Sve što ste hteli da znate o M... a niste smeli da pitate

Stefan Nožinić stefan@lugons.org

Zašto ova prezentacija?

- Predavanja koja ćete imati kasnije
- Formalizmi su važni za poznavanje teorije
- Korisno kasnije u radu
  - Na primer, na petničkim projektima

Osnovne strukture i koncepti

- Skupovi

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$N = \{1, 2, 3, ...\}$$

- Isto jako poznat skup: $\mathbb{R}$

Operacije nad skupovvima

- unija
- presek
- Razlika
- proizvod

Proizvod dva skupa

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{a, b, c\}$$

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), ...(3, c)\}$$

Proizvod skupa realnih brojeva

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(0,0), (0, 0.0001), ..., (\sqrt{2}, \sqrt{3}), ...\}$$

- Predstavlja sve tačke na dekartovom koordinatnom sistemu

Kako bismo predstavili sve tačke u 3D prostoru?

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$$

Vektori i vektorski prostori

- $\mathbb{R}^2$ je skup svih tačaka, odnosno vektora u 2D prostoru
- Da li moramo da se ograničimo samo na realne brojeve?

Množenje vektora skalarom

$$k \cdot (x, y) = (kx, ky)$$

Sabiranje vektora

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

Da li je $\mathbb{R}^n$ vektorski prostor?

Bazni vektori

- kako vektor (7,5) možemo predstaviti?
- $7 \cdot (1,0) + 5 \cdot (0,1)$

Bazni vektori

- Svaki vektor možemo predstaviti kao linearnu kombinaciju:

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + ... + \alpha_n b_n = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i b_i$$

gde su $\alpha_1, ..., \alpha_n$ neki brojevi (videćemo kasnije i koji) a $b_1, b_2, ..., b_n$ su bazni vektori

Primer za 2D

$$(2, 3) = 2 \cdot (1, 0) + 3 \cdot (0, 1)$$

- šta su skalari ovde?
- šta su bazni vektori?

Skalarni proizvod vektora

$$(1,5) \cdot (2,4) = 1 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 22$$

Generalno

$$(x_1, ..., x_n) \cdot (y_1, ..., y_n) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Matrice

- Način da promenimo/transformišemo bazne vektore!

Primer matrice koja vrši transformaciju u 2D prostoru

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- $v = (10, 20)$

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 \\ 3 \cdot 10 + 4 \cdot 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 110 \end{bmatrix}$$

Primer matrice koja vrši transformaciju u 2D prostoru

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $v = (10, 20)$

$$Iv = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} = ?$$

Množenje matrica

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = ?$$

Koliko je ovo?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = ?$$

A ovo?

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix} = ?$$

Inverzna matrica

- Matrica takva da je $A \cdot A^{-1} = I$
- Za datu matricu A, ne mora da postoji inverzna matrica
- Kako se pronalazi inverzna matrica? Postoje algoritmi koje nećemo pokriti ovde

Skalarni proizvod vektora

$$vu = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = v_x \cdot u_x + v_y \cdot u_y$$

isto kao da smo rekli

$$vu = \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = v_x \cdot u_x + v_y \cdot u_y$$

Suma sumarum posle pauze :)

- vektori i vektorski prostori
- baza vektorskog postora
- matrice
- jedinična matrica
- inverzna matrica
- skalarni proizvod

Funkcije

- Preslikavanje $f : A \to B$
- mi ćemo se baviti najviše realnim funkcijama gde je $A = \mathbb{R}^n$ a $B = \mathbb{R}^m$

Funkcije jedne promenljive

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- na primer $f(x) = x^2$

Šta nam je interesantno kod funkcija?

- traženje x takvo da je funkcija maksimalna ili minimalna

Slikoviti primer

Formalno

koeficijent tangente ja grafiku u tački x_0:

$$k = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Primer

$$f(x) = x^2$$

$$k = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h$$

kada je h jaaaako malo onda je

$$k = 2x$$

za koje x je k=0?

Primer

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$k = \frac{ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh + c - ax^2 - bx - c}{h} = 2ax + ah + b$$

ako je h jaaaako malo onda je

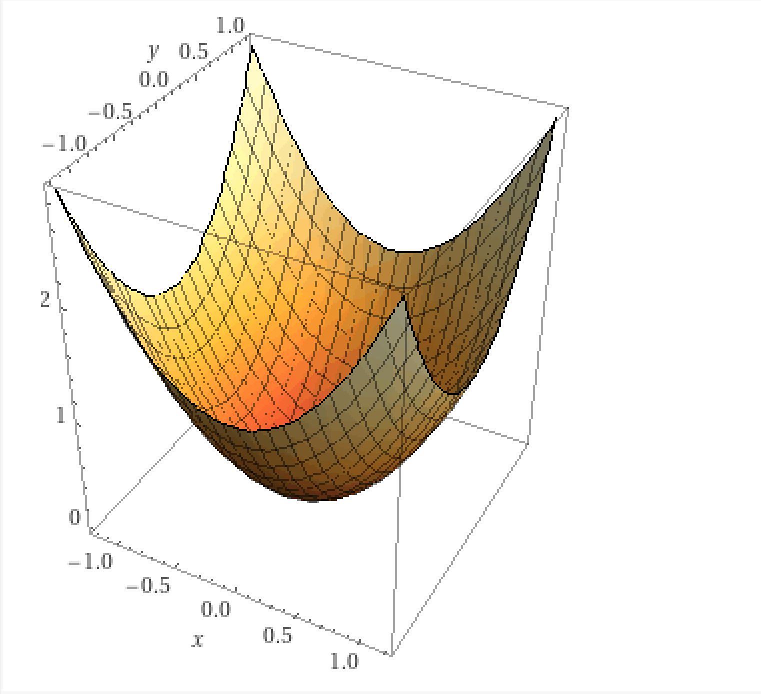
$$k = 2ax + b$$

Još formalnije

- k je zapravo izvod funkcije
- izvod se obeležava na više načina:
  - $f'(x)$
  - $\frac{d}{dx}f(x)$
  - $\frac{df}{dx}$

Funkcija više promenljivih

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



sada nemamo tangentnu pravu nego ravan

Tangentna ravan

- pravu opsijemo sa jednačinom $p(x) = kx + n$
- Ravan opisujemo sa $\alpha(x, y) = ax + by + c$
- Dakle, računamo a,b

$$a = \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$b = \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Traženje minimuma i maksimuma funkcije više promenljivih

treba da nam $a = 0$ i $b = 0$

Primer

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$a = \frac{(x+h)^2 + y^2 - x^2 - y^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 + y^2 - x^2 - y^2}{h} = 2x + h$$

kada je h jaaaako malo onda je $a = 2x$

$$b = ?$$

$$a = 2x$$

$$b = xy$$

ova dva možemo zapisati kao:

$$\nabla f = (2x, 2y)$$

∇f se naziva gradient funkcije f

Funkcije mnooogo promenljivih

- po istom principu
- $f(x_1, x_2, ..., x_n)$
- tražimo parametre za ∇f

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Aproksimacija funkcija

ako je

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

izrazimo $f(x+h)$

$$f(x+h) = f(x) + h\frac{df}{dx}$$

Ako znamo $f(x)$ i njen izvod u toj tački, možemo izračunati koliko je vrednost funkcije u blizini te tačke

Kako tražimo numerički minimum funkcije više promenljivih?

Pokazano je da ako imamo funkciju f i ako se nalazimo u nekoj tački x0, da je njen minimum u pravcu gradient vektora:

$$x_{n+1} = x_n - \mu \nabla f(x_n)$$

Primer

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $\nabla f = (2x, 2y)$
- $\mu = 1/2$
- krenemo od $x_0 = (10, 10)$
- $\nabla f(10, 10) = (20, 20)$
- $x_1 = (10, 10) - 1/2 \cdot (20, 20) = (0, 0)$
- $x_2 = (0, 0) - 1/2 \cdot (0, 0) = (0, 0)$
- kraj

Sažeto

- Imamo funkcije jedne i više promenljivih
- minimum / maksimum tražimo uz pomoć izvoda funkcija
- postoji relativno jednostavan algoritam za traženje minimuma / maksimuma

Za kraj

- postoji cela jedna oblast računarstva koja se bavi numeričkim optimizacijama
- Primene ovoga svega iznetog:
  - Mašinsko učenje
  - Računarska grafika
  - Optimizacioni algoritmi
  - Numeričke simulacije

Literatura

- G. Strang - Calculus
- G. Strang - Introduction to linear algebra
- E. Kreyszig - Advanced engineering mathematics
- I. Milošević - Vektorski prostori i elementi vektorske analize
- J. Shurman - Multivariable calculus