南京大學

NANJING UNIVERSITY

《电磁场理论与微波技术》习题课

杨维旭

2019年11月25日

Department of Electronic Engineering,
School of Electronic Science and Engineering, Nanjing University

一、填空题

1. 已知 $\vec{A}=5y\hat{e}_x+3(x^2+z)\hat{e}_y+8z^2\hat{e}_z$，$\vec{B}=(x+y)\hat{e}_y+4x^2\hat{e}_z$，在（1，2，-1）点处，$\vec{B}\times\vec{A}=$ ________，$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=$ ________，$\nabla^2\vec{B}=$ ________。

解：$\vec{B}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z\\ 0 & x+y & 4x^2\\ 5y & 3(x^2+z) & 8z^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z\\ 0 & 3 & 4\\ 10 & 0 & 8\end{vmatrix}=\underline{24\hat{e}_x+40\hat{e}_y-30\hat{e}_z}$；

根据矢量场旋度的一个重要性质，即旋度的散度等于0，因此 $\underline{\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0}$；

$\nabla^2\vec{B}=\hat{e}_x\nabla^2B_x+\hat{e}_y\nabla^2B_y+\hat{e}_z\nabla^2B_z$；

$\nabla^2B_x=\frac{\partial^2B_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2B_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2B_z}{\partial x^2}$；$\nabla^2B_y=\frac{\partial^2B_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2B_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2B_z}{\partial y^2}$；$\nabla^2B_z=\frac{\partial^2B_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2B_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2B_z}{\partial z^2}$；

所以

$\nabla^2\vec{B}=\underline{8\hat{e}_z}$。

一、填空题

2. 某相对磁导率 $\mu_r = 2$ 的磁性导体电导率为 $4\times10^7\ S/m$， 工作频率为10 GHz，则该导体的趋肤厚度为__________； 导体中电磁波的能量主要是_______能量（选电场或磁场）。

解：趋肤效应的定义为，对于高频电磁波，电磁场集中在导体表面附近的薄层内。

趋肤厚度公式：

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi f\cdot \boxed{\mu_0\mu_r}\cdot\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi\times10\times10^9\times4\pi\times10^{-7}\times2\times4\times10^7}} = \underline{5.627\times10^{-7}\,m};$$

导体中，电磁波的能量主要是<u>磁场</u>能量。

一、填空题

3. 平面电磁波从石英玻璃（$\varepsilon_r = 3.8$）入射到与空气的交界面，当发生全反射时的入射临界角为________；这时在空气中平面电磁波能流方向为______________。

解：根据Snell定律，

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{k_t}{k_i} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad ;$$

对于非铁磁物质，

$$n_{21} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \quad ;$$

当发生全反射时，折射角等于90度，带入Snell定律，解得入射角为30.86度；

这时在空气中平面电磁波的能流方向为<u>平行于两种介质交界面方向</u>。

一、填空题

4. 写出无源真空中Maxwell方程组的微分形式，及其磁场波动方程。

解：

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_f + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\ \nabla \bullet \boldsymbol{D} = \rho \\ \nabla \bullet \boldsymbol{B} = 0 \quad \text{微分形式} \end{cases}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0$$

电磁场波动方程

5. 传输线的电长度定义为其实际长度与_______之比，电长度大于________称为长线；传输线接不同负载时_______（会/不会）影响传输线的特性阻抗。

解：电长度定义为，几何长度 l 与电磁波的工作波长 λ 之比；

电长度大于 0.05 称为长线；

传输线接不同负载时 不会 影响传输线的特性阻抗。

期中考试讲解

二、简答题

6. 若自由空间中一平面电磁波的复数电场为 $\dot{E}=\left[0.3(\frac{1+j}{\sqrt{2}})\hat{e}_x+1.2e^{j\frac{\pi}{4}}\hat{e}_y\right]e^{-j200\pi z}$，试问该电磁波的传播矢量 $\vec{k}$ 、工作频率 f 、极化形式及极化方向、复数磁场 $\dot{H}$ 。

解：由表达式可知传播矢量 $\underline{\vec{k}=200\pi\hat{e}_z}$ ；

又 $k=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi f}{c}$ ➡ $f=\frac{kc}{2\pi}$ ，将 $k=200\pi$ 、$c=3\times10^8 m/s$ 带入，解得 $\underline{f=3\times10^{10}Hz}$ ；

又 $\dot{E}=\left[0.3(\frac{1+j}{\sqrt{2}})\hat{e}_x+1.2e^{j\frac{\pi}{4}}\hat{e}_y\right]e^{-j200\pi z}=\left[0.3e^{\boxed{j\frac{\pi}{4}}}\hat{e}_x+1.2e^{\boxed{j\frac{\pi}{4}}}\hat{e}_y\right]e^{-j200\pi z}$ ，说明该电场 $\hat{e}_x$ 和 $\hat{e}_y$ 方向分量同相位，故极化形式为<u> 线极化 </u>，极化方向计算出<u> 线极化的角度 </u>即可。

由麦克斯韦方程可知，$\dot{H}=\frac{1}{\eta_0}\hat{e}_z\times\dot{E}$ ，将 $\eta_0=120\pi$ 带入，得

$$\underline{\dot{H}=\frac{1}{120\pi}\left[0.3e^{j\frac{\pi}{4}}\hat{e}_y-1.2e^{j\frac{\pi}{4}}\hat{e}_x\right]e^{-j200\pi z}}$$

。

二、简答题

7. 平面电磁波 $\vec{E}=\hat{e}_x E_0\cos(\omega t-j\beta_0 z)$ 从空气中垂直入射到量导体表面（z=0），导体的介电常数、磁导率和电导率分别为 ε_0、μ 和 σ（$\sigma/\omega\varepsilon_0\gg 1$），试计算导体吸收的功率与入射功率之比。

解：由边界条件，$\begin{cases}E_i+E_r=E_t\\ H_i-H_r=H_t\end{cases}$，其中 $\vec{H}_i=\dfrac{1}{\eta_0}\hat{e}_z\times\vec{E}_i=\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\hat{e}_z\times\vec{E}_i$，$\vec{H}_r=-\dfrac{1}{\eta_0}\hat{e}_z\times\vec{E}_r=-\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\hat{e}_z\times\vec{E}_r$

在良导体中，$\vec{k}=\vec{\beta}-j\vec{\alpha}$，当 $\sigma/\omega\varepsilon_0\gg 1$ 时，$\alpha\approx\beta\approx\sqrt{\dfrac{\omega\mu\sigma}{2}}$，

$$\begin{cases}\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}+1\right)}\\ \alpha=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right)}\end{cases}$$

$$\vec{H}_t=\frac{1}{\omega\mu}\vec{k}\times\vec{E}_t=\frac{1}{\omega\mu}(\beta-j\alpha)\frac{\vec{k}}{k}\times\vec{E}_t$$

$$=\frac{1}{\omega\mu}(\beta-j\alpha)\hat{e}_z\times\vec{E}_t=\frac{1}{\omega\mu}e^{-j\frac{\pi}{4}}\hat{e}_z\times\vec{E}_t$$

将红色箭头表达式带入，得

$$\begin{cases}E_i+E_r=E_t\\ (E_i-E_r)=\sqrt{\dfrac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}(1-j)E_t\end{cases}\Rightarrow\frac{E_r}{E_i}=-\frac{1-j-\sqrt{\dfrac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}{1-j+\sqrt{\dfrac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}$$

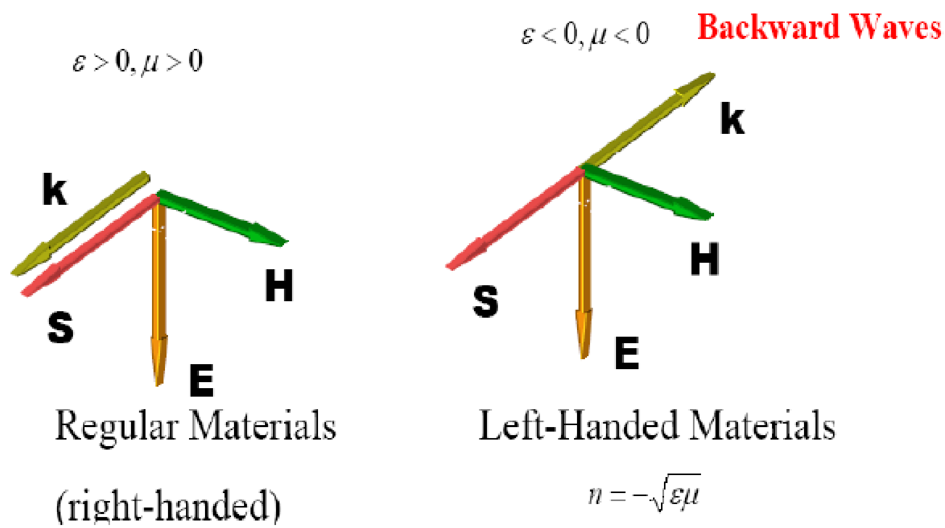
根据坡印廷矢量，功率与电场的平方成正比，从而求出反射功率与入射功率之比，继而得到吸收功率与入射功率之比。

二、简答题

8. 介电常数和磁导率同时为负值的媒质称为左手媒质，是说明在左手媒质中平面电磁波具有反向传播的性质，即传播方向和电磁波能流方向相反。

解：基本上写出右侧两个矢量叉乘表达式，在加以适当叙述就给满分。

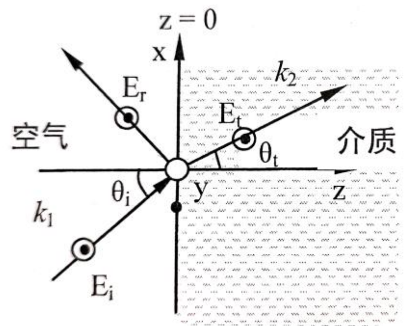
部分同学的回答是：因为左手媒质介电常数和磁导率都为负，所以传播方向和电磁波能流方向相反。（直接这样叙述没有公式不给分）



$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} &= -\omega|\mu|\boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H} &= +\omega|\varepsilon|\boldsymbol{E} \end{aligned}}$$

三、计算题

9. 在右图所示的坐标系中，由远处天线辐射过来的平面波，从空气中入射到均匀无损耗介质表面（z = 0 处）（介质的相对介电常数为 2）。入射平面波的电场表达式为：$\vec{E}_i = \hat{e}_y 10\cos(\omega t - \pi x - \pi z)\ (V/m)$，（1）试求该平面波频率 ω、入射角 θ_i、折射角 θ_t；**（6 分）**（2）分别求出空气和介质中总电场表达式；**（6 分）**（3）求该平面波入射到介质中的时间平均功率密度；**（4 分）**（4）若改变入射角，可否发生反射场为零的现象？如果会，求出此时的入射角；如果不会，请说明理由。**（4 分）**



（提示：$\dfrac{E_{r0}}{E_0} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos(\theta_i) - \sqrt{\varepsilon_2}\cos(\theta_t)}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos(\theta_i) + \sqrt{\varepsilon_2}\cos(\theta_t)}$，$\dfrac{E_{t0}}{E_0} = \dfrac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos(\theta_i)}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos(\theta_i) + \sqrt{\varepsilon_2}\cos(\theta_t)}$，其中的 E_0，E_{r0} 和 E_{t0} 分别为入射场、反射场和折射场的幅度，ε_1 和 ε_2 分别为空气和介质的介电常数。）

解: (1)

19). 解：① 由题可知，$\begin{cases} k_i\cos\theta_i = \pi \\ k_i\sin\theta_i = \pi \end{cases}$

$\therefore\ k_i = \sqrt{2}\pi$，$\theta_i = \frac{\pi}{4}$ 即 $\theta_i = 45°$

又空气中有 $k_i = \frac{w}{c} = \frac{2\pi f}{c}$，得 $f = \frac{k_i c}{2\pi}$，代入有 $f = \frac{3\sqrt{2}}{2}\times10^8 Hz$，$w = 3\sqrt{2}\pi\times10^8 rad/s$

即 $f = 2.12\times10^8 Hz$

$w = 1.3\times10^9\ rad/s$

又 $\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{k_t}{k_i} = \sqrt{\frac{\varepsilon_t\mu_t}{\varepsilon_i\mu_i}} = \sqrt{\varepsilon_r}$

$\therefore\ \sin\theta_t = \frac{\sin\theta_i}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \sin\frac{\pi}{4}/\sqrt{2} = \frac{1}{2}$，即 $\theta_t = \frac{\pi}{6}$，$\theta_t = 30°$

(2)

在边界上满足 $\begin{cases} w_i = w_r = w_t \\ k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} \\ k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} \end{cases}$

$\therefore\ k_{rx} = k_{tx} = k_{ix} = \pi$.

$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} = 0$

又 $k = \frac{w}{v}$，得 $|k_i| = |k_r|$ 即 $|k_{iz}| = |k_{rz}|$

折射定律有

$\frac{k_t}{k_i} = \sqrt{\frac{\varepsilon_t\mu_t}{\varepsilon_i\mu_i}} = \sqrt{\varepsilon_r}$

$\therefore\ k_t = \sqrt{\varepsilon_r}k_i$ 即 $k_t = 2\pi$

$\therefore\ k_{tz} = k_t\cos\theta_t = 2\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\pi$ 即 $k_{tz} = \sqrt{3}\pi$

对幅值有

$\begin{cases} \frac{E_{r0}}{E_0} = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \\ \frac{E_{t0}}{E_0} = \frac{2\cos\theta_i\sin\theta_t}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \end{cases}$，代入有 $\begin{cases} E_{r0} = -2.7\ V/m \\ E_{t0} = 7.3\ V/m \end{cases}$

$\therefore$ 空气中

$\vec{E}_{空} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = [\vec{e}_y\cdot 10\cos(wt - \pi x - \pi z) - \vec{e}_y\cdot 2.7\cos(wt - \pi x + \pi z)]\ (V/m)$

介质中

$\vec{E}_{介} = \vec{E}_t = \vec{e}_y 7.3\cos(wt - \pi x - \sqrt{3}\pi z)\ (V/m)$

(3) ③ 由题可知。

$\bar{g}_t = \frac{1}{2}Re[\vec{E}_t\times\vec{H}_t^*]$,

其中 $\vec{H}_t^* = \frac{k_t}{\mu_0 w}\cdot(\hat{k}_t\times\vec{E}_t)$

代入有

$\bar{g}_t = [0.050\vec{e}_x + 0.087\vec{e}_z]\ (W/m^2)$

(4) ④ 不会；

由 $\frac{E_{r0}}{E_0} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$，若 $E_{r0} = 0$，则 $\theta_i = \theta_t$.

又 $\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \sqrt{\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_i}} = \sqrt{\varepsilon_t} \neq 1$，即 $\theta_i \neq \theta_t$. 矛盾. 故不会

期中考试讲解

三、计算题

10. 无耗情况下，主传输线的特性阻抗为 500Ω，负载阻抗为（100+ j100）Ω，工作在 1GHz。在进行阻抗匹配时，如将一λ/4 变换器直接接在负载与主传输线之间，则需在负载处并联一短路支节。如果λ/4 变换器和短路支节的特性阻抗相同，求短路支节的最短长度及其特性阻抗。(12 分)

解: (10). 解：设 $\lambda/4$ 变换器特性阻抗为 Z_0'

负载阻抗 $Z_L=(100+100j)\Omega$

∴ 导纳 $Y_L = \frac{1}{Z_L} = \left(\frac{1-j}{200}\right)S$

若匹配，则短路支节在负载处输入导纳应为

$Y_{短} = \frac{1}{200}j\ (S)$

并联后总导纳

$Y_{并} = \frac{1}{200}\ S$，即 $Z_{并}=200\Omega$.

匹配时有 $Z_0 = \frac{Z_0'^2}{Z_{并}}$，其中 $Z_0=500\Omega$

得 $Z_0'=316\Omega$

对短路支节，沿线输入阻抗（无耗）

$$Z_{in} = Z_0' \frac{Z_L + jZ_0'\tan\beta s}{Z_0' + jZ_L\tan\beta s} = jZ_0'\tan\beta s$$

∴ $jZ_0'\tan\beta s = \frac{1}{Y_{短}} = -200j$ 即 $\tan\beta s = -\frac{200}{316}$

取 $s_{min} = 0.41\lambda$，

又 $f=1GHz$，$\lambda = c/f$，代入有 $\lambda=0.3m$

∴ $s_{min} = 0.123m$. 即最短为 $0.123m$，特性阻抗 316Ω

三、计算题

11. 已知特性阻抗 $Z_0 = 50\Omega$ 的无损耗均匀传输线工作在 1GHz，线长 1m，线上驻波比为 3，距负载最近的电压最小值点离终端 3cm。求：(1) 标出开路点、短路点、匹配点；(2) 终端的反射系数 Γ_L；(3)终端负载阻抗 Z_L；(4) 输入端阻抗 Z_{in}。（**必需用史密斯圆图求解！**）(16 分)

解：∵

① 见图

② $f = 1GHz$，则 $\lambda = c/f = 0.3m$ 即 $\lambda = 30cm$

$\rho = 3$，则 $|\Gamma_L| = \frac{\rho-1}{\rho+1} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}$，即 $|\Gamma_L| = \frac{1}{2}$

$d_{min} = 3cm$ 即 $d_{min} = 0.1\lambda$，则 $\varphi_L = 2\beta d_{min} + \pi = 2\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 0.1\lambda + \pi = 1.4\pi$

即 $\varphi_L = 1.4\pi$

∴ $\Gamma_L = |\Gamma_L| e^{j\varphi_L} = \frac{1}{2} e^{j1.4\pi}$

③ 由 $\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$，其中 $Z_0 = 50\Omega$.

∴ $Z_L = Z_0 \frac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_L}$，代入有 $Z_L = 38.8 e^{-j0.29\pi}$

④ 线长 $s_0 = 1m$，即 $s_0 = 3\lambda + \frac{1}{3}\lambda$，

在圆图找 $\tilde{z}_L = Z_L/Z_0$

顺时针绕等$|\Gamma_L|$圆转 $\frac{1}{3}\lambda$，所在点即为 $\tilde{z}_{in} = 2.8 + 0.9j$

即 $Z_{in} = Z_0 \tilde{z}_{in} = 104 + 45j$