

# 规则金属波导

- 什么是规则金属波导，规则金属波导的种类。
- 规则金属波导中的电磁波满足的波动方程及其边界条件，电磁波的模式。
- 矩形波导中电磁波的传输常数 $k_z$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}$$

TE波形， $m, n$ 不能同时为零；TM波形没有 $0n, m0$

- 截止波长，截止频率，导波波长
- 矩形波导的主模式，主模式的频率范围，电场分布，传输功率，等效特性阻抗

- 同轴线中电磁波满足的波动方程及其边界条件
- 同轴线中的主模式波形，传播常数，导波波长，场分布形式，特性阻抗，传输功率
- 同轴线的高次模

# 微带线

- 微带线的工作波型
- 微带线的特性阻抗，有效介电常数和衰减
- 微带线的色散特点：高次模的类型，产生原因

# 谐振腔与振荡器

- 矩形谐振腔

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad k_x = \frac{m\pi}{a}, k_y = \frac{n\pi}{b}, k_z = \frac{p\pi}{d}$$

TE波形,  $m, n$ 不能同时为零,  $p=1, 2, \dots$ ;

TM波形,  $m, n=1, 2, \dots, p=0, 1, \dots$

- 谐振腔的谐振频率, 波长的计算
- 矩形谐振腔的主模式
- 同轴谐振腔
- 振荡器的种类及其特点

# 辐射与天线

- 电磁场用矢量势和标量势表示；势函数满足的波动方程；**Lorenz**条件及其物理意义
- 推迟势的表达形式及其物理意义
- 振子天线的远区辐射场，天线辐射功率计算
- 天线阵的作用，直线式天线阵最大辐射方向的确定
- 常见的天线形式及其应用

## 习题（二）

9-1 试证明一个均匀带电的球壳在作径向振动时将不会辐射。

解：一个均匀带点球壳产生的电场和位于球心的点电荷的场相同。径向振动时电荷没有位移， $\vec{j} = 0$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - r/c)}{r} dV = 0$$

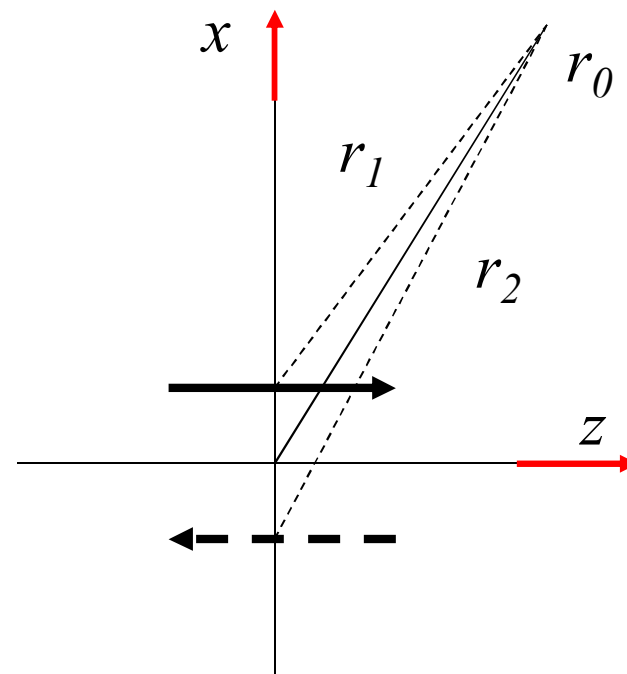
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = 0$$

9-2 一电偶极子以频率 $\omega$ 振荡，振幅为 $P_0$ 。它被平行地放置于离一个无限大理想导体平面距离为 $a/2$ 处，试求其辐射场强及平均辐射功率角分布。

解：  $\vec{P} = P_0 \cos(\omega t) \hat{z}$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2 c} \ddot{\vec{P}}^{ret} \times \vec{r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2 c} (-\omega^2 P_0) \cos(\omega t)^{ret} \hat{z} \times \vec{r} \\ &= -\frac{\mu_0 \omega^2 P_0}{4\pi r c} \cos(\omega(t - r/c)) \sin \theta \hat{\phi}\end{aligned}$$

$$\vec{B}_{tot} = \vec{B}(r_1) + \vec{B}(r_2)$$

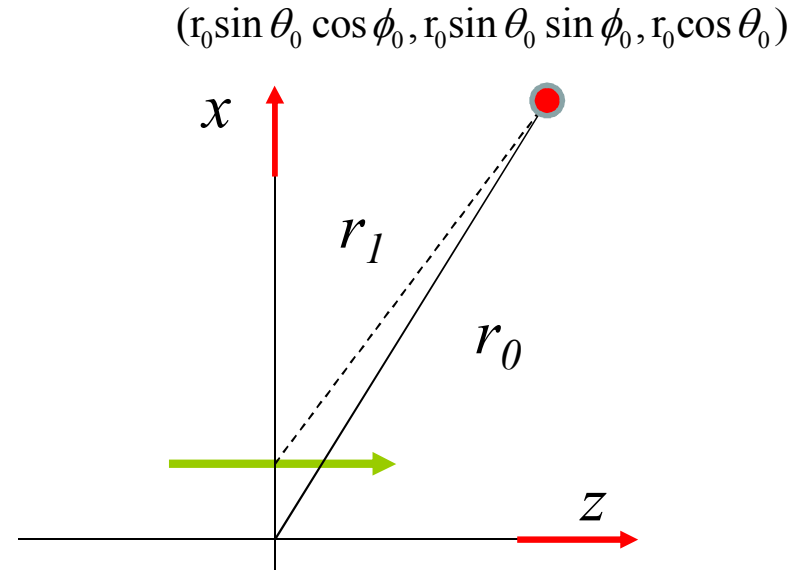




$$r_1^2 = r_0^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2r_0\left(\frac{a}{2}\right)\cos\Theta$$

$$r_1 = \left( r_0^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - r_0 a \sin\theta_0 \cos\varphi_0 \right)^{1/2}$$

$$\simeq r_0 - \left(\frac{a}{2}\right) \sin\theta_0 \cos\varphi_0$$



$$r_1 = r_0 - \frac{a}{2} \sin\theta_0 \cos\varphi_0, \quad r_2 = r_0 + \frac{a}{2} \sin\theta_0 \cos\varphi_0$$

$$\vec{B}_{tot} = \left( \frac{\mu_0 \omega^2 P_0}{4\pi r c} \sin\theta_0 \right) 2 \sin \left( \omega \left( t - \frac{r_0}{c} \right) \right) \sin \left( \frac{\omega a}{2c} \sin\theta_0 \cos\varphi_0 \right)$$

$$\vec{E} = c\vec{B} \times \hat{r} = cB_{tot} \hat{\theta}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\vec{g} \cdot d\vec{S}}{dS/r^2} = (\vec{g} \cdot \hat{r}) r^2 =$$

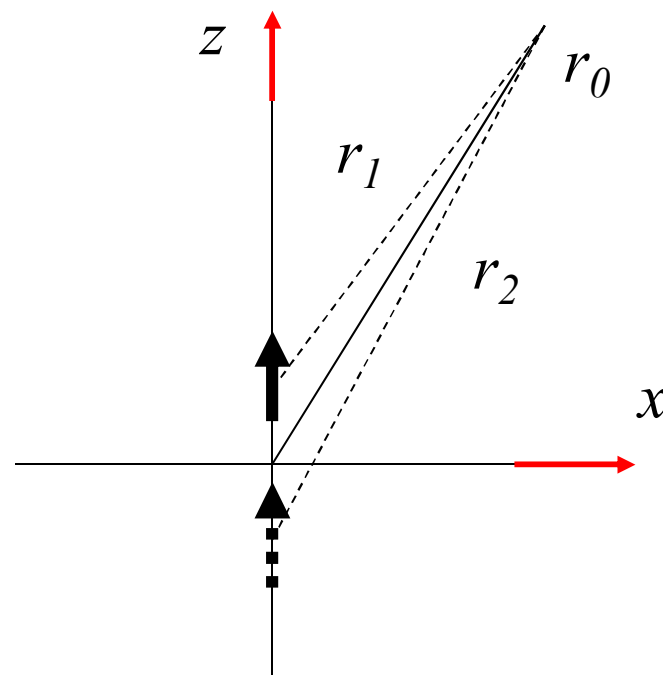
9-3 一电偶极子的电偶极矩为 $P$ ，以频率 $\omega$ 振荡。它被垂直地放置于离一个无限大理想导体平面距离为 $\lambda/2$ 处，这里 $\lambda$ 是和频率 $\omega$ 相应的波长。设此电偶极子的尺度远较 $\lambda$ 为小，并指向正 $z$ 方向。试求其辐射场，辐射功率分布，及辐射总功率。

解： 
$$\vec{E} = \frac{\ddot{P}^{ret}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \sin\theta \hat{\theta}$$

$$= -\frac{\mu_0 P_0 \omega^2}{4\pi r} \sin\theta \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \hat{\theta}$$

$$r_1 = r_0 - \frac{\lambda}{2} \cos\theta_0$$

$$r_2 = r_0 + \frac{\lambda}{2} \cos\theta_0$$



$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}(r_1) + \vec{E}(r_2)$$

$$= -\frac{\mu_0 P_0 \omega^2}{2\pi r_0} \sin \theta_0 \cos(\pi \cos \theta_0) \cos\left(\omega\left(t - \frac{r_0}{c}\right)\right) \hat{\theta}$$

$$\vec{B}_{tot} = \frac{\vec{E}_{tot}}{c} = -\frac{\mu_0 P_0 \omega^2}{2\pi r_0 c} \sin \theta_0 \cos(\pi \cos \theta_0) \cos\left(\omega\left(t - \frac{r_0}{c}\right)\right) \hat{\phi}$$

$$\vec{g} = \left(\frac{\mu_0 P_0 \omega^2}{2\pi r_0}\right)^2 \frac{1}{c} \sin^2 \theta_0 \cos^2(\pi \cos \theta_0) \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{r_0}{c}\right)\right) \hat{r}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \left(\frac{\mu_0 P_0 \omega^2}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{c} \sin^2 \theta_0 \cos^2(\pi \cos \theta_0) \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{r_0}{c}\right)\right) \hat{r}$$

$$P = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi^2}\right) \left(\frac{\mu_0^2 P_0^2 \omega^4}{2\pi c}\right) \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{r_0}{c}\right)\right)$$

9-4 在一长度为 $2\pi a$ 的圆形导线中，通一电流 $i = I_0 \cos \omega t$ 。计算辐射场，辐射功率角分布和辐射总功率。假定 $\lambda \gg a$ 。

解：  $\vec{M} = i\vec{S} = (I_0 \cos \omega t) \pi a^2 \hat{z}$

$$\ddot{\vec{M}}^{ret} = -I_0 \pi a^2 \omega^2 \cos \left( \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right) \hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 \vec{r} \times \ddot{\vec{M}}^{ret}}{4\pi r^2 c} = \frac{I_0 \pi a^2 \omega^2 \cos \left( \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right)}{4rc} \hat{\phi}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{r} \times \vec{E} = -\frac{I_0 \pi a^2 \omega^2 \cos \left( \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right)}{4rc^2} \hat{\theta}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = (\vec{g} \cdot \hat{r}) r^2 = \frac{\mu_0 I_0^2 a^4 \omega^4 \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)}{16c^3} \sin^2 \theta$$

$$P = \oint_s dP = \frac{\mu_0 \pi I_0^2 a^4 \omega^4 \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)}{6c^3}$$

- 矩形波导的变长分别为a, b, TM波的某个模式的纵向电场分量为  $E_z = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}y\right)\cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{2}\pi}{3}z\right)$ , 其中长度单位是厘米。求 (1) 截止波长和波导波长。 (2) 如模式是TM32, 求波导尺寸。

(1) 由电场的表达式得到:  $k_x = k_y = \pi/3, \quad \beta = \sqrt{2}\pi/3$

$$k_c = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{2}\pi/3$$

截止波长  $\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$

波导波长  $\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$

模式是TM32时， $m=3$ ， $n=2$ ，对比电磁波表示式有

$$k_x = \frac{m\pi}{a} = \frac{3\pi}{a} = \frac{\pi}{3} \quad k_y = \frac{n\pi}{b} = \frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{3}$$

所以波导尺寸为 $9 \times 6 \text{ cm}^2$

- 已知TE模式的电磁波的表示式为

$$E_x = j \frac{\omega \mu_0}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta z}$$

$$E_y = -j \frac{\omega \mu_0}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_z = A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_x = j \frac{\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_y = j \frac{\beta}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta z}$$

其中  $k_c^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$  。求波导中主模的传输功率



主模是TE<sub>10</sub>，所以电磁场化简为

$$E_y = -j \frac{\omega \mu_0}{k_c^2} \frac{\pi}{a} A_{10} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_z = A_{10} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_x = j \frac{\beta}{k_c^2} \frac{\pi}{a} A_{10} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-j\beta z}$$

其中  $k_c^2 = (\pi/a)^2$ ,  $\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{(2\pi/\lambda)^2 - (\pi/a)^2}$

$$\begin{aligned} P &= \operatorname{Re} \left( \iint \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{s} \right) = \operatorname{Re} \left( \int_0^a \int_0^b (-E_y H_x^*) dx dy \right) \\ &= \frac{a^3 b \mu_0 A_{10}^2 \omega}{4\pi^2} \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \end{aligned}$$

- 为了使方形波导只能传播15GHz模式为TE10，TE01，TE11和TM11的电磁波，求波导边长应设计在什么范围

首先求截止频率

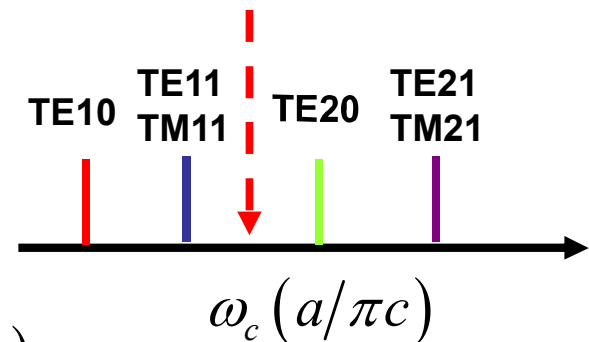
$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (m^2 + n^2), \quad \omega_c = k_c v$$

TE11和TM11的截止频率  $\omega_{c11} = \frac{\sqrt{2}\pi}{a} c$

TE20等的截止频率  $\omega_{c20} = \frac{2\pi}{a} c$

传播条件：  $\omega_{c11} < \omega < \omega_{c12}$

所以波导边长应为：  $\sqrt{2}(\text{cm}) < a < 2(\text{cm})$



- 设计一个谐振频率为10GHz的方形谐振腔。如改用同轴谐振腔实现，求其长度。

$$k^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (m^2 + n^2 + p^2) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

$$a = \left(\frac{c\pi}{\omega}\right) \sqrt{m^2 + n^2 + p^2} = \frac{\sqrt{2}c}{f}$$

10GHz对应的工作波长 $\lambda=3\text{cm}$ 。同轴线中主模式是TEM， $\lambda_g=\lambda$ 。

谐振腔谐振条件是： $\lambda_g/2$ ， $\lambda_g/4$

- 自由空间中一半径为 $a=1\text{m}$ 的圆形天线中通有 $f=5\text{MHz}$ 的电流 $I=1\text{A}$ ，求其在远区产生的电场强度、磁场强度和辐射功率。已知磁偶极子天线的电场表达式为  $\vec{E} = \hat{\phi} \frac{\eta_0 P_m k^2}{4\pi r} \sin \theta e^{j(\omega t - kr)}$   
 式中  $P_m = I\pi a^2, k^2 = \omega^2 \mu \epsilon, \eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$

由 $f=5\text{MHz}$ ，得波长为 $60\text{m}$ 。天线为磁偶极子天线

远区电场  $\vec{E} = \hat{\phi} \frac{\eta_0 P_m k^2}{4\pi r} \sin \theta e^{j(\omega t - kr)} = \hat{\phi} \frac{1.03}{r} \sin \theta e^{j(\omega t - kr)} \text{ (V/m)}$

远区磁场  $\vec{H} = \hat{\theta} H_\theta = -\hat{\theta} E_\phi / \eta_0 = -\hat{\theta} \frac{2.74 \times 10^{-3}}{r} \sin \theta e^{j(\omega t - kr)} \text{ (A/m)}$

辐射功率  $P = \frac{1}{2\eta_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\vec{E}|^2 r^2 \sin \theta d\theta d\phi = 0.0118 \text{ (W)}$