第五章　规则波导

波 导

- 波导：指能够引导电磁波沿一定方向传输的物理载体
- 导波：在波导中传播的电磁波称为导行电磁波
- 规则波导是指沿轴向均匀（横截面、填充介质特性）的无限长波导
- 在微波频段，波导通常特指金属波导（如矩形波导、圆波导等）

矩形波导

- 波导中的电磁波满足波动方程

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

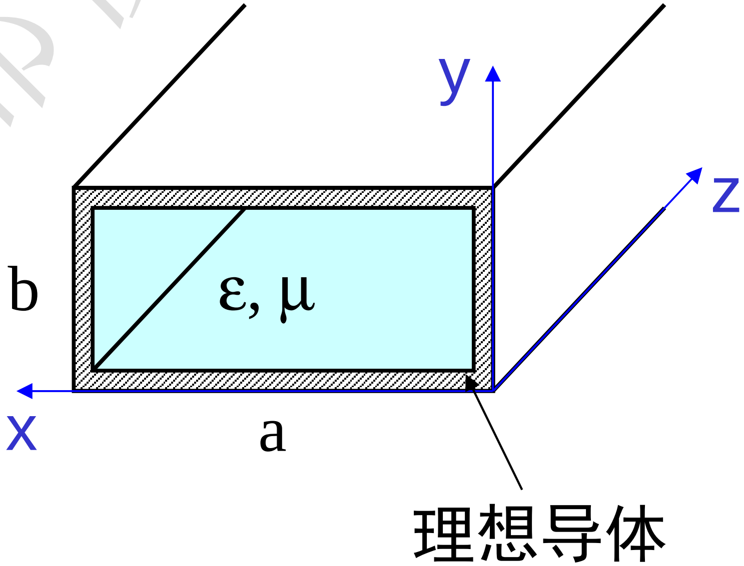
$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$$

其中，

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = (\omega/c)\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$$

- 边界条件为

$$\begin{cases} E_y = E_z = B_x = 0 & (x = 0,\ a) \\ E_x = E_z = B_y = 0 & (y = 0,\ b) \end{cases}$$



简谐电磁波 $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}(x,y,z)e^{jwt}$ 沿 z轴传播

$$\vec{E}(x,y,z)=\vec{E}(x,y)e^{-jbz}$$
$$\vec{H}(x,y,z)=\vec{H}(x,y)e^{-jbz}$$

代入波动方程

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=\left(\nabla_{xy}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)\vec{E}(x,y)e^{-jbz}$$
$$=\left(\nabla_{xy}^2+k^2-b^2\right)\vec{E}(x,y)e^{-jbz}$$
$$=\left(\nabla_{xy}^2+k_c^2\right)\vec{E}(x,y)e^{-jbz}$$

$$\boxed{\left(\nabla_{xy}^2+k_c^2\right)\vec{E}(x,y)=0,\quad \left(\nabla_{xy}^2+k_c^2\right)\vec{H}(x,y)=0}$$

对任意的电场（磁场）有３个分量

$$\vec{E}(x,y)=\hat{x}E_x(x,y)+\hat{y}E_y(x,y)+\hat{z}E_z(x,y)$$

要求解６个Helmholtz方程

波导中没有源存在，波导中的Maxwell方程为

$$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}$$

$$\nabla\times\vec{H}=j\omega\varepsilon\vec{E}$$

对于z方向传播的电波，展开后得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} + jb E_y = -jwm H_x \\ -jb E_x - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -jwm H_y \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -jwm H_z \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_z}{\partial y} + jb H_y = jwe E_x \\ -jb H_x - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = jwe E_y \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} = jwe E_z \end{cases}$$

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2}\left(b\frac{\partial E_z}{\partial x} + wm\frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \qquad H_x = \frac{j}{k_c^2}\left(we\frac{\partial E_z}{\partial y} - b\frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

$$E_y = \frac{j}{k_c^2}\left(-b\frac{\partial E_z}{\partial y} + wm\frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \qquad H_y = \frac{-j}{k_c^2}\left(we\frac{\partial E_z}{\partial x} + b\frac{\partial H_z}{\partial y} \right)$$

其中 $k_c^2 = k^2 - b^2$

在波导中需要求解关于z分量的波动方程

$$\left(\nabla_{xy}^2 + k_c^2\right)E_z\left(x,y\right) = 0$$

$$\left(\nabla_{xy}^2 + k_c^2\right)H_z\left(x,y\right) = 0$$

在波导边界条件下直接求解上面的波动方程是困难的。
可以证明波动方程的解可以分解为下面两种解的叠加

（１）横电波 (TE波)：$E_z=0$

（２）横磁波 (TM波)：$H_z=0$

- TE波(横电波,E_z=0):

  横截面内的波动方程仅是关于H_z的方程

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}=-k_c^2 H_z$$

  用分离变数法令 H_z=XY，解之得

$$\begin{cases} X=C_1\cos k_x x+C_2\sin k_x x \\ Y=C_3\cos k_y y+C_4\sin k_y y \end{cases}$$

  其中 $k_x^2+k_y^2=k_c^2$

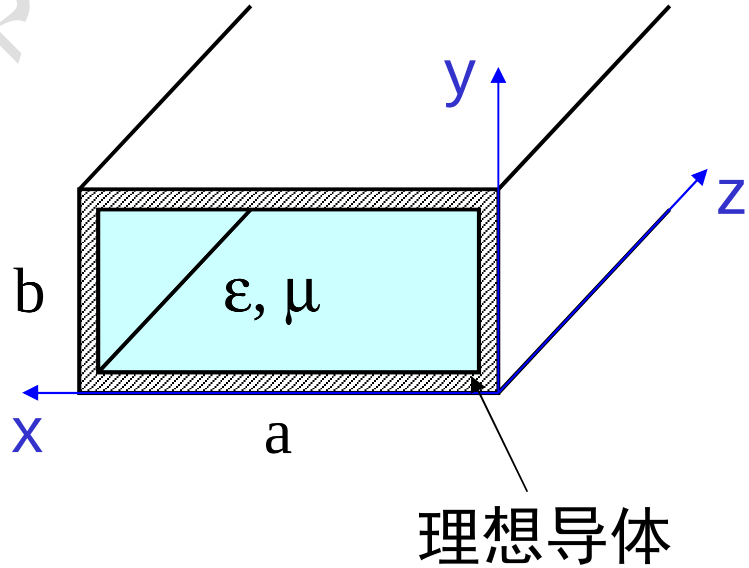
得到H_z的一般解

$$H_z(x,y,z)=(C_1\cos k_x x+C_2\sin k_x x)$$
$$(C_3\cos k_y y+C_4\sin k_y y)e^{-jk_z z}$$

由边界上电场为零的条件，得到

$$x=0,\ a:\quad E_y=0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\partial H_z}{\partial x}=0$$

$$y=0,\ b:\quad E_x=0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\partial H_z}{\partial y}=0$$



$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = (C_2 k_x \cos k_x x - C_1 k_x \sin k_x x)$$
$$(C_3 \cos k_y y + C_4 \sin k_y y)\mathrm{e}^{-jk_z z}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = (C_1 \cos k_x x + C_2 \sin k_x x)$$
$$(C_4 k_y \cos k_y y - C_3 k_y \sin k_y y)\mathrm{e}^{-jk_z z}$$

由上面两式为零，得到

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_x = \dfrac{mp}{a} \\ k_y = \dfrac{np}{b} \end{cases} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

从而有场分布

$$H_z = H_0 \cos(k_x x)\cos(k_y y) \qquad E_z = 0$$

$$H_x = j\frac{k_x}{k_c^2} b H_0 \sin(k_x x)\cos(k_y y) \qquad E_x = j\frac{wmk_y}{k_c^2} H_0 \cos(k_x x)\sin(k_y y)$$

$$H_y = j\frac{k_y}{k_c^2} b H_0 \cos(k_x x)\sin(k_y y) \qquad E_y = -j\frac{wmk_x}{k_c^2} H_0 \sin(k_x x)\cos(k_y y)$$

其中$H_0=C_1C_3$由场的激励源决定

截止波数：

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{mp}{a}\right)^2 + \left(\frac{np}{b}\right)^2$$

- TM波（横磁波，$H_z=0$）

横截面内的波动方程仅是关于Ez的方程，

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}=-k_c^2 E_z$$

和横电波的解法相似，可以得到场分布

$$E_z=E_0\sin(k_x x)\sin(k_y y) \qquad H_z=0$$

$$E_x=-j\frac{k_x}{k_c^2}bE_0\cos(k_x x)\sin(k_y y) \qquad H_x=j\frac{wek_y}{k_c^2}E_0\sin(k_x x)\cos(k_y y)$$

$$E_y=-j\frac{k_y}{k_c^2}bE_0\sin(k_x x)\cos(k_y y) \qquad H_y=-j\frac{wek_x}{k_c^2}E_0\cos(k_x x)\sin(k_y y)$$

模式数m,n的取值范围：

$$k_x = \frac{mp}{a}, \quad k_y = \frac{np}{b}, \quad (m, n = 0,1,2,\ldots)$$

TE波： $H_z = H_0 \cos\left(k_x x\right) \cos\left(k_y y\right), \quad E_z = 0$

模式数（m，n）不能同时为零

TM波： $E_z = E_0 \sin\left(k_x x\right) \sin\left(k_y y\right), \quad H_z = 0$

模式数（m，n）不能有一个为零

电磁场模式和传输特性

- 波导中的电磁波有TE和TM波之分
- 无论是TE波还是TM波，都和整数(m,n)有关。不同的m,n 组合下电磁场分布是不同的。
  (m,n)称为模式数
- 波导中的电磁场模式的表示 = 波型+模式数
  如TE_{10}，TM_{11}

和等离子体的色散关系比较

- 传输特点

$$b = k_z = \sqrt{w^2 me - \left[\left(\frac{mp}{a}\right)^2 + \left(\frac{np}{b}\right)^2\right]} = \sqrt{k^2 - k_c^2}$$

只有当$k^2 > k_c^2$ 时电磁波才能传播，k_c 称为**截止波数**。

- 截止波数k_c ：

$$k_c = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{\left(\frac{mp}{a}\right)^2 + \left(\frac{np}{b}\right)^2}$$

具有波数的量纲；它取决于波导的尺寸和模式数

- 与截止波数对应的物理量：截止波长λ_c和截止频率f_c

$$l_c = \frac{2p}{k_c} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}$$

$$f_c = \frac{v_p k_c}{2p} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{(mp/a)^2 + (np/b)^2}{me}}$$

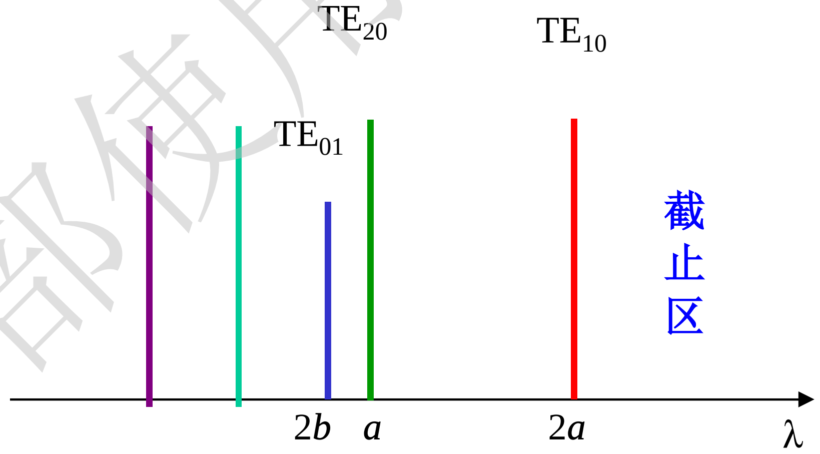
- 传播常数用截止频率、截止波长表示

$$k_z = k\sqrt{1-\left(\frac{k_c}{k}\right)^2} = k\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = k\sqrt{1-\left(\frac{l}{l_c}\right)^2}$$

- 电磁波传播条件： $k>k_c$ ® $f>f_c$ 或 $l<l_c$

设a>2b

m	n	λc
1	0	$2a$
2	0	a
0	1	$2b$
1	1	…



- 波导中电磁波的波长： $\lambda_g = 2\pi/k_z$

$$Q \quad k_z = \sqrt{k^2 - k_c^2} \qquad \therefore \quad l_g = \frac{l}{\sqrt{1-(l/l_c)^2}}$$

例：试计算以TE模式在矩形波导中传播的电磁波的群速与相速。

解：

$$k_z^2 = w^2 me - k_c^2 \Rightarrow k_z dk_z = emw\, dw$$

$$v_g = \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}k_z}\right|_{w_0} = \left.\frac{k_z}{wme}\right|_{w_0} = \frac{\sqrt{w_0^2 me - k_c^2}}{w_0 me} = v\sqrt{1-\left(\frac{k_c^2}{w_0^2}\right)v^2} < v$$

$$v_p = \left.\frac{w}{k_z}\right|_{w_0} = \frac{w_0}{\sqrt{w_0^2 me - k_c^2}} = \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{k_c^2}{w_0^2}\right)v^2}} > v$$

例题：为了使方形波导只能传播15GHz模式为TE10，TE01，TE11和TM11的电磁波，求波导边长应设计在什么范围

首先求截止频率

$$k_c^2=\left(\frac{mp}{a}\right)^2+\left(\frac{np}{b}\right)^2=\left(\frac{p}{a}\right)^2\left(m^2+n^2\right),\quad w_c=k_c v$$

$\sqrt{m^2+n^2}$

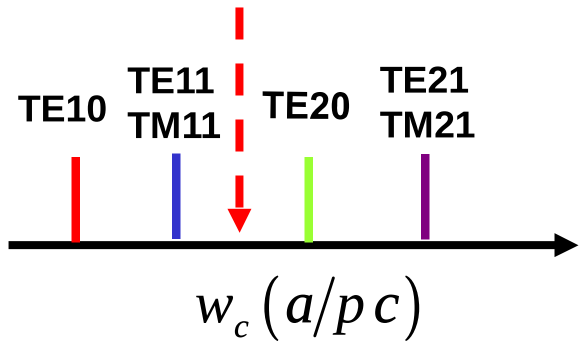
m, n	0	1	2
0	x	1	2
1	1	√2	√5
2	2	√5	√8

TE11和TM11的截止频率 $w_{c11}=\dfrac{\sqrt{2}p}{a}c$

TE20等的截止频率 $w_{c12}=\dfrac{2p}{a}c$

传播条件： $w_{c11}<w<w_{c20}$

所以波导边长应为： $\sqrt{2}\,(\mathrm{cm})<a<2\,(\mathrm{cm})$



场分布

- 了解波导中的场分布对波导器件的设计是很重要的；

  场分布可以用电力线（磁力线）大体化出场线的分布

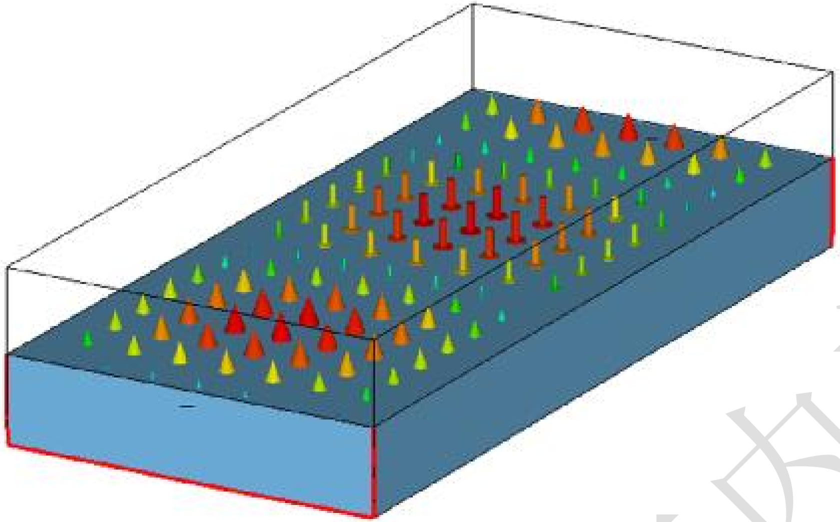
- TE$_{10}$ 模式的场分布

$$H_x = \frac{jk_z a}{p} H_0 e^{j(wt-k_z z)} \sin\left(\frac{p\,x}{a}\right) \qquad E_x = 0$$

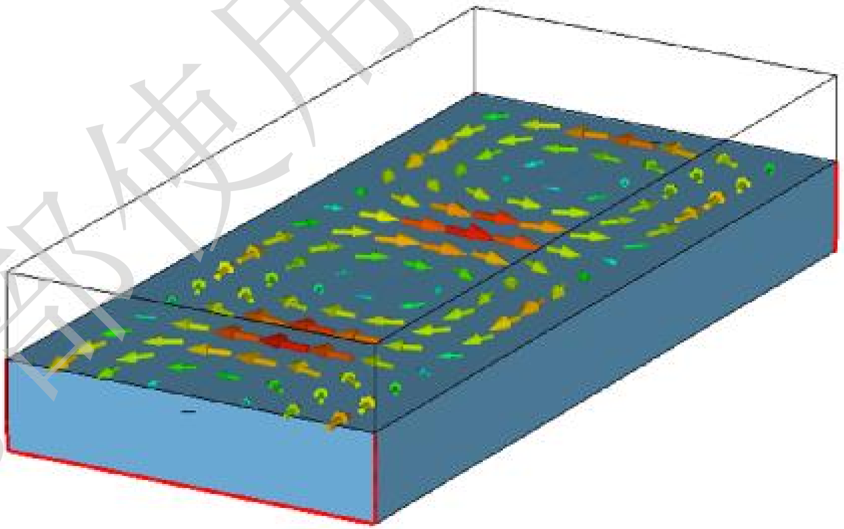
$$H_y = 0 \qquad E_y = \frac{-jwma}{p} H_0 e^{j(wt-k_z z)} \sin\left(\frac{p\,x}{a}\right)$$

$$H_z = H_0 e^{j(wt-k_z z)} \cos\left(\frac{p\,x}{a}\right) \qquad E_z = 0$$

主模式电场分布



主模式磁场分布



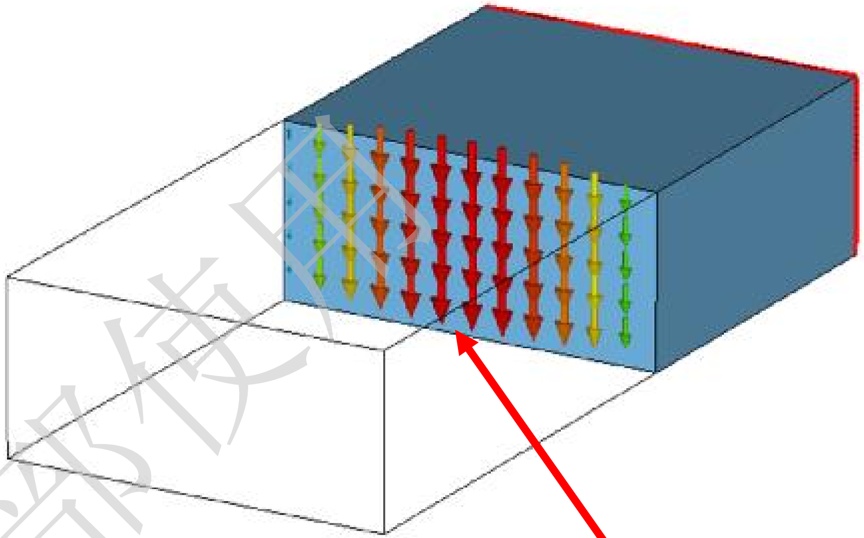
$$E_y = \frac{-jwma}{p} H_0 e^{j(wt-k_z z)} \sin\left(\frac{p\,x}{a}\right)$$

$$H_x = \frac{jk_z a}{p} H_0 e^{j(wt-k_z z)} \sin\left(\frac{p\,x}{a}\right)$$

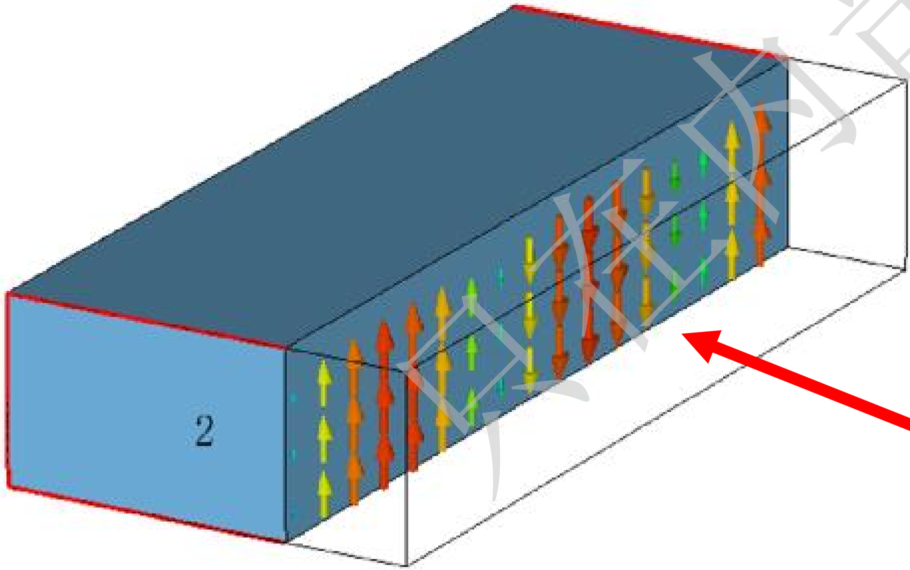
$$H_z = H_0 e^{j(wt-k_z z)} \cos\left(\frac{p\,x}{a}\right)$$

矩形波导中的主模式电场分布

$$E_y = \frac{-j\omega\mu a}{\pi} H_0 e^{j(\omega t - k_z z)} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$



$$E_y \sim \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

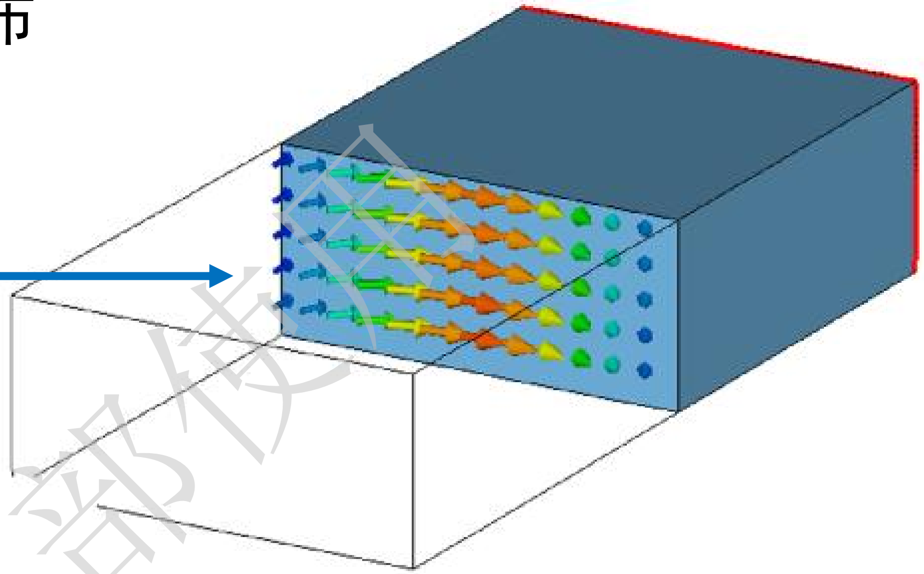


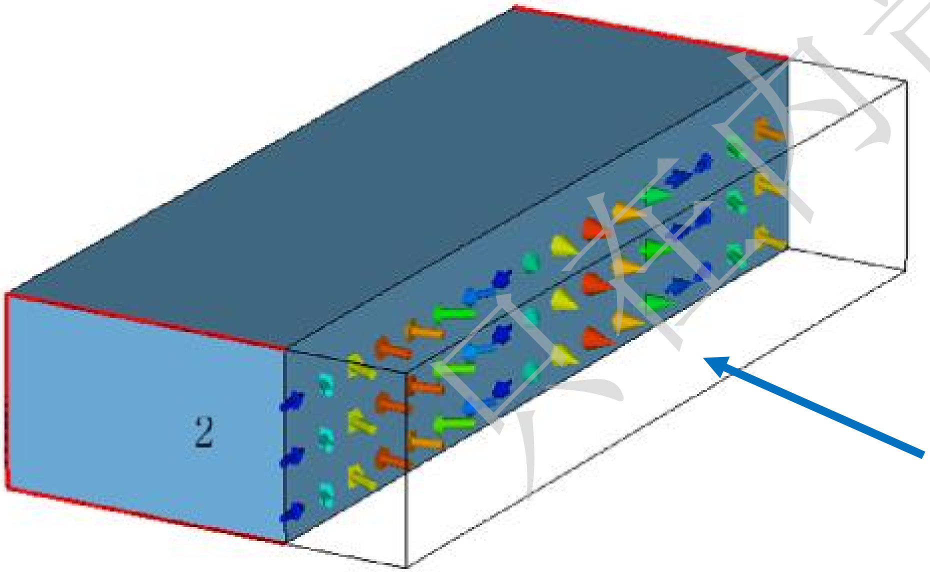
$$E_y \sim \cos\left(k_z z - \omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

矩形波导中的主模式磁场分布

$$H_x \sim \sin\left(\frac{p\,x}{a}\right)$$

$$H_z \sim \cos\left(\frac{p\,x}{a}\right)$$

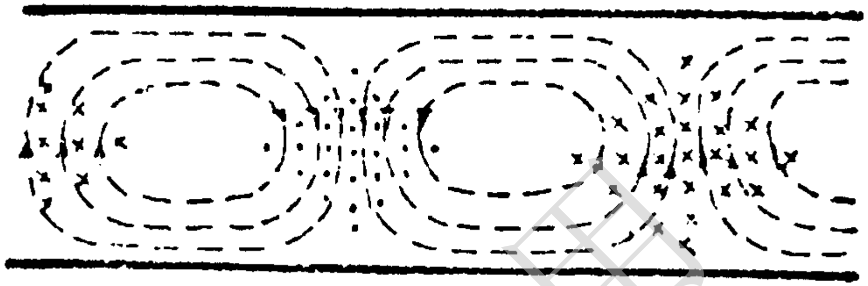




$$H_x \sim \cos\left(k_z z - w\,t + \frac{p}{2}\right)$$

$$H_z \sim \cos\left(k_z z - w\,t\right)$$

(a)



沿 x 轴方向：

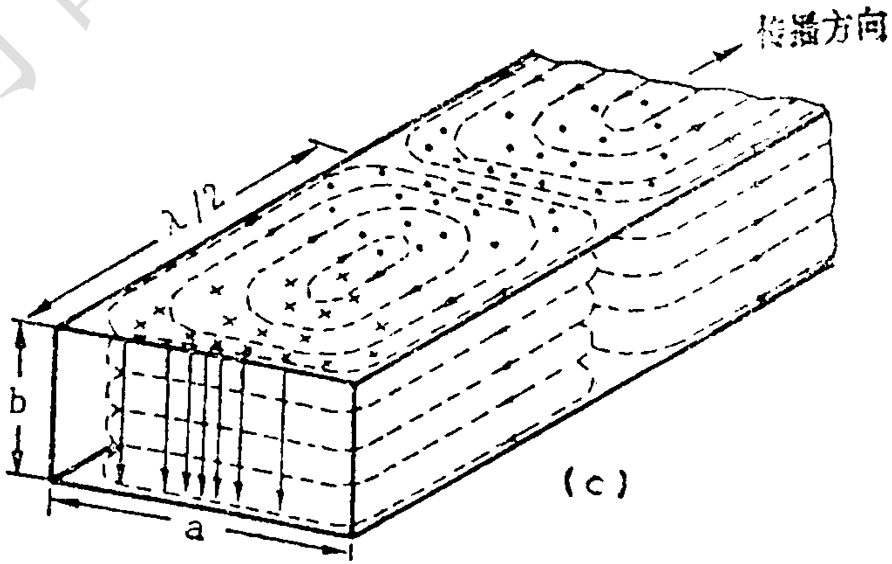
$$E_y \sim \sin\frac{\pi x}{a},\ H_x \sim \sin\frac{\pi x}{a},\ H_z \sim \cos\frac{\pi x}{a}$$

沿 z 轴方向：

$$E_y \sim \cos\left(k_z z - \omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$H_x \sim \cos\left(k_z z - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$H_z \sim \cos\left(k_z z - \omega t\right)$$



(c)

壁电流分布

波导壁上的电流：$\bar{i} = \hat{n} \times \bar{H}$

1。窄边上的电流分布：

$$x = 0: \quad i_y = -H_z\big|_{x=0} = -H_0 e^{j(wt-k_z z)}$$

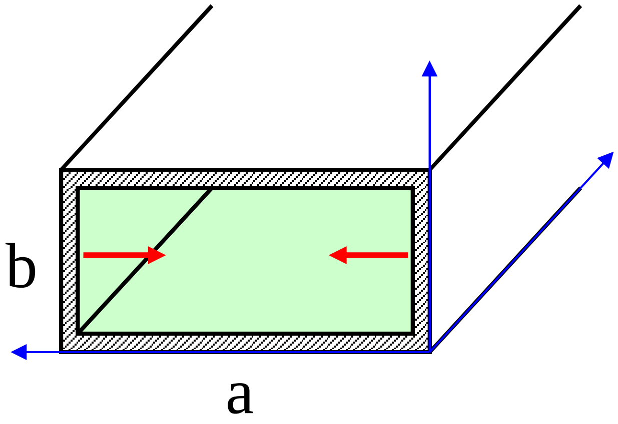
$$i_z = 0$$

$$x = a: \quad i_y = H_z\big|_{x=a} = -H_0 e^{j(wt-k_z z)}$$

$$i_z = 0$$

$$H_x = \frac{jk_z a}{p} H_0 e^{j(wt-k_z z)} \sin\left(\frac{p x}{a}\right)$$

$$H_z = H_0 e^{j(wt-k_z z)} \cos\left(\frac{p x}{a}\right)$$



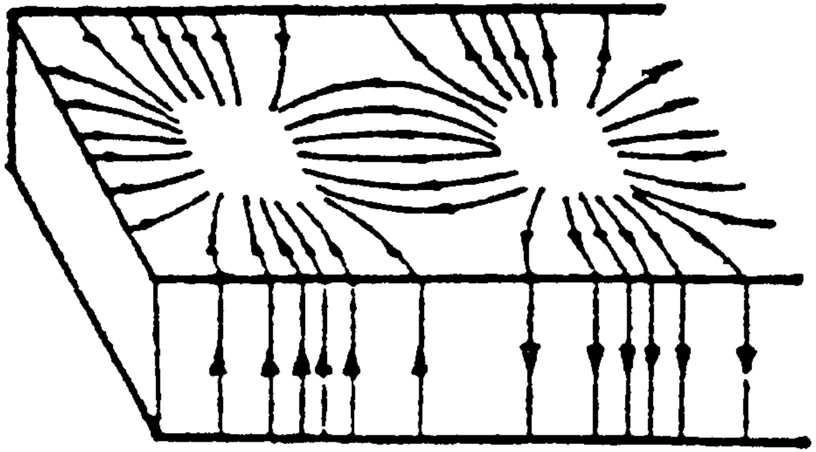
2。宽边上的电流分布：

$$y=0: \quad i_x = H_z\big|_{y=0} = H_0 e^{j(wt-k_z z)} \cos\left(\frac{p\,x}{a}\right)$$

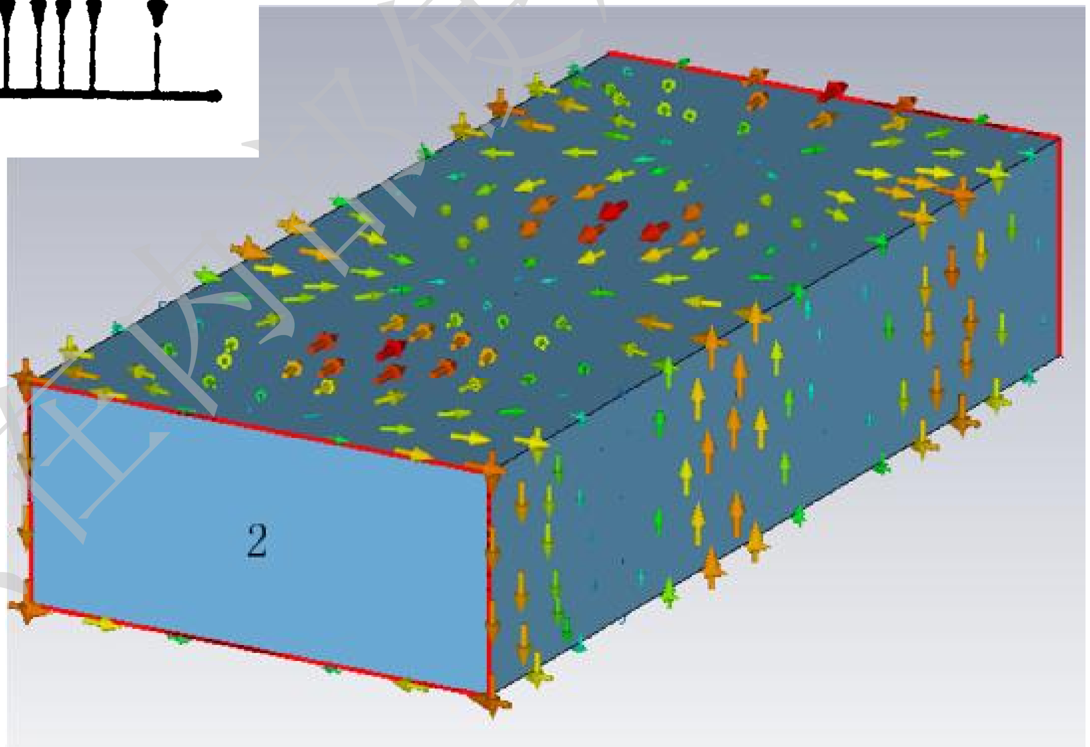
$$i_z = -H_x\big|_{y=0} = -j\frac{k_z a}{p} H_0 e^{j(wt-k_z z)} \sin\left(\frac{p\,x}{a}\right)$$

$$y=b: \quad i_x = -H_z\big|_{y=b} = -H_0 e^{j(w\,t-k_z z)} \cos\left(\frac{p\,x}{a}\right)$$

$$i_z = H_x\big|_{y=b} = j\frac{k_z a}{p} H_0 e^{j(w\,t-k_z z)} \sin\left(\frac{p\,x}{a}\right)$$



矩形波导中的主模式
表面电流分布



传输功率和功率容量

- 传输功率

$$P = \int_A \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\cdot d\vec{A} = \frac{1}{2}\int_A \mathrm{Re}\left(E_t\times H_t^*\right)dA$$

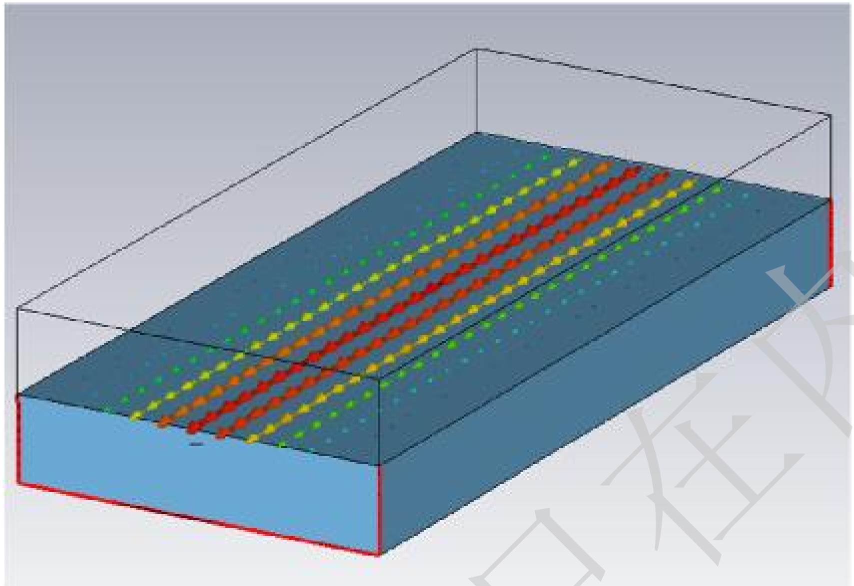
TE波

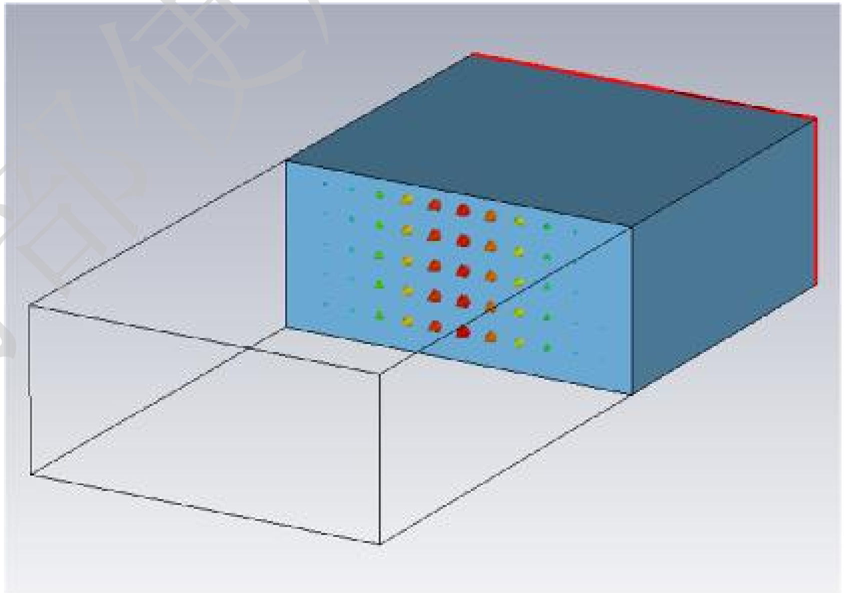
$$P^{TE} = \frac{ab\omega\mu k_z}{2\delta_{0m}\delta_{0n}k_c^2}H_0^2 \qquad 其中\ \delta_{0i} = \begin{cases} 1 & (i=0) \\ 2 & (i\neq 0) \end{cases}$$

TM波

$$P^{TM} = \frac{ab\omega\varepsilon k_z}{8k_c^2}E_0^2$$

波导中主模式的波印庭矢量





对TE_{10}模式，有

$$P=\frac{\omega\mu a^3 b k_z}{4\pi^2}H_0^2$$

在宽壁中心（x=a/2）， E_y 达到最大值 $E_{0\max}=\omega\mu a H_0/\pi$

$$P=\frac{ab}{4\eta}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}E_{0\max}^2$$

如果 E_{0max}＝填充介质的击穿电场强度 E_{br}，

该模式的最大传输功率（功率容量）为：

$$P_{br}=\frac{ab}{4\eta}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}E_{br}^2$$

损 耗

- 损耗来源:

  填充介质损耗(α_d)，金属损耗(α_c)

- 如何求 α

  当波导有耗时，传输功率为

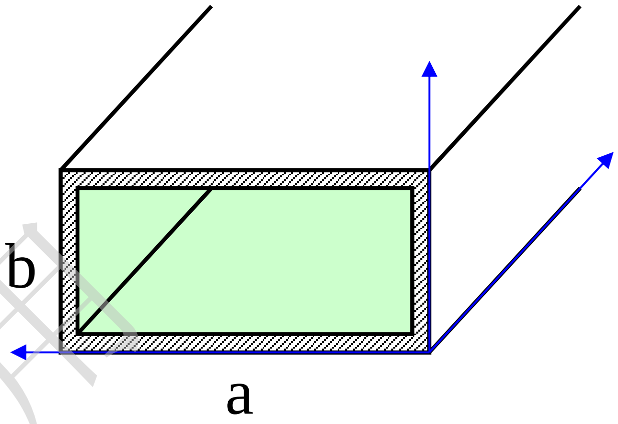
$$P(z) = P_0 e^{-2\alpha z}$$

  单位长度的功率损耗为

$$d P_L = -\frac{dP}{dz} = 2\alpha P$$

波导的衰减常数是：

$$a = \frac{d\,P_L}{2P} \approx \frac{d\,P_L}{2P_0}$$



在只考虑金属损耗时，P_L来源于金属的表面电阻R_s

$$R_s = \frac{1}{s\,d} = \sqrt{\frac{wm}{2s}}$$

损耗功率

$$d\,P_L = \oint \frac{1}{2} R_s \,|\, i_s|^2 \,\mathrm{d}l = \frac{1}{2} R_s \oint |H_t|^2 dl$$

传输功率

$$P_0 = \frac{Z}{2} \int_A |H_t|^2 dA$$

- 导电媒质中的电流分布

金属内部的传播常数

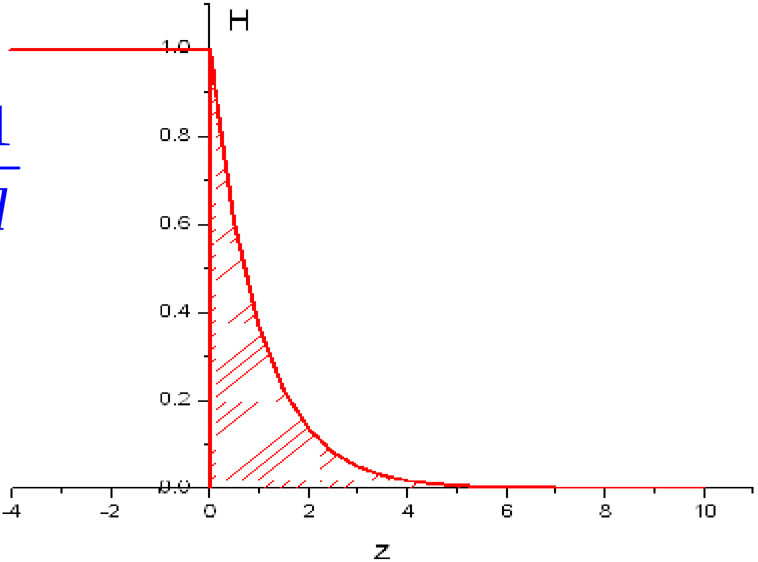
$$k^2=\omega^2\mu\varepsilon=k_0^2\mu_r\left(1-\frac{j\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)\approx k_0^2\left(-\frac{j\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right),\quad k=\pm(-1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}$$

$$\vec{H}=\vec{H}_0e^{-jkz}\rightarrow 0\,(z\rightarrow\infty)$$

$$\therefore\ k=-(-1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}=-(-1+j)\frac{1}{\delta}$$

$$\vec{H}=\vec{H}_0e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}}$$

$$\vec{i}_f=\nabla\times\vec{H}=\vec{i}_0e^{-\frac{z}{\delta}}$$



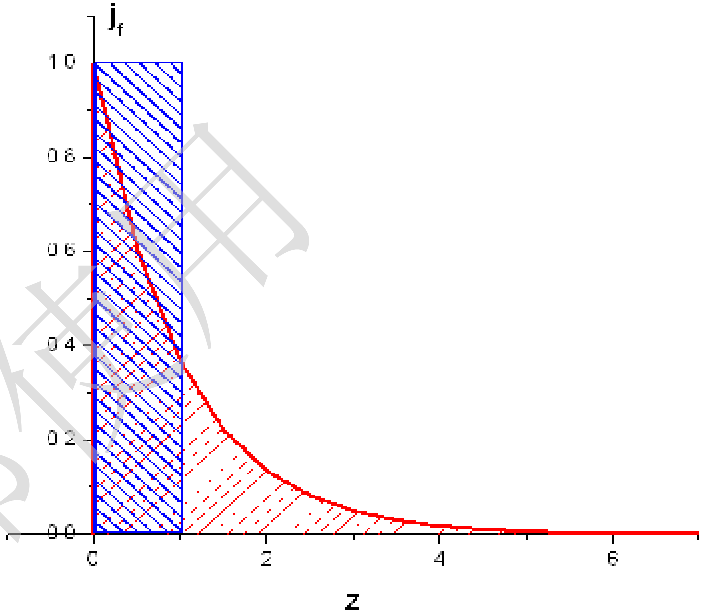
导电媒质中的总电流

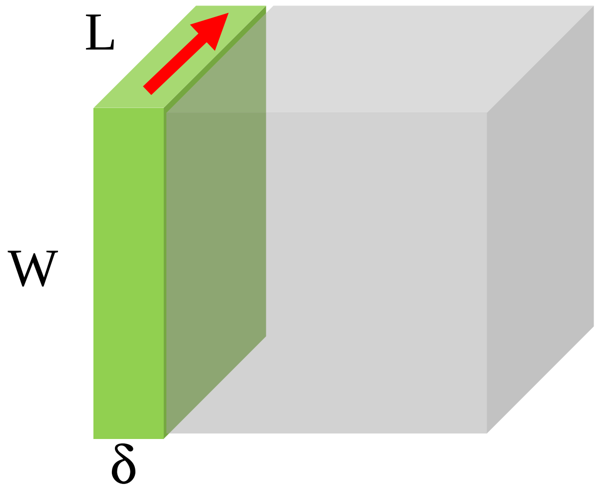
$$I = \int_0^\infty \left|\vec{i}\right| dz = \int_0^\infty i_0 e^{-z/d} dz$$

$$= i_0 d$$

$$R = \frac{1}{s}\frac{L}{d \times W}\Bigg|_{\substack{L=1\\W=1}} = \frac{1}{s d}$$

$$= \sqrt{\frac{wm}{2s}} = R_s$$





- 对 TE_{10} 波，有

损耗功率：

$$P_L = R_s\int_0^b |H_0|^2 \mathrm{d}y + R_s\int_0^a |H_0|^2\left(\cos^2\frac{p x}{a} + \frac{k_z^2 a^2}{p^2}\sin^2\frac{p x}{a}\right)\mathrm{d}x$$

$$= R_s|H_0|^2\left(b + \frac{a}{2} + \frac{k_z^2 a^3}{2p^2}\right)$$

传输功率：

$$P_0 = \frac{wma^3bk_z}{4p^2}H_0^2$$

衰减常数：

$$a_c(\mathrm{NP/m}) = \frac{R_s(2p^2b + a^3k^2)}{a^3bkhk_z} = \frac{R_s\left[1 + \frac{2b}{a}\left(\frac{l}{2a}\right)^2\right]}{hb\sqrt{1-\left(\frac{l}{2a}\right)^2}}$$

波阻抗与特性阻抗

- 定义：波导中横向电场分量和横向磁场分量之比

$$Z=\frac{E_x}{H_y}=-\frac{E_y}{H_x}$$

矩形波导

$$\frac{E_x}{H_y}=\frac{k_z\dfrac{\partial E_z}{\partial x}+wm\dfrac{\partial H_z}{\partial y}}{we\dfrac{\partial E_z}{\partial x}+k_z\dfrac{\partial H_z}{\partial y}}$$

（1）对TE波（E_z = 0）

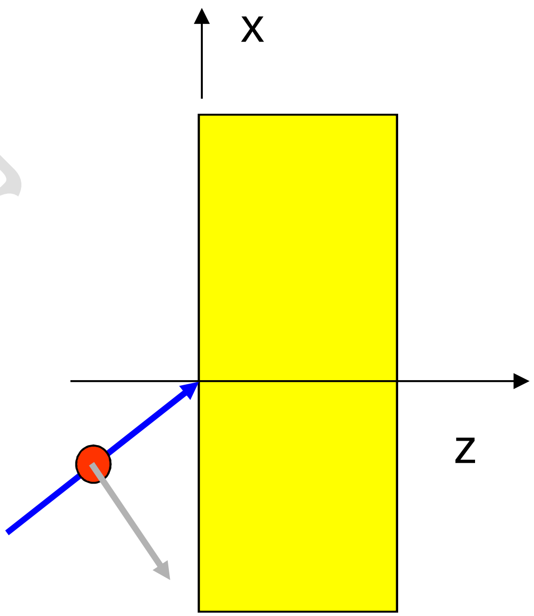
$$Z=\frac{E_x}{H_y}=-\frac{wm}{k_z}=\frac{h}{\sqrt{1-(l/l_c)^2}}$$

（2）对TM波（H_z = 0）

$$Z=\frac{E_x}{H_y}=-\frac{k_z}{we}=h\sqrt{1-(l/l_c)^2}$$

从E场投影到z方向看

电磁波在介质板表面的反射



（1）垂直极化（s波）-> TE波型

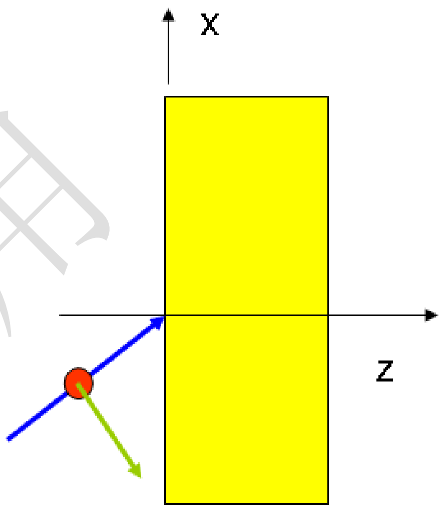
$$Z^{(s)} = \frac{wm}{k_z} = \frac{h}{\cos q} = \frac{\sqrt{m/e}}{k\cos q}\left(w\sqrt{me}\right)$$

（2）平行极化（p波）-> TM波型

$$Z^{(p)} = \frac{k_z}{we} = h\cos q = \frac{\sqrt{m/e}}{\left(w\sqrt{me}\right)}k\cos q$$

z=0处的输入阻抗和反射系数分别为：

$$Z_{in}=Z_2\frac{Z_3+jZ_2\tan k_{z2}d}{Z_2+jZ_3\tan k_{z2}d}\qquad \Gamma=\frac{Z_{in}-Z_1}{Z_{in}+Z_1}$$

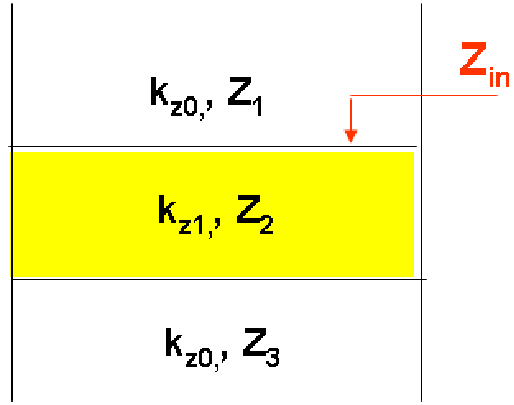


定义界面反射系数：

$$r_{12}=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1},\quad r_{23}=\frac{Z_3-Z_2}{Z_3+Z_2}$$

$$Z_{in}=Z_2\frac{1+r_{23}e^{-j2k_{z2}d}}{1-r_{23}e^{-j2k_{z2}d}}$$

$$\boxed{\Gamma=\frac{r_{12}+r_{23}e^{-j2k_{z2}d}}{1+r_{12}r_{23}e^{-j2k_{z2}d}}}$$

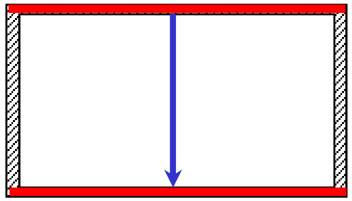


- 特征阻抗定义为

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V^2}{2P} = \frac{2P}{I^2}$$

在波导中电压和电流的概念只是等效的，特性阻抗不是唯一的。

- 波导中的TE_{10}模式的特性阻抗



电压： $U_e = \int_0^b \left| E_y \right|_{x=a/2} \mathrm{d}y = \frac{wmabH_0}{p}$

电流： $I_e = \int_0^a \left| i_z \right| \mathrm{d}x = \int_0^a \frac{k_z a}{p} H_0 \sin\frac{px}{a} \mathrm{d}x = \frac{2a^2 k_z H_0}{p^2}$

传输功率：

$$P=\frac{ab}{4h}\sqrt{1-\left(\frac{l}{2a}\right)^2}\left(\frac{wmaH_0}{p}\right)^2$$

特性阻抗的几种表达形式

$$Z_e=\frac{U_e}{I_e}=\frac{p}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\frac{h}{\sqrt{1-(l/2a)^2}}$$

$$Z_e=\frac{U_e}{2P}=2\left(\frac{b}{a}\right)\frac{h}{\sqrt{1-(l/2a)^2}}$$

$$Z_e=\frac{2P}{I_e^2}=\frac{p^2}{8}\left(\frac{b}{a}\right)\frac{h}{\sqrt{1-(l/2a)^2}}$$

其它截面波导

圆波导：

圆波导只能传输TE波或TM波。

电磁场在柱坐标中的表达式：

$$\text{TM:}\quad \vec{E} = \left[\vec{E}_T(r, j) + \hat{z}E_z(r, j)\right]e^{j(wt - bz)}$$

$$\text{TE:}\quad \vec{H} = \left[\vec{H}_T(r, j) + \hat{z}H_z(r, j)\right]e^{j(wt - bz)}$$

- 纵向场和横向场的关系

$$E_r = \frac{-j}{k_c^2}\left(b\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{wm}{r}\frac{\partial H_z}{\partial f} \right), \quad E_f = \frac{-j}{k_c^2}\left(b\frac{\partial E_z}{\partial f} - wm\frac{\partial H_z}{\partial r} \right)$$

$$H_r = \frac{-j}{k_c^2}\left(\frac{we}{r}\frac{\partial E_z}{\partial f} - b\frac{\partial H_z}{\partial r} \right), \quad H_f = \frac{-j}{k_c^2}\left(we\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{b}{r}\frac{\partial H_z}{\partial f} \right)$$

其中 $k_c^2 = k^2 - b^2$

- 圆波导横截面内的波动方程（TM模式）：

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial j^2}+k_c^2 E_z=0$$

分离变量

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r}+\left(k_c^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R=0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial j^2}+m^2\Phi=0$$

通解

$$R=AJ_m(k_c r)+BN_m(k_c r)$$

$$\Phi=C\cos(mj+j_0)$$

边界条件：

（1）周期性边界条件：Φ(φ)=Φ(φ+2π)

（2）R=0，E_z有限

（3）R=a，E_z=0

由前面两个边界条件得：

$$E_z(r,j,z)=E_0 J_m(k_c r)\cos(mj)e^{j(wt-bz)}$$

由第（3）个边界条件得：

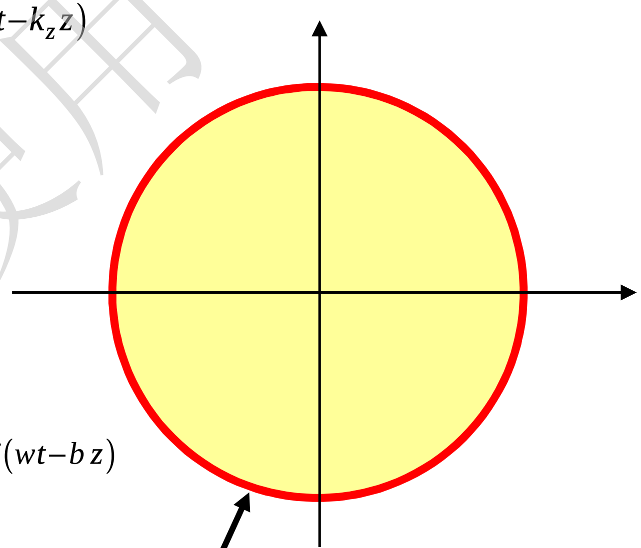
$$J_m(k_c a)=0 \quad \rightarrow \quad k_c=\frac{x_{mn}}{a}$$

- 圆波导横截面内的波动方程的解（TE模式）：

$$H_z(r,j,z) = H_0 J_m(k_c r)\cos(mj)e^{j(wt-k_z z)}$$

$$\boxed{E_f = \frac{-j}{k_c^2}\left(b\frac{\partial E_z}{\partial f} - wm\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)}$$

$$E_j(r,j,z) = \frac{jwm}{k_c}H_0 J_m^{'}(k_c r)\cos(mj)e^{j(wt-bz)}$$



$$E_t = 0 \rightarrow \begin{cases} E_z = 0 \\ E_j = 0 \end{cases}$$

由边界条件得：

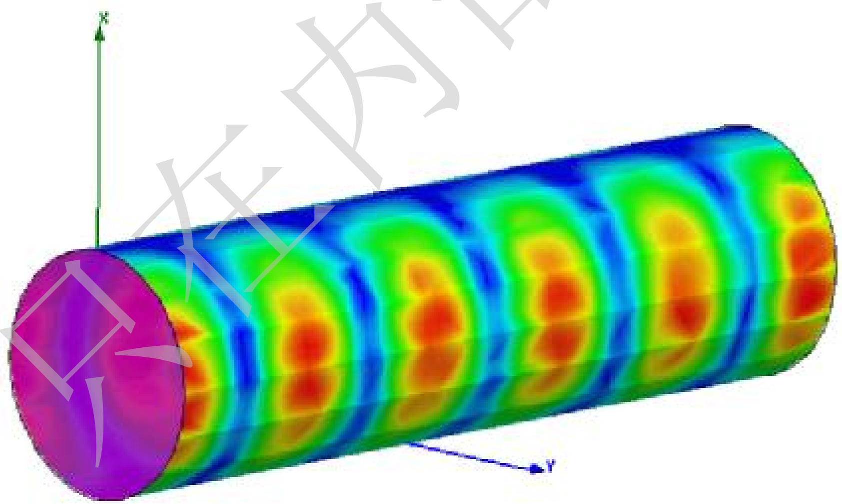
$$J_m^{'}(k_c a) = 0 \quad \rightarrow \quad k_c = \frac{x_{mn}^{'}}{a}$$

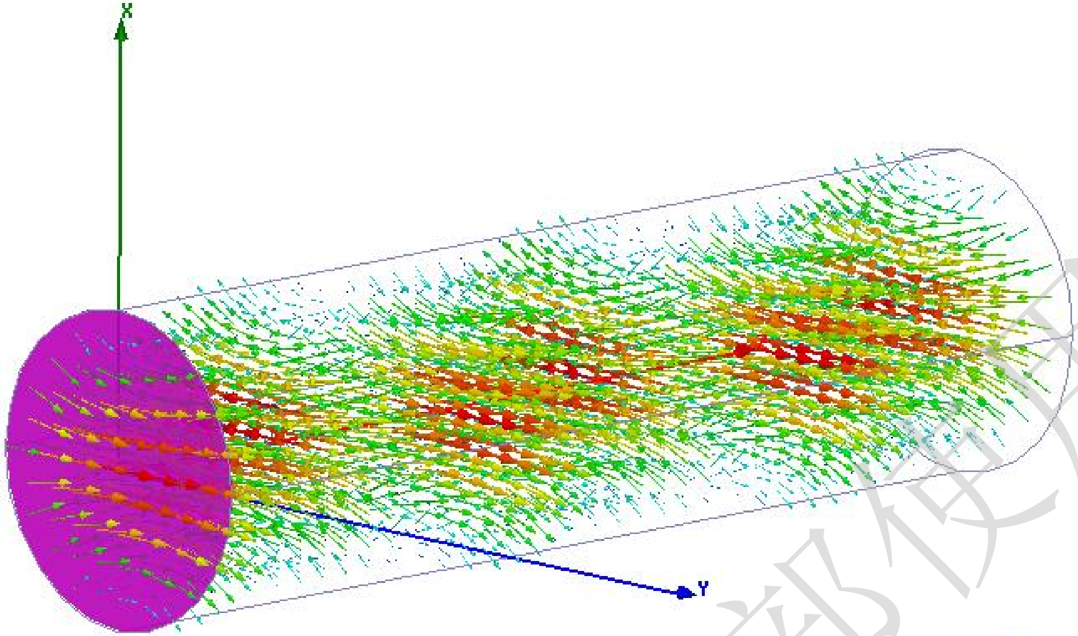
- 圆波导中的主模式：

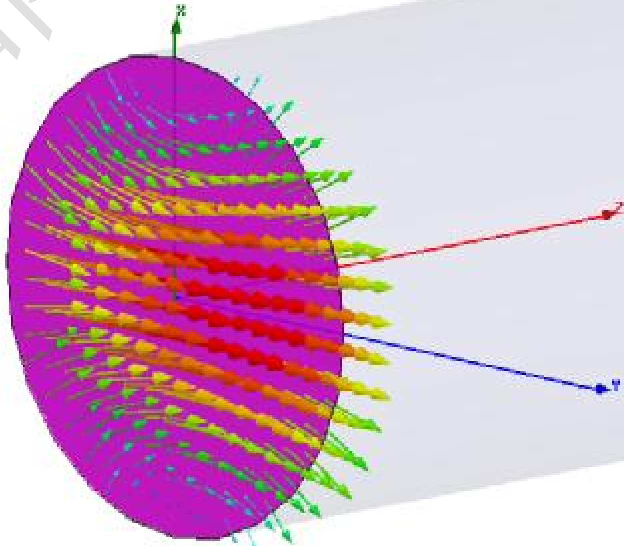
TE_{11}： $\lambda c=3.41a$ （主模式）

TM_{01}： $\lambda c=2.61a$

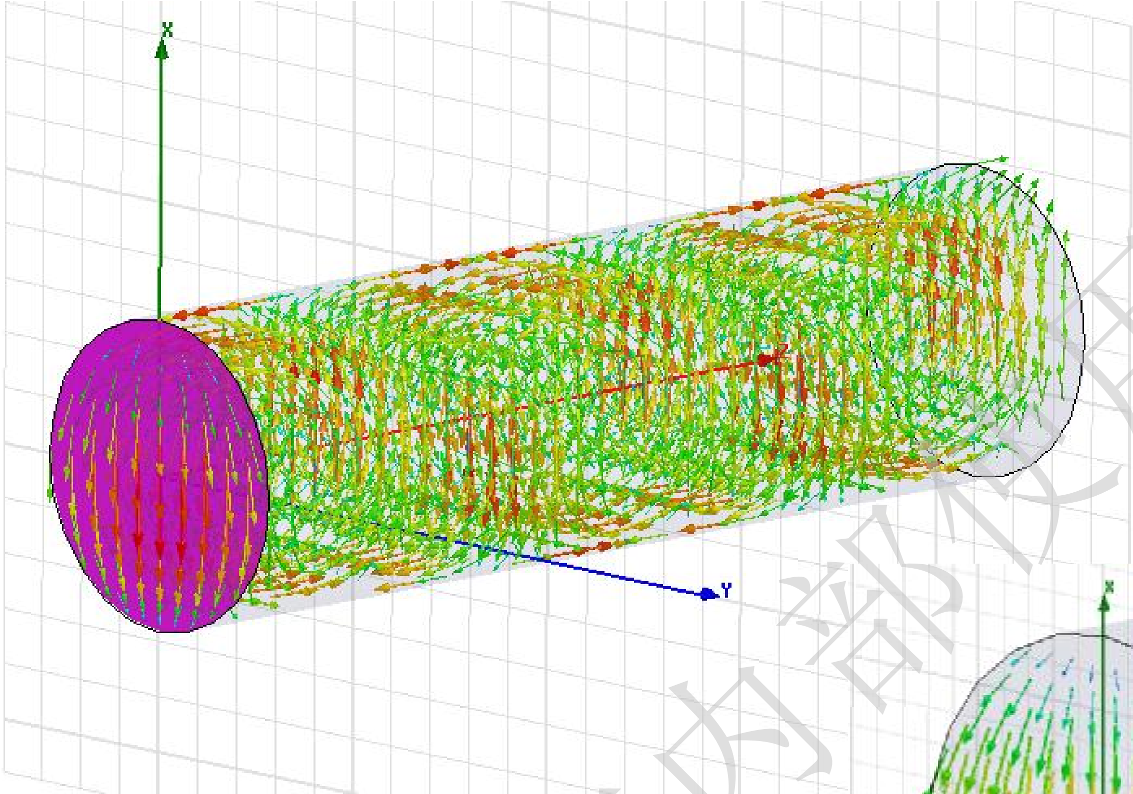
ü 圆波导中主模式的场分布



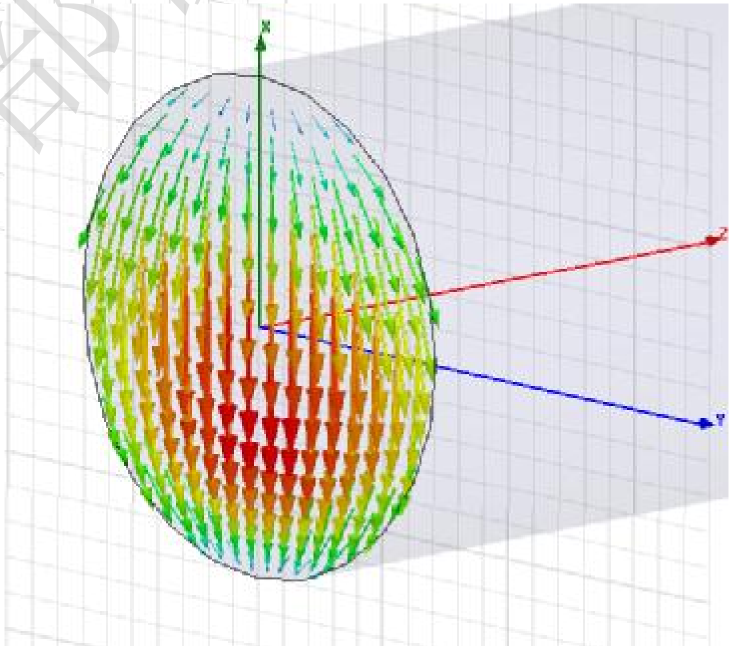




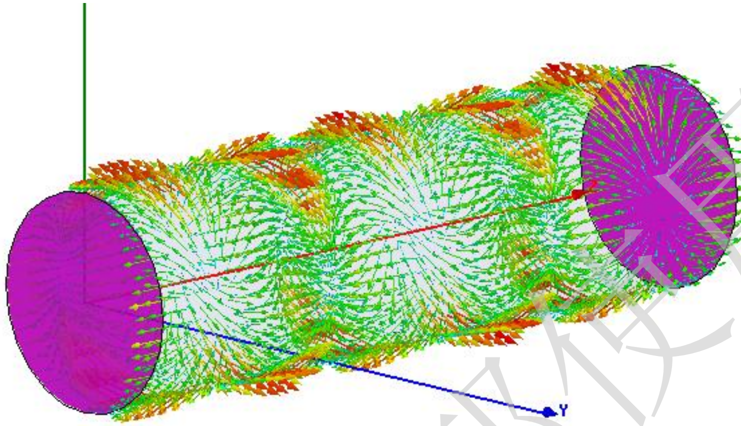
主模式的电场结构



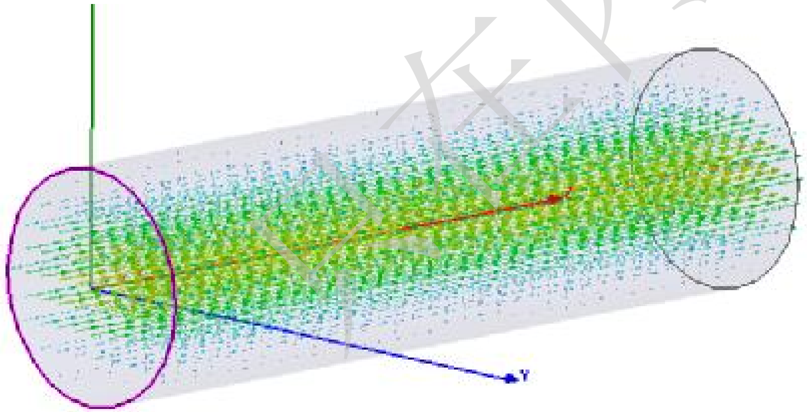
主模式的磁场结构

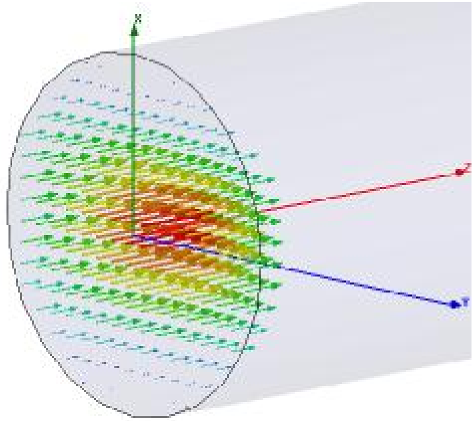


表面电流分布



能流分布

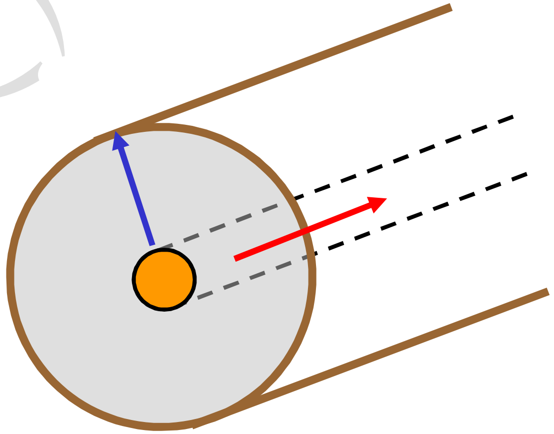




同轴线

- 同轴线传输TEM波（$E_z=H_z=0$），在一定条件下也可以传输TE和TM波

- 同轴线中的TEM波



$$\vec{E}(r,j,z)=\vec{E}_T+\hat{z}E_z=\vec{E}_T=\vec{E}_T(r,j)e^{-jbz}$$

$$\vec{H}(r,j,z)=\vec{H}_T+\hat{z}H_z=\vec{H}_T$$

$$\mathbf{Q}\quad \nabla\times\vec{E}=-jwm\vec{H}=-jwm\vec{H}_T$$

而 $$\nabla\times\vec{E}=\left(\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\times\vec{E}_T\right)+\left(\nabla_T\times\vec{E}_T\right)$$

$$\boxed{\therefore\quad \nabla_T\times\vec{E}_T=0}$$

由矢量恒等式，得 $\vec{E}_T = -\nabla_T \Phi(r, j)$

由高斯定理，得

$$\boxed{\nabla_{\mathrm{T}}^2 \Phi(r, j) = 0}$$

平面极坐标中

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial j^2} = 0$$

边界条件

$$\begin{cases} \Phi(a, j) = U_0 \\ \Phi(b, j) = 0 \end{cases}$$

分离变量Φ=P(ρ)F(φ)，则有

$$\frac{\rho}{P(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}P(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)+\frac{1}{F(\phi)}\frac{\mathrm{d}^2F(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2}=0$$

$$\frac{\rho}{P(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}P(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)=-k_\rho^2$$

$$\frac{1}{F(\varphi)}\frac{\mathrm{d}^2F(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}=-k_\varphi^2$$

$$\boxed{k_\rho^2+k_\varphi^2=0}$$

由方程 $\frac{1}{F(\varphi)}\frac{\mathrm{d}^2F(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}=-k_\varphi^2$

得到 $F(\varphi)=A_0\cos(k_\varphi\varphi+\varphi_0)$

在边界上F不随角度变化为常数，故k_φ只能取 $k_\varphi=0$

从而 $F(\varphi)=A_0\cos\varphi_0=A$

由关系式 $k_r^2+k_\varphi^2=0$ 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r}\right)=-k_r^2=0$$

$$P(r)=C\ln r+D$$

势函数解为

$$F(r, j) = A(C\ln r + D) = C_1 \ln r + C_2$$

应用边界条件得到

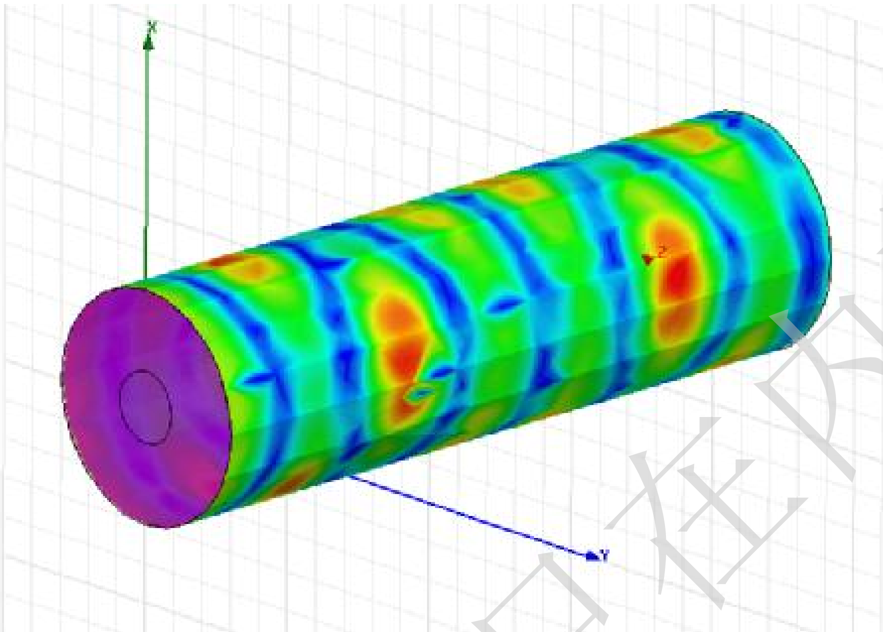
$$F(r, j) = U_0 \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}$$

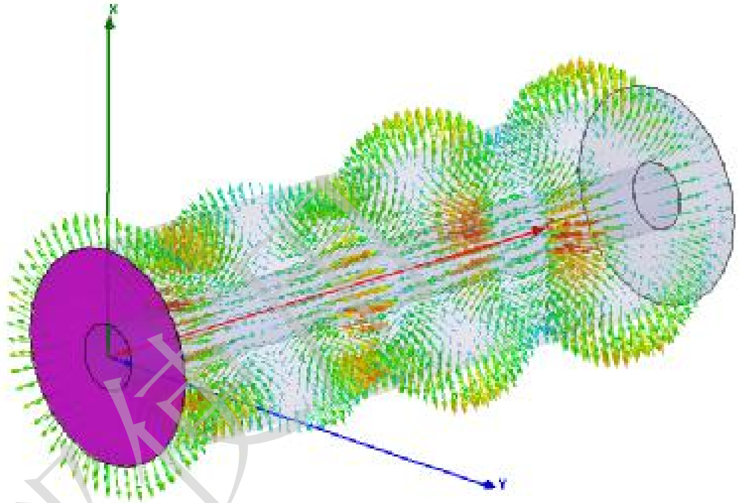
电场和磁场分布：

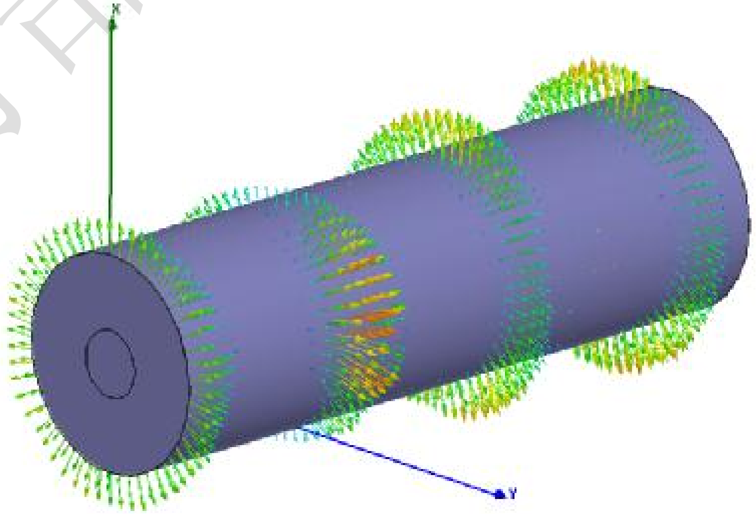
$$\bar{E}(r, j, z) = \bar{E}_T(r, j)e^{-jbz} = -\nabla_T \Phi e^{-jbz} = \hat{r}\frac{U_0}{r\ln(b/a)}e^{-jbz}$$

$$\bar{H}(r, j, z) = -\frac{1}{jwm}\nabla\times\bar{E} = \frac{U_0 e^{-jbz}}{hr\ln(b/a)}\hat{j}$$

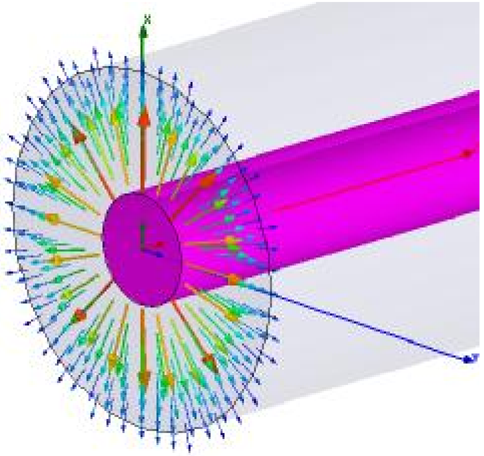
ü 同轴线中的电场分布

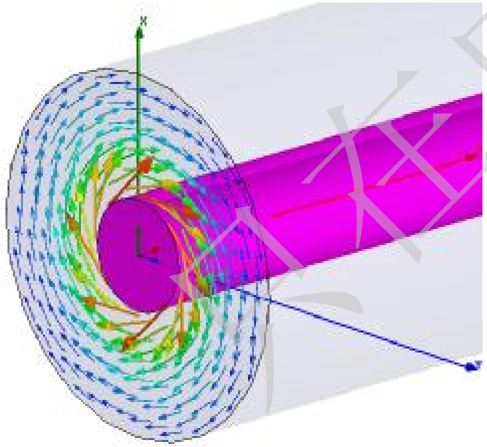




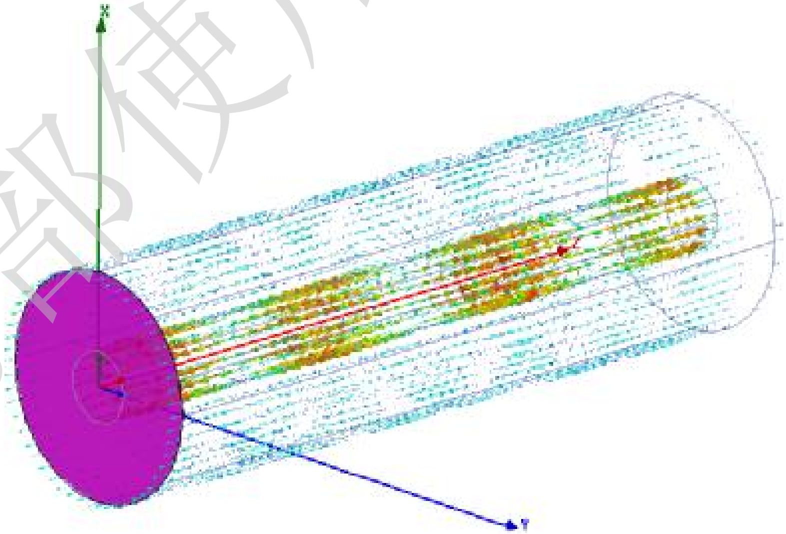


ü 同轴线中的电场和磁场





ü 同轴线中的电流分布



其中 η 为波阻抗

$$h = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{m}{e}} = \frac{120p}{\sqrt{e_r}}$$

- 传输特性：传播TEM波

传播常数； $b = \sqrt{k_0^2 - k_c^2} = k_0^2 = w\sqrt{me}$

相速=群速： $v_p = v_g = \frac{c}{\sqrt{e_r}}$

波导波长； $l_g = l = \frac{l_0}{\sqrt{e_r}}$

特征阻抗 Z=U/I

$$U=\int_a^b E_r\,\mathrm{d}r=\frac{U_0}{\ln(b/a)}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}bz}=U_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}bz}$$

$$I=\int_0^{2p} aH_j\,\mathrm{d}j=\frac{2pU_0}{h\ln(b/a)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}bz}$$

$$Z_0=\frac{U}{I}=\frac{h\ln\frac{b}{a}}{2p}=\frac{60}{\sqrt{e_r}}\ln\frac{b}{a}\quad(W)$$

衰减常数：按传输线理论结果

$$a = a_c + a_d = \frac{R_0}{2Z_0} + \frac{G_0 Z_0}{2} \qquad (\mathrm{Np/m})$$

串联电阻来源于导体壁上的电损耗

$$R_0 = \frac{1}{s\ \ s_1} + \frac{1}{s\ \ s_2} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{2pbd} + \frac{1}{2pad}\right) = \frac{R_s}{2p}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)$$

并联导纳来源于介质的漏电流

$$R_d = \int_a^b dR_d = \int_a^b \frac{1}{s_d}\frac{d\,r}{2p\,r} = \frac{1}{2p\,s_d}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$G_0 = \frac{1}{R_d} = \frac{2p\,s_d}{\ln(b/a)}$$

从而有

$$\alpha_c = \frac{R_s}{2\eta \ln(b/a)}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right) = \frac{R_s}{2\eta \ln(b/a)}\left(1+\frac{b}{a}\right)\frac{1}{b}$$

金属损耗和频率、同轴线的尺寸有关

b/a 一定：b大，则α_c小

b 一定：b/a=3.591时， α_c最小，Z_0=76.7

介质损耗和频率、填充介质有关

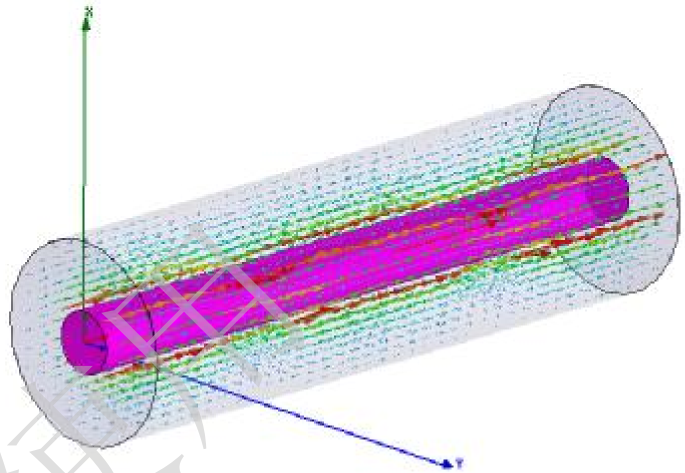
$$\alpha_d = \frac{\sigma_d \eta}{2} = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{2}\tan\delta \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi\sqrt{\varepsilon_r}}{\lambda_0}\tan\delta$$

传输功率：

$$P = \frac{1}{2}\int (E \times H^{*}) \cdot ds$$

$$= \frac{1}{2h}\int_{a}^{b}\int_{0}^{2p} \frac{U_0^2}{r\ln^2(b/a)} dj\, dr$$

$$= \frac{pU_0^2}{r\ln(b/a)}$$



$$\bar{E}(r, j, z) = \hat{r}\frac{U_0}{r\ln(b/a)}e^{-jbz}$$

同轴线中电场最大值在内导体表面

$$U_0 = aE_{\max}\ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad \therefore P = \frac{pa^2}{h}E_{\max}^2\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$ 功率容量

$$\left.\frac{\partial P_r}{\partial a}\right|_b \rightarrow \frac{b}{a} = 1.649$$ 同轴线能传输功率最大

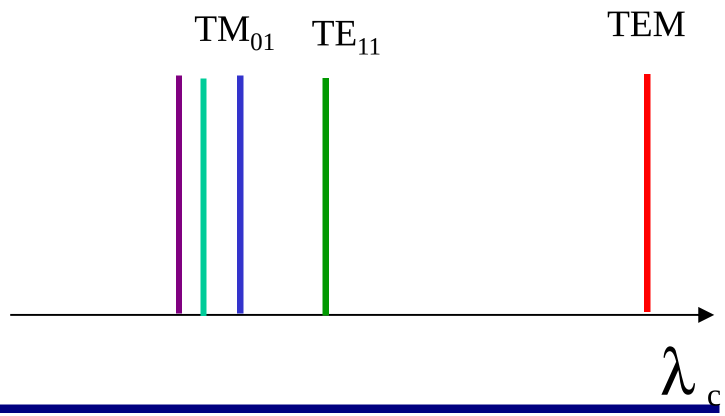
- 同轴线中的高次模与同轴线的尺寸选择

1. 同轴线又可以被看成是准圆柱波导，故在同轴线中存在TE和TM波波导模式
2. 在同轴线的使用中，要求避免出现TE和TM波，因此需要了解TE和TM波的截止波长或截止频率
3. 在同轴线中TE_{11}模式的截止波长最长

$$\lambda_c \approx \pi(a+b)$$

- 同轴线中的最小工作波长取

$$\lambda_{min} > 1.1\lambda_c$$



导波的激励方法

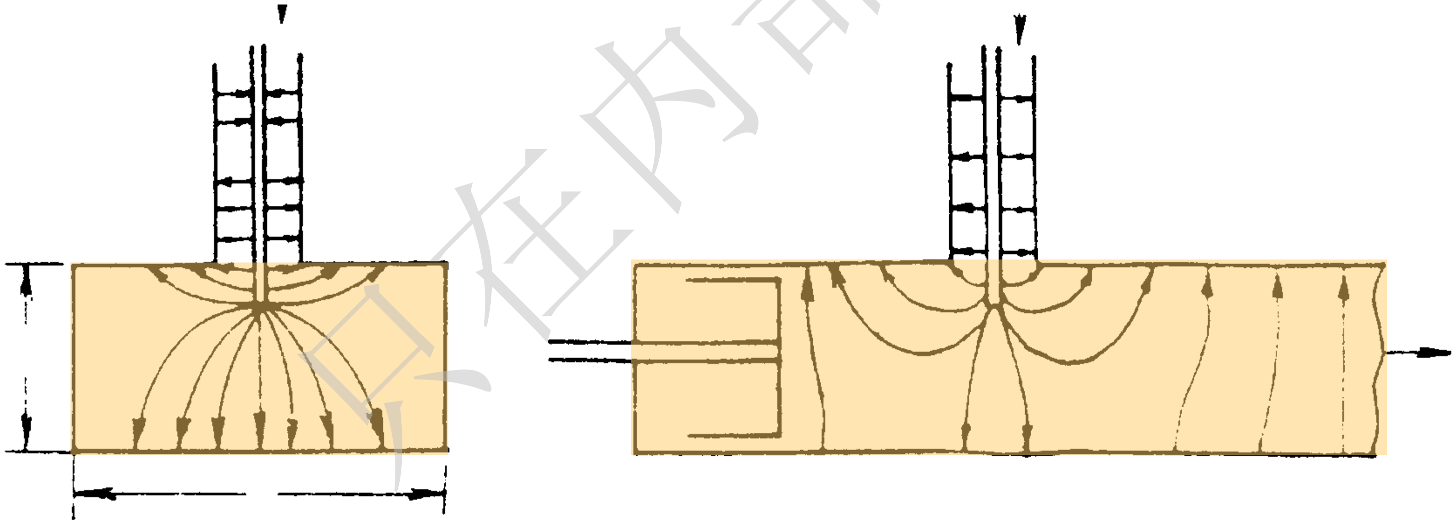
- 波导中导波的激励是电磁波的辐射问题
- 波导中可以存在满足许多种模式的导波。所需模式的形成需要有一定的激励方式，激励起的波能否在波导中传播则决定于波导的截止波长。
- 激励起所需模式的电磁场，要求激励源在波导中某点上生成的电场或磁场的方向同需模式在该点的电场或磁场方向相同。

- 常见的激励方式：

(1) 探针激励（电藕合）：

探针的轴线方向和波导中所需模式在偶合点的电力线方向一致，主要通过电场耦合。

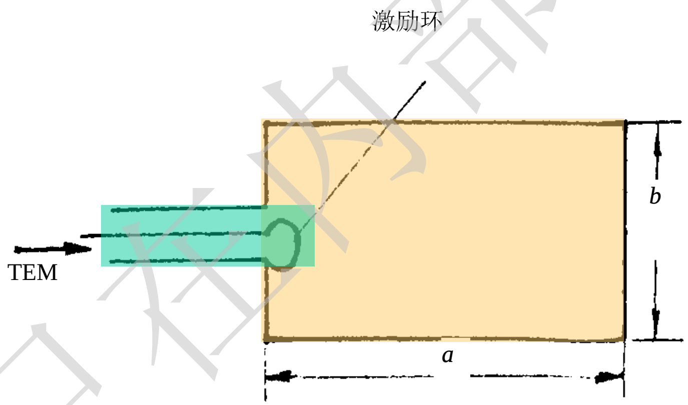
同轴-波导变换器：电耦合激发矩形波导TE_{10}模式



(2) 环激励(磁偶合)

耦合环的环平面与波导中所需模式在该点的磁力线相交，主要通过磁场耦合。

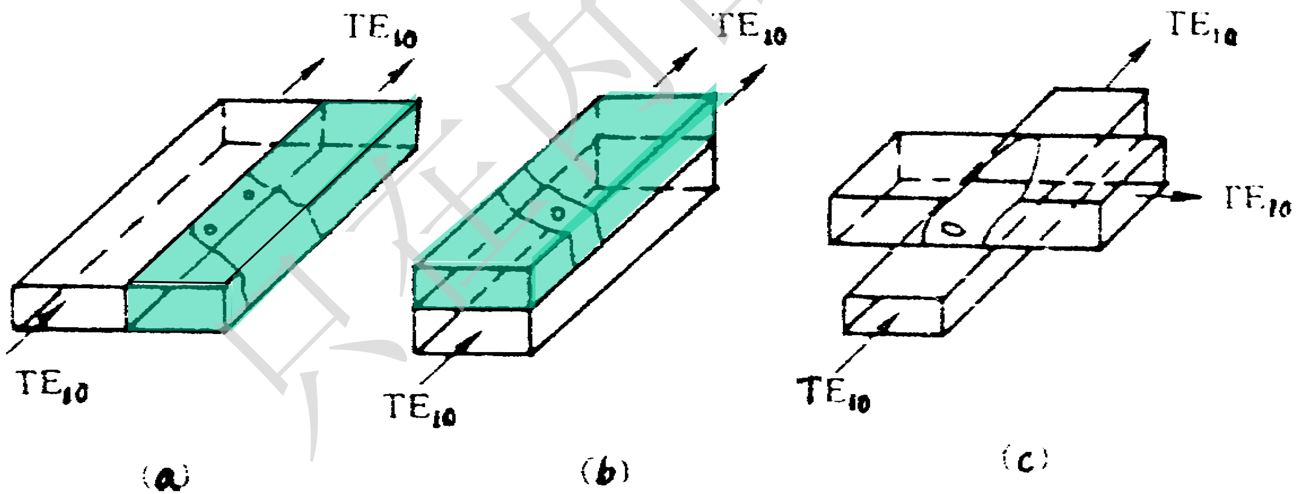
同轴-波导变换器：磁耦合激发矩形波导TE_{10}模式



(3) 孔或缝激励

利用两个波导的公共壁上开空或缝，使一部分能量辐射到另一波导中去，建立起所需要的传输模式。

该方式还可以用作波导和谐振腔、带状线等的耦合波导间的耦合



(4) 直接耦合

利用波导横截面的渐变，使波导中的模式从一种变为另一种。