

9.1 电磁场的矢量势和标量势

研究时变的电荷、电流所激发的电磁场

稳恒场：引入势的概念描述电磁场

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \Phi \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

时变场：磁场 \mathbf{B} 的散度为零仍然成立，因而仍然有：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$



$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

在时变情形，电场 \mathbf{E} 乃有源、也有旋的场（变化的磁场引起的电场）。由麦克斯韦方程：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$



$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

表明 $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 是无旋场，可用标量势来描述：

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi$$

时变场中的电场表示式：

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$



时变电场不再是保守力场。为了与静电场的电势相区分，这里将 Φ 称为标量势。

电磁场可用矢量势 \mathbf{A} 和标量势 Φ 来表示

在时变场中，磁场和电场是相互作用着的整体，因此必须把矢量势和标量势作为一个整体来描述电磁场。

从麦克斯韦方程组推导势 \mathbf{A} 和 Φ 所满足的基本方程：

$$\mu_0 \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

$$\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$



假如在矢量势 A 和标量势 Φ 之间加上所谓洛伦兹条件：

$$\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 j$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\rho / \epsilon_0$$

上式称为达朗伯方程，它是非齐次波动方程，其自由项是电流密度和电荷密度。电荷产生标势波动，电流产生矢势波动。

引入的洛伦兹条件是否会影响到问题的物理实质？

不会！ 因为：1. (数学上) 矢量势 A 和标量势 Φ 都具有任意性，即 E 和 B 并不对应唯一的 A 和 Φ 。

设 Ψ 为任意时空函数，作变换：

$$A \rightarrow A' = A + \nabla \Psi$$

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

则有

$$\nabla \times A' = \nabla \times A = B$$

$$-\nabla \Phi' - \frac{\partial A'}{\partial t} = -\nabla \Phi - \frac{\partial A}{\partial t} = E$$



即 A', Φ 与 A, Φ 描述同一电磁场，洛仑兹条件只不过意味着对于任意函数 Ψ 加了一个限制，要求它满足：

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

这显然不会给问题带来任何影响。

2. (物理上) 洛仑兹条件与电流连续性方程相一致

由条件： $\nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{A})$ 可得 $\nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Phi) = 0$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu_0 \mathbf{j} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

显然洛仑兹条件使等式左边为零，从而也保证 $\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ，保证了电流连续性方程成立。



势的规范变换:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Psi$$

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

用矢量势 \mathbf{A} 和标量势 Φ 表示的物理定律在规范变换下保持不变:  规范不变性

势的定义只给出了 \mathbf{A} 的旋度, 存在任意性, 洛仑兹条件给出了 \mathbf{A} 的散度。

对应于洛仑兹条件的规范变换称为洛仑兹规范。



电磁场的矢量势和标量势表示：

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\rho / \epsilon_0$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

“推迟势”



9.2 推迟势 (Retarding Potential)

在研究推迟势之前，先介绍数学工具： δ — 函数

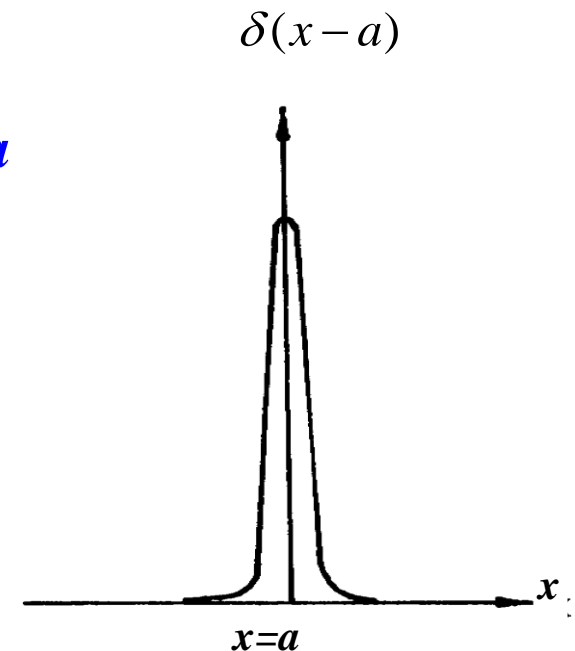
δ —函数的定义如下：

$$\delta(x-a)=0$$

当 $x \neq a$

$$\int \delta(x-a)dx = \begin{cases} 0 & \text{当积分区间不包含 } x=a \\ 1 & \text{当积分区间包含 } x=a \end{cases}$$

当曲线在 $x = a$ 处无限升高，同时使曲线的宽度无限变窄，以保持曲线下的面积为1。
 δ 函数的示意简图→



也可用解析函数的极限定量地表示它，
 最常见的表示形式有：

(1)

$$\delta(x) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin gx}{\pi x}$$

(2)

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)}$$

(3)

$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jk(x-x_0)} dk$$



点电荷：体积趋于零，带有限量的电荷，它的电荷密度趋于无限大。

位于 \mathbf{r}_0 点的点电荷，其电量为 e ，则其电荷密度为：

$$\rho(\mathbf{r}) = e\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

为利用 δ 函数解决电磁场问题，下面证明 δ 函数具有的一些基本性质：

积分性质：

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0)dx = \begin{cases} f(x_0) & (a < x_0 < b) \\ 0 & (x_0 < a \text{ 或 } x_0 > b) \end{cases}$$

证明：当 x_0 不在积分限内时，由于 $\delta(x - x_0)$ 在整个积分区间内处处为零，故积分为零。当 x_0 在积分限内时，上式左端被积函数仅在 $x_0 - \varepsilon$ 到 $x_0 + \varepsilon$ 范围内对积分有贡献。其中 ε 为任意小的数。于是，

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0)dx = \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0) \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \delta(x - x_0)dx = f(x_0)$$



$$\int_a^b f(x) \frac{d}{dx} \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} -\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} & (a < x_0 < b) \\ 0 & (x_0 < a \text{ 或 } x_0 > b) \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x) \frac{d^n}{dx^n} \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} (-1)^n \left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)_{x=x_0} & (a < x_0 < b) \\ 0 & (x_0 < a \text{ 或 } x_0 > b) \end{cases}$$

$$\int g(x) \delta[f(x) - \alpha] dx = \left[\frac{g(x)}{df/dx} \right]_{f(x)=\alpha}$$

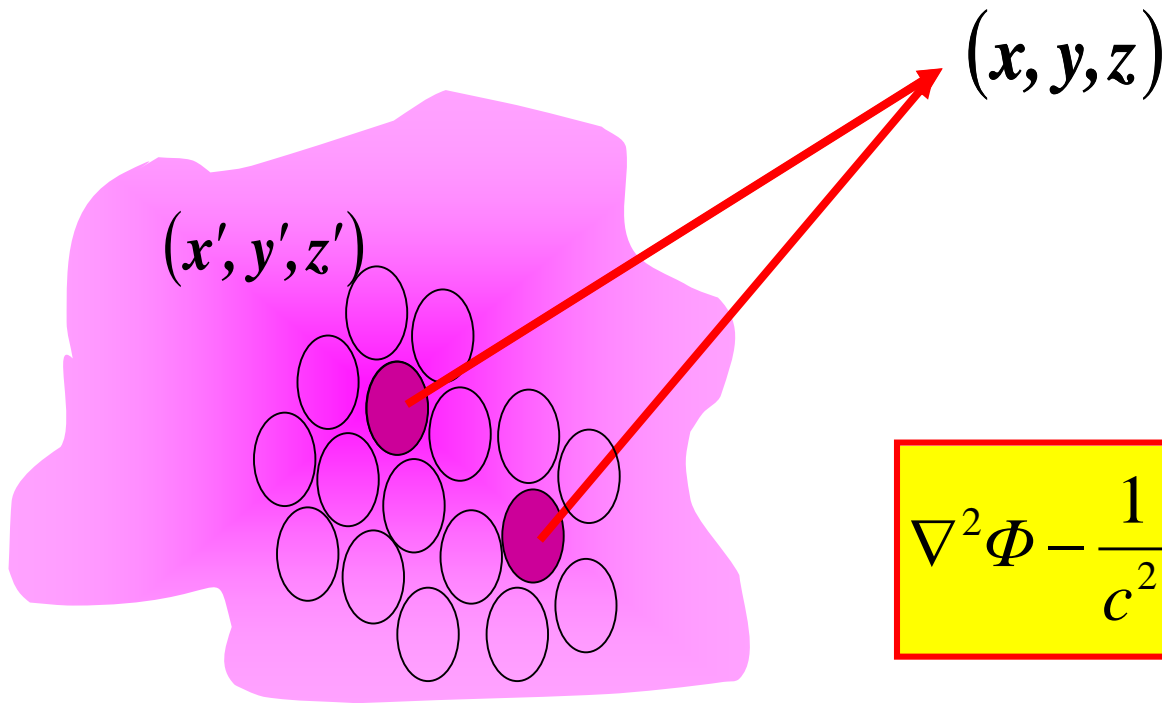
$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(r)$$



为了研究推迟势，需要求解达朗伯方程
标量势 Φ 的达朗伯方程为：

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

式中 $\rho = \rho(r, t)$ 是空间的体电荷密度。上式是线性方程，从场的叠加原理出发，把空间的任意电荷、电流分布划分成许多小体积元，先求某一体积元的电荷、电流所激发的电磁场，然后再将各小体积元的贡献叠加起来。



$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$



先考虑图中的体积元 $d\tau'$ 内的电荷 $\rho d\tau'$ 对标量势的贡献 $\Phi'(x, y, z, t)$ 。显然在 $d\tau'$ 以外的空间内， Φ' 应当满足齐次波动方程：

$$\nabla^2 \Phi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t^2} = 0 \quad (d\tau' \text{ 以外})$$

如果将 $d\tau'$ 取得足够小，并将 $\rho d\tau'$ 看作位于 (x', y', z') 处的点电荷，这样 Φ' 一定是球对称的：

$$\Phi' = \Phi'(R, t)$$

式中 $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ 。现在选用以 (x', y', z') 为球心的球坐标，则可改写为：

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi'}{\partial R} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t^2} = 0 \quad (d\tau' \text{ 以外})$$

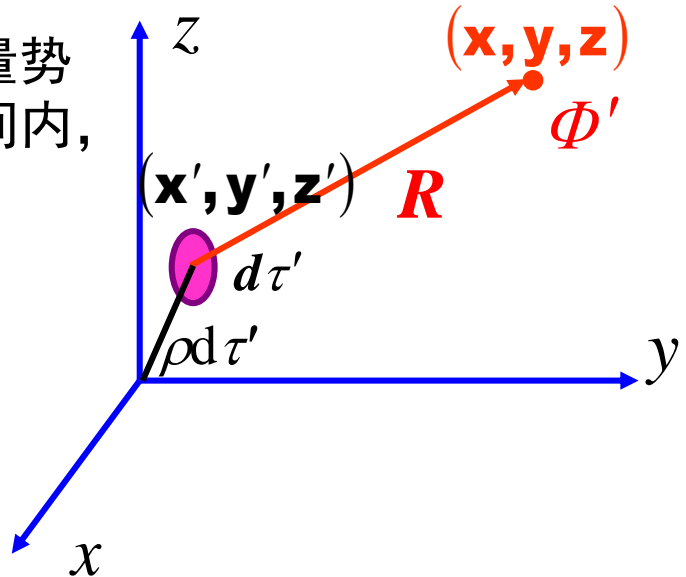
上式的解是球面波。考虑到当 R 较大时标量势将减弱，因而可作如下代换：

$$\Phi'(R, t) = \frac{u(R, t)}{R}$$

得到 u 满足的方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

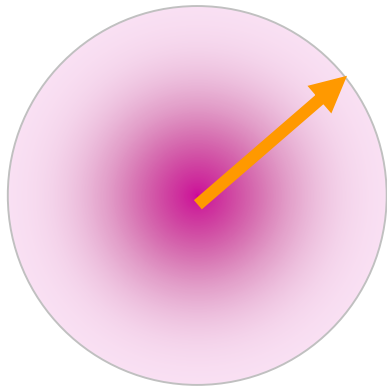
上式在形式上是一维空间的波动方程，其通解是：



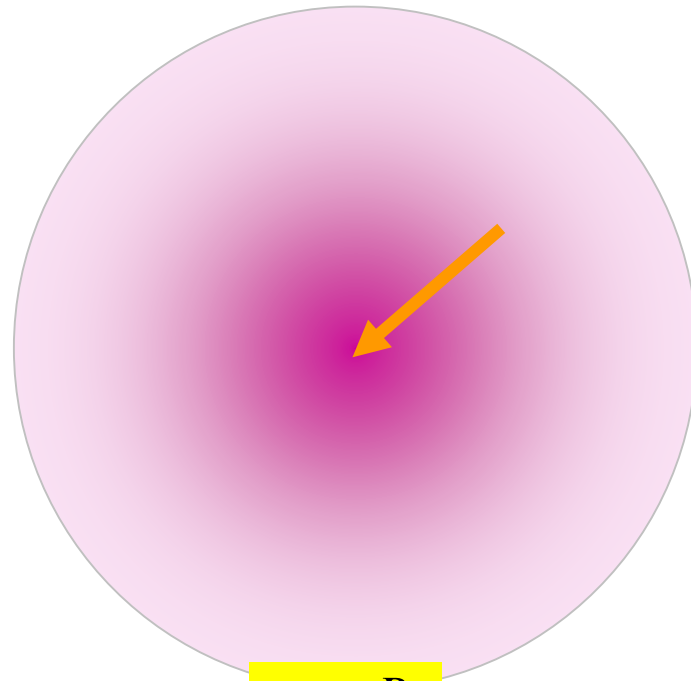
$$u(R, t) = f\left(t - \frac{R}{c}\right) + g\left(t + \frac{R}{c}\right)$$

其中 f 和 g 是两个任意函数。于是得到标量势：
($d\tau'$ 以外) \rightarrow

$$\Phi'(R, t) = \frac{f\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} + \frac{g\left(t + \frac{R}{c}\right)}{R}$$



$$\frac{f\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}$$



$$\frac{g\left(t + \frac{R}{c}\right)}{R}$$



在静电情形，点电荷 $\rho d\tau'$ 激发的电势为 $\Phi' = \frac{\rho d\tau'}{4\pi\epsilon_0 R}$

而在时变场的情形，在 (x', y', z') 处的点电荷的电荷密度为 $\rho(t) d\tau' \delta(\mathbf{R})$ 代入得到标量势 Φ' 所满足的达朗伯方程：

$$\nabla^2 \Phi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(t) d\tau' \delta(R)$$

由齐次波动方程的解以及静电场点电荷的势，可以推想上式的解是：

$$\Phi'(R, t) = \frac{\rho(t - \frac{R}{c}) d\tau'}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\frac{f(t - \frac{R}{c})}{R}$$

现证明如下：当 $R \neq 0$ 时，上式满足波动方程式； $R = 0$ 的点是上式的奇点，因此：

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \frac{\rho(t - \frac{R}{c}) d\tau'}{4\pi\epsilon_0 R}$$

只可能在 $R = 0$ 的点上不等于零，上式在该点可能有 δ 函数形式的奇异性。



为了研究在 $R=0$ 点上式的奇异性质，可以作一半径为 η 的小球包围 $R=0$ 的源点。将上式在小球内积分：

$$\int_0^\eta \frac{R^2}{\epsilon_0} \nabla^2 \left[\frac{\rho(t-R/c) d\tau'}{R} \right] dR - \int_0^\eta \frac{R}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\rho \left(t - \frac{R}{c} \right) d\tau' \right] dR$$

当 $\eta \rightarrow 0$ 时，积分的第二项正比于 η^2 而趋于零，在第一项中只有对分母因子求二阶导数时积分才不为零，因此可令 $\rho(t-R/c) \rightarrow \rho(t)$ ，于是该项变为：

$$\frac{\rho(t) d\tau'}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla^2 \frac{d\tau}{R} = \frac{\rho(t) d\tau'}{4\pi\epsilon_0} (-4\pi) = -\frac{\rho(t) d\tau'}{\epsilon_0}$$

上式用到了 $\nabla^2 (1/R) = -4\pi\delta(R)$

因此，由 δ 函数的定义可得：

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\rho \left(t - \frac{R}{c} \right) d\tau'}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{\rho(t)\delta(R)}{\epsilon_0} d\tau', \text{ 得证!}$$

考虑到场的叠加性， ρ 在空间所激发的标量势等于

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z', t-R/c)}{R} d\tau'$$

由于矢量势 A 所满足的方程在形式上与标量势的达朗伯方程一致，于是得到 j 在空间所激发的矢量势是：



$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(x', y', z', t - R/c)}{R} d\tau'$$

可以验证， \mathbf{A} 和 Φ 都满足洛伦兹条件。

要注意：对时刻 t 的势有贡献的不是该时刻的电荷和电流，而是较早时刻 $t - R/c$ 的电荷、电流的分布值。因而，在 t 时刻测得点 (x, y, z) 上的电磁场是由电荷、电流分布在较早的**不同时刻**所激发的！

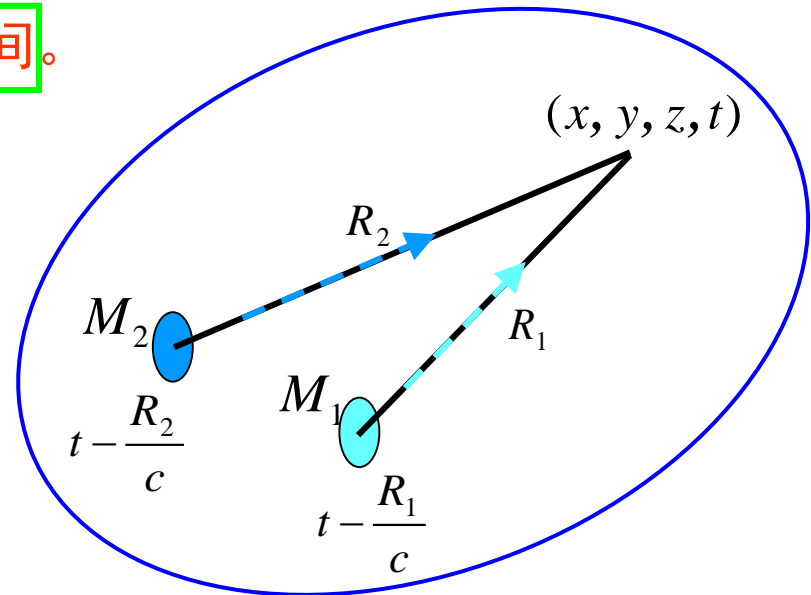
\mathbf{A} 和 Φ 称为推迟势， R/c 称为推迟时间。

该结果说明电磁作用具有一定的传播速度，在真空中电磁波的传播速度是 c 。

电磁场的强度：

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$



对于空间有介质存在的情形，有相应的推迟势：

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(x', y', z', t - R/v)}{R} d\tau'$$

$$A(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{j(x', y', z', t - R/v)}{R} d\tau'$$

式中 $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon} = c/\sqrt{\mu_r\epsilon_r}$ 乃电荷、电流所激发的场在介质中传播的速度，因而电磁波与其他作用一样，都是以有限的速度传播的，不存在瞬时的超距作用。



9.3 电偶极子的辐射

在研究电偶极子的辐射场之前，先要计算一个以速度 v 运动的带电粒子 q 的推迟势。可以将带电粒子看做点电荷，其电荷密度等于

$$\rho(x', y', z', t') = q\delta(x' - x_0)\delta(y' - y_0)\delta(z' - z_0)$$

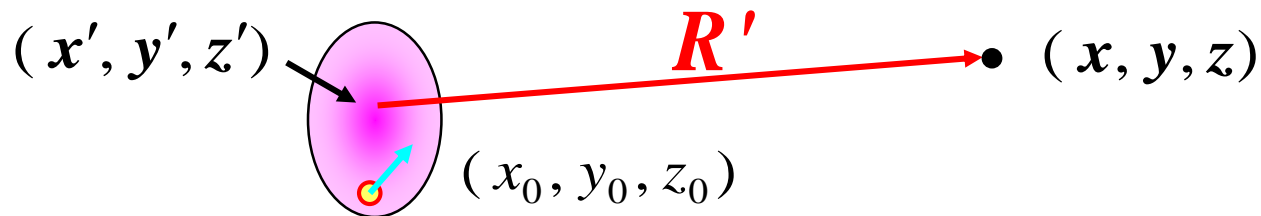
式中 (x_0, y_0, z_0) 表示 t' 时刻 q 所在的位置，它是时间 t' 的函数，而运动点电荷的电流密度是

$$j(x', y', z', t') = qv(t')\delta(x' - x_0)\delta(y' - y_0)\delta(z' - z_0)$$

可以计算矢量势 A ：

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(x', y', z', t - R'/v)}{R'} d\tau'$$

式中 $R' = (x - x')e_x + (y - y')e_y + (z - z')e_z$ 表示场点与源点之间的距离。



由于存在推迟效应，矢量势乃 x', y', z' 的复合函数，积分相当麻烦，但可利用 δ 函数来表示推迟效应，进行简化。用 δ 函数的性质，可以把推迟势改写为

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{j(x', y', z', t')}{R'} \delta\left[t' - \left(t - \frac{R'}{c}\right)\right] d\tau' dt'$$

这样只要先不对 t' 积分， t' 就与 x', y', z' 无关，从而使对 x', y', z' 的积分变得非常简单。

将电流密度的表示代入上式，有

$$A = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int dt' \iiint \frac{v(t')}{R'} \delta(x' - x_0) \delta(y' - y_0) \delta(z' - z_0) \delta\left(t' + \frac{R'}{c} - t\right) dx' dy' dz'$$

将上式对 x', y', z' 积分，得到：

$$A = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int \frac{v(t')}{R} \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) dt'$$

式中 $R = (x - x_0)e_x + (y - y_0)e_y + (z - z_0)e_z$ 为时间 t' 的函数。



利用 δ 函数的性质：

$$\int g(x) \delta[f(x) - \alpha] dx = \frac{g(x)}{df/dx} \Big|_{f(x)=\alpha}$$

$$g(t') = v(t')/R(t')$$

$$A = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int \frac{v(t')}{R} \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) dt'$$

$$f(t') = t' + R(t')/c$$

$$\alpha = t$$

$$\frac{df}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t'}$$

$$\frac{df}{dt'} = 1 - \frac{e_R \bullet v}{c}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'} \left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \right) = -\frac{R \bullet v}{R} = -e_R \bullet v$$

$$A = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int \frac{v(t')}{R} \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) dt' = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int g(t') [f(t') - \alpha] dt' = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{g(t')}{df/dt'} \Big|_{f(t')=t}$$

根据上述结果，矢量势：

$$A = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{v}{R(1 - e_R \bullet v/c)} \right]_{\text{ret}}$$

式中ret表示推迟，即 $t' = t - R/c$
用同样的办法，得到标量势：

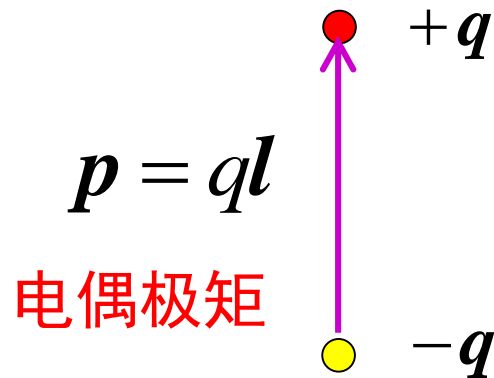
$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R(1 - e_R \bullet v/c)} \right]_{\text{ret}}$$



上式是运动点电荷推迟势的一般表示式，称为里纳-韦恰势。

电偶极子的辐射场

一对等量异号的电荷 $\pm q$ 之间相距一段很小距离称为一个电偶极子。



假定负电荷静止不动，而正电荷 $+q$ 则以 $-q$ 所在位置为平衡点以不大的速度 v 来回振动，取负电荷所在位置为坐标原点，如果仅仅研究远离源区的场，则 (x, y, z) 就比 (x_0, y_0, z_0) 大得多，所以 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = \mathbf{R}$ ，又因为正电荷运动速度远小于光速，即 $v \ll c$ ，于是

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v}}{R(1 - \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{v}/c)} \right]^{\text{ret}}$$



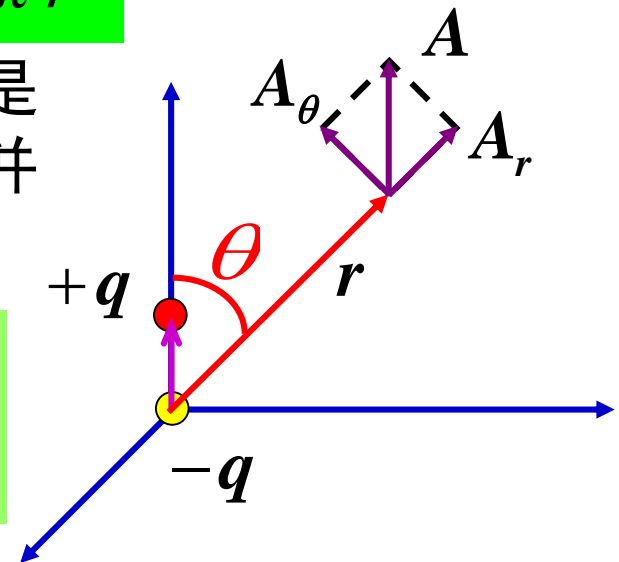
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 q \mathbf{v}}{4\pi r} = \frac{\mu_0 \dot{\mathbf{p}}^{\text{ret}}}{4\pi r}$$

式中“.”代表对时间的导数， $\dot{\mathbf{p}} = q\mathbf{v}$ ， p 是偶极子的电偶极矩。求 Φ 时，则要展开并保留到电偶极项：

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R(1 - \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{v}/c)} \right]^{\text{ret}}$$



$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}^{\text{ret}}}{4\pi\epsilon_0 c r^2}$$



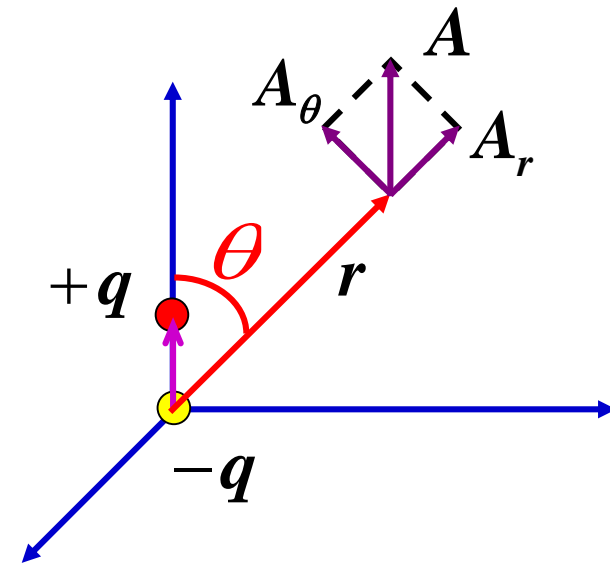
上式右边第一项是位于原点的正电荷 q 所激发的静电场，它与 $-q$ 所激发的静电场正好抵消。这正是 Φ 必须至少取两项的原因。如果把球坐标的极轴取在 q 振动的方向上，就可写出 A 和 Φ 的表达式：

$$A_r = \frac{\mu_0 \dot{p}^{\text{ret}}}{4\pi r} \cos\theta$$

$$A_\theta = -\frac{\mu_0 \dot{p}^{\text{ret}}}{4\pi r} \sin\theta$$

$$A_\varphi = 0$$

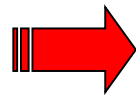
$$\Phi = \frac{\dot{p}^{\text{ret}}}{4\pi\epsilon_0 cr} \cos\theta$$



$$\frac{e_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) - \frac{e_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} A_r$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$



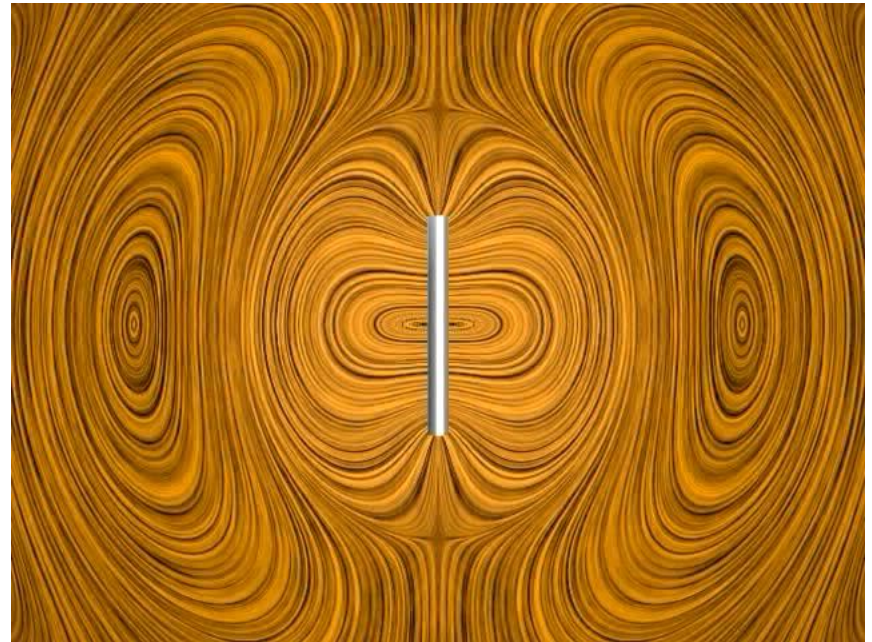
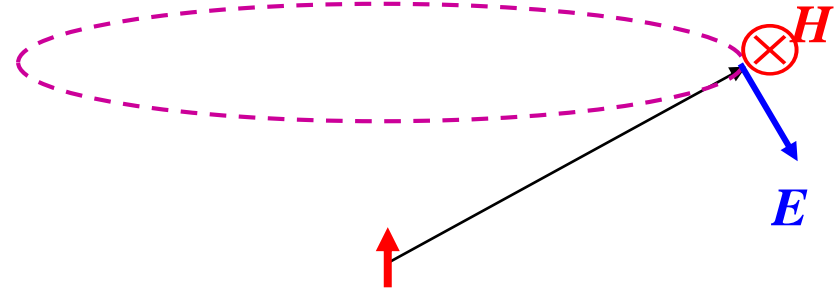
$$\begin{cases} \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \dot{p}^{\text{ret}} \sin\theta \mathbf{e}_\varphi + \frac{\mu_0}{4\pi cr} \ddot{p}^{\text{ret}} \sin\theta \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{E} = \frac{\dot{p}^{\text{ret}}}{4\pi\epsilon_0 cr^2} \cos\theta \mathbf{e}_r + \frac{\dot{p}^{\text{ret}}}{4\pi\epsilon_0 cr^2} \sin\theta \mathbf{e}_\theta + \frac{\mu_0 \ddot{p}^{\text{ret}}}{4\pi r} \sin\theta \mathbf{e}_\theta \end{cases} \quad p(t-r/c)$$



上述关系是在场区远离源区的条件下得到的，这种**远区场**就是我们感兴趣的**辐射场**。在式中略去 $1/r$ 的高次项，上式简化为：

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}^{\text{ret}}}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \sin\theta \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{E} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}^{\text{ret}}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \sin\theta \mathbf{e}_\theta \end{cases}$$

磁力线是围绕极轴的圆圈， **\mathbf{B} 总是横向的**，而电力线是径向面上的闭合曲线。由于在空间中 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ， \mathbf{E} 线必须闭合，因而 **\mathbf{E} 不可能完全横向**，只有在略去 $1/r$ 的高次项后， \mathbf{E} 才可近似为横向，因此**电偶极辐射是空间的横磁波（TM波）**。



实际应用辐射问题：计算辐射功率和辐射方向性

可由相应的能流密度 g 求出。电偶极辐射的坡印亭矢量为：

$$\mathbf{g} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{(\ddot{\mathbf{p}}^{\text{ret}})^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \theta \mathbf{e}_r$$

能流沿 \mathbf{e}_r 方向向外传播， \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{e}_r 三者互相垂直，且满足右手螺旋关系。由于推迟效应，它在真空中的传播速度是 c ，坡印亭矢量与 $\sin^2 \theta$ 成正比，这说明辐射场的能流分布是有方向性的。

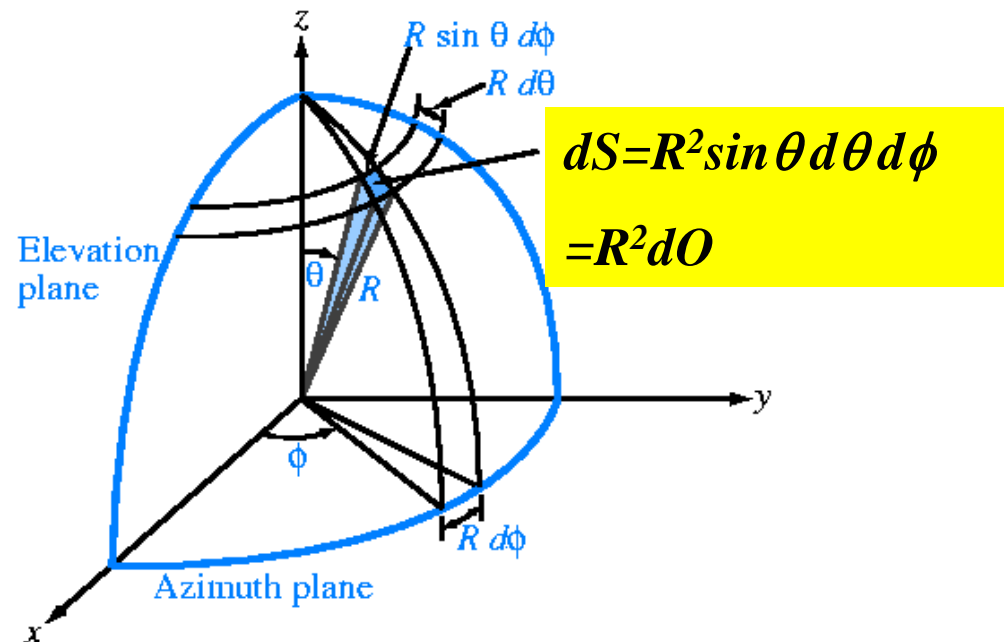
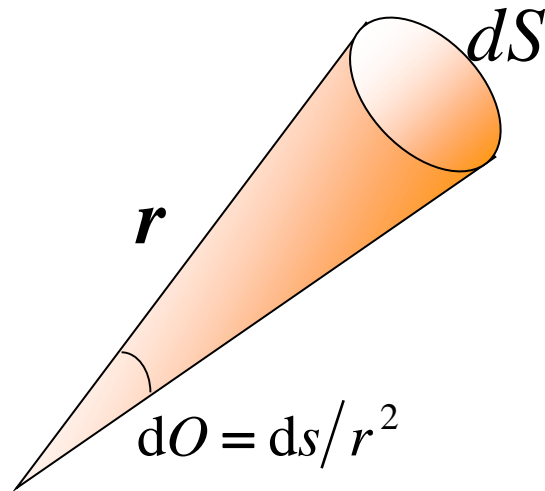


功率角分布：

它定义为单位时间通过单位立体角的能量。如果以原点为中心作一半径为 r 的球面，则单位时间内通过面积元 ds 的能量等于

$$dP = \mathbf{g} \bullet d\mathbf{s} = \frac{(\ddot{\mathbf{p}}^{\text{ret}})^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta dO$$

式中 $dO = ds/r^2$ 代表立体角元。



由此得出**功率角分布**：

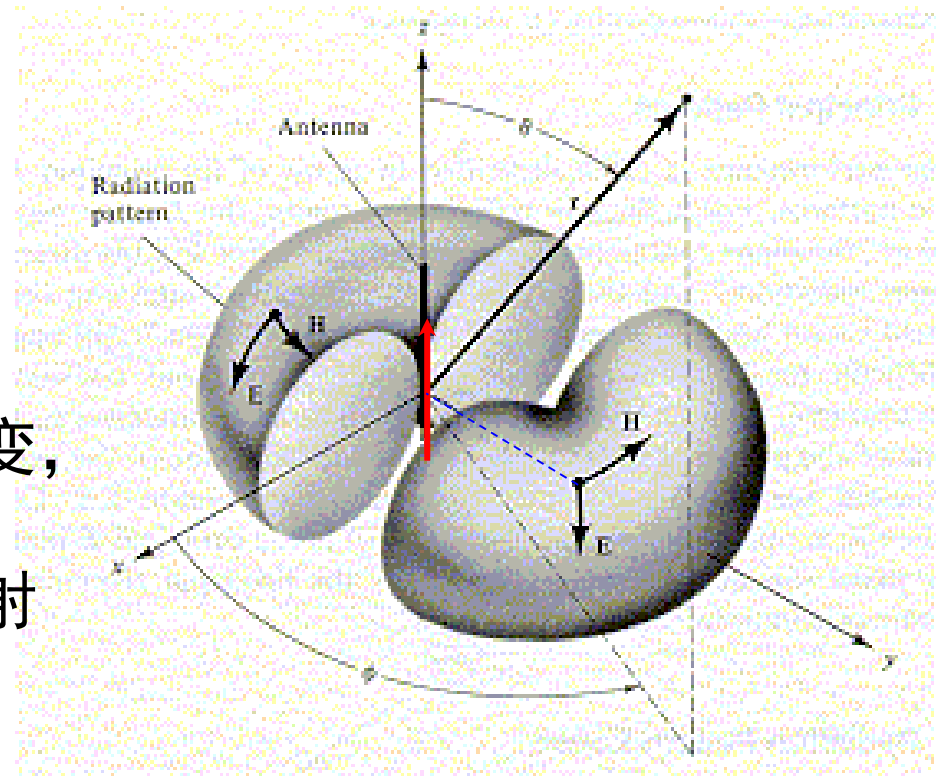
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{(\ddot{p}^{\text{ret}})^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta$$

由于 $dP/d\Omega$ 与 $\sin^2 \theta$ 成比例，在偶极子所在极轴上，它等于零，而在赤道平面则为最大。

对立体角积分得总功率：

$$P = \frac{2}{3c^3} \frac{(\ddot{p}^{\text{ret}})^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{(\ddot{p}^{\text{ret}})^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

如果偶极子是以频率 ω 随时间变化的简谐振动且振幅不变，则**总功率 P 就与 ω 的四次方成正比**。当频率变高时，辐射功率随之迅速增大。



由于场强正比于 $1/r$ ，功率就正比于 $1/r^2$ ，因而通过不同半径为 r 的球面的功率都相同，这表明一旦场被激发起来，就脱离源而自由地传播。

强度正比于 $1/r$ 的场叫做辐射场。

一般情况下，在辐射源区域的线度比起源点到场点之间的距离要小得多时，总可将随时间变化的电荷、电流所产生的辐射场进行多极展开。略去其推导过程，列出各辐射场表示式：

1. 电偶极辐射场：

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \ddot{\mathbf{p}}^{ret} \times \mathbf{r}}{4\pi r^2 c} \\ \mathbf{E} = c \mathbf{B} \times \mathbf{e}_r \end{cases}$$

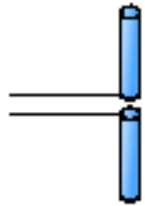
2. 磁偶极辐射场：

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \frac{\mu_0 \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{M}}^{ret}}{4\pi r^2 c} \\ \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{e}_r \times \mathbf{E} \end{cases}$$



常用天线

线天线



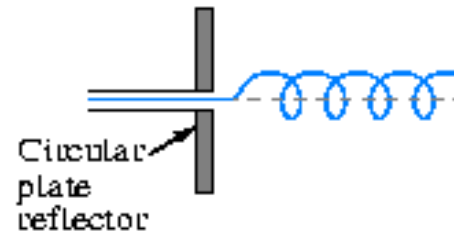
(a) Thin dipole



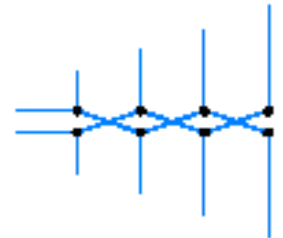
(b) Biconical dipole



(c) Loop

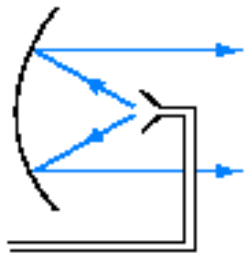


(d) Helix

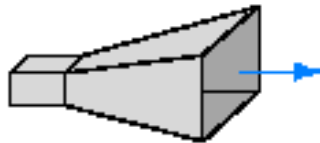


(e) Log-periodic

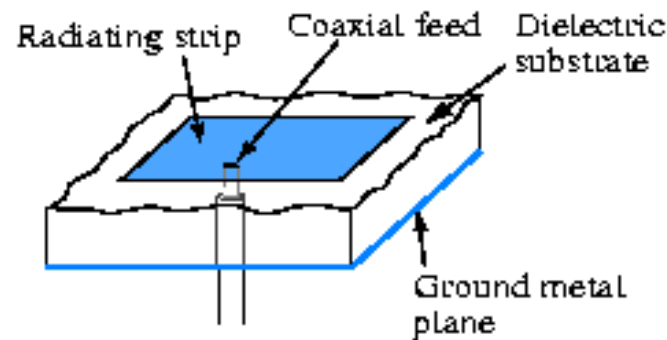
面天线



(f) Parabolic dish reflector

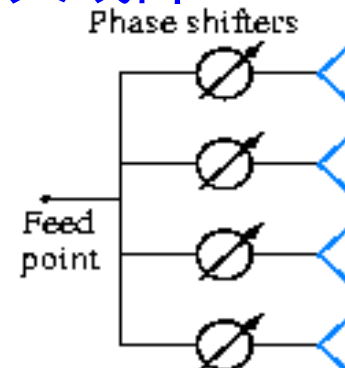


(g) Horn



(h) Microstrip

天线阵



(i) Antenna array



9.4 振子天线的辐射

对称振子天线是最简单的实用天线，由两段长度相等的直导线或金属杆构成的，在两段线之间加上高频电动势就会产生电磁辐射。

先考虑天线上长度为 l 的极短（比波长小）的一段，称为**基本振子**。

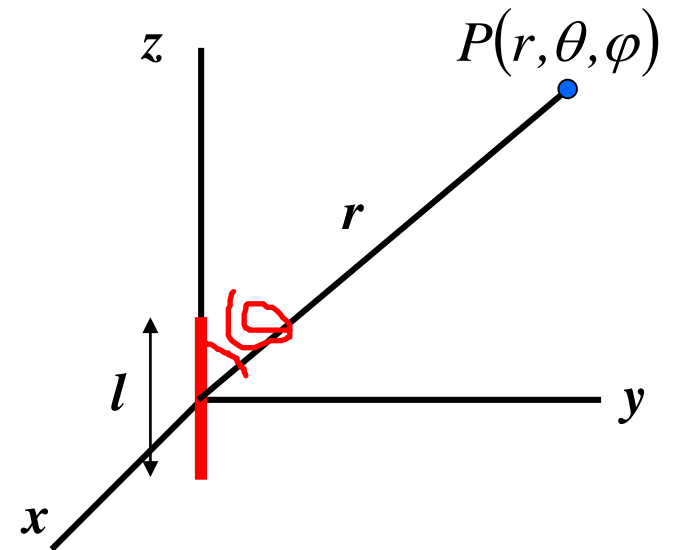
取球坐标原点与基本振子中点重合， z 轴沿短线方向，高频电流方向沿 z 轴，仅为时间函数： $I = I_m e^{j\omega t}$



由电磁场的矢量势

$$A = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{j(x', y', z', t - R/v)}{R} d\tau'$$

式中 $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ ，代入电流密度：



并先对横截面积分得到：

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\mathbf{I}_m e^{j\omega(t-R/v)}}{R} dl' = \frac{\mu \mathbf{I}_m e^{j\omega t}}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{e^{-jkR}}{R} dl'$$

式中 $k = \omega/v = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ 是波矢量，在这里它是实数，表示单位距离内的相位变化，所以它也称相位常数。

因为基本振子长度很短 ($l \ll \lambda$)，所以沿 l 积分时可以认为 R 不变， $R \approx r$ ，得到：

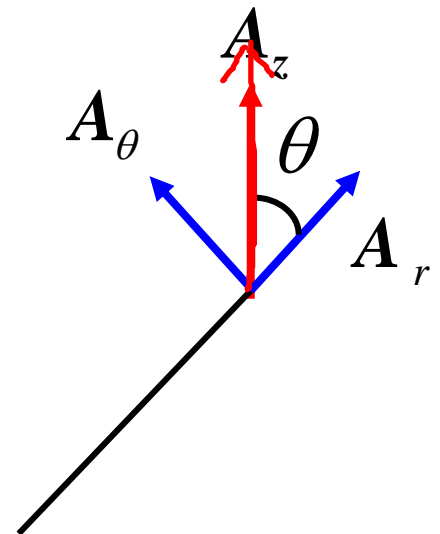
$$A_z = \frac{I\mu l}{4\pi r} e^{-jkr}$$

其球坐标分量是：

$$A_r = A_z \cos \theta = \frac{I\mu l}{4\pi r} e^{-jkr} \cos \theta$$

$$A_\theta = -A_z \sin \theta = -\frac{I\mu l}{4\pi r} e^{-jkr} \sin \theta$$

$$A_\phi = 0$$



由 $H = \frac{\nabla \times A}{\mu}$ 得到:

$$H_r = H_\theta = 0$$

$$H_\phi = \frac{Il \sin \theta}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + j \frac{k}{r} \right) e^{-jkr}$$

对无源场点 P , 利用麦克斯韦方程 $j\omega\epsilon \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{H}$
由磁场求出电场:

$$E_r = -\frac{2j Il \cos \theta}{4\pi\omega\epsilon} e^{-jkr} \left(\frac{1}{r^3} + j \frac{k}{r^2} \right)$$

$$E_\theta = \frac{j Il \sin \theta}{4\pi\omega\epsilon} e^{-jkr} \left(-\frac{1}{r^3} - j \frac{k}{r^2} + \frac{k^2}{r} \right)$$

$$E_\phi = 0$$

略去 $1/r$ 的高次项, 得到基本振子的远区辐射场:

$$E_\theta = \frac{j Il k^2 \sin \theta}{4\pi\omega\epsilon r} e^{-jkr}$$

$$H_\phi = \frac{j Il k \sin \theta}{4\pi r} e^{-jkr}$$



引入电磁波的波阻抗 Z_0 ，~~它定义为电磁波的电场与磁场的比值。~~由上面两式求出波阻抗：

$$Z_0 = \frac{E_\theta}{H_\varphi} = \frac{k}{\omega\epsilon} = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\omega\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

对于自由空间， $\epsilon = \epsilon_0$ 和 $\mu = \mu_0$ ，

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi = 377\Omega$$

而自由空间的电场和磁场分别是

$$E_\theta = \frac{j 60 \pi I l \sin\theta}{\lambda r} e^{-jkr} = Z_0 H_\varphi$$

$$H_\varphi = \frac{j I l \sin\theta}{2 \lambda r} e^{-jkr}$$

式中 λ 为电磁波的波长。

~~基本振子的方向图与前面电偶极子的相同。~~



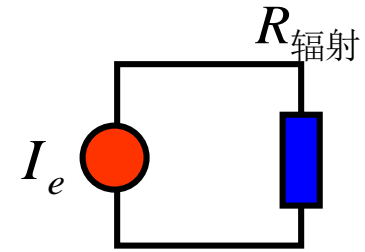
基本振子的平均辐射功率：

通过空间某处单位面积的功率流等于在该处的坡印亭矢量 \mathbf{g} 在一个周期内的平均值：

$$\overline{\mathbf{g}}^t = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} |E_\theta| |H_\varphi| \mathbf{e}_r$$

$$P_{\text{辐射}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |E_\theta| |H_\varphi| r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$P_{\text{辐射}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{60\pi I^2 l^2}{2\lambda^2} \sin^3 \theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{40\pi^2 I^2 l^2}{\lambda^2} = \frac{80\pi^2 I_e^2 l^2}{\lambda^2}$$



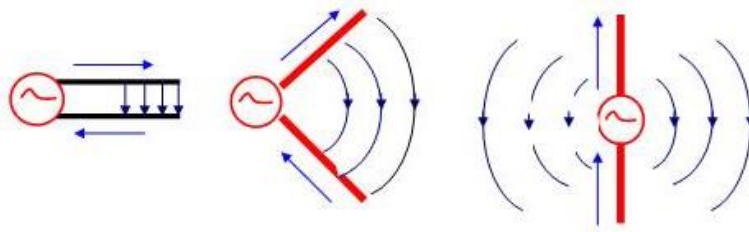
式中 $I_e = I/\sqrt{2}$ 是振子中**电流的有效值**。设想基本振子辐射功率相当于有电流 I_e 流过振子时“消耗”在**辐射电阻 $R_{\text{辐射}}$** 上的功率，因此在自由空间中

$$R_{\text{辐射}} = \frac{P_{\text{辐射}}}{I_e^2} = \frac{80\pi^2 l^2}{\lambda^2}$$

由此可见，对短天线， l 愈大， $R_{\text{辐射}}$ 也愈大，也即天线辐射功率就愈大。



对称振子天线



对称振子上的每一个小电流元都可看作基本振子，可由每个电流元在空间某点的场的矢量和得到。在计算过程中，各电流元距该点的路程差所引起的相位差不能忽略，因为路程差与波长可相比拟。取对称振子的轴线为球坐标的 z 轴，原点位于振子中点。

设空间某点距原点为 r ，且与 z 轴成 θ 角，所以在坐标 $+z$ 及 $-z$ 处的电流元离该点的距离为

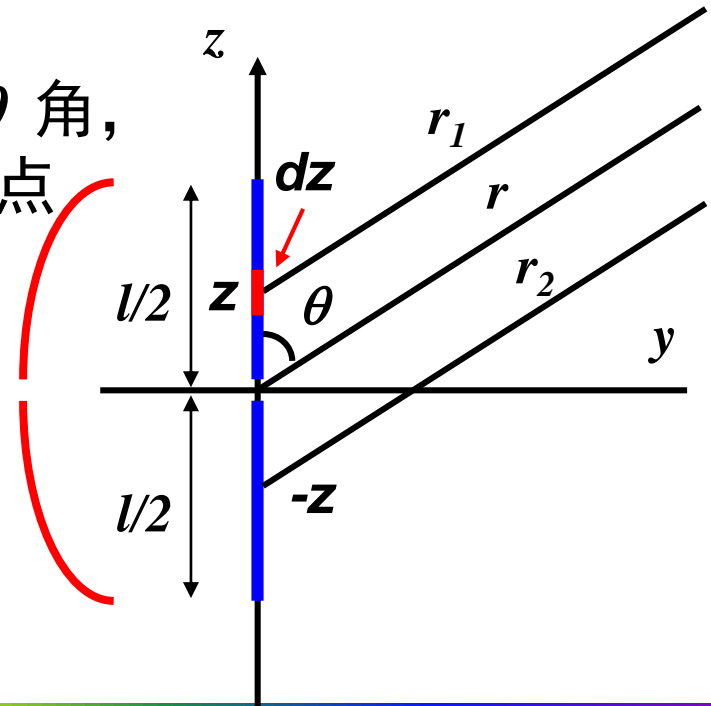
$$r_1 = r - z \cos \theta$$

$$r_2 = r + z \cos \theta$$

对称振子上的电流分布是

$$I_z = I_0 \sin[k(l/2 - |z|)]$$

式中 I_0 是电流波幅。



可以看出，在 $\pm z$ 处的基本振子所激发的场等于：

$$\begin{cases} dE_{\theta}^{+} = \frac{60\pi I_z}{\lambda r_1} e^{j(\omega t - kr + kz \cos\theta)} \sin\theta dz \\ dE_{\theta}^{-} = \frac{60\pi I_z}{\lambda r_2} e^{j(\omega t - kr - kz \cos\theta)} \sin\theta dz \end{cases}$$

（注意：上式的振幅中， j 已消失，此乃改变时间计算的起点所致）。
在电场振幅中，若 $r_1 \approx r_2 \approx r$ ，这两个对称电流元在该点产生合成电场：

$$dE_{\theta} = dE_{\theta}^{+} + dE_{\theta}^{-} = \frac{120\pi I_z \sin\theta}{\lambda r} \cos(kz \cos\theta) e^{j(\omega t - kr)} dz$$

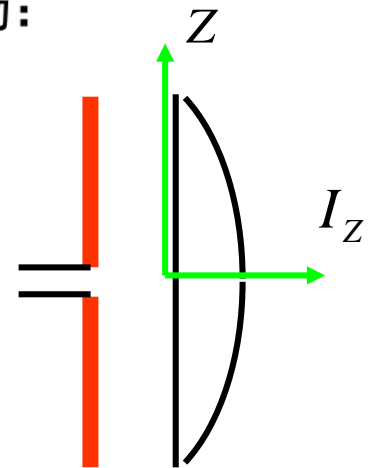
对 z 从0到 $l/2$ 积分，得到了整个振子在该点所产生的电场：

$$E_{\theta} = \frac{60 I_0}{r} F(\theta) e^{j(\omega t - kr)}$$

$$F(\theta) = \frac{\cos(\frac{\pi l}{\lambda} \cos\theta) - \cos\frac{\pi l}{\lambda}}{\sin\theta}$$

因子 $F(\theta)$ 描绘出天线的方向图。对于对称半波振子天线，
 $l = \lambda/2$ ，上式简化为：

$$F(\theta) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin\theta}$$



天线特性参量

天线的特性参量对天线的选择、设计和定量分析提供依据。

一、天线效率

天线将电磁振荡转换为电磁波能量，在转换过程中会产生损耗。天线效率指辐射功率 P_r 与天线输入功率 P_{in} 之比：

$$\eta_A = \frac{P_r}{P_{in}} = \frac{P_r}{P_r + P_L} \leftarrow \text{损耗功率}$$

引入辐射阻抗 R_r 和损耗阻抗 R_L ：

$$\eta_A = \frac{R_r}{R_r + R_L} = \frac{1}{1 + R_L / R_r}$$

为提高天线效率，应尽可能提高辐射阻抗，减小损耗阻抗。

二、方向性函数和归一化方向性函数

电磁场和辐射功率都是球坐标 θ 和 φ 的函数，称为**方向性函数**。将电磁场或辐射功率对其最大值进行归一化，即得到**归一化方向性函数**，又称**归一化场波瓣图**和**归一化功率波瓣图**。



归一化场波瓣图

$$f(\theta, \varphi) = E_n(\theta, \varphi) = \frac{E(\theta, \varphi)}{E(\theta_{max}, \varphi_{max})}$$

归一化功率波瓣图

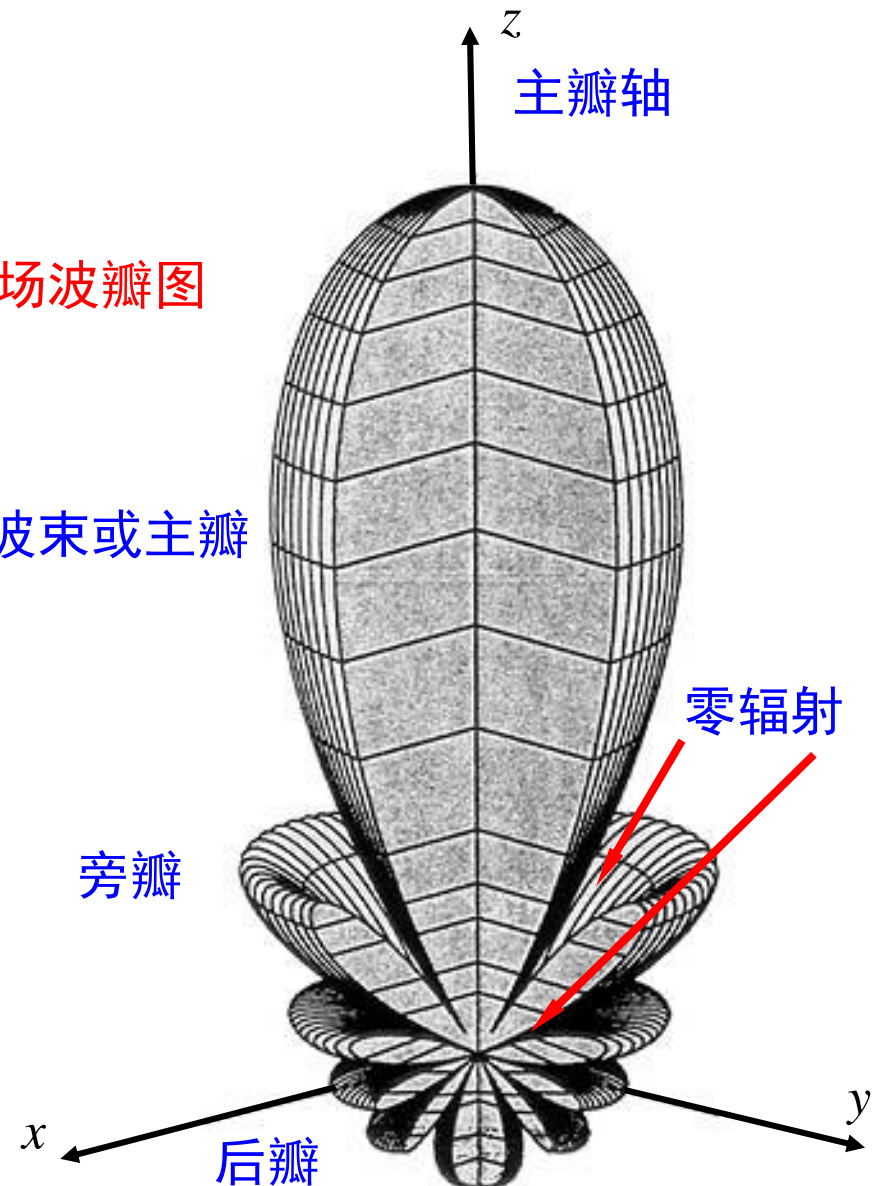
$$P_n(\theta, \varphi) = \frac{S(\theta, \varphi)}{S(\theta_{max}, \varphi_{max})}$$

均为无量纲标量。

一般，波瓣图是测量距离的函数，但当距离远大于天线的尺寸时（远场条件），波瓣图的形状就与距离无关，通常所说的波瓣图都是符合远场条件。

场波瓣图

主波束或主瓣



主向剖面方向图（波瓣图）

三、波瓣参量

主瓣（半功率点）宽度

主向两侧平均功率流密度为主向一半，或辐射场强为主向0.707倍的方向所决定的夹角：

HPBW (half-power beamwidth)

主瓣张角（第一零点波束宽度）

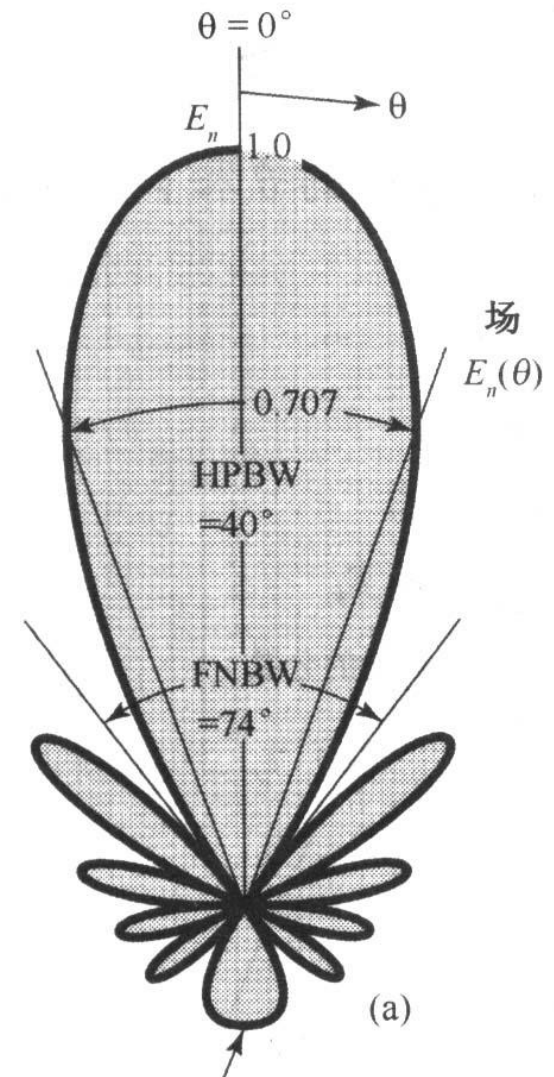
主向两侧主瓣零辐射方向间的夹角 $2\theta_0$ 。

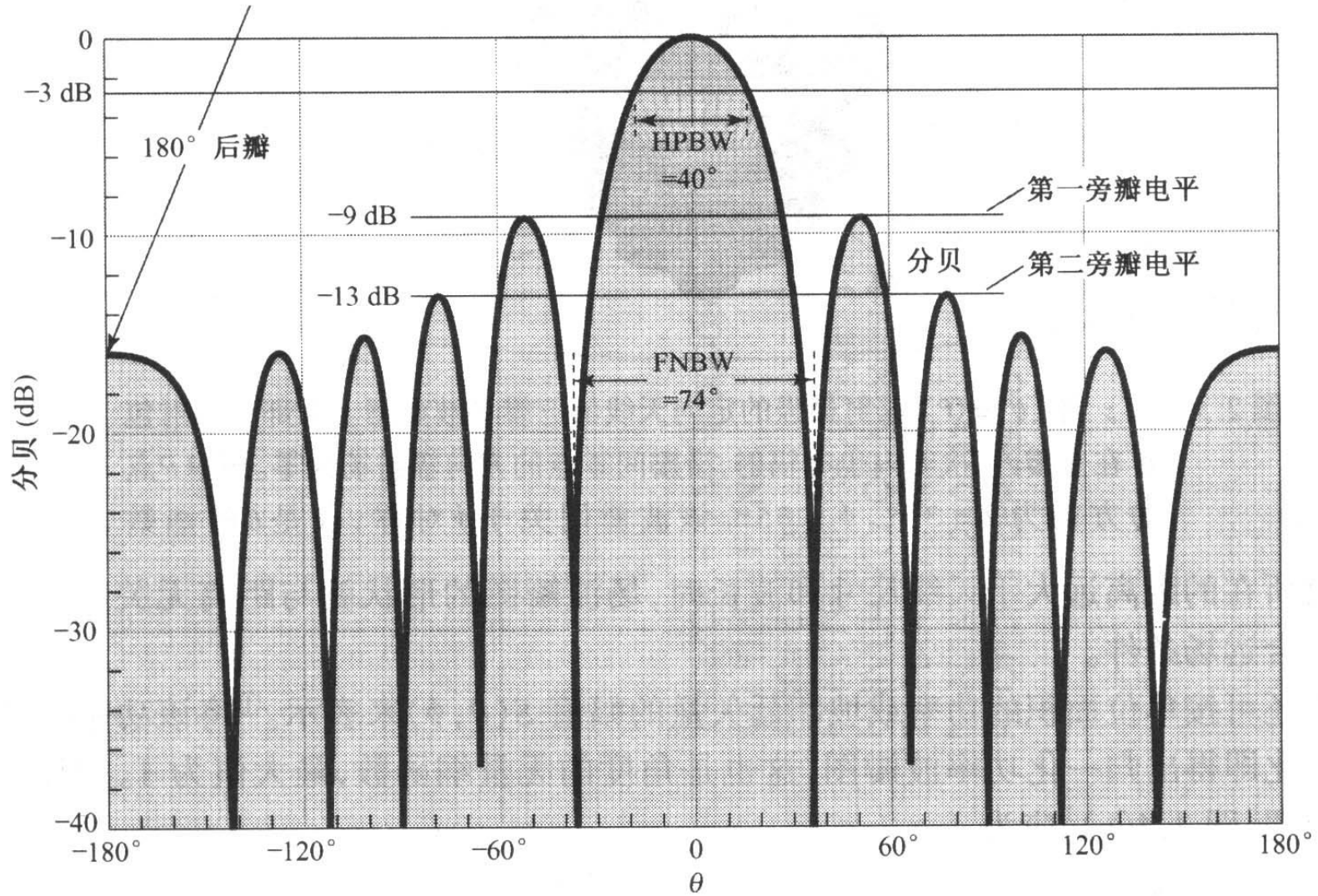
FNBW (beamwidth between first nulls)

旁瓣电平（Side lobe level）

主向辐射场强与旁瓣中最大辐射场强之比，通常用分贝数表示。

$$L_s = 20 \log \frac{E(\theta_{\max})}{E(\theta_{s \max})} = -20 \log E(\theta_{s \max})$$





四、方向性系数和增益

大部分天线设备都是利用主向（或主平面）的辐射来工作的，偏离主向的辐射功率不仅是浪费，而且还会干扰电波信号。

方向性系数 D

方向性系数是表明天线在主向辐射功率的集中程度的。指天线在主向的平均功率流密度 P_{Smax} 和天线辐射出去的总功率被均匀分配到空间各方向上的平均功率流密度 P_S 的比值。

$$D = \frac{P_{Smax}}{P_S} = \frac{P_{Smax}|r}{P_r/4\pi r^2}$$

天线功率增益系数

表示输入到天线的有功功率被利用的程度。指天线在主向的平均功率流密度 P_{Smax} 和天线的输入的有功功率被均匀分配到空间各方向上的平均功率流密度 P'_S 的比值。

$$G = \frac{P_{Smax}}{P'_S} = \frac{P_{Smax}|r}{P_{in}/4\pi r^2}$$



$$P_{in} = P_r / \eta_A \rightarrow G = D \eta_A$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{P_S(\theta_{max}, \varphi_{max})}{P_S} = \frac{P_S(\theta_{max}, \varphi_{max})}{P_r / 4\pi r^2} \\ &= \frac{E(\theta_{max}, \varphi_{max})^2 / \eta}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{[E(\theta_{max}, \varphi_{max}) f(\theta, \varphi)]^2}{\eta \cdot 4\pi r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi} \end{aligned}$$

$$D = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f^2(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi}$$

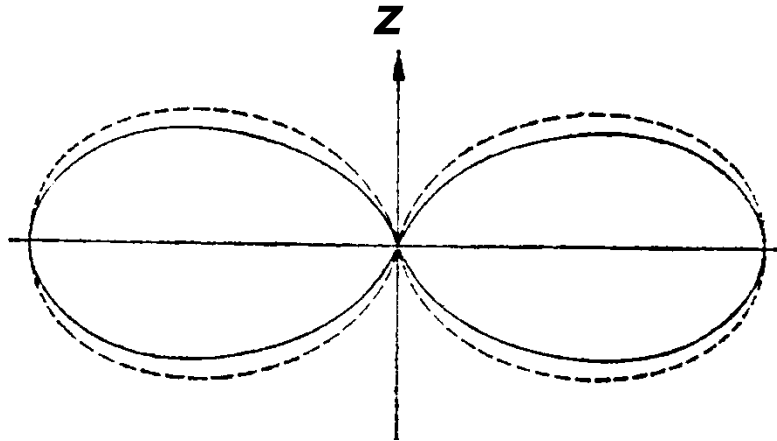
$$D = \frac{2}{\int_0^\pi f^2(\theta) \sin\theta d\theta}$$

方向图越尖锐，方向性系数值越大。



如图画出了对称半波振子在铅垂面内的方向图（实线），它与基本振子的方向图（虚线）差别很小。半波振子天线在水平面内的辐射功率比起基本振子来相对功率更大些。

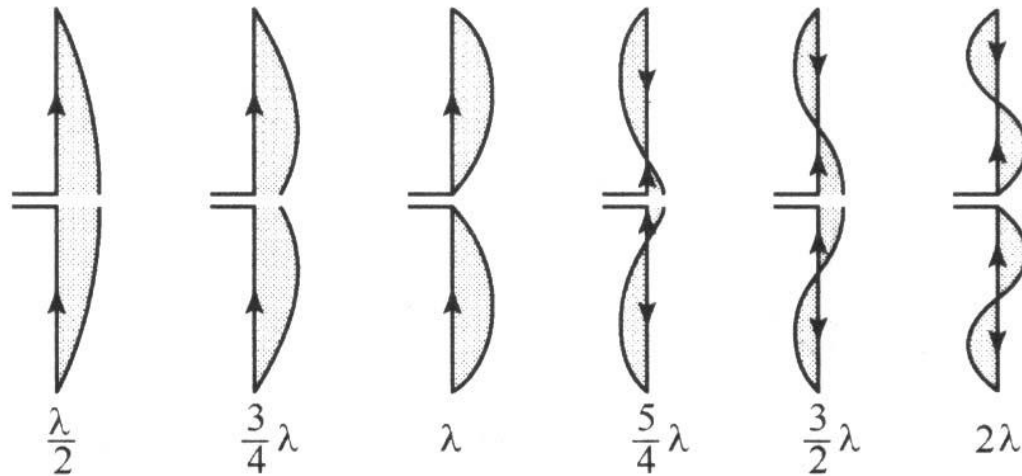
$$F(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta}$$



对称半波振子天线的方向性系数：

$$D = \frac{2}{\int_0^\pi \frac{\cos^2\left[\left(\pi/2\right)\cos\theta\right]}{\sin^2\theta} \sin\theta d\theta} = 1.64$$





各种长度的中馈、细直天线上的近似自然电流分布

振子天线演示



