Vrednovanje opcija

Stefan Nožinić (stefan@lugons.org)

Agenda

- Pozadina
- Šta su opcije
- Modeliranje finansijskih tržišta
- Pretpostavke
- Black-Scholes model

Šta je finansijsko modeliranje?

Zašto procenjujemo vrednost

Šta moramo uzeti u obzir?

Akcije

- Akcije su udeo u kompaniji
- Kako modeliramo vrednost akcije?

$$S = \sum_{t=0}^{T} \frac{D_t}{(1 + r_t)^t}$$

Konstantna dividenda i rizik

$$S = \frac{D}{r}$$

Kada dividenda raste za g u svakoj iteraciji

$$S = \frac{D}{r - g}$$

Šta su opcije

- Call opcija predstavlja pravo na kupovinu akcija po ceni X u trenutku T
  - T - vreme izvršenja
  - X - cena izvršenja.
- put opcija je pravo da proda u trenutku T.
- Opcije imaju svoju vrednost, C(0)
- Ako cena akcija padne, call opcija je bezvredna.
- Ako cena akcija poraste, call opcija generiše profit u iznosu razlike jer se akcije mogu kupiti i odmah prodati.

Evropske opcije

Call opcija ima vrednost:

$$P = \max(S(T) - X, 0)$$

Put opcija ima vrednost:

$$P = \max(X - S(T), 0)$$

Američke opcije

- može instrument biti kupljen/prodat u bilo kom trenutku između t1 i t2

Evropske Call opcije

Kolika je vrednost opcije u trenutku T=1:

$$C_1 = \max(S(1) - X, 0)$$

Nama treba C0 da utvrdimo vrednost (valuaciju) opcije u trenutnom vremenu.

Pretpostavke

- Vrednost akcije se ponaša po Bernulijevoj raspodeli, odnosno

$$S(1) = uS(0)$$

sa verovatnoćom p

$$S(1) = dS(0)$$

sa verovatnoćom 1-p

$$0 \leq d \leq 1 \leq u$$

Zamislimo da imamo portfolio od nekog broja date akcije i nekog broja od nerizičnih obveznica.

$$C_0 = \Delta S(0) + B$$

Sada važi da je:

$$C_1 = u\Delta S(0) + (1+r)B$$

sa verovatnćom p, odnosno

$$C_1 = d\Delta S(0) + (1+r)B$$

sa verovatnoćom 1-p.

Ako cena akcije poreaste, onda je vrednost opcije

$$C_u = \max(uS(0) - X, 0)$$

Ako cena akcije padne, onda je vrednost opcije:

$$C_d = \max(dS(0) - X, 0)$$

Pošto želimo da portfolio izjednačimo sa opcijom onda rešavamo jednačinu:

$$u\Delta S(0) + (1+r)B = C_u$$
$$d\Delta S(0) + (1+r)B = C_d$$

$$C_0 = \frac{1}{1+r}(\frac{1+r-d}{u-d}C_u + \frac{u-1-r}{u-d}C_d)$$

Kakve smo pretpostavke napravili?

- Da li vrednost instrumenta zavisi od istorije kretanja?
  - Ako da, onda modelujemo Markovljevim lancima
- Ako možemo iskoristiti opciju u terminima t1, ..., tn onda

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \max(0, u^k d^{n-k} S_0 - X)$$

$$p = \frac{1+r-d}{u-d}$$

Black Scholes model

Pretpostavke:

- Risk-free povraćaj je uvek konstantan
- Cena akcije se menja po lognormalnoj raspodeli odnosno:

$$\log S$$

se menja po normalnoj raspodeli.

- Opcija je evropska call opcija

Black-Scholes jednačina

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\nu^2 S^2(t)\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

Kako smo došli do ovoga?

$$C(s,t) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \max(S - X, 0) q(S) dS$$

Modeliramo ponašanje cene kao ranije, samo sad imamo za svaki interval dt

$$q(S)dS = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(\log S - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E(q(S)) = e^{\mu+\sigma^2/2}$$

Mi želimo da nam očekivanje za S bude:

$$se^{r(T-t)}$$

$$\mu = \log(S_0) + r(T - t) - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\sigma^2 = (T - t)\nu^2$$

$$z = \log(S) - \mu$$

$$dz = \frac{1}{S} dS$$

$$C(s,t) = e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \frac{\max(S-X,0)}{S} p(t,z)dz$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\nu^2 S^2(t)\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

Rešenje

$$C(0, t) = 0$$

$$\lim_{S \to \infty} C(S, t) = S - X$$

$$C(S(T), T) = \max(S(T) - X, 0)$$

$$C(S(t),t) = N(u)S(t) - N(d)Xe^{-r(T-t)}$$

$$u = \frac{1}{\nu\sqrt{T-t}}(\log(\frac{S(t)}{X}) + (r + \nu^2/2)(T-t))$$

$$d = u - \nu\sqrt{T-t}$$

Numeričko rešavanje

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^1 f(\frac{t}{1-t})\frac{dt}{(1-t)^2}$$

Sada integral ovakvog tipa možemo rešiti Monte Karlo metodom:

$$\int_0^1 f(\frac{t}{1-t})\frac{dt}{(1-t)^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\frac{t_i}{1-t_i})\frac{1}{(1-t_i)^2}$$

Zaključak

- Modeliranje nam pomaže da na sistematian način znamo cene instrumenata
- Za modeliranje nam trebaju pretpostavke o tržištu
- Danas, često nemamo analitička rešenja