忙了。

