Vrednovanje opcija

Stefan Nožinić (stefan@lugons.org)

Agenda

- Pozadina
- Šta su opcije
- Modeliranje finansijskih tržišta
- Pretpostavke
- Black-Scholes model
- Ekstenzije

Pozadina

- Akcije su udeo u kompaniji
- Kako modeliramo vrednost akcije?

$$S(T) = \sum_{t=0}^{T} \frac{D_t}{(1 + r_t)^t}$$

Šta su opcije

- Call opcija predstavlja pravo na kupovinu akcija po staroj ceni S(0) u trenutku T
    - T - vreme izvršenja
    - S(0) - cena izvršenja.
- put opcije ima pravo da proda u trenutku T.
- Opcije imaju svoju cenu, V(0)
- Ako cena akcija padne, call opcija je bezvredna.
- Ako cena akcija poraste, call opcija generiše profit u iznosu razlike jer se akcije mogu kupiti i odmah prodati.

- U praksi, obično se kupcu plaća razlika.
- Držač opcije ima pravo da kupi, ali ne i obavezu, tako da opcija barem neće generisati gubitak novca, a može generisati profit u najboljem slučaju.
- Put opcije su kao osiguranje.

Evropske opcije

Call opcija ima vrednost:

$$P = \max(S(T) - X, 0)$$

Put opcija ima vrednost:

$$P = \max(X - S(T), 0)$$

Američke opcije

- može instrument biti kupljen/prodat u bilo kom trenutku između t1 i t2

Evropske Call opcije

Kolika je vrednost opcije u trenutku T=1:

$$C_1 = \max(S(1) - X, 0)$$

Nama treba C0 da utvrdimo vrednost (valuaciju) opcije u trenutnom vremenu.

Pretpostavke

- Vrednost akcije se ponaša po Bernulijevoj raspodeli, odnosno

$$S(1) = uS(0)$$

sa verovatnoćom p

$$S(1) = dS(0)$$

sa verovatnoćom 1-p

$$0 \leq d \leq 1 \leq u$$

obveznica.

$$V_0 = \Delta S(0) + B$$

Sada važi da je:

$$V_1 = u\Delta S(0) + (1+r)B$$

sa verovatnćom p, odnosno

$$V_1 = d\Delta S(0) + (1+r)B$$

sa verovatnoćom 1-p.

Ako cena akcije poreaste, onda je vrednost opcije

$$C_u = \max(uS(0) - X, 0)$$

Ako cena akcije padne, onda je vrednost opcije:

$$C_d = \max(dS(0) - X, 0)$$

Pošto želimo da portfolio izjednačimo sa opcijom onda rešavamo jednačinu:

$$u\Delta S(0) + (1+r)B = C_u$$

$$C_0 = \frac{1}{1+r}(\frac{1+r-d}{u-d}C_u + \frac{u-1-r}{u-d}C_d)$$

Kakve smo pretpostavke napravili?

- Da li vrednost instrumenta zavisi od istorije kretanja?
  - Ako da, onda modelujemo Markovljevijim lancima
- Ako možemo iskoristiti opciju u terminima t1, ..., tn onda

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \max(0, u^k d^{n-k} S_0 - X)$$

$$p = \frac{1+r-d}{u-d}$$

Black Scholes model

Pretpostavke:

- Risk-free povraćaj je uvek konstantan
- Cena akcije se menja po lognormalnoj raspodeli odnosno:

$$\log S$$

se menja po lognormalnoj raspodeli.

- Opcija je evropska call opcija

Black-Scholes jednačina

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

Kako smo došli do ovoga?

$$C(s,t) = e^{-r(T-t)} \int_{-\inf}^{\inf} \max(S - X, 0) q(S) dS$$

Modeliramo ponašanje cene kao ranije, samo sad imamo za svaki interval dt

$$q(S)dS = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(\log S - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

%% E(q(S)) = e^{\mu + \sigma^2 / 2} $$

Mi želimo da nam očekivanje za S bude:

$$se^{r(T-t)}$$

$$\mu = \log(S_0) + r(T - t) - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\sigma^2 = (T - t)vu$$

Rešenje

$$C(0, t) = 0$$

$$\lim_{S \to \inf} C(S, t) = S - X$$

$$C(S, T) = \max(S(T) - X, 0)$$