第五章　规则金属波导

5.1　矩形波导

规则金属波导---具有各种形状的截面、无限长的直的空心金属管。

- 矩形波导
- 圆波导
- 椭圆波导
- 脊形波导等

横向结构和尺寸沿管轴方向（电磁波传播方向）不变。

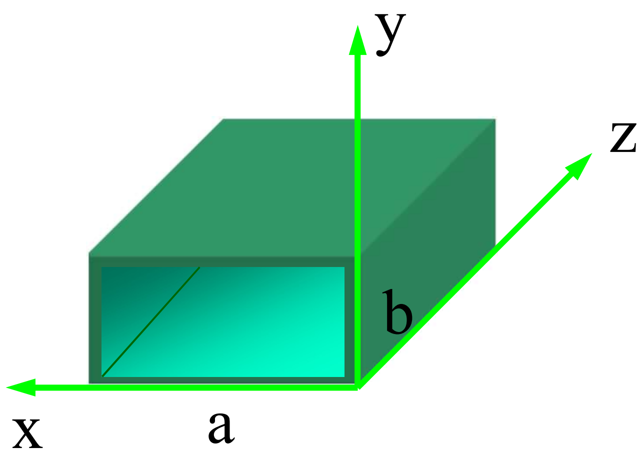
都长啥样?

a diplexer in an air traffic control radar

空间无源条件下满足：

$$\begin{cases}\nabla^2 \boldsymbol{E}+k^2\boldsymbol{E}=0\\ \nabla^2 \boldsymbol{H}+k^2\boldsymbol{H}=0\end{cases}$$

式中 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$



在管壁上的边界条件

（电场切向连续，磁场法向连续）：

$$\begin{cases}E_y=E_z=B_x=0 & (x=0,\ a)\\ E_x=E_z=B_y=0 & (y=0,\ b)\end{cases}$$

假设波导管内电磁场的强度为：

（沿z方向前进的波）

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E(x,y)}exp[j(\omega t-k_z z)]\\ \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H(x,y)}exp[j(\omega t-k_z z)]\end{cases}$$

$$\boldsymbol{E}=E_x(x,y)\boldsymbol{e}_x+E_y(x,y)\boldsymbol{e}_y+E_z(x,y)\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{H}=H_x(x,y)\boldsymbol{e}_x+H_y(x,y)\boldsymbol{e}_y+H_z(x,y)\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t};\quad \nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} + jk_z E_y = -j\omega\mu H_x \\ -jk_z E_x - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_z}{\partial y} + jk_z H_y = j\omega\varepsilon E_x \\ -jk_z H_x - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_y \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_z \end{cases}$$

解出电磁场x, y方向的分量：

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{j}{k_c^2}\left(k_z \dfrac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu \dfrac{\partial H_z}{\partial y}\right) \\ E_y = -\dfrac{j}{k_c^2}\left(k_z \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\mu \dfrac{\partial H_z}{\partial x}\right) \\ H_x = -\dfrac{j}{k_c^2}\left(-\omega\varepsilon \dfrac{\partial E_z}{\partial y} + k_z \dfrac{\partial H_z}{\partial x}\right) \\ H_y = -\dfrac{j}{k_c^2}\left(\omega\varepsilon \dfrac{\partial E_z}{\partial x} + k_z \dfrac{\partial H_z}{\partial y}\right) \end{cases}$$

六个分量方程

式中：

$$k_c^2 = (jk_z)^2 + \omega^2\mu\varepsilon = k^2 - k_z^2$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \nabla_{xy}^2 \boldsymbol{E} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial z^2} = -k^2 \boldsymbol{E} = \nabla_{xy}^2 \boldsymbol{E} + (jk_z)^2 \boldsymbol{E}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla_{xy}^2 \boldsymbol{E} + k_c^2 \boldsymbol{E} = 0 \\ \nabla_{xy}^2 \boldsymbol{H} + k_c^2 \boldsymbol{H} = 0 \end{aligned}}$$

1. 横电波：TE波（ $E_z=0$ ）

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}=-k_c^2 H_z$$

用分离变量法，令 $H_z=X(x)Y(y)$：

$$YX''+XY''=-k_c^2 XY$$

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=-k_c^2$$

令：

$$\begin{cases}\dfrac{X''}{X}=-k_x^2\\ \dfrac{Y''}{Y}=-k_y^2\end{cases}$$

$$k_x^2+k_y^2=k_c^2$$

$$\begin{cases}X=C_1\cos k_x x+C_2\sin k_x x\\ Y=C_3\cos k_y y+C_4\sin k_y y\end{cases}$$

系数C_1、C_2、C_3和C_4可由边值关系确定。

$$\begin{cases}\text{在}x=0,a\text{ 处}E_y=0\quad\text{即}\dfrac{\partial H_z}{\partial x}=0\\ \text{在}y=0,b\text{ 处}E_x=0\quad\text{即}\dfrac{\partial H_z}{\partial y}=0\end{cases}$$

$$H_z=XY=(C_1\cos k_x x+C_2\sin k_x x)(C_3\cos k_y y+C_4\sin k_y y)e^{j(\omega t-k_z z)}$$

$$C_2=C_4=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H_z}{\partial x}=(\cancel{C_2k_x\cos k_x x}-C_1k_x\sin k_x x)(C_3\cos k_y y+\cancel{C_4\sin k_y y})e^{j(\omega t-k_z z)}\\ \dfrac{\partial H_z}{\partial y}=(C_1\cos k_x x+\cancel{C_2\sin k_x x})(\cancel{C_4k_y\cos k_y y}-C_3k_y\sin k_y y)e^{j(\omega t-k_z z)}\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}k_x=\dfrac{m\pi}{a}\\ k_y=\dfrac{n\pi}{b}\end{cases}}$$

式中 $m,\ n$ 分别为 $0,1,2,3\cdots$，但不可同时为零，否则就无电磁场。

矩形波导中的横电波：

（电磁场复振幅）TE_{mn}

$$\begin{cases} H_z = H_0 \cos k_x x \cos k_y y \\ H_x = j\dfrac{k_x k_z}{k_c^2} H_0 \sin k_x x \cos k_y y \\ H_y = j\dfrac{k_y k_z}{k_c^2} H_0 \cos k_x x \sin k_y y \\ E_x = j\dfrac{\omega\mu k_y}{k_c^2} H_0 \cos k_x x \sin k_y y \\ E_y = -j\dfrac{\omega\mu k_x}{k_c^2} H_0 \sin k_x x \cos k_y y \end{cases}$$

模式

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \omega^2\mu\varepsilon - k_z^2$$

$$k_z = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]}$$

2. 横磁波：TM波（$H_z = 0$）

TM_{mn}

$$\begin{cases} E_z = E_0 \sin k_x x \sin k_y y \\ E_x = -j\dfrac{k_x k_z}{k_c^2} E_0 \cos k_x x \sin k_y y \\ E_y = -j\dfrac{k_y k_z}{k_c^2} E_0 \sin k_x x \cos k_y y \\ H_x = j\dfrac{\omega \varepsilon k_y}{k_c^2} E_0 \sin k_x x \cos k_y y \\ H_y = -j\dfrac{\omega \varepsilon k_x}{k_c^2} E_0 \cos k_x x \sin k_y y \end{cases}$$

不存在TM_{0n}或TM_{m0}型波，因为这时：

$$E_z = H_z = 0$$

式中 $k_x = \dfrac{m\pi}{a},\ k_y = \dfrac{n\pi}{b},\ k_c^2 = \omega^2 \mu\varepsilon - k_z^2 = \left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2$

$$k_z = \sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]}$$

当k_z为实数时，电磁波能无衰减通过 $\omega^2 \mu\varepsilon > \left[\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2\right]$

$$k_z = k\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}$$

截止频率：

$$f_c = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{\mu\varepsilon}}$$

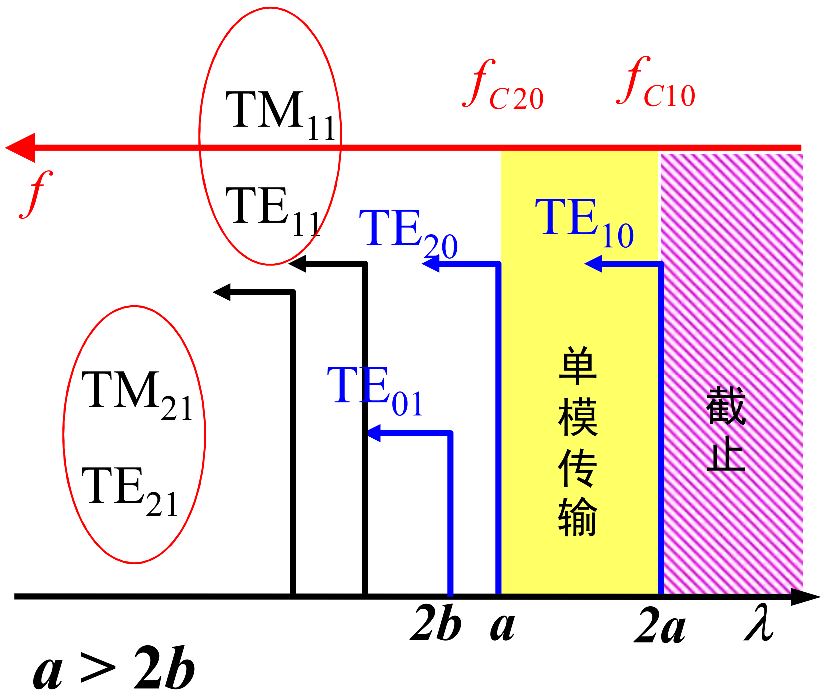
$$f \geq f_c$$

截止波长：$$\lambda_c = \frac{v}{f_c} = \frac{1}{f_c\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}$$

$$\boxed{\lambda \le \lambda_c}$$

由 $k_z = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ 可求得波导波长 λ_g ：$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

式中 $\lambda = \frac{v}{f}$ 为电磁波在无限介质中的波长。



例：试计算以TE模式在矩形波导中传播的电磁波的群速与相速。

解：群速和相速分别是 $v_g = \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{\omega_0}$ 和 $v_p = \left.\frac{\omega}{k}\right|_{\omega_0}$ ，当电磁波沿z方向传播时，真正的波矢量是 k_z 。将等式 $k_z^2 = \omega^2\mu\varepsilon - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]$ 对 ω 取微分，得到

$k_z \mathrm{d}k_z = \mu\varepsilon\omega\mathrm{d}\omega$ 所以

$$v_g = \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_z}\right|_{\omega_0} = \left.\frac{k_z}{\omega\mu\varepsilon}\right|_{\omega_0} = \frac{\sqrt{\omega_0^2\mu\varepsilon - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]}}{\omega_0\mu\varepsilon} = \frac{v}{\omega_0}\sqrt{\omega_0^2 - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]v^2} < v$$

$$v_p = \left.\frac{\omega}{k_z}\right|_{\omega_0} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2\mu\varepsilon - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]}} = \frac{\omega_0 v}{\sqrt{\omega_0^2 - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]v^2}} > v$$

从上两式很容易看出：$v_g v_p = v^2$

TE_{10}型主型波

1. 场结构　　电力线和磁力线方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{E_x} = \dfrac{dy}{E_y} = \dfrac{dz}{E_z} \\ \dfrac{dx}{H_x} = \dfrac{dy}{H_y} = \dfrac{dz}{H_z} \end{cases}$$

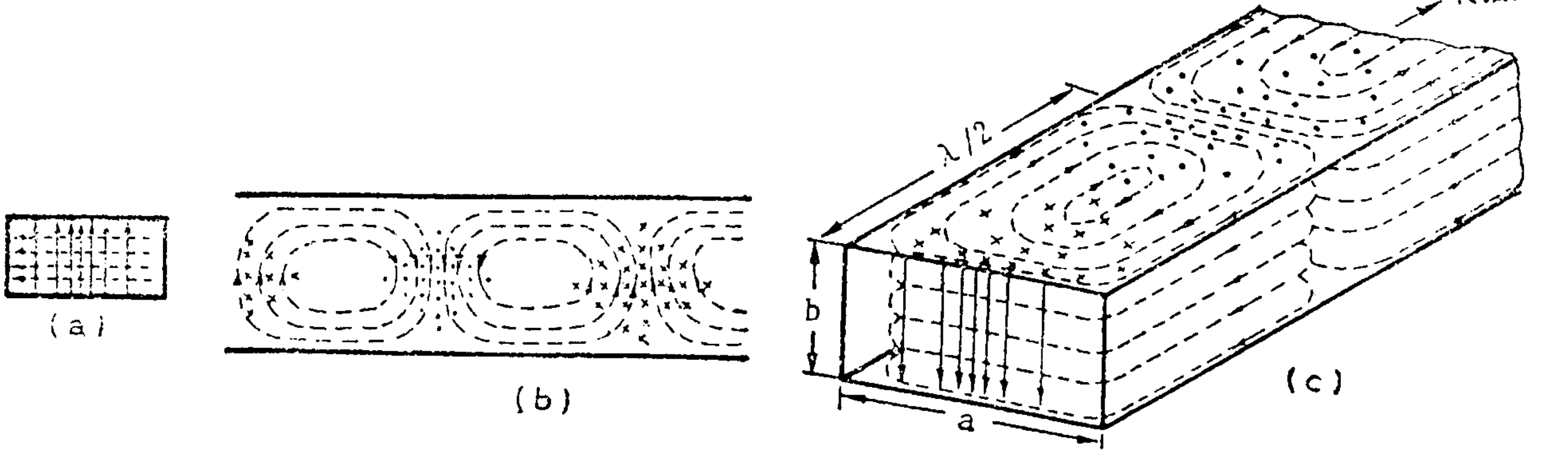
TE_{10}的场分量：

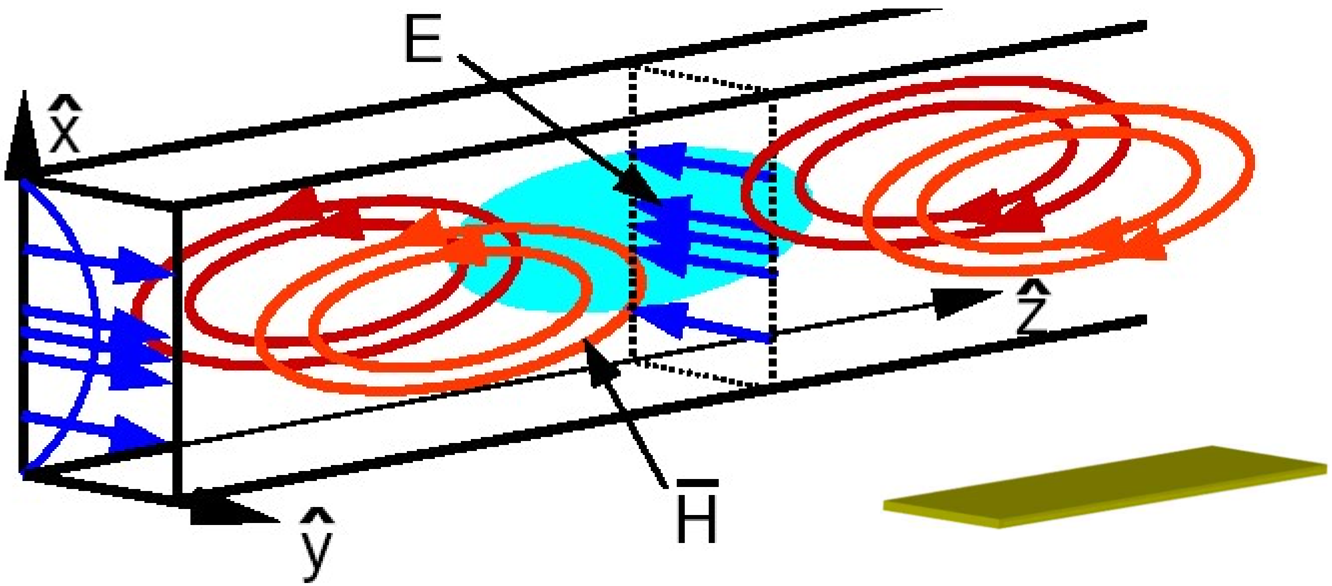
$$E_x = H_y = E_z = 0$$

$$E_y = -\frac{j\omega\mu a}{\pi} H_0 e^{j(\omega t - k_z z)} \sin\frac{\pi x}{a}$$

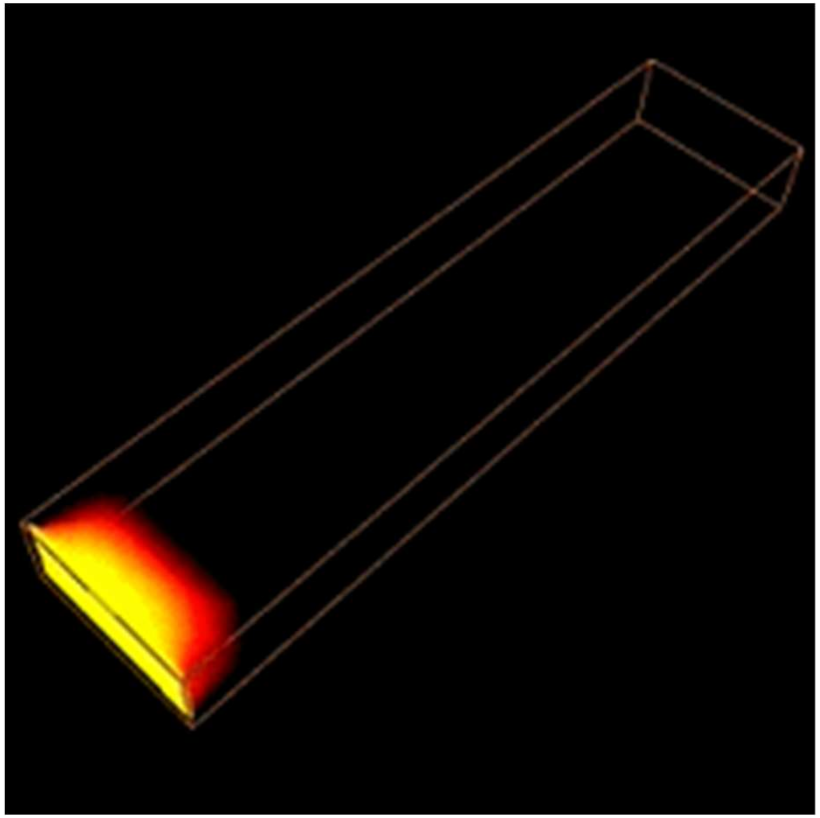
$$H_x = \frac{jk_z a}{\pi} H_0 e^{j(\omega t - k_z z)} \sin\frac{\pi x}{a}$$

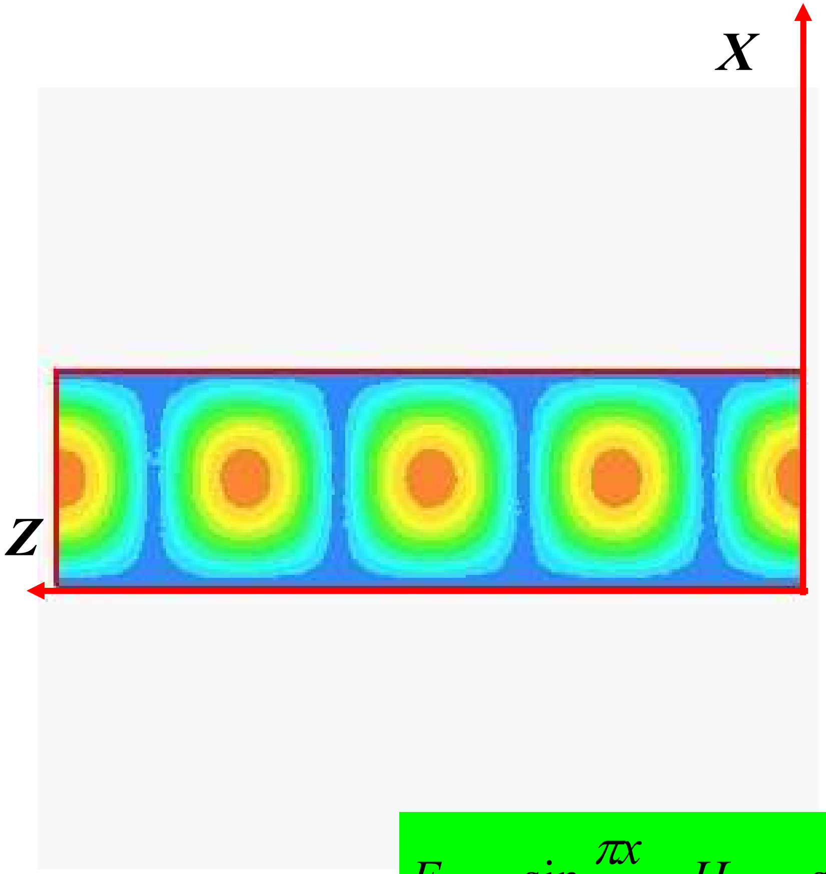
$$H_z = H_0 e^{j(\omega t - k_z z)} \cos\frac{\pi x}{a}$$

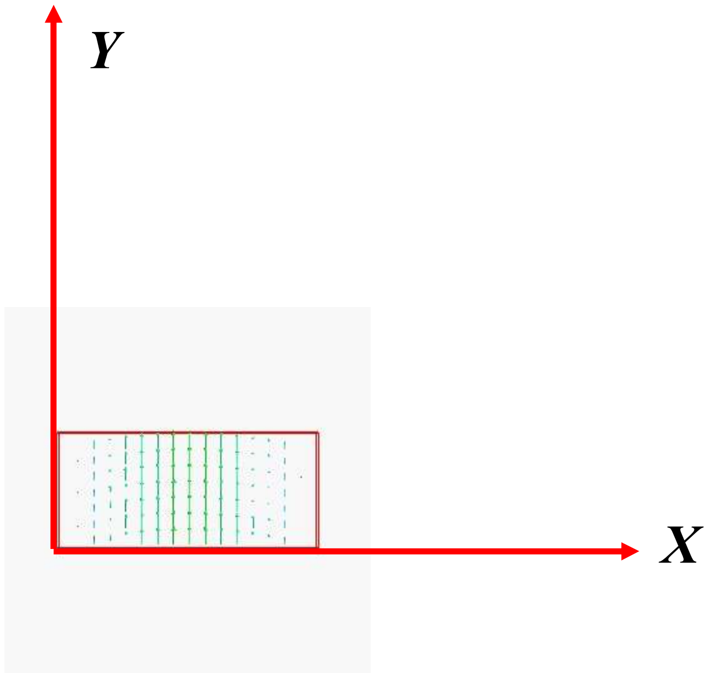




衰减片







$$E_y \sim \sin\frac{\pi x}{a},\ H_x \sim \sin\frac{\pi x}{a},\ H_z \sim \cos\frac{\pi x}{a}$$

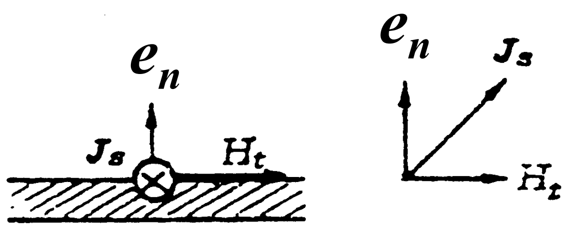
$$E_y \sim \cos(\omega t - k_z z - \frac{\pi}{2}),\ H_x \sim \cos(\omega t - k_z z + \frac{\pi}{2}),\ H_z \sim \cos(\omega t - k_z z)$$

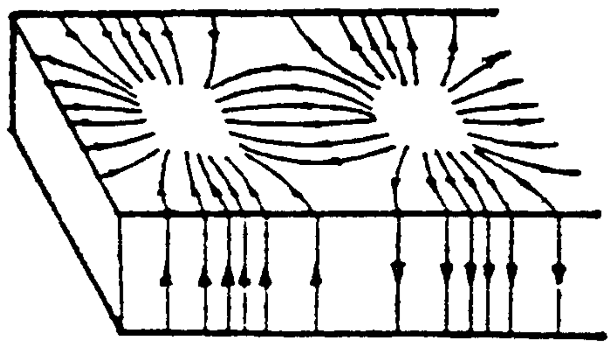
2. 壁电流分布

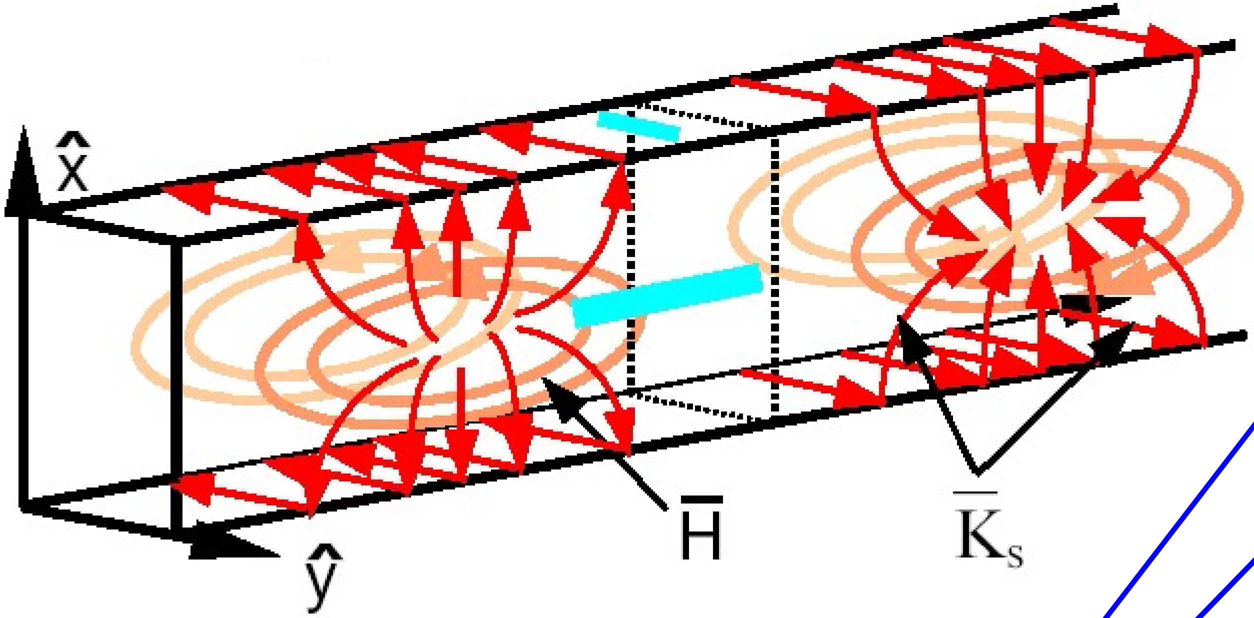
波导壁是良导体，在微波波段趋肤深度极小(~1μm)，可看做面电流。 $\boldsymbol{i}_S = \boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{H}$

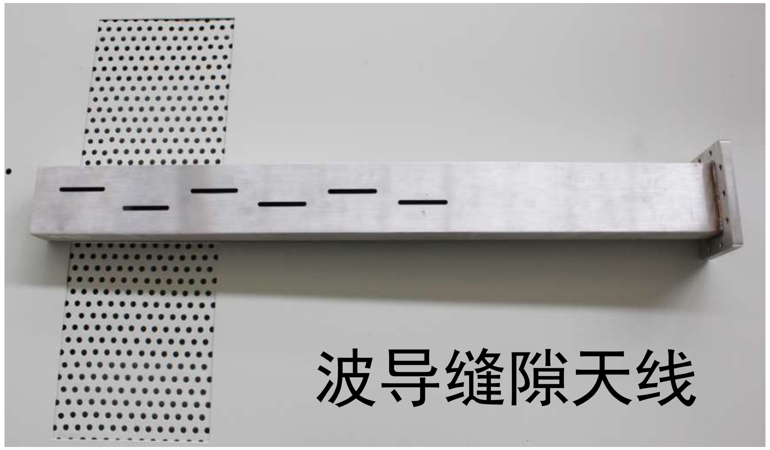
面电流密度：
$$\begin{cases} i_y = -H_z\big|_{x=0} = -H_0 e^{j(\omega t - k_z z)},\ i_z = 0 & 在x=0处 \quad \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_x \\ i_y = H_z\big|_{x=a} = -H_0 e^{j(\omega t - k_z z)},\ i_z = 0 & 在x=a处 \quad \boldsymbol{e}_n = -\boldsymbol{e}_x \end{cases}$$

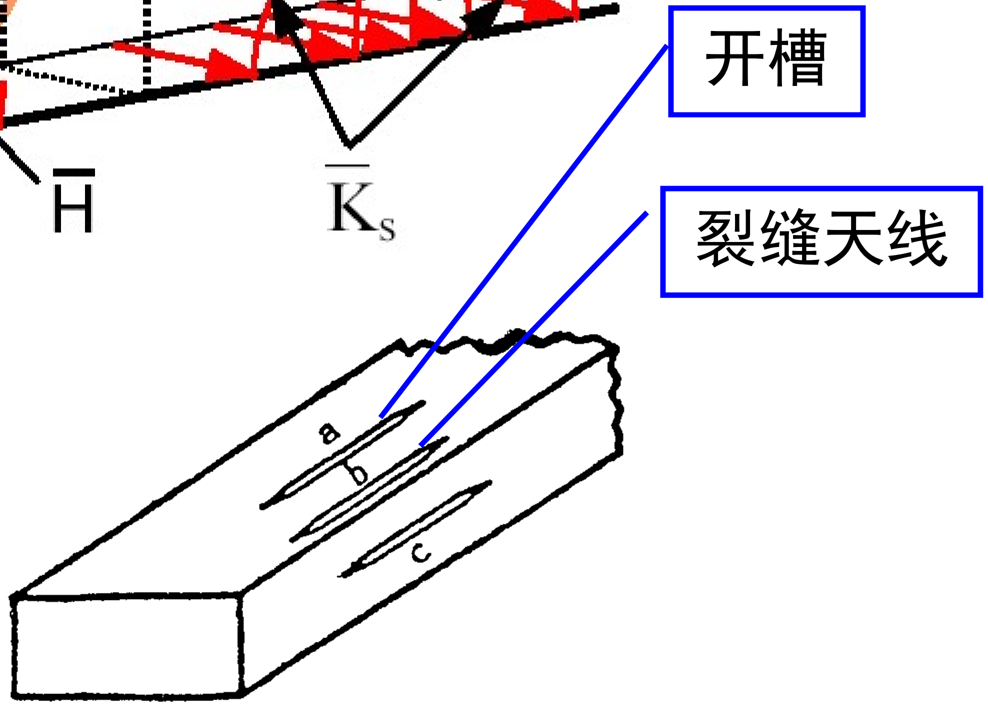
$$\begin{cases} 在y=0处 \quad \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_y \\ i_x = H_z\big|_{y=0} = H_0 e^{j(\omega t - k_z z)} \cos\dfrac{\pi x}{a} \\ i_z = -H_x\big|_{y=0} = \dfrac{jk_z a}{\pi} H_0 e^{j(\omega t - k_z z)} \sin\dfrac{\pi x}{a} \\ 在y=b处 \quad \boldsymbol{e}_n = -\boldsymbol{e}_y \\ i_x = -H_z\big|_{y=b} = -H_0 e^{j(\omega t - k_z z)} \cos\dfrac{\pi x}{a} \\ i_z = H_x\big|_{y=b} = -\dfrac{jk_z a}{\pi} H_0 e^{j(\omega t - k_z z)} \sin\dfrac{\pi x}{a} \end{cases}$$



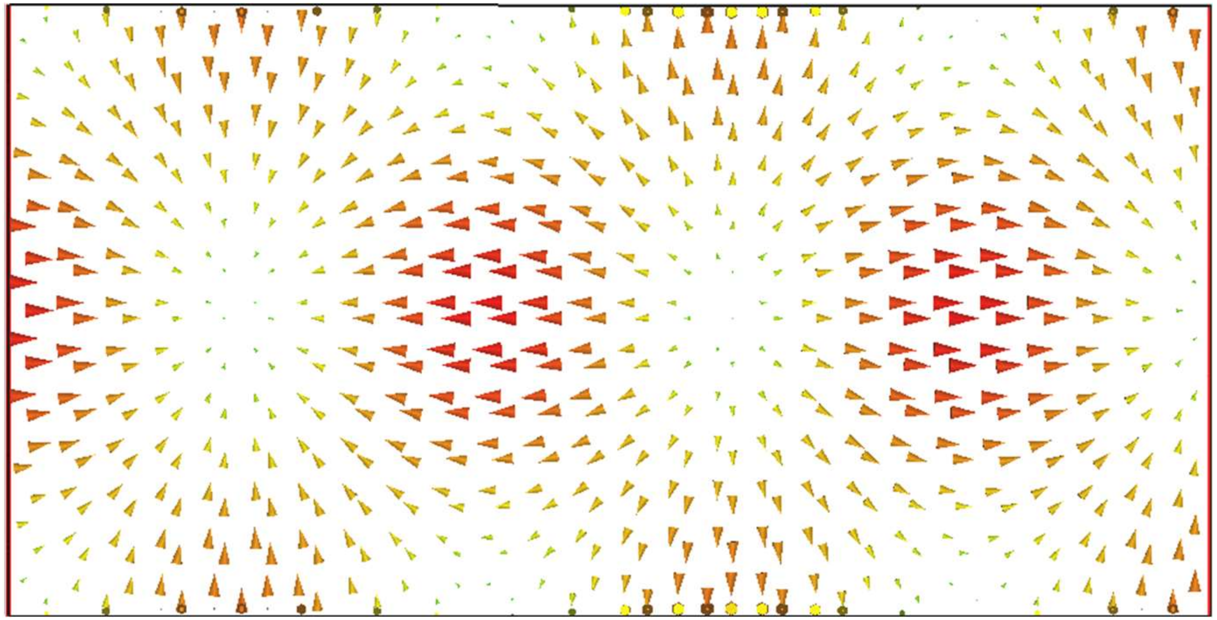



x̂
ŷ
H̄
K̄s


波导缝隙天线


开槽
裂缝天线
a
b
c

矩形波导宽边上面电流分布



3. 传输功率和功率容量

传输功率为 $P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^{*})\bullet\boldsymbol{e}_z\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}E_y H_x^{*}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

TE_{10} 模的 $k_c = \pi/a,\ k_z = \sqrt{k^2 - \pi^2/a^2}$

$$\boxed{P = \frac{\omega\mu a^3 b}{4\pi^2}|H_0|^2 k_z}$$

在宽壁中心（$x = a/2$）处$|E_y|$达到最大值 $|E_0| = \omega\mu a H_0/\pi$，

$P = \frac{ab}{4\eta}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}|E_0|^2$ 当 $|E_0| = E_{br}$ 时

击穿功率：$P_{br}(\mathrm{W}) = \frac{ab}{4\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}E_{br}^2$

对空气填充波导，$\sqrt{\mu/\varepsilon} = 120\pi,\ E_{br} = 30\,\mathrm{kV/cm}$ ，上式可改写为 $P_{br}(\mathrm{MW}) = 0.6ab\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$

式中a、b以厘米为单位，而 P_{br} 的单位为兆瓦。一般，波导的允许功率取为：

$$P_{允许} = (\frac{1}{3}\sim\frac{1}{5})P_{br}$$

功率容量与尺寸、频率、介质有关。

4. TE_{10} 型模矩形波导的损耗

a. 介质损耗： 空气填充，可以忽略。

b. 导体损耗： $P(z)=P_0 e^{-2\alpha z}$ 单位长度的功率损耗： $P_l=-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}=2\alpha P$

波导的衰减常数是： $\alpha=\frac{P_l}{2P}\approx\frac{P_l}{2P_0}$

由于存在趋肤效应，可引入波导壁单位面积的表面电阻，为（在微带线中有详细推导）： $R_s=\frac{1}{\sigma\delta}=\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$ 式中 $\delta=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$ 是趋肤厚度

电流流过单位表面积的导体损耗为 $\frac{1}{2}R_s|i_s|^2$

$$P_l=\oint\frac{R_s}{2}|i_s|^2\mathrm{d}l=R_s\int_0^b|H_0|^2\mathrm{d}y+R_s\int_0^a|H_0|^2\left(\cos^2\frac{\pi x}{a}+\frac{k_z^2a^2}{\pi^2}\sin^2\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x$$

$$=R_s|H_0|^2\left(b+\frac{a}{2}+\frac{k_z^2a^3}{2\pi^2}\right)$$

$$\alpha_c(NP/m)=\frac{P_l}{2P_0}=\frac{2\pi^2 R_s\left(b+\frac{a}{2}+\frac{k_z^2 a^3}{2\pi^2}\right)}{\omega\mu a^3 b k_z}=\frac{R_s(2\pi^2 b+a^3k^2)}{a^3 bk\eta k_z}$$

$$k_z=k\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \Rightarrow \boxed{\alpha_c=\frac{R_s\left[1+\frac{2b}{a}\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2\right]}{\eta b\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}}$$

损耗与波长、波导尺寸、波导壁材料等有关，通常取 $b/a\approx 1/2\rightarrow\alpha_c\downarrow$ 。

主型波的衰减最小。

5. TE$_{10}$型模矩形波导的等效阻抗

波导中的波阻抗定义为波导中横向电场分量与横向磁场分量之比，对 TE$_{10}$型波：

$$\boxed{Z_{\mathrm{TE}10}=\frac{\omega\mu}{k_z}=\frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}}$$

它不能用来处理匹配问题。

和电路理论类似，波导的等效阻抗也有三种定义：

$$Z_e=\frac{U_e}{I_e},\ Z_e=\frac{U_e^2}{2P} \text{ 或 } Z_e=\frac{2P}{I_e^2}$$

对矩形波导中的TE$_{10}$型波，定义等效电压为波导宽边中心电场从顶边到底边的线积分：

$$U_e=\int_0^b \left|E_y\right|_{x=a/2}\mathrm{d}y=\frac{\omega\mu\, abH_0}{\pi}$$

定义等效电流为波导的一个宽壁上总的纵向电流：

$$I_e=\int_0^a \left|i_z\right|\mathrm{d}x=\int_0^a \frac{k_z a}{\pi}H_0\sin\frac{\pi x}{a}\mathrm{d}x=\frac{2a^2k_zH_0}{\pi^2}$$

传输功率是：

$$P=\frac{ab}{4\eta}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}\left(\frac{\omega\mu aH_0}{\pi}\right)^2$$

$$Z_e=\frac{U_e}{I_e}=\frac{\pi}{2}\boxed{\frac{b}{a}\frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}}\qquad Z_e=\frac{U_e}{2P}=2\boxed{\frac{b}{a}\frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}}\qquad Z_e=\frac{2P}{I_e^2}=\frac{\pi^2}{8}\boxed{\frac{b}{a}\frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}}$$

在工程计算中，为了简化，常以与截面尺寸有关的部分作为公认的等效阻抗：

$$Z_e = \frac{b}{a}\frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

它可以用来处理匹配问题。

6. 矩形波导的截面尺寸的选择

保证它传输主模：

$$\begin{cases} a \\ 2b \end{cases} < \lambda < 2a \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2} < a < \lambda \\ 0 < b < \dfrac{\lambda}{2} \end{cases}$$

综合考虑抑制高次模、损耗小和传输功率大诸条件，矩形波导截面尺寸一般选为

$$\begin{cases} a = 0.7\lambda \\ b = (0.4 \sim 0.5)a \end{cases}$$

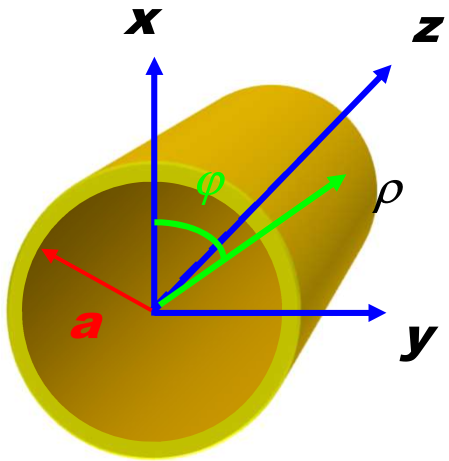
标准波导尺寸

5.2 其他截面波导简介

1. 圆波导

采用柱坐标系来计算

圆波导与矩形波导类似，只能传横电波和横磁波。



$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\rho,\varphi,z,t)=\left[\boldsymbol{E}_T(\rho,\varphi)+E_z(\rho,\varphi)\boldsymbol{e}_z\right]e^{j(\omega t-k_z z)} \\ \boldsymbol{H}(\rho,\varphi,z,t)=\left[\boldsymbol{H}_T(\rho,\varphi)+H_z(\rho,\varphi)\boldsymbol{e}_z\right]e^{j(\omega t-k_z z)} \end{cases}$$

考虑电磁波波动方程的z分量，得：

纵向场 E_z 和 H_z 在圆波导内满足齐次波动方程：

$$\nabla^2_{\rho\varphi}E_z+k_c{}^2E_z=0$$

$$\nabla^2_{\rho\varphi}H_z+k_c{}^2H_z=0$$

分别考虑只存在横向电场的横电波（ $E_z=0$ ）和只存在横向磁场的横磁波（ $H_z=0$ ）在柱坐标中表示为：

对横磁波TM $\Rightarrow$ $$\frac{\partial^2E_z}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2E_z}{\partial\varphi^2}+k_c{}^2E_z=0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2}+k_c^{\,2}E_z=0$$

$$k_c^2=k^2-k_z^2=\omega^2\mu\varepsilon-k_z^2$$

利用分离变量法，设 $E_z(\rho,\varphi)=P(\rho)\Phi(\varphi)$ ，得：

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+m^2\Phi=0$$

$$\frac{d^2P}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dP}{d\rho}+\left(k_c^{\,2}-\frac{m^2}{\rho^2}\right)P=0$$

$$\Phi=C_1\cos m\varphi+C_2\sin m\varphi$$

$$\Phi=C\cos(m\varphi+\varphi_0)$$

圆对称结构要求：m为整数

合理选择坐标轴使 $\varphi_0=0$

$$\frac{d^2P}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dP}{d\rho}+\left(k_c^{\,2}-\frac{m^2}{\rho^2}\right)P=0$$

贝塞尔方程，通解为：

$$P=AJ_m(k_c\rho)+A'N_m(k_c\rho)$$

Bessel方程和函数：

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho}+\left(\mu^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)f=0$$

通解为： $f(x)=AJ_m(x)+\cancel{BN_m(x)}$ $\quad x=\mu\rho \quad \boxed{x=k_c\rho}$

第一类贝塞尔函数　　第二类贝塞尔函数（诺以曼函数）

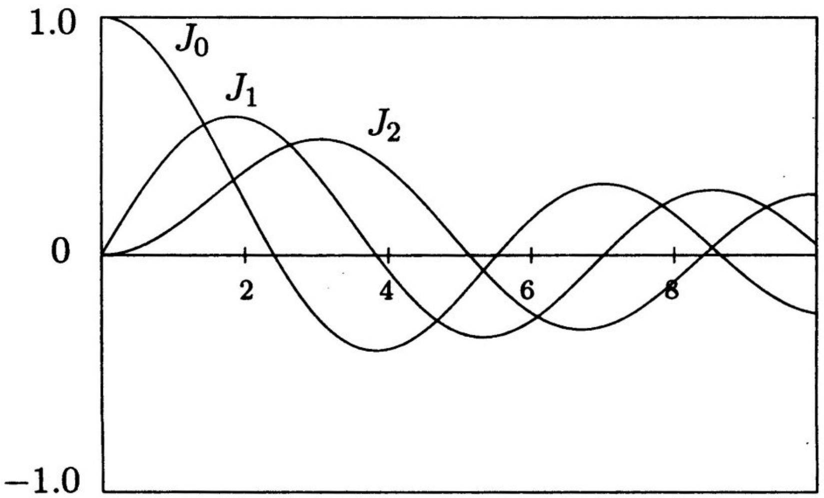


Figure 3.5.17 Bessel functions.

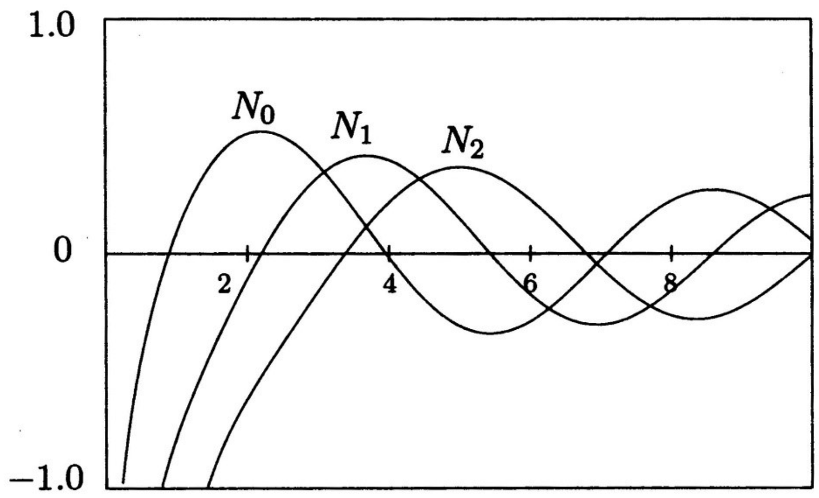


Figure 3.5.19 Neumann functions.

考虑圆波导的具体情况和边界条件 $\rho = a, E_z = 0$ ， $E_z = E_0 J_m(k_c\rho) cosm\varphi\, e^{j(\omega t - k_z z)}$

$$J_m(k_c a) = 0 \Rightarrow k_c = \frac{x_{mn}}{a}$$

不同的 x_{mn} 相应于不同的TM_{mn}波

TE波： $H_z = H_0 J_m(k_c\rho)\begin{Bmatrix}\sin m\varphi \\ cosm\varphi\end{Bmatrix} e^{j(\omega t - k_z z)}$

$$E_\varphi = 0, \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = 0$$

$$J_m'(k_c a) = 0 \Rightarrow k_c = \frac{x'_{mn}}{a}$$

$$k_z = \sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - k_c^2}$$

$$f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

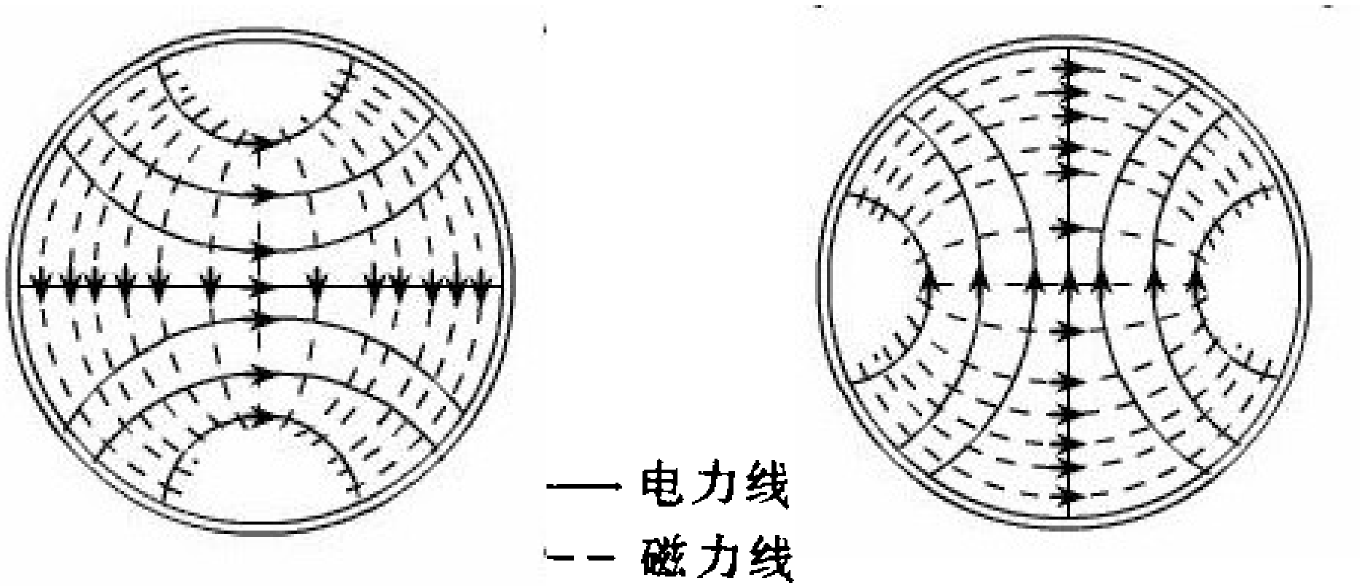
圆波导的主要结果：

TE_{11}波（主型波）的截止波长最长， $\lambda_c\big|_{TE_{11}} = 3.41\boldsymbol{a}$

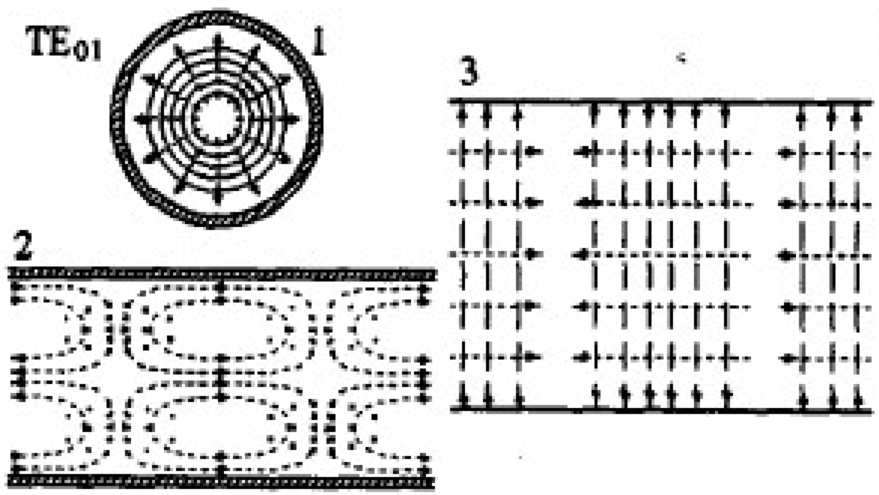
其次是TM_{01}波，截止波长为 $\lambda_c\big|_{TM_{01}} = 2.61\boldsymbol{a}$

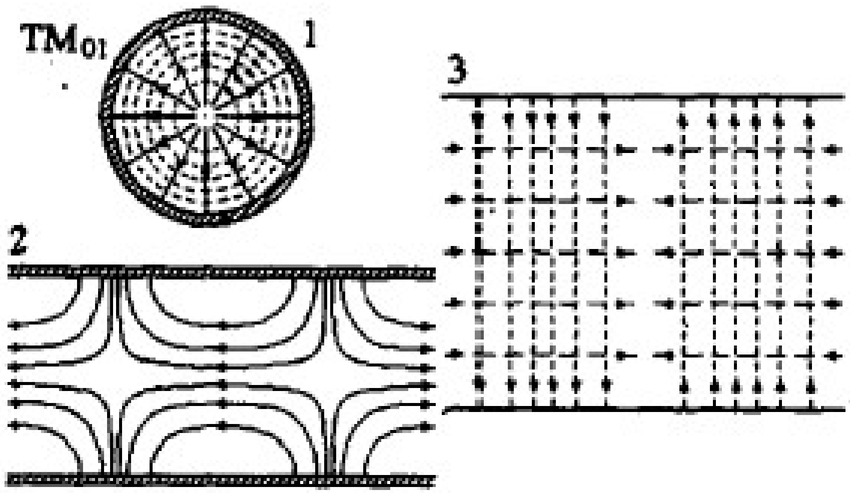
在圆波导中实现TE_{11}波单模传播的波长范围是： $2.61\boldsymbol{a} < \lambda < 3.41\boldsymbol{a}$

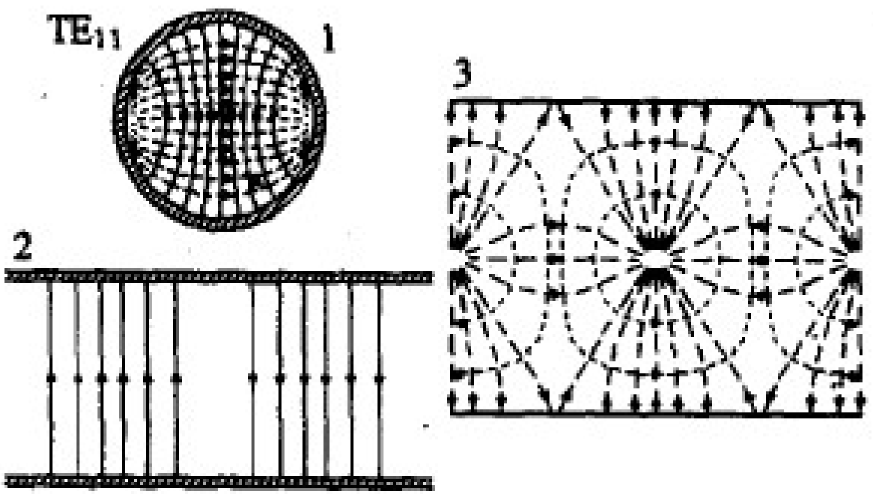
TE_{11}主型模

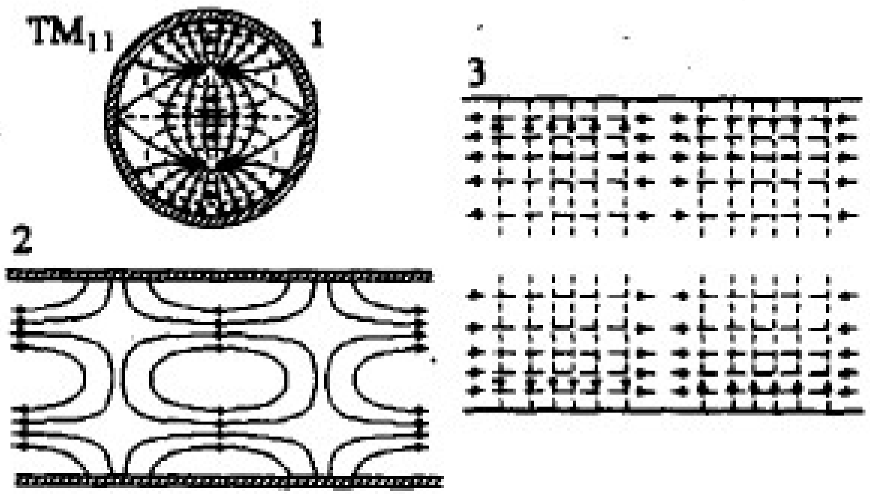


（a）水平极化波　　（b）垂直极化波


TE01
1
2
3

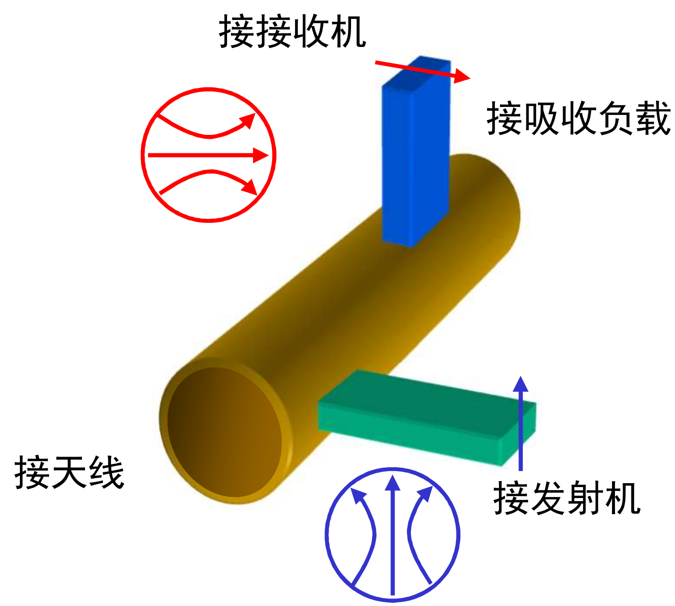

TM01
1
2
3


TE11
1
2
3

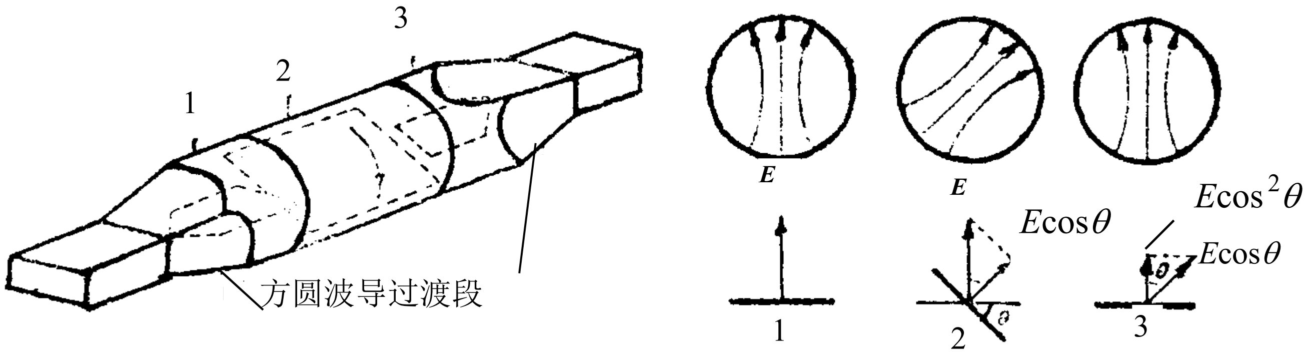

TM11
1
2
3

圆波导的应用：

微波通信收发公用天线中的极化分离器



极化衰减器

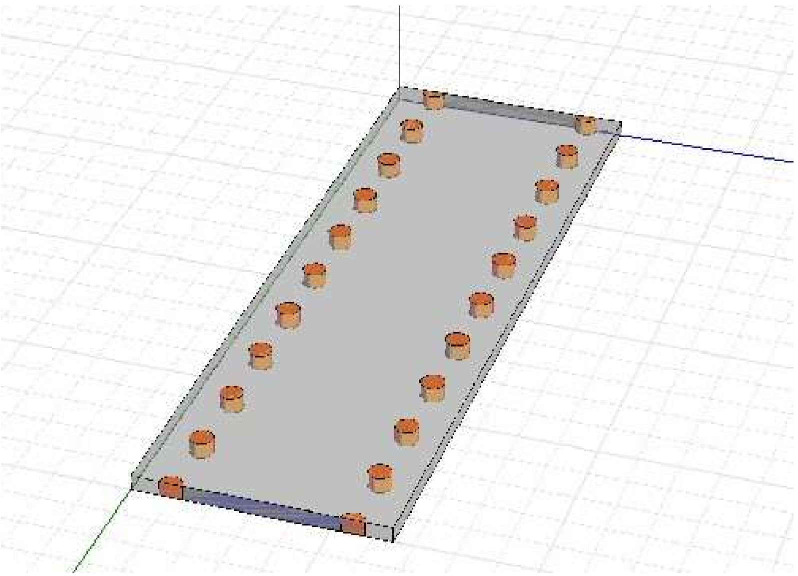


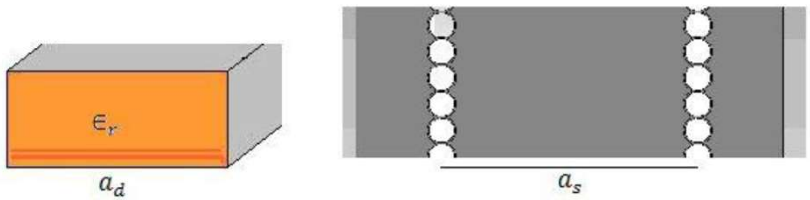
衰减量只与θ有关：

$$A = 20\lg\frac{E_{输入}}{E_{输出}} = 20\lg\frac{E}{E\cos^2\theta} = 40\lg(\sec\theta)$$

绝对定标、频带宽

2. 椭圆波导
广泛用于雷达和通信系统的天线馈线，极化稳定，易于与矩形波导和圆波导连接。
3. 过尺寸波导
横向尺寸比单模波导大得多的波导，可传输高次模式，毫米、亚毫米波段。
4. 基片集成波导（SIW）



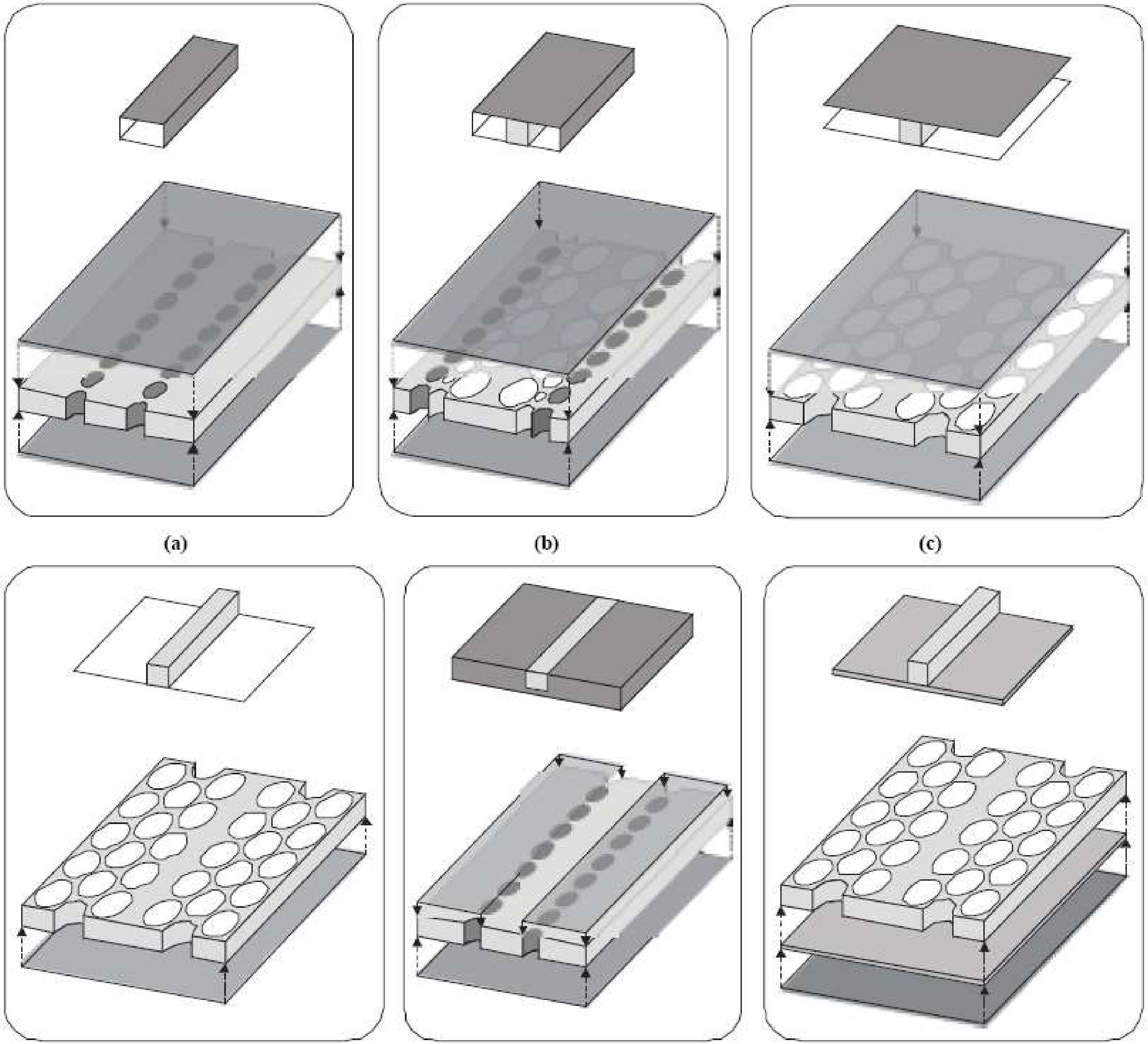


类似介质填充波导（但不支持TM模）

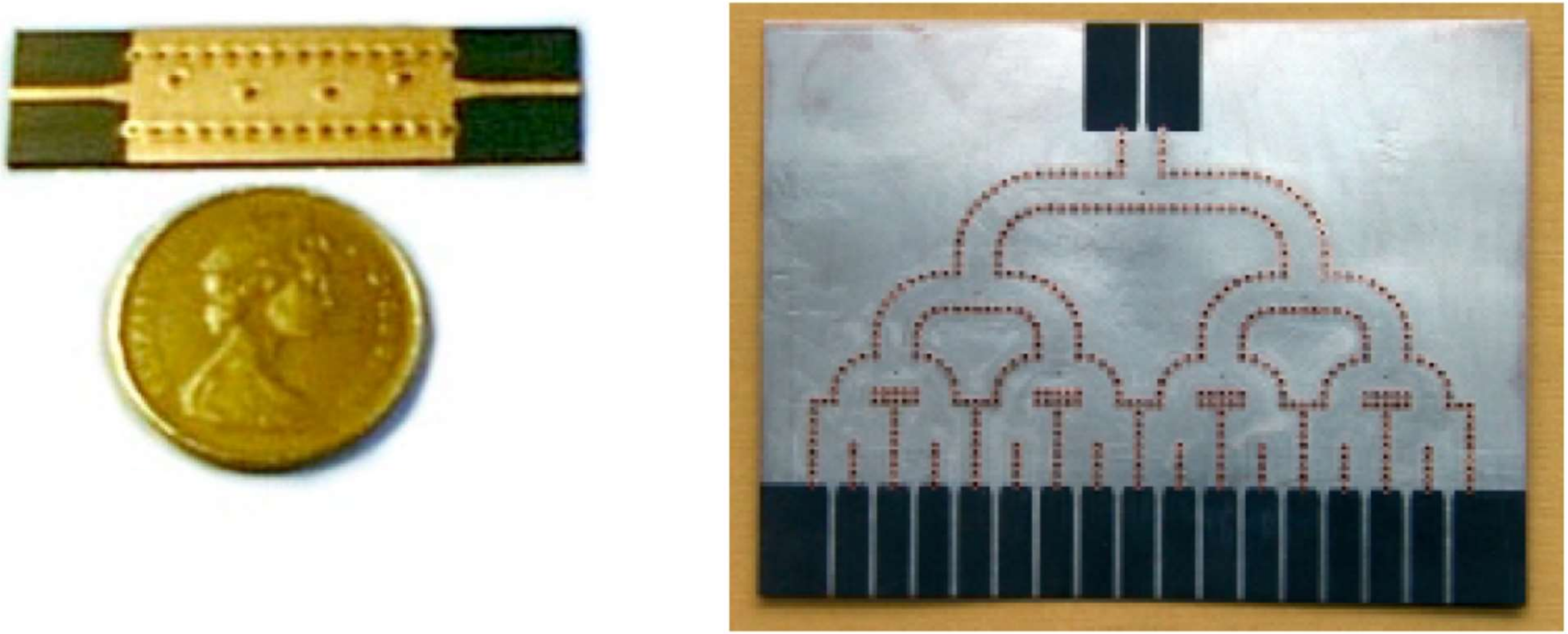
TE01模式： $f_c = c/2a_d \quad a_d = a/\sqrt{\varepsilon_r}$

$$a_s = a_d + d^2/0.95p$$

P 为通孔间距，d 为通孔直径



電磁場理論與微波技術



(a) (b)

Fig. 4 – Two practical SIW circuits examples: (a) an SIW Inductive post filter with microstrip transitions, and (b) an SIW 1:16 power divider with microstrip input/output interfaces.

5.3 同轴线

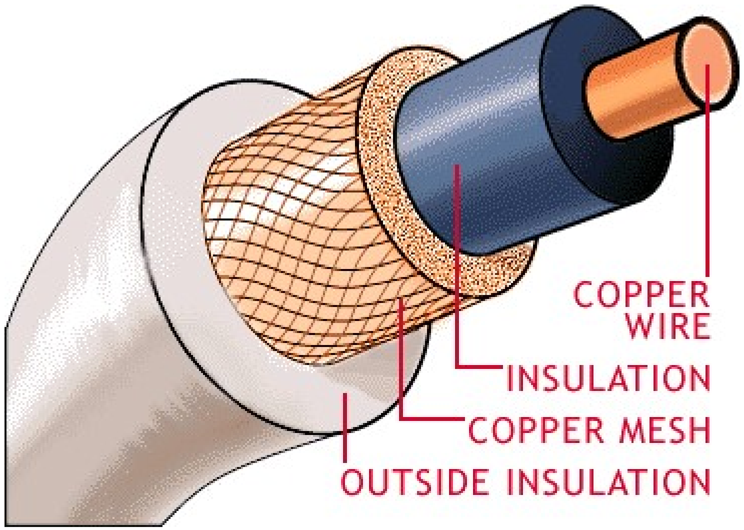
同轴线是一种双导体导波系统。

可以传输TEM型波，是一种应用广泛的宽频带馈线。

(DC-毫米波段)

但当其横向尺寸可与工作波长相比拟时，也会出现TE模和TM模，它们是同轴线的高次模。

主要研究TEM模特性。



$$\nabla_T \times \boldsymbol{E}_T = \left(\frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x\right)\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

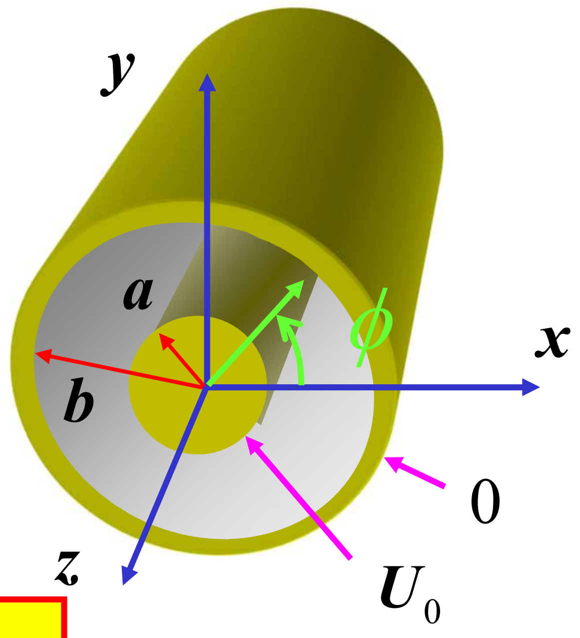
1. TEM波

对同轴线的TEM模，$E_z = H_z = 0$ ， 它的横向场：

$$\mathrm{E}_\mathrm{T}(\rho, \varphi, z) = \mathrm{E}_\mathrm{OT}(\rho, \varphi)\mathrm{e}^{-j\beta z}$$

而 $\nabla_\mathrm{T} \times \boldsymbol{E}_{OT} = -j\omega\mu H_z \boldsymbol{e}_z = 0$， 于是 $\boldsymbol{E}_\mathrm{OT}(\rho, \varphi)$ 可用标量势函数 $\Phi(\rho,\varphi)$ 的梯度表示：

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{OT}(\rho, \varphi) = -\nabla_\mathrm{T}\Phi(\rho, \varphi)$$



又因为 $\nabla \bullet \boldsymbol{E}_\mathrm{T} = 0$， 所以势函数 $\Phi(\rho,\varphi)$ 满足拉普拉斯方程：

$$\nabla_\mathrm{T}^2\Phi(\rho, \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0}$$

设边界条件为：

$$\begin{cases}\Phi(a,\varphi) = U_0 \\ \Phi(b,\varphi) = 0\end{cases}$$

用分离变量法，令： $\Phi(\rho,\varphi)=P(\rho)F(\varphi)$

$$\frac{\rho}{P(\rho)}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P(\rho)}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{F(\varphi)}\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial\varphi^2}=0 \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\rho}{P(\rho)}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\dfrac{\mathrm{d}P(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)=-k_\rho^2\\[2ex] \dfrac{1}{F(\varphi)}\dfrac{\mathrm{d}^2F(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}=-k_\varphi^2\end{cases}$$

$$k_\rho^2+k_\varphi^2=0$$

一般解为： $F(\varphi)=A\cos n\varphi+B\sin n\varphi \Rightarrow k_\varphi=n$ 必须是整数。

考虑到边界条件不随 φ 变化， $n=0$ 。 所以 $k_\rho=0$ $\quad \boldsymbol{F(\varphi)=A}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}P(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)=0 \Rightarrow P(\rho)=C\ln\rho+D$$

$$\Phi(\rho,\varphi)=A(C\ln\rho+D)=C_1\ln\rho+C_2$$

$$\begin{cases}\Phi(a,\varphi)=U_0=C_1\ln a+C_2\\ \Phi(b,\varphi)=0=C_1\ln b+C_2\end{cases} \Rightarrow \boxed{\Phi(\rho,\varphi)=U_0\frac{\ln(b/\rho)}{\ln(b/a)}}$$

横向电场为：

$$\boxed{\boldsymbol{E}_{oT}(\rho,\varphi)=-\nabla_T\Phi(\rho,\varphi)=-\left(\frac{\partial\Phi(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\frac{\partial\Phi(\rho,\varphi)}{\rho\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right)=\frac{\boldsymbol{U}_0}{\rho\ln\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}}\boldsymbol{e}_\rho}$$

电场为：

$$\boldsymbol{E}(\rho,\ \varphi,\ z)=\boldsymbol{E}_{0\mathrm{T}}(\rho,\ \varphi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}=\frac{U_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}}{\rho\ln\frac{b}{a}}\boldsymbol{e}_\rho$$

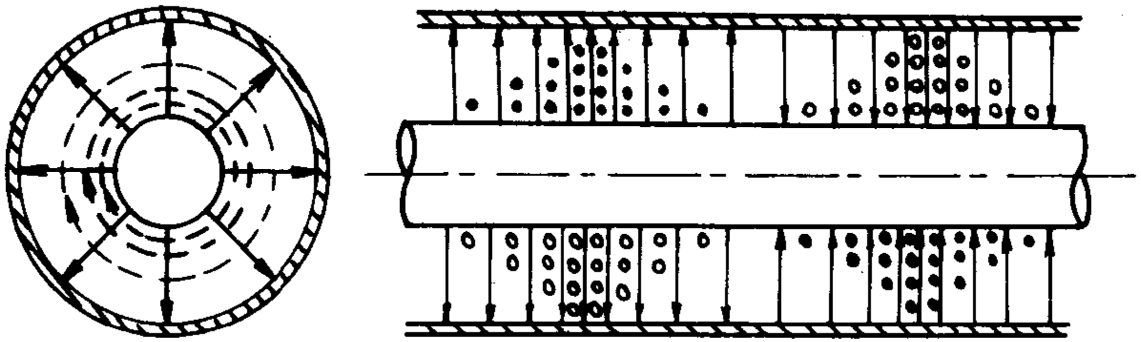
式中传播常数：

$$\beta=k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

横向磁场，可表示为：

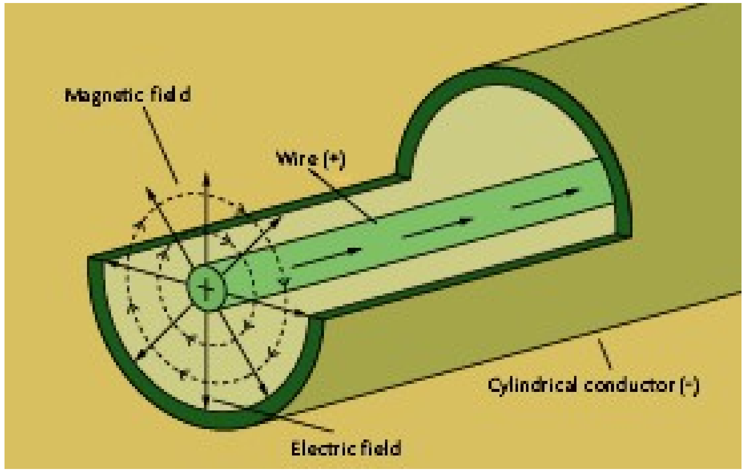
$$\boldsymbol{H}(\rho,\ \varphi,\ z)=\frac{1}{\eta}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_{0T}(\rho,\ \varphi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}=\frac{U_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}}{\eta\rho\ln\frac{b}{a}}\boldsymbol{e}_\varphi$$

式中 $\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}}$ 为波阻抗。



同轴线 TEM 导模场结构

$\longrightarrow \boldsymbol{E}$;　$\dashrightarrow \boldsymbol{H}$



2. 传输特性

a. 相速和波导波长

对TEM模，截止频率 $f_c=0$ ，截止波长 $\lambda_c=\infty$。相位常数 $\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$、相速 v_p 与群速 v_g 之间满足如下关系：

$$v_p=v_g=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

导波波长：

$$\lambda_g=\lambda=\frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

b. 特性阻抗

特性阻抗定义为线上行波电压$\boldsymbol{U}$ 和行波电流$\boldsymbol{I}$ 之比。

行波电压：

$$U=\int_a^b E_\rho \mathrm{d}\rho=\frac{U_0}{\ln\frac{b}{a}}\left(\ln\frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}=U_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

内导体上的总电流：

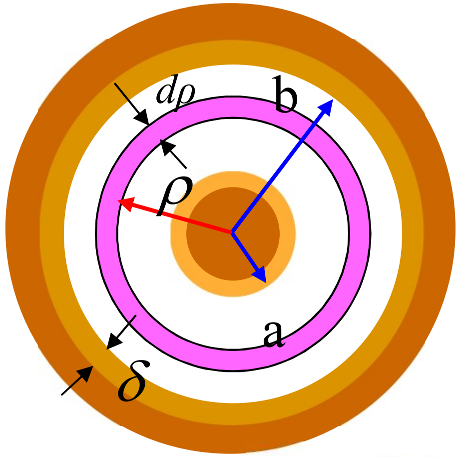
$$I=\int_0^{2\pi} aH_\varphi \mathrm{d}\varphi=\frac{2\pi U_0}{\eta\ln\frac{b}{a}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

特性阻抗：

$$\boldsymbol{Z}_0=\frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{I}}=\frac{\eta\ln\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}}{2\pi}=\frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\quad(\Omega)$$

c. 衰减常数

$$\alpha=\alpha_c+\alpha_d=\frac{R_0}{2Z_0}+\frac{G_0Z_0}{2}\qquad(\mathrm{Np/m})$$

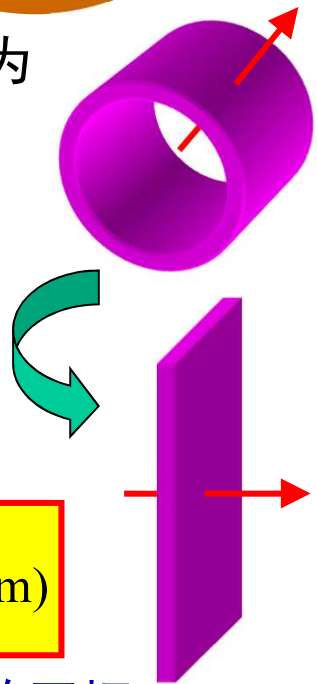


分布电阻：$R_0=\frac{1}{\sigma s_1}+\frac{1}{\sigma s_2}=\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{2\pi b\delta}+\frac{1}{2\pi a\delta}\right)=\frac{R_s}{2\pi}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)$

式中 $R_s=\frac{1}{\sigma\delta}=\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$ 是导体的表面电阻。

在同轴线中半径为ρ、厚度为dρ 的单位长度的介质中的漏电阻为 $\mathrm{d}R_d=\frac{1}{\sigma_d}\frac{\mathrm{d}\rho}{2\pi\rho}$ ，所以同轴线单位长度的漏电阻等于：

$$R_d=\int_a^b\mathrm{d}R_d=\frac{1}{2\pi\sigma_d}\int_a^b\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=\frac{1}{2\pi\sigma_d}\ln\frac{b}{a}$$



即同轴线的单位长度分布电导为：$G_0=\frac{1}{R_d}=\frac{2\pi\sigma_d}{\ln\frac{b}{a}}$

$$\boxed{\alpha_c=\frac{R_s}{2\eta\ln\frac{b}{a}}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)\qquad(\mathrm{Np/m})}$$

$$\boxed{\alpha_d=\frac{\sigma_d\eta}{2}=\frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{2}\tan\delta\qquad(\mathrm{Np/m})}$$

式中 $\tan\delta=\frac{\sigma_d}{\omega\varepsilon}$ 是介质损耗角的正切。

$$\alpha_d = \frac{\pi\sqrt{\varepsilon_r}}{\lambda_0}\tan\delta \qquad (\mathrm{Np/m})$$

同轴线的导体损耗与工作频率有关（R_S），也和它的尺寸有关。
在外径b一定时，由 $\partial\alpha_c/\partial a = 0$ 可求得空气同轴线导体损耗最小的尺寸为： $\frac{b}{a} = 3.591$

与它相应的空气同轴线特性阻抗等于 76.71Ω 。
同轴线的介质损耗与它的尺寸无关，而决定于填充介质的特性，并与工作波长成反比。空气填充时，介质损耗可忽略。

d. 传输功率

同轴线中的电场和磁场为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = \dfrac{U_0}{\rho\ln\dfrac{b}{a}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\boldsymbol{e}_\rho \\ \boldsymbol{H} = \dfrac{U_0}{\eta\rho\ln\dfrac{b}{a}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\boldsymbol{e}_\varphi \end{cases}$$

同轴线的传输功率

$$P = \frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\bullet\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{1}{2\eta}\int_a^b\int_0^{2\pi}\frac{U_0^2}{\rho\ln^2(b/a)}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \frac{\pi U_0^2}{\eta\ln(b/a)}$$

由于在同轴线中最大电场出现在内导体表面（$\rho = a$）处，其值为 $E_{max} = \dfrac{U_0}{a\ln(b/a)}$，因而 U_0 和P 可表示为：

$$\begin{cases} U_0 = aE_{max}\ln\dfrac{b}{a} \\ P = \dfrac{\pi a^2}{\eta}E_{max}^2\ln\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

当同轴线中最大电场等于介质的击穿场强 $E_{max} = E_{br}$ 时，它所对应的电压和传输功率就分别等于同轴线的耐压 U_{br} 和功率容量 P_{br}，于是

$$\begin{cases} U_{br} = aE_{br}\ln\dfrac{b}{a} \\ P_{br} = \dfrac{\pi a^2}{\eta}E_{br}^2\ln\dfrac{b}{a} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_r}\,a^2}{120}E_{br}^2\ln\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

对给定最大工作频率：

$$P_{max} = \frac{5.8\times 10^{12}\,E_{br}^2}{f_{max}^2}$$

例如10GHz时无高次模的任意同轴线最大的峰功率容量约为520kW 。通常取最大功率的四分之一为实用功率容量。由 $\partial P_{max}/\partial a = 0$ （固定b值不变），可求得功率容量最大时的尺寸条件：

$$\frac{b}{a} = 1.649$$

3. 同轴线中的高次模和尺寸选择

最低次TM_{01}模的截止波长近似值：$\lambda_{cTM_{01}} \cong 2(b-a)$

TE_{11} 模的截止波长近似值为：$\lambda_{cTE_{11}} \cong \pi(b+a)$

为了保证同轴线中只传输TEM模， $\lambda_{\min} > \pi(b+a)$

在应用中，一般取 $\lambda_{\min} \geq 1.1\pi(b+a)$ 为最短安全波长。如果工作波长已知，则同轴线的尺寸必须满足：

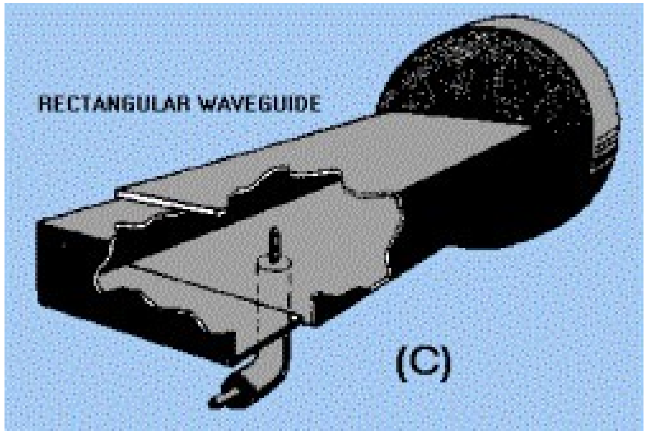
$$\boxed{(b+a) \leq \frac{\lambda_{min}}{1.1\pi}}$$

5.4　波导的激励方法

波导的激励本质是电磁波的辐射。

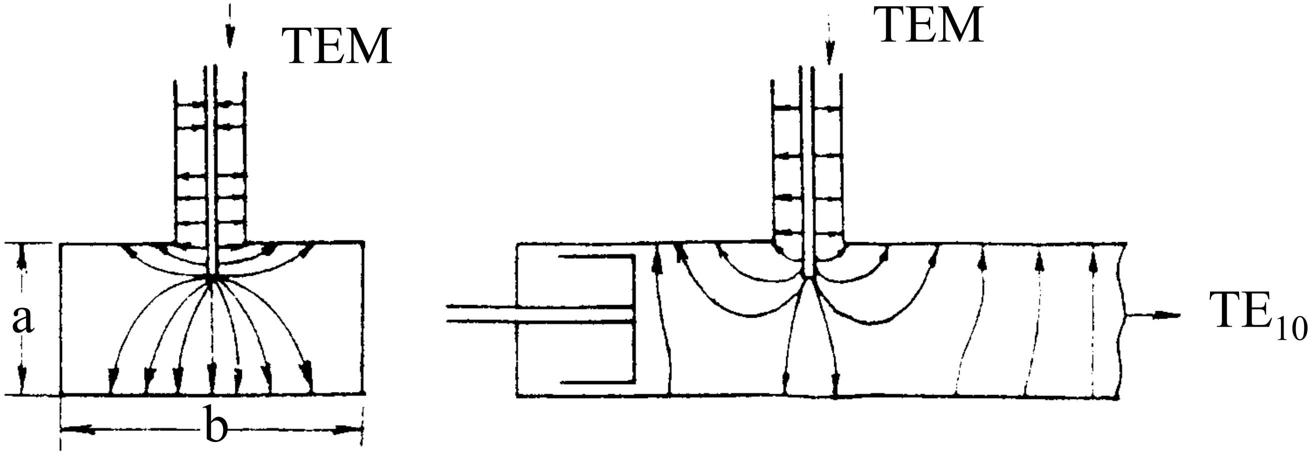
波导中的传播模式，即取决于传输条件 $\lambda < \lambda_c$ ，也取决于激励方法。

激励的结果要利于产生所要模式并尽量避免不需要的模式。



1．探针激励

电场激励方法，在模式电场最强处激励。

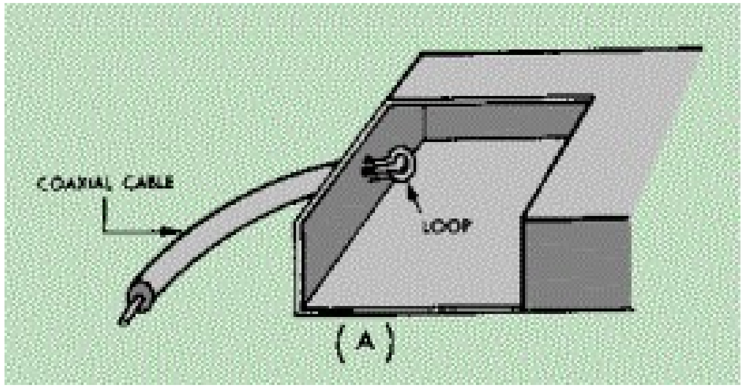


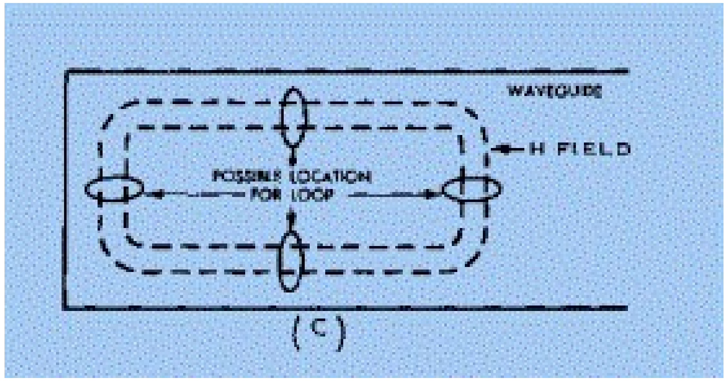
2. 环激励

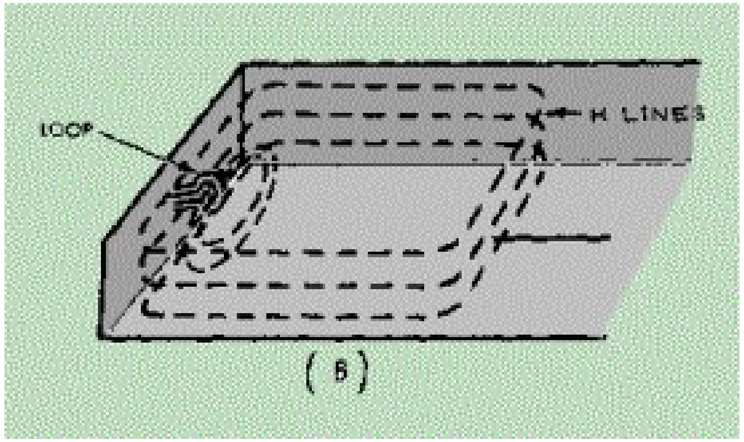
磁场激励方法，在模式

磁场最强处激励。环法向

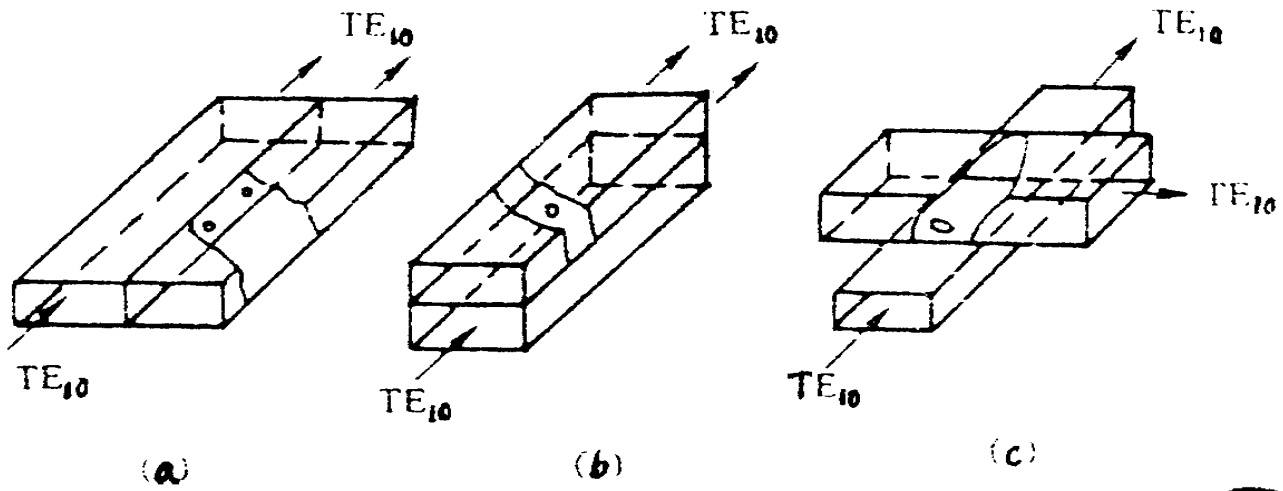
平行磁力线





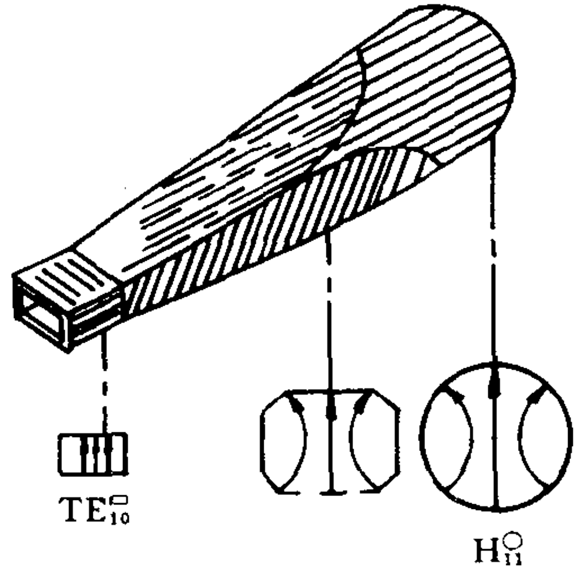


3. 孔或缝激励



4. 直接过渡

矩形波导型波到圆波导型波的过渡段



Homework

5-3, 5-4, 5-7, 5-8, 5-9