Table Of Contents:

今日工作

1、阅读《计算机视觉 模型、学习和推理》第8章第3节——非线性回归。

2、实现贝叶斯线性回归的拟合算法。

非线性回归

之前讨论了线性模型，即状态ω 与变量x 的关系是线性的。

但是很大情况下，是不符合线性关系的。

如果将x 的维度增加，维度增加后的变量为z ，用z 作为ω 概率密度分布的参数，显然ω 与x 的关系就不是线性了。

例如：*z_i = [1, x_i, x_i^2, x_i^3]* 。

$$Pr(w_i|\mathbf{x}_i) = \mathrm{Norm}_{w_i}[\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_i, \sigma^2]$$

$$Pr(w_i|x_i) = \mathrm{Norm}_{w_i}[\phi_0 + \phi_1 x_i + \phi_2 x_i^2 + \phi_3 x_i^3, \sigma^2]$$

主要是通过*z_i = f(x_i)* 这个非线性变换，建立ω 与x 的非线性关系。

最大似然法

同样，与第一节线性回归相似，极值点处的参数(权重)可以由以下公式直接计算：

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = (\mathbf{Z}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{w}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\mathbf{w} - \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi})^{\mathrm{T}}(\mathbf{w} - \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi})}{I}$$

贝叶斯非线性回归

对比贝叶斯线性回归，贝叶斯非线性回归也只是把x 换成了z 。

$$\begin{aligned} &Pr(w^*|\mathbf{x}^*, \mathbf{X}, \mathbf{w}) \\ &= \mathrm{Norm}_{w^*}\left[\frac{\sigma_p^2}{\sigma^2}\mathbf{x}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{w} - \frac{\sigma_p^2}{\sigma^2}\mathbf{x}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} + \frac{\sigma^2}{\sigma_p^2}\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_w,\right. \\ &\qquad\left.\sigma_p^2\mathbf{x}^{*\mathrm{T}}\mathbf{x}^* - \sigma_p^2\mathbf{x}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} + \frac{\sigma^2}{\sigma_p^2}\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^* + \sigma^2\right] \end{aligned}$$

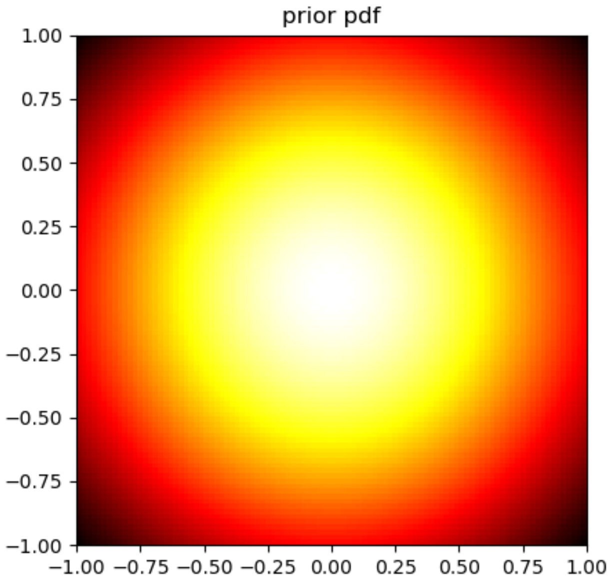
$$\begin{aligned} &Pr(w^*|\mathbf{z}^*, \mathbf{X}, \mathbf{w}) \\ &= \mathrm{Norm}_{w^*}\left[\frac{\sigma_p^2}{\sigma^2}\mathbf{z}^{*\mathrm{T}}\mathbf{Z}\mathbf{w} - \frac{\sigma_p^2}{\sigma^2}\mathbf{z}^{*\mathrm{T}}\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z} + \frac{\sigma^2}{\sigma_p^2}\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}\mathbf{w},\right. \\ &\qquad\left.\sigma_p^2\mathbf{z}^{*\mathrm{T}}\mathbf{z}^* - \sigma_p^2\mathbf{z}^{*\mathrm{T}}\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z} + \frac{\sigma^2}{\sigma_p^2}\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}^* + \sigma^2\right] \end{aligned}$$

贝叶斯线性回归拟合算法

完成了先验分布的计算，注意的点是，先验分布的均值为0，协方差为球形，先验分布的协方差为较大的值，反映先验较弱的事实，这个值由我们自己设置。

而后验分布参数的计算，也是拟合算法的关键暂时还没有完全实现。

先验分布：


prior pdf
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.00 −0.75 −0.50 −0.25 0.00 0.25 0.50 0.75 1.00