第八章 谐振腔与微波振荡器

8.1 谐振腔的基本性质

谐振腔 --- 限制电磁场能量在一定体积内振荡的结构。

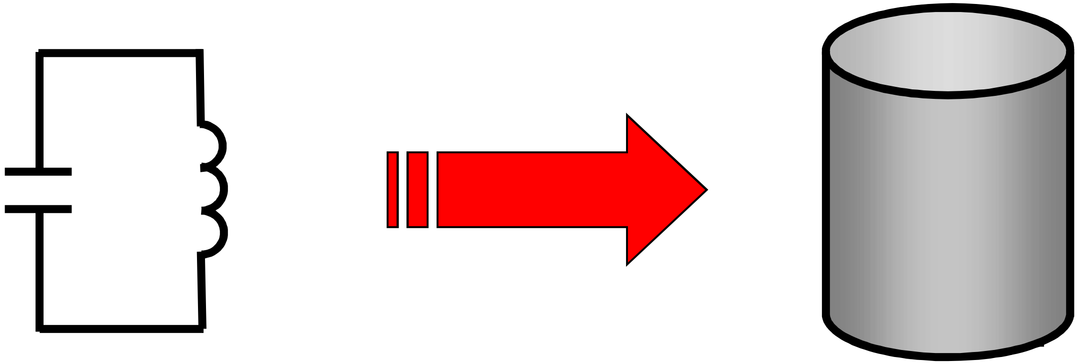
特性：具有储能、选频特性。

用途：类似电路中的集总参数元件谐振回路，用于振荡器、频率计、滤波器和调谐放大器等。

低频LC谐振回路如何向微波谐振腔过渡：

频率升高，减小L,C，减小导体和辐射损耗。

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

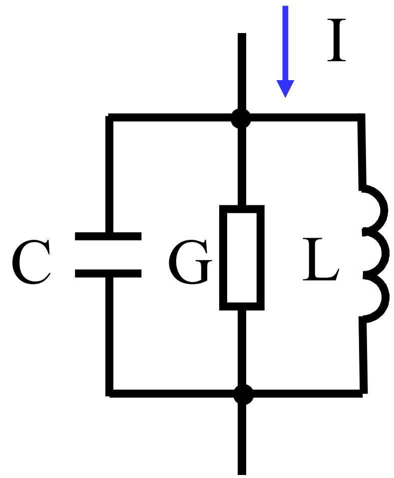


微波谐振腔一般由一段两端短路的传输线构成

微波谐振腔的分析方法：

- ❑ 电磁场的边值问题（严格分析）
- ❑ 驻波法（金属波导谐振腔）
- ❑ 传输线理论（TEM传输线谐振腔）
- ❑ 微扰方法（对谐振腔的微小变化）

谐振腔可等效为并联谐振回路。



假定在并联谐振回路两端接一恒流电源，则回路两端就会建立起电压，当信号源频率改变时，对于恒流源，流过谐振回路的总电流不变，但回路两端的电压有变化的：

$$U = IZ = \frac{I}{G + \mathrm{j}\omega C + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L}}$$

当 $\omega=\omega_0$ ，$U(\omega_0)$ 最大，即谐振时回路两端的电压最大，这是并联谐振回路的特征。这时有

$$\mathrm{j}\omega C+\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}=0 \qquad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

谐振时回路总的阻抗为纯电阻：

$$Z\Big|_{\omega=\omega_0}=Z_0=\frac{1}{G}$$

谐振回路除谐振频率外还有一个重要的基本参量-回路的品质因数 Q_0 。

谐振回路的品质因数定义为：

$$Q_0=2\pi\left.\frac{\text{回路总储能}}{\text{一周期耗能}}\right|_{f=f_0}=\frac{2\pi}{T}\frac{W_e+W_m}{P_d}$$

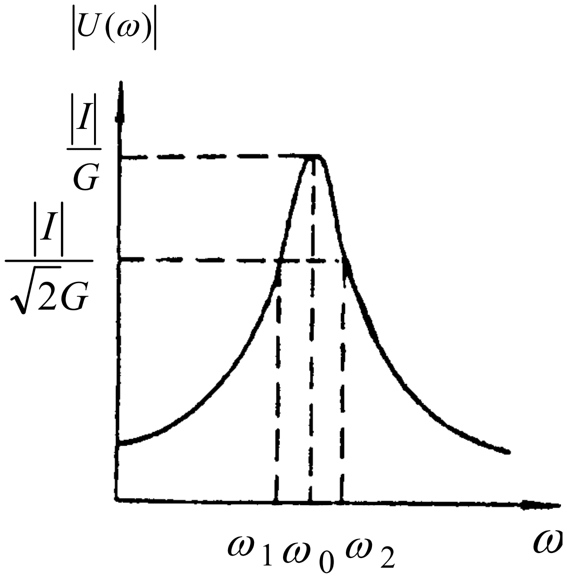
W_e 和 W_m 分别为回路内电容中和电感中的储能，

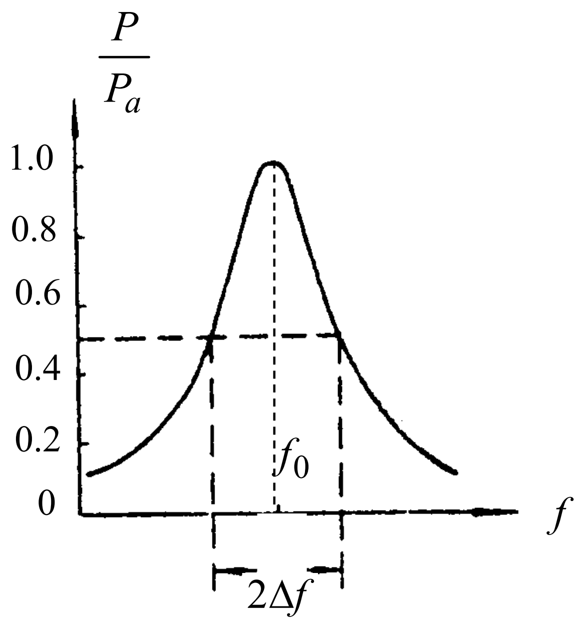
P_d 为回路损耗功率。

品质因数还可有其他一些表达式，表示它的多种物理意义：

$$Q_0 = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{R}{\omega_0 L} \qquad Q_0 = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} = \frac{f_0}{2\,\Delta f}$$

式中 $2\Delta\omega$ 或 $2\Delta f$ 称为谐振回路的半功率点宽度。





在LC回路中，谐振是电磁场能量在电容（电场）和电感（磁场）中相互转换的过程。

在谐振腔中，电场与磁场在时间和空间上都有π/2的相位差，因此，其谐振过程与LC回路中一样，也是电磁场能量以电能和磁能两种形式相互转换的过程。

微波谐振腔与LC谐振电路的特性比较：

LC谐振回路：	集总参数	单个谐振频率	品质因数低
微波谐振腔：	分布参数	多个谐振频率	品质因数高

谐振腔的基本特性

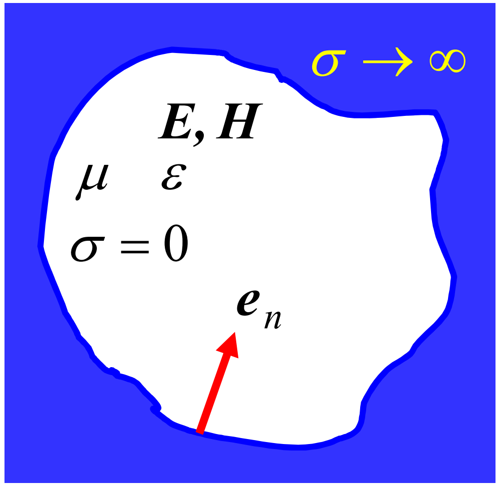
在理想导体边界的条件下，同时满足麦克斯韦方程和边界条件的电磁场，其频率是受到条件限制的。

假定场随时间按简谐律变化，由麦克斯韦方程：

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon \boldsymbol{E}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu \boldsymbol{H}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = k^2 \boldsymbol{E}$$



式中 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$，用 E^* 点乘上式两边，并对空腔体积τ 进行积分，得：

$$\int E^*\bullet(\nabla\times\nabla\times E)\mathrm{d}\tau = k^2\int E^*\bullet E\,\mathrm{d}\tau$$

利用矢量恒等式 $\nabla\bullet(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\nabla\times\boldsymbol{a})\bullet\boldsymbol{b}-(\nabla\times\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{a}$

得到：

$$\int(\nabla\times\boldsymbol{E})\bullet(\nabla\times\boldsymbol{E}^*)\mathrm{d}\tau-\int\nabla\bullet(\boldsymbol{E}^*\times\nabla\times\boldsymbol{E})\mathrm{d}\tau=k^2\int|E|^2\,\mathrm{d}\tau$$

应用散度定理，上式左边第二项可把体积分转变为边界面上的面积分，利用理想导体边界条件，就可证明在边界面上被积函数为零，于是上式成为

$$\int|(\nabla\times\boldsymbol{E})|^2\,\mathrm{d}\tau=k^2\int|E|^2\,\mathrm{d}\tau$$

由此可见，并非任意 k 值的电磁场都能在腔内满足麦克斯韦方程和边界条件。能够在腔内存在的电磁场其 k 值必须满足下列条件：

$$k_i^{\,2}=\frac{\int|(\nabla\times\boldsymbol{E})|^2\,\mathrm{d}\tau}{\int|E|^2\,\mathrm{d}\tau}\quad(i=1,2,3,\cdots)$$

它们是一些分立的值。和这些 k_i值相对应的频率 $f_i=\dfrac{k_i}{2\pi\sqrt{\varepsilon\,\mu}}$ 就是谐振腔中可能存在的电磁场的频率，即谐振频率。下面我们来分析这些频率的电磁场有什么特点。

$$k_i^2=\frac{\int|(\nabla\times \boldsymbol{E})|^2\mathrm{d}\tau}{\int|E|^2\mathrm{d}\tau}=\frac{2\omega_i^2\mu\frac{1}{2}\int\mu|H|^2\mathrm{d}\tau}{\frac{2}{\varepsilon}\frac{1}{2}\int\varepsilon|E|^2\mathrm{d}\tau}=k_i^2\frac{W_{m\ max}}{W_{e\ max}}\Rightarrow W_{m\max}=W_{e\max}$$

在分立的谐振频率下，最大电场储能和最大磁场储能相等。这是谐振发生的根本标志。

当谐振腔存在损耗时，为维持等幅电磁振荡，必须通过耦合装置从外提供能量，补偿腔内的损耗。这时，实际谐振腔的频谱是具有一定宽度的“谐振峰”。

损耗小，品质因数高，谐振峰中心频率与无损时的谐振频率非常接近。

实际谐振腔的谐振频率定义为，谐振腔中能量相互转换，其最大电场储能等于最大磁场储能时的频率。

谐振腔的基本参量

谐振波长λ_0（谐振频率 f_0）

产生振荡的条件是腔内能够形成稳定的驻波，要求腔两端壁间的距离l等于驻波波节间距$\lambda_g/2$的整数倍：

$$l=p\frac{\lambda_g}{2}\quad(p=1,2,\cdots)$$

$$\lambda_g = \frac{2l}{p}$$

对非色散波（TEM波）：

$$\lambda_g = \lambda, \qquad \lambda_0 = \frac{2l}{p}$$

对色散波（TE或TM波）：

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2}}, \qquad \lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}}$$

对非色散波（TEM波）：

$$f_0 = \frac{v_c}{\lambda_0} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \bullet \frac{p}{2l}$$

对色散波（TE或TM波）：

$$f_0 = \frac{v_c}{\lambda_0} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}$$

品质因数Q

品质因数是描述谐振腔的频率选择性和能量损耗程度的物理量，定义为：
谐振腔中储能W与一个周期中损耗能量W_T之比的2π倍，即

$$Q_0 = 2\pi \frac{W}{W_T} \qquad W_T = P_L T \qquad Q_0 = \omega_0 \frac{W}{P_L}$$

$$W=\frac{1}{2}\mu\int_V|\boldsymbol{H}|^2dV$$

仅考虑导体损耗：

$$P_L=P_c=\frac{1}{2}R_s\oint_S|\boldsymbol{J}_S|^2dS=\frac{1}{2}R_s\oint_S|\boldsymbol{H}_t|^2dS$$

式中，R_S为导体表面电阻率，$\boldsymbol{H}_t$为腔壁导体表面的切向磁场。

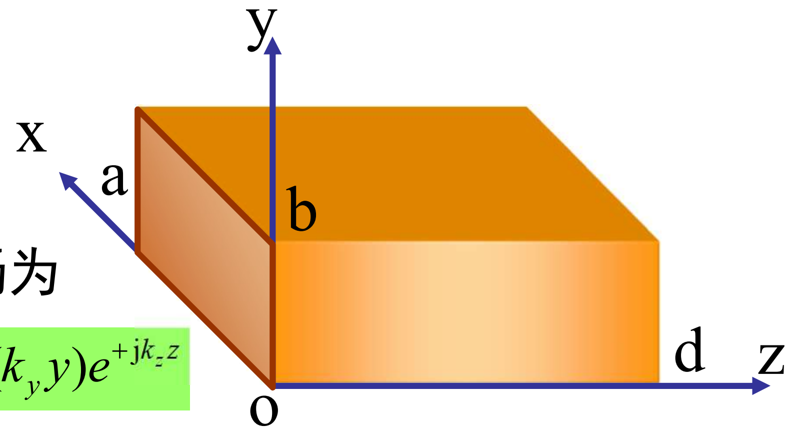
$$Q_0=\frac{\omega_0\mu}{R_S}\frac{\int_V|\boldsymbol{H}|^2dV}{\oint_S|\boldsymbol{H}_t|^2dS}$$

因为 $R_S=1/\delta\sigma$ 和 $\delta=\sqrt{2/(\omega_0\sigma\mu_c)}$，且对非磁性材料， $\mu_c=\mu=\mu_0$ ，则：

$$\boxed{Q_0=\frac{2}{\delta}\frac{\int_V|\boldsymbol{H}|^2dV}{\oint_S|\boldsymbol{H}_t|^2dS}}$$

8.2　金属波导矩形谐振腔

1. 矩形谐振腔中的电磁场



a.　TE_{mnp}模

由于矩形波导两端短路，所以其纵向磁场为

$$H_z = H_{zm}^{+}\cos(k_x x)\cos(k_y y)e^{-jk_z z} + H_{zm}^{-}\cos(k_x x)\cos(k_y y)e^{+jk_z z}$$

式中 $k_x = \dfrac{m\pi}{a}, k_y = \dfrac{n\pi}{b}$ 分别为x、y方向的横向波数。由于z=0处短路，所以：

$H_z\big|_{z=0} = 0$ 得： $-H_{zm}^{-} = H_{zm}^{+} = H_{zm}/2$

驻波法

$$H_z = H_{zm}\cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)$$

由边界条件：在z ＝ d处 $H_z\big|_{z=d} = 0$ ，于是 $k_z = \dfrac{p\pi}{d}$

再利用Maxwell方程，可得到横向场与纵向场的关系式:

$$H_x = -\frac{k_x k_z}{k_c^2} H_{zm} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)$$

$$E_x = -\frac{j\omega\mu\, k_y}{k_c^2} H_{zm} \cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)$$

$$H_y = -\frac{k_y k_z}{k_c^2} H_{zm} \cos(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu\, k_x}{k_c^2} H_{zm} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)$$

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = (\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2 = \omega^2\mu\varepsilon - k_z^2$$

式中 $m,n = 0,1,2,3\cdots$ （m、n两个数中只能有一个为零），$p = 1,2,3,\cdots$。

b. TM_{mnp} 模

同样可先写出纵向电场：$E_z = E_{zm}^{+}\sin(k_x x)\sin(k_y y)e^{+jk_z z} + E_{zm}^{-}\sin(k_x x)\sin(k_y y)e^{-jk_z z}$

同样由于$z=0$、$z=d$处短路，可得 $k_z = p\pi/d$ ，因此各场分量为：

$$E_z = E_{zm}\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)$$

$$E_x = -\frac{k_x k_z}{k_c^2} E_{zm} \cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)$$

$$H_y = -\frac{j\omega\varepsilon\, k_x}{k_c^2} E_{zm} \cos(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)$$

$$E_y = -\frac{k_y k_z}{k_c^2} E_{zm} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)$$

$$H_x = \frac{j\omega\varepsilon\, k_y}{k_c^2} E_{zm} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)$$

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = (\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2 = \omega^2\mu\varepsilon - k_z^2 \qquad k_z = \frac{p\pi}{d}$$

式中 m、$n = 1,2,3\cdots$ $p = 0,1,2,3,\cdots$

2. 矩形腔的谐振波长λ_0

矩形谐振腔中TE_{mnp}模和TM_{mnp}模的 $k_z = \frac{p\pi}{d}$ ，而由

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = (\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2 = \omega^2\mu\varepsilon - k_z^2$$

$$\omega^2\mu\varepsilon = (\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2 + (\frac{p\pi}{d})^2 = (\frac{2\pi}{\lambda_0})^2$$

就可得到矩形谐振腔的谐振波长为

$$\boxed{\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{d}\right)^2}}}$$

谐振腔中存在振荡模式的简并特性(TE和TM简并)。

TE_{mnp} TM_{mnp}

3. 矩形谐振腔的主模 TE_{101}

对工作在最低模式TE_{10}模的矩形波导，在z方向取$\lambda_g/2$长，并在两端加金属短路面，即成TE_{101} 模矩形谐振腔。 λ_g 为矩形波导的波导波长：

$$\lambda_g=\frac{\lambda}{\sqrt{1-(\frac{\lambda}{\lambda_c})^2}}$$

习惯上取谐振腔三边a、b、d对应于坐标x、y、z，且有d>a>b，所以，TE_{101} 模的谐振波长最长，即谐振频率最低，称为矩形谐振腔主模。

其谐振波长为：$$\lambda_0=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{d}\right)^2}}$$

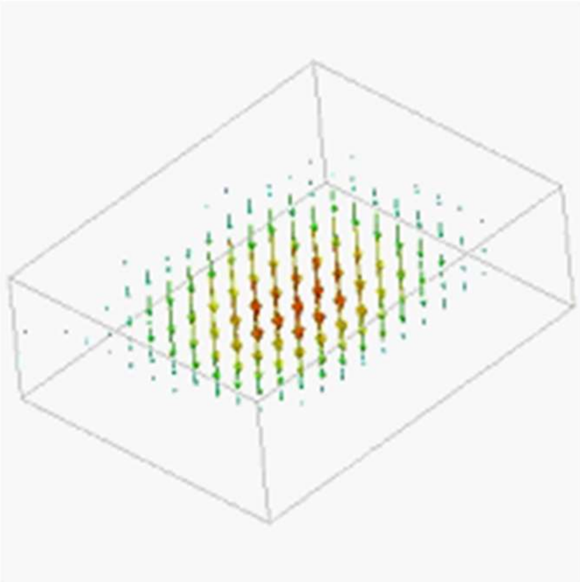
其谐振频率为：$$\omega_0=\pi c\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{d}\right)^2}$$

在 TE_{101} 模谐振腔中，电场只有y方向分量：

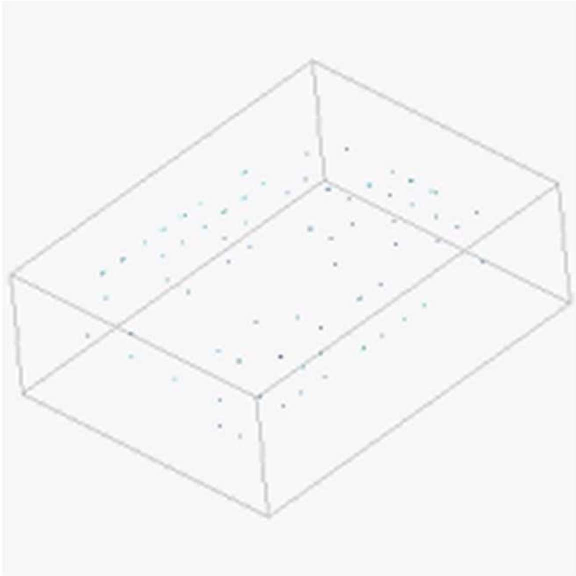
$$\boldsymbol{E}=E_y\,\boldsymbol{e_y}=E_m\sin(k_x x)\sin(k_z z)\,\boldsymbol{e_y}$$

磁场：

$$\boldsymbol{H}=\frac{jE_m k_z}{\omega_0\mu_0}\sin(k_x x)\cos(k_z z)\,\boldsymbol{e_x}-\frac{jE_m k_x}{\omega_0\mu_0}\cos(k_x x)\sin(k_z z)\,\boldsymbol{e_z}$$

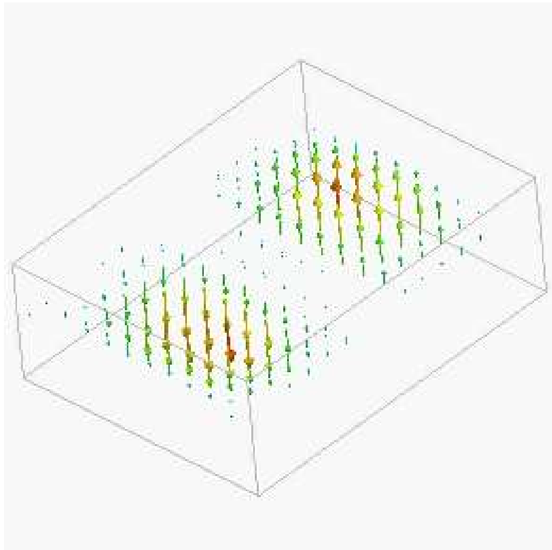


TE101电场



TE101磁场

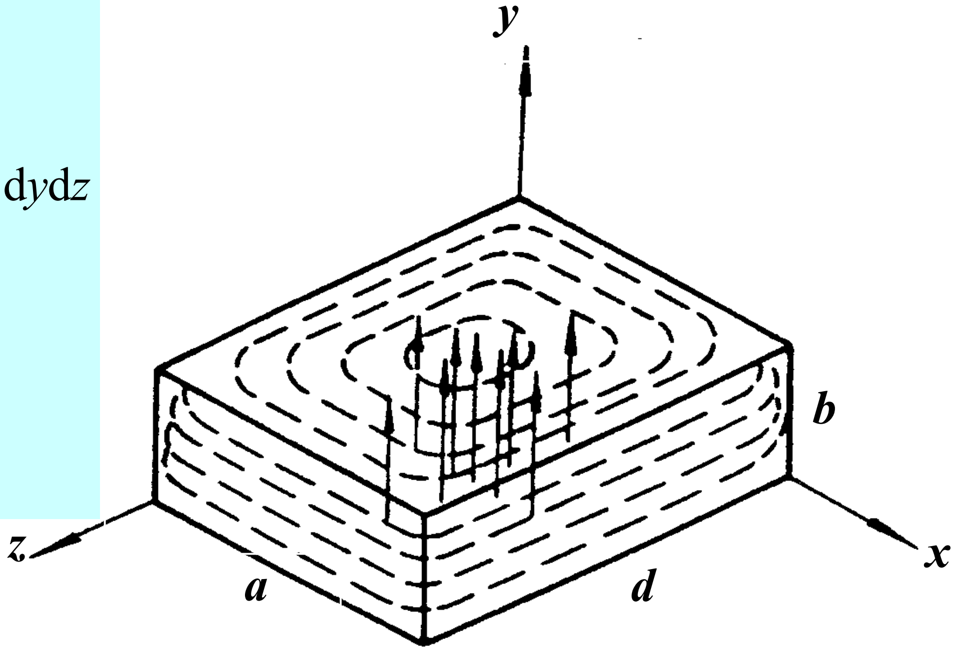
TE102磁场



TE_{101}

$$W_0 = W_{m\max} = W_{e\max} = \frac{1}{2}\varepsilon\int \boldsymbol{E}_y \bullet \boldsymbol{E}_y^* \mathrm{d}\tau = \frac{abd}{8}\varepsilon\, E_m^2$$

$$P_d = \frac{R_s}{2}\oint_s \boldsymbol{i}\bullet\boldsymbol{i}^*\,\mathrm{d}s = \frac{R_s}{2}\oint_s \boldsymbol{H}_t\bullet\boldsymbol{H}_t^*\,\mathrm{d}s$$
$$= R_s\left\{\int_0^a\int_0^b \left|H_x\right|_{z=0}^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_0^b\int_0^d \left|H_z\right|_{x=0}^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right.$$
$$\left.+\int_0^a\int_0^d\left[\left|H_x\right|^2+\left|H_z\right|^2\right]_{y=0}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\right\}$$
$$=\frac{R_s\lambda_0^2}{8\eta^2}E_m^2\left[\frac{ab}{d^2}+\frac{bd}{a^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{d}+\frac{d}{a}\right)\right]$$



固有品质因素的定义式

$$Q_0 = 2\pi\left.\frac{\text{回路总储能}}{\text{一周期耗能}}\right|_{f=f_0} = \frac{2\pi}{T}\frac{W_e+W_m}{P_d}$$

可得TE_{101}模矩形谐振腔的品质因素为

$$\boxed{Q_0 = \frac{\pi\eta}{4R_s}\left[\frac{2b\left(a^2+d^2\right)^{3/2}}{ad\left(a^2+d^2\right)+2b\left(a^3+d^3\right)}\right]}$$

假如a=d=b的立方腔，则简化为 $Q_0 = 0.742\dfrac{\eta}{R_s}$

对铜腔，波长为10cm时，

$Q_0 \approx 19300$

η为TEM波的波阻抗，R_s为构成腔壁金属的表面电阻。

電磁場理論與微波技術

8.3 圆柱谐振腔和同轴谐振腔

任何传输线，当长度为半波长的整数倍，将其两端短路可构成谐振腔。

1. 圆柱谐振腔

与矩形谐振腔分析方法相同，对圆柱谐振腔

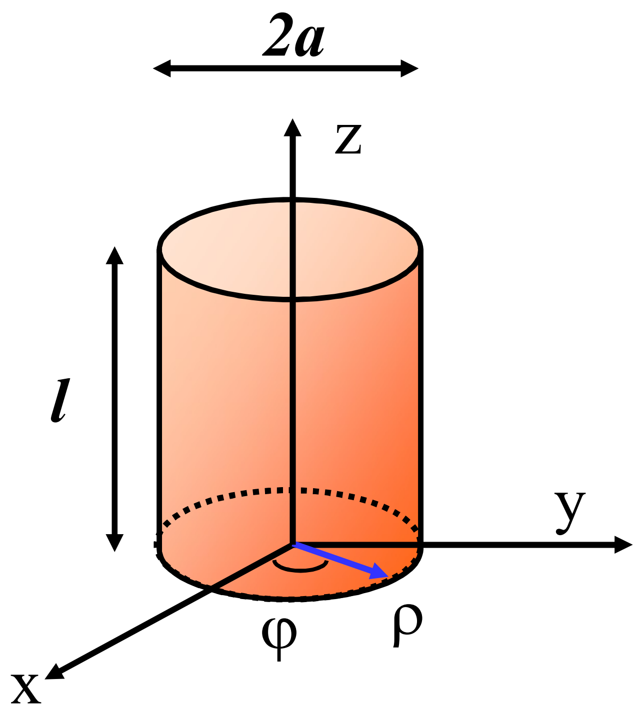
$$k_z=\frac{p\pi}{l}\qquad k_c=\frac{x_{mn}}{a};\quad\frac{x'_{mn}}{a}$$

对应的 TE_{mnp} 模和 TM_{mnp} 模的谐振波长为：

$$\lambda_0=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{x'_{mn}}{\pi a}\right)^2+\left(\frac{p}{l}\right)^2}}\qquad \lambda_0=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{x_{mn}}{\pi a}\right)^2+\left(\frac{p}{l}\right)^2}}$$

TE_{mnp}　　　TM_{mnp}

改变谐振腔的高度 l，可改变谐振频率。



圆波导中的TE01波具有低损耗的特点，因此，圆柱谐振腔TE011模也具有低损耗或高Q的特性。TE111模的谐振波长最长（基模）。

2. 同轴线谐振腔

a $\lambda/2$同轴线谐振腔

同轴线中的电压和电流的驻波分布可由入射波和反射波叠加并满足边界条件来求得：

$$U(z,t)=U_m \sin kz \sin\omega t \qquad I(z,t)=I_m \cos kz \cos\omega t$$

式中 $U_m=I_m Z_0$ 。根据同轴线中电磁场和电压、电流的关系：

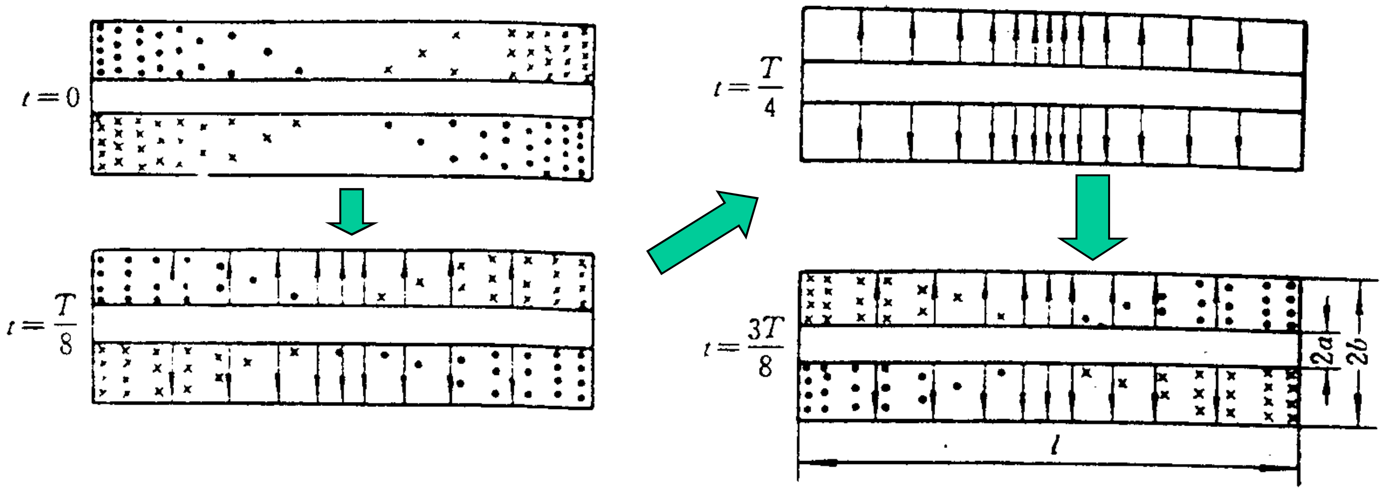
$$E(\rho,\varphi)=-\nabla_T\Phi(\rho,\varphi)=-\frac{U}{\rho\ln\frac{b}{a}}e_\rho \qquad H(\rho,\varphi,z)=\frac{U}{\eta\rho\ln\frac{b}{a}}e_\varphi$$

同轴谐振腔中电磁场分布为

$$E_\rho(\rho,z,t)=\frac{U_m}{\rho\ln\frac{b}{a}}\sin kz\sin\omega t \qquad H_\varphi(\rho,z,t)=\frac{U_m}{\eta\rho\ln\frac{b}{a}}\cos kz\cos\omega t=\frac{I_m}{2\pi\rho}\cos kz\cos\omega t$$

当$l=\lambda/2$的整数倍时，电磁场满足$z=0,l$为零的边界条件。所以：$\lambda_0=2l/p$

电、磁能量相互转换，并在两侧和中间相互移动。



t = 0
t = T/8
t = T/4
t = 3T/8
2a
2b
l

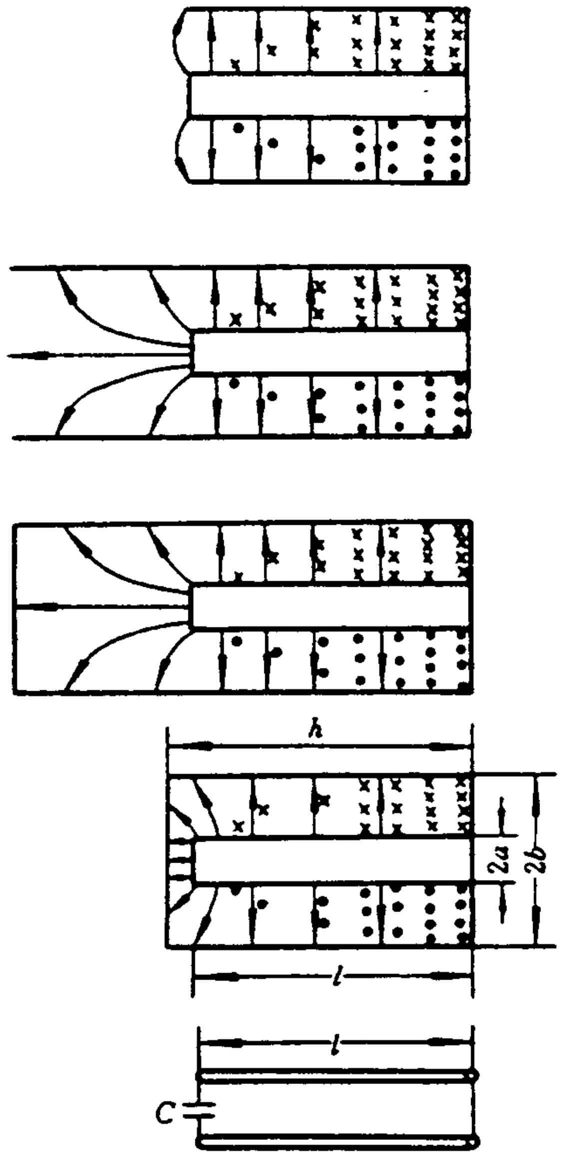
$\lambda/4$同轴线谐振腔

$\lambda/4$同轴腔由一端短路，另一端开路的同轴线构成。开路端一般利用处于截止状态的圆波导来实现。根据端面的边界条件，在谐振时，其腔长应满足：

$$l=(2p-1)\frac{\lambda_0}{4}$$

其谐振波长为：

$$\boxed{\lambda_0=\frac{4l}{2p-1}\quad(p=1,2,3\cdots)}$$

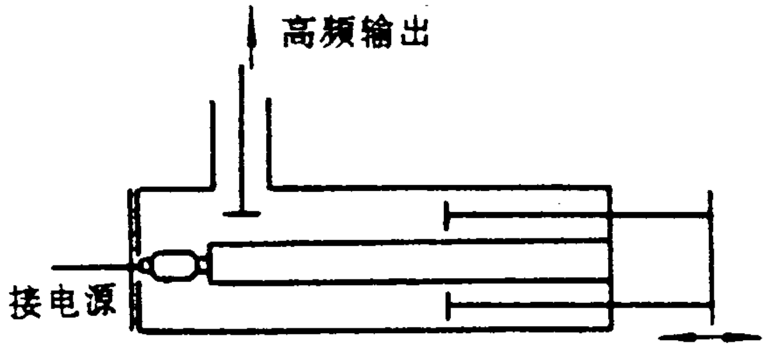


具有缩短电容的$\lambda/4$同轴腔：

改变腔长就可以改变谐振腔的谐振频率

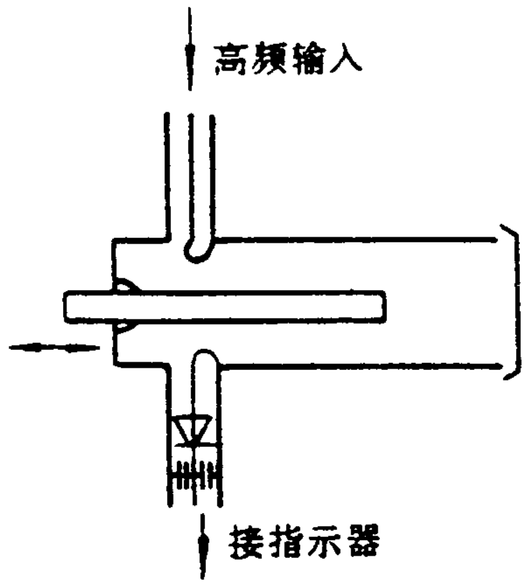
特点：短缝隙距离、大电场强度

应用：宽频带可调放大器或振荡器中的谐振回路，也用于波长计。



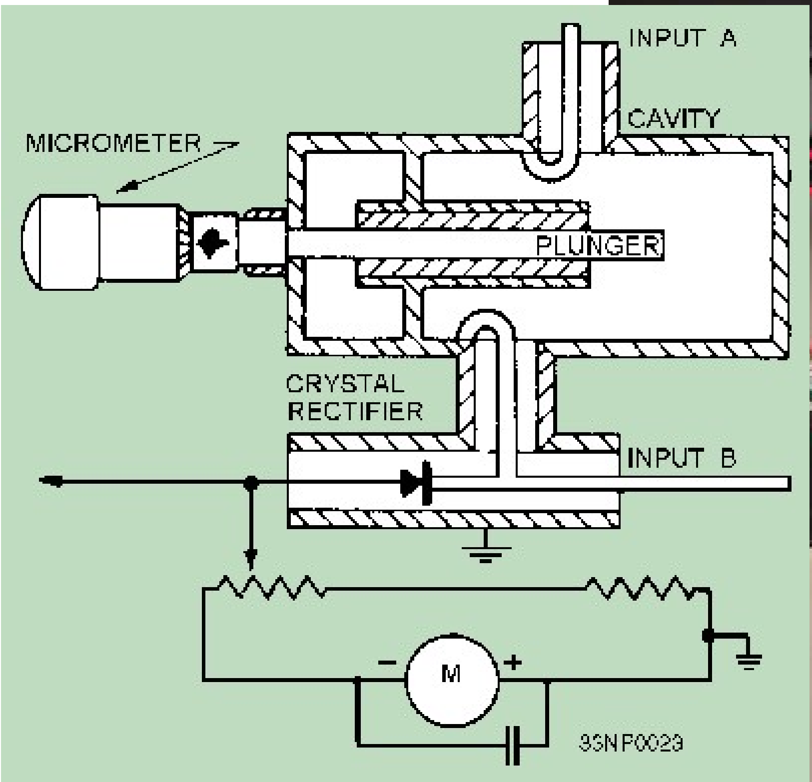
(a)

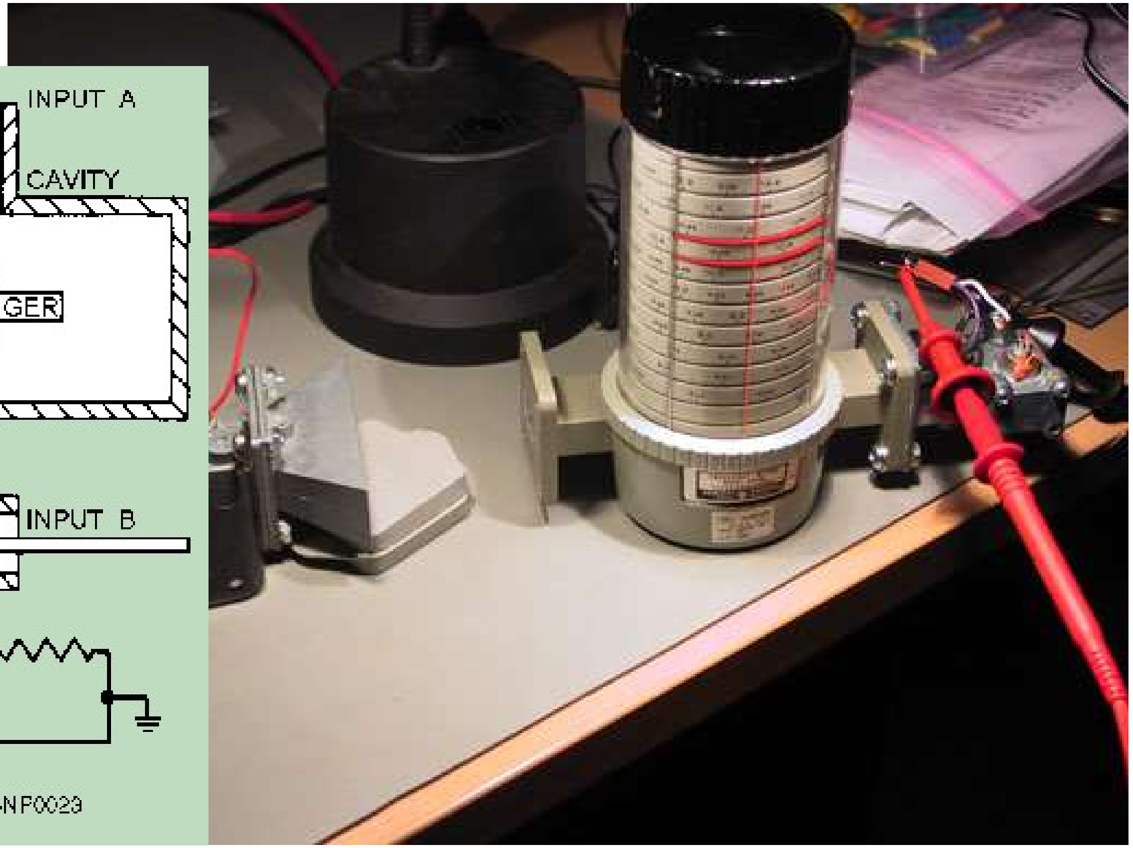
振荡器



(b)

波长计

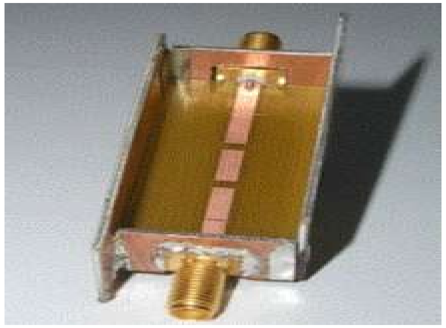




Cavity Wavemeter: Electronic Frequency Counters

8. 4　微带谐振器

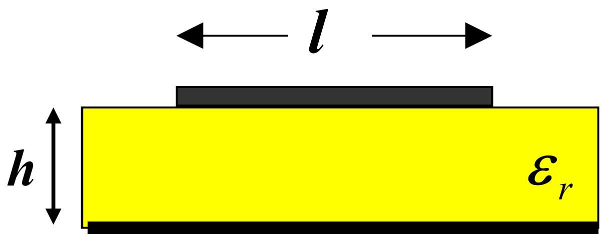
- 在微波集成电路中应用广泛。电磁波能量主要限制在接地板和顶层导体之间介质层中。谐振结构受介质材料性能影响；
- 常见形式：矩形带条，圆环，圆盘。需要屏蔽盒。



1. 矩形微带谐振器

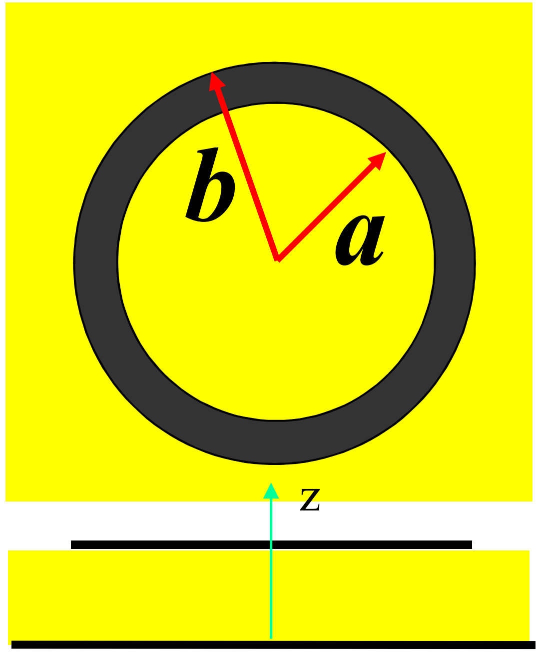
由长度为l的两端开路的微带线构成。

谐振条件：$$l+\Delta l = n\frac{\lambda_p}{2} \quad (n=1,2,3,\ldots)$$



Δl为由微带终端效应形成的等效微带长度。对50欧姆的微带线谐振器，可近似有：$\Delta l = 0.33h$.　（L波段到X波段）

2. 圆形微带谐振器



介质区域内只有z向电场分量：

对z的TM模

谐振条件：$\pi(a+b)=n\lambda_p \quad (n=1,2,3,\ldots)$

$\lambda_p=\lambda_0/\sqrt{\varepsilon_e}$ 为带内波长，ε_e 为微带的有效介电常数

$$\lambda_0=\frac{\pi(a+b)}{n}\sqrt{\varepsilon_e} \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

Homework

8-1, 8-2, 8-3.