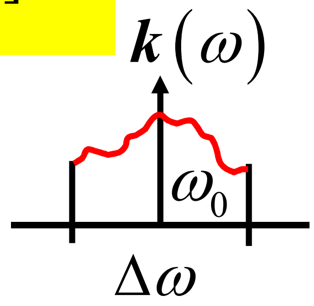
3.3 波包、相速和群速

实用电磁波是以某频率 ω_0 为载波频率的有狭窄频带 $\Delta\omega$ 的波，

波包

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})=\frac{1}{\Delta\omega}\int_{\omega_0-\Delta\omega/2}^{\omega_0+\Delta\omega/2}E_0(\omega)\exp[\mathrm{j}(\omega t-\boldsymbol{k}\boldsymbol{x})]\mathrm{d}\omega$$



$$\boldsymbol{k}(\omega)\approx\boldsymbol{k}(\omega_0)+(\omega-\omega_0)\left.\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0}$$

$$E(x,t)=\frac{E_0}{\Delta\omega}\int_{\omega_0-\Delta\omega/2}^{\omega_0+\Delta\omega/2}\exp\left\{\mathrm{j}\left[\omega t-k(\omega_0)x-(\omega-\omega_0)\left.\frac{\mathrm{d}\,k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0}x\right]\right\}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{E_0}{\Delta\omega}\exp\{\mathrm{j}[\omega_0 t-k(\omega_0)x]\}\int_{\omega_0-\Delta\omega/2}^{\omega_0+\Delta\omega/2}\exp\left\{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)\left[t-\left.\frac{\mathrm{d}\,k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0}x\right]\right\}\mathrm{d}\omega$$

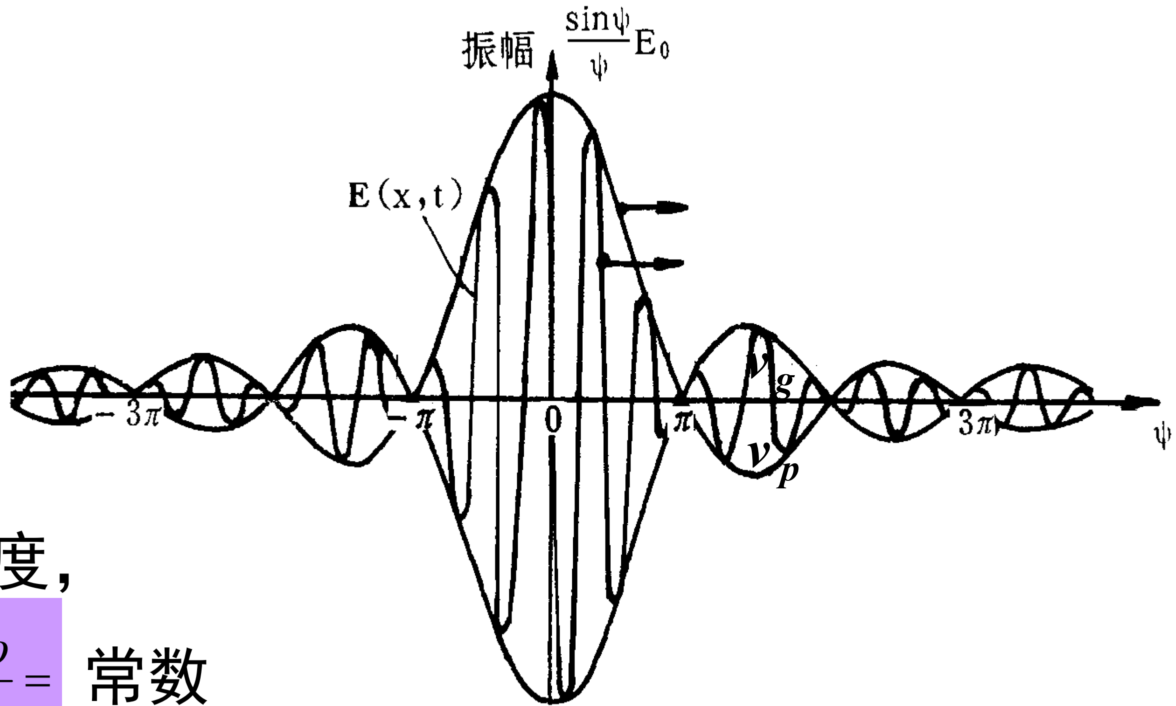
令 $\xi=\omega-\omega_0$，上式化为

$$\mathrm{E}(x,t)=\frac{\mathrm{E}_0}{\Delta\omega}\exp\{\mathrm{j}[\omega_0 t-k(\omega_0)x]\}\int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2}\exp\left\{\mathrm{j}\xi\left[t-\left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0}x\right]\right\}\mathrm{d}\xi$$

$$=\mathrm{E}_0\exp\{\mathrm{j}[\omega_0 t-k(\omega_0)x]\}\frac{\sin\Psi}{\Psi}$$

$$\Psi=\left[t-\left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0}x\right]\frac{\Delta\omega}{2}$$

振幅 $E_0\dfrac{\sin\Psi}{\Psi}$ 是x 和t 的函数。当 $\Psi=\pm m\pi$ 时振幅为零。

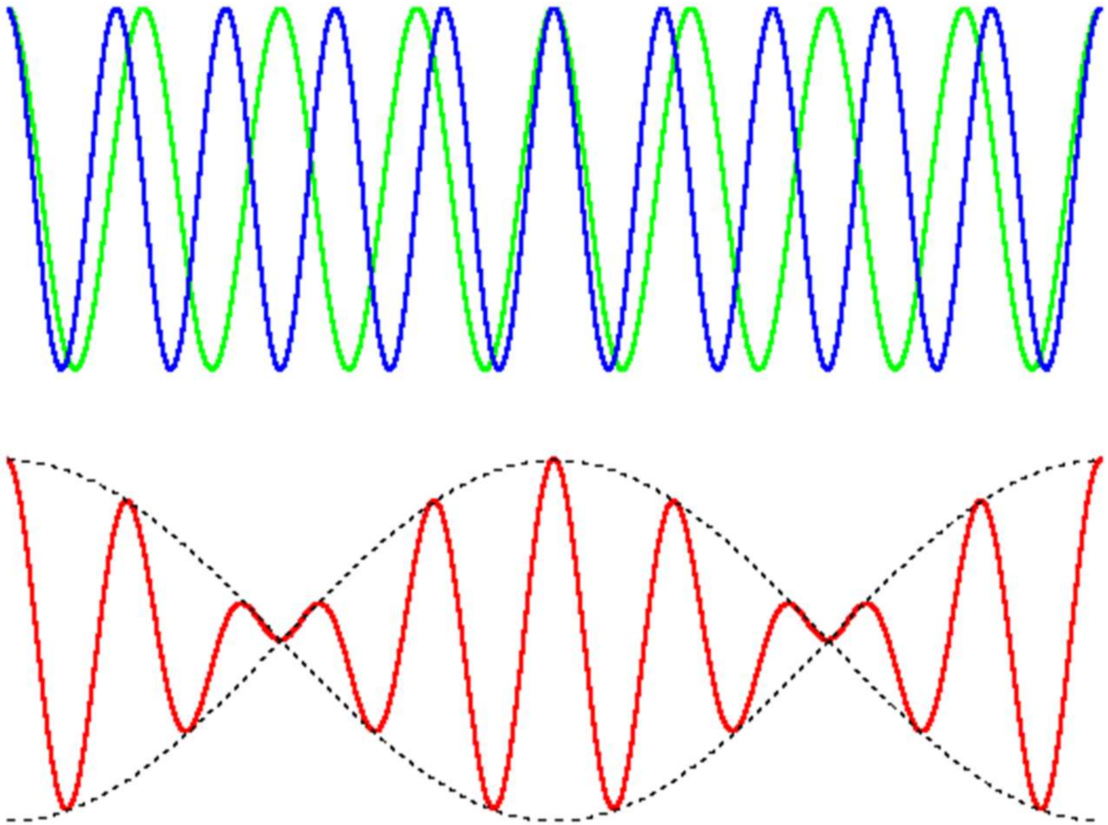


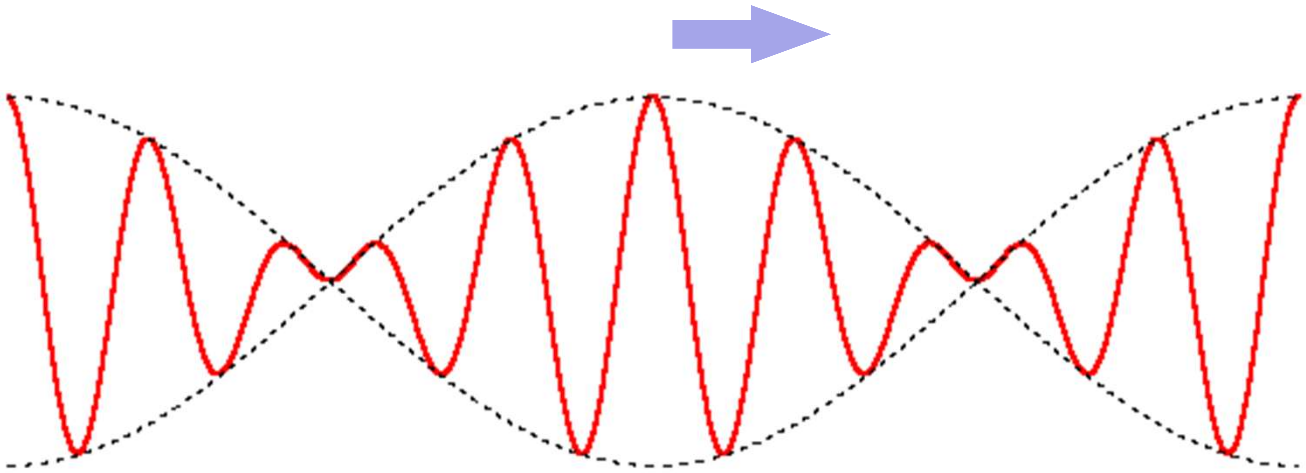
波包在空间移动的速度，

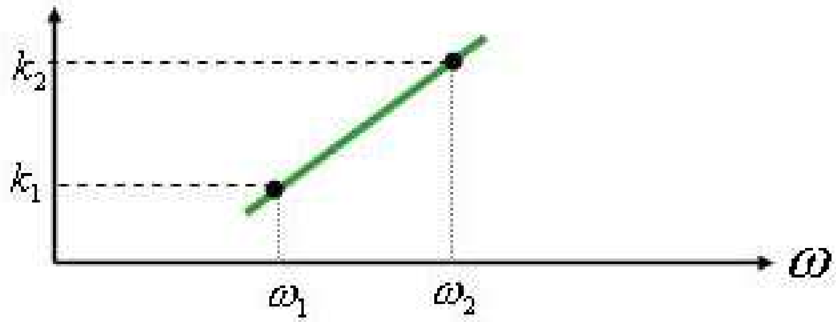
可由：$\Psi = \left[\left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0} x - t \right] \frac{\Delta\omega}{2} =$ 常数

波包的群速度：$\boxed{v_g = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{\omega_0}}$

相位移动的速度， 相速度：$\boxed{v_p = \frac{\omega_0}{k(\omega_0)}}$

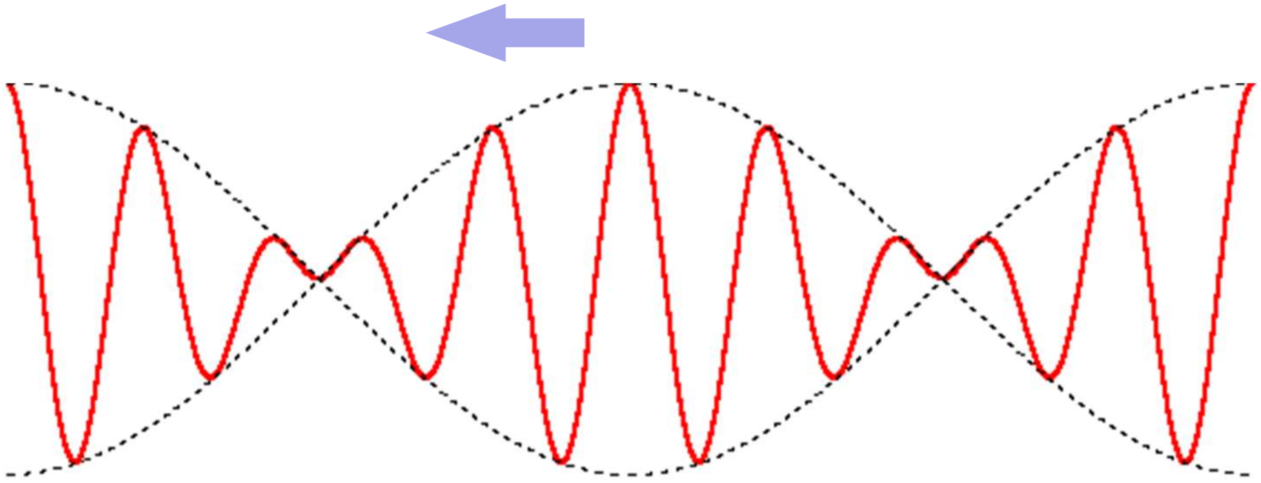




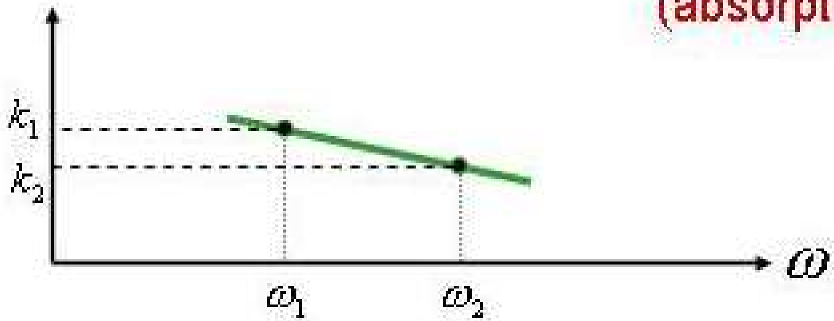


(absorption ignored)

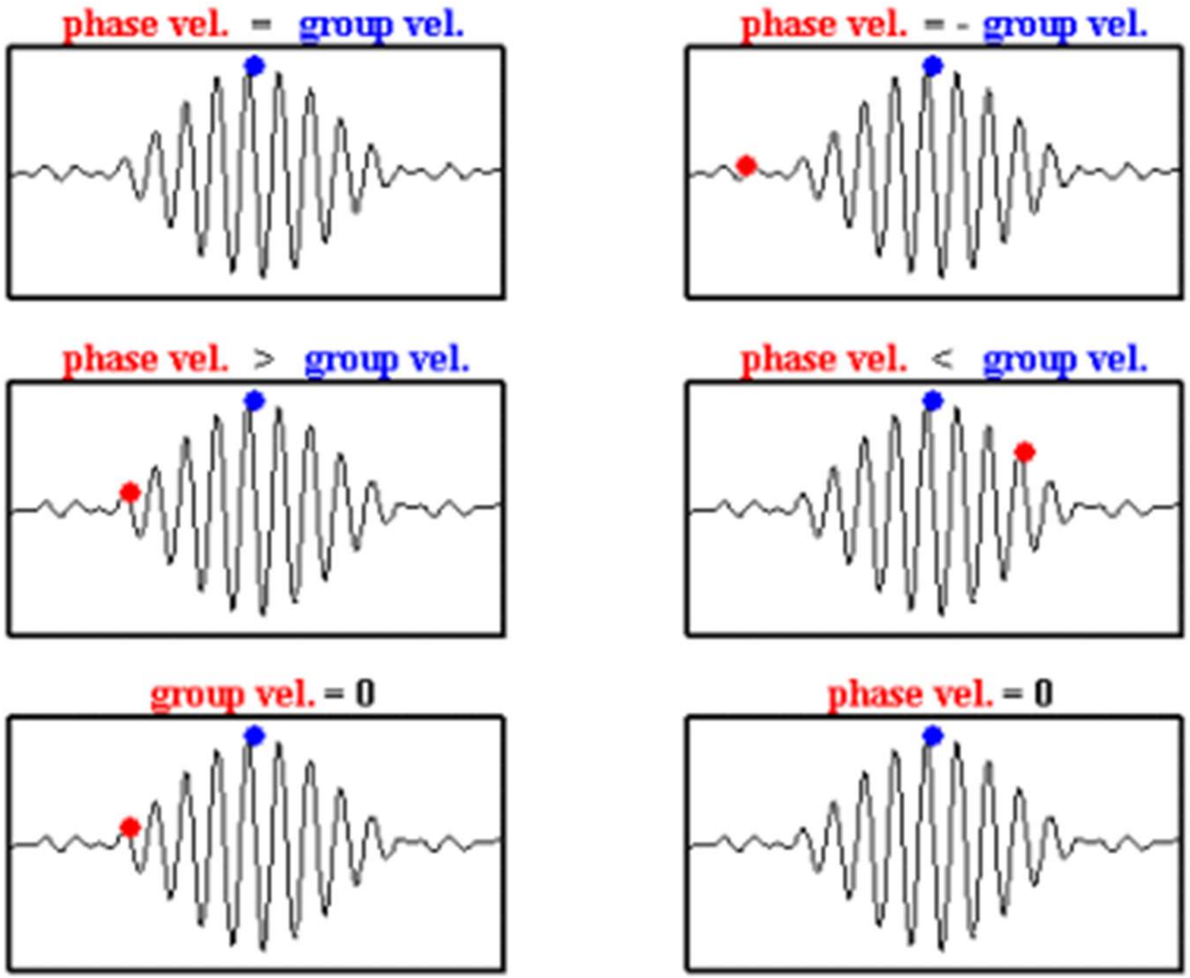
$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} > \frac{\omega_{ave}}{k_{ave}} = v_p$$



(absorption ignored)



$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} < 0$$


phase vel. = group vel.
phase vel. = - group vel.
phase vel. > group vel.
phase vel. < group vel.
group vel. = 0
phase vel. = 0

通常，介质的折射率 $n=\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}=\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=\frac{c}{v_p}$ 与圆频率ω（或 k）有关，

$\omega=\frac{k}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{kc}{n(k)}$ 所以群速

$$v_g=\left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{\omega_0}=\left[\frac{c}{n}+k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\frac{c}{n}\right)\right]_{\omega=\omega_0}=v_p+\left[k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\frac{c}{n}\right)\right]_{\omega=\omega_0}$$

一般介质，群速与相速并不相等，但在折射率随k变化很小的介质中，群速与相速相等。

3.4 有导体存在时电磁波的传播

- 导体中可能存在自由电子，在电磁波的作用下形成传导电流。
- 一般导体可以看成良导体，自由电荷分布在导体的表面。内部自由电荷密度仍为零。
- 有电磁波存在时，出现传导电流：$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$

$$\begin{cases}\nabla\bullet\boldsymbol{E}=0\\ \nabla\bullet\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{j}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$$

简谐电磁波

$$\begin{cases}\nabla\bullet\boldsymbol{E}=0\\ \nabla\bullet\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-j\omega\mu\boldsymbol{H}\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}+\sigma\boldsymbol{E}\end{cases}$$

引入“复介电常数”

$$\varepsilon' = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon'\boldsymbol{E}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon' \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

平面波解：

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp[\mathrm{j}(\omega\, \mathrm{t} - \boldsymbol{k} \bullet \boldsymbol{r})]$$

$$-k^2 + \mu\varepsilon'\omega^2 = 0$$

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{\beta} - j\boldsymbol{\alpha}$$

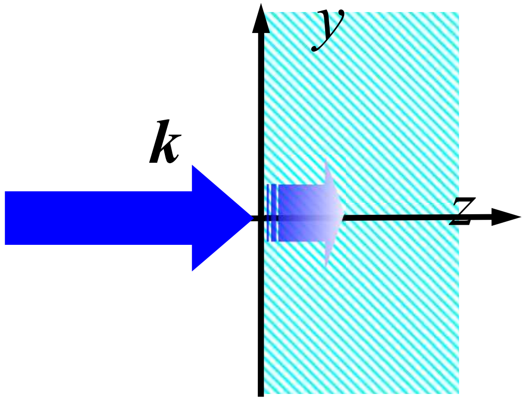
$$k^2 = \beta^2 - \alpha^2 - 2j\boldsymbol{\alpha} \bullet \boldsymbol{\beta} = \omega^2 \mu \left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \right)$$

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$$

$$\boldsymbol{\alpha} \bullet \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{2}\omega\mu\sigma$$

矢量$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$的方向不一定相同，由边值关系定。

导体中电磁波：$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 e^{-\boldsymbol{\alpha}\bullet\boldsymbol{r}}\exp\left[j\left(\omega t-\boldsymbol{\beta}\bullet\boldsymbol{r}\right)\right]$



在导体中，电磁波衰减，只能在表层传播。

垂直入射：$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 e^{-\alpha z}e^{j(\omega t-\beta z)}$

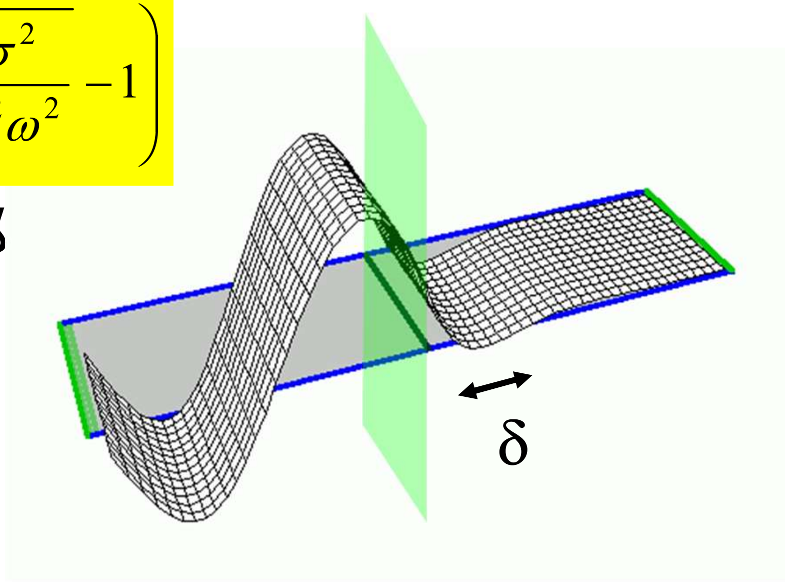
$$\boxed{\beta^2-\alpha^2=\omega^2\mu\varepsilon}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha}\bullet\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}+1\right)}\\ \alpha=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right)}\end{cases}$$

对良导体，$\sigma >> \omega\varepsilon$ 可忽略k^2的实部

$$k^2\approx -j\omega\mu\sigma \qquad \alpha\approx\beta\approx\sqrt{\omega\mu\sigma/2}$$



穿透深度：$$\boxed{\delta=\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}}$$

穿透深度与电导率及频率的平方根成反比。

铜： $50\ \boldsymbol{Hz}, \delta = 0.99\boldsymbol{cm} \quad 2450\boldsymbol{MHz}, \delta = 1.4\times 10^{-4}\ \boldsymbol{cm}$

对于高频电磁波，电磁场集中在导体表面附近的薄层内

------ 趋肤效应

导体可以看成内部电磁场为零的边界考虑。

垂直入射，$\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 同向：

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = \frac{1}{\omega\mu}(\beta - j\alpha)\frac{\boldsymbol{k}}{k}\times\boldsymbol{E}$$

良导体 $\Rightarrow$

$$\boldsymbol{H} = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}}e^{-j\frac{\pi}{4}}\frac{\boldsymbol{k}}{k}\times\boldsymbol{E}$$

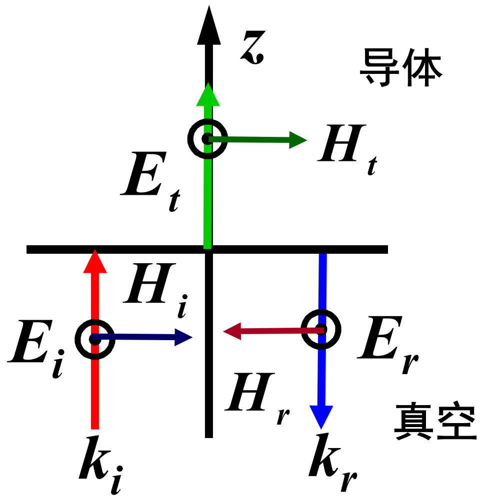
$$\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left|\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{E}}\right| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left|\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{E}}\right| = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} >> 1$$

磁场相位滞后

导体中，电磁波能量主要是磁场能量。

电磁波在导体表面的反射和折射：

垂直入射：
$$\begin{cases} E_i + E_r = E_t \\ H_i - H_r = H_t \end{cases}$$



磁场用电场表示：$E_i - E_r = \sqrt{\dfrac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}(1-j)E_t$

反射系数（反射与入射能流之比）：

$$\frac{E_r}{E_i} = -\frac{1-j-\sqrt{\dfrac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}{1-j+\sqrt{\dfrac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}$$

$$R = \left|\frac{E_r}{E_i}\right|^2 = \frac{\left(1-\sqrt{\dfrac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}\right)^2+1}{\left(1+\sqrt{\dfrac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}\right)^2+1}$$

由于 $\sqrt{\dfrac{\omega\varepsilon_0}{\sigma}} << 1$ ，上式中的高次项可以略去：$R \approx 1 - 2\sqrt{\dfrac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}$

电导率越高，反射系数越接近于1。

例如对1兆赫的电磁波，垂直入射到铜的表面时的反射系数 $R = 1 - 0.26 \times 10^{-5} \approx 1$ ，这样绝大部分能量被反射出去。在一般无线电波应用的情形下，金属往往可近似地当作理想导体对待，对电磁波全反射。

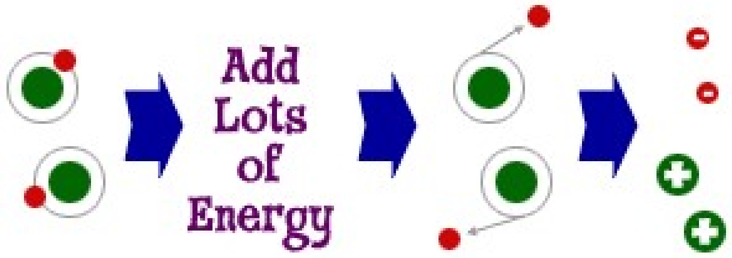
对人体组织，属于不良导体，其介电常数和电导率如下表所示：

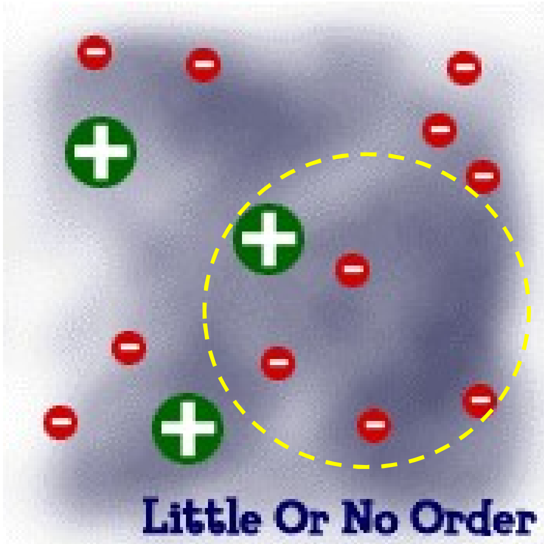
Frequency (MHz)	Relative Dielectric Constant (ε_r)	Conductivity (S/m)	Penetration Depth (δ) (cm)
0.1	1850	0.56	213
1.0	411	0.59	70
10	131	0.68	13.2
100	79	0.81	7.7
1000	60	1.33	3.4
10000	42	13.3	0.27
100000	8	60	0.03
* Muscle-like tissue, field parallel to tissue fibers			

3.5 电磁波在等离子体中的传播

Aurora australis (2005-9-11) 自 NASA's IMAGE 卫星

极光（Aurora或Polar light）是地球周围的一种大规模放电的过程。来自太阳的带电粒子到达地球附近，地球磁场迫使其中一部分沿着磁場线（Field line）集中到南北两极。当他们进入极地的高层大气时，与大气中的原子和分子碰撞并激发，产生光芒，形成极光。— Wikipedia





- 等离子体是物质存在的一种形式。
- 电离气体形成的等离子体中，正负电荷近似相等。
- 在很小的范围内也可能出现正负电荷明显不相等，该小范围尺度是：

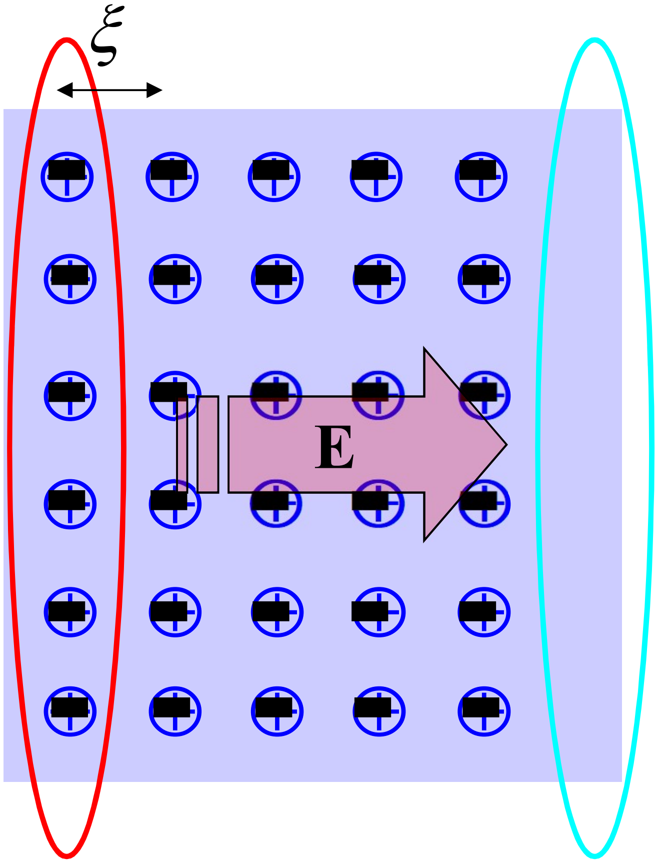
德拜半径：$$d_R << \sqrt{\frac{\varepsilon_0 kT}{n_e e^2}} = 7.91\sqrt{\frac{T}{n_e}}$$

等离子体的一个重要特征参量：

—— 等离子体频率

等离子振荡　简单的计算模型:

设想有一面积较大的厚度为 d 的等离子体平板，扰动使其中的电子相对于离子移动了一小段距离 $\xi\,(<<d)$，则在板的两个表面上产生“面”电荷密度 $\pm n_e e\xi$ ，于是板内将有电场，其强度为 $n_e e\xi/\varepsilon_0$ ，它产生把电子拉回到平衡位置的力。电子的运动方程是：　简谐振动方程



$$m_e\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}=-e\frac{n_e e\xi}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{n_e e^2\xi}{m_e\varepsilon_0}=0$$

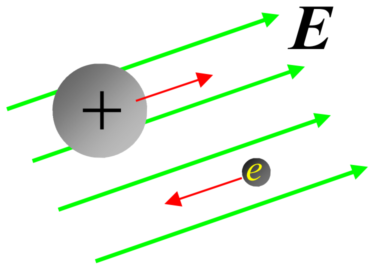
振动频率：等离子体频率

$$\boxed{\omega_p=\sqrt{\frac{e^2 n_e}{m_e\varepsilon_0}}}$$

单色平面波在等离子体中的传播

单色平面波的电场为：$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 exp[j(\omega t - \boldsymbol{k} \bullet \boldsymbol{r})]$

在真空中，$|\boldsymbol{E}| = c|\boldsymbol{B}|$ 在洛仑兹力中，磁力与电力比可以忽略。



离子在电磁波的作用下的运动方程为：

$$m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = Q_i \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{Q_i \boldsymbol{E}}{j\omega m_i} + \boldsymbol{v}_{i0}$$

假定不考虑粒子的热运动，则 $\boldsymbol{v}_{i0} = 0$ 。

将等离子体考虑成电导率为σ 的导电介质：

$$\sigma \boldsymbol{E} = \boldsymbol{j}_f = \sum N_i Q_i \boldsymbol{v}_i$$

$$\sigma = \sum \frac{N_i Q_i^2}{j\omega m_i}$$

考虑离子的质量比电子大 $\sigma = -\frac{j N_e Q_e^2}{\omega m_e} = -\frac{j n_e e^2}{\omega m_e}$

用电磁波在电导率为 σ 的介质（$\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$ ）中传播的结果：

$$k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon - j\sigma\omega\mu = \omega^2\mu\varepsilon - \frac{\mu n_e e^2}{m_e} = \mu\varepsilon\left(\omega^2 - \frac{n_e e^2}{\varepsilon m_e}\right) \Rightarrow \boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

当 $\omega > \omega_p$ 时，k 为实数，电磁波可以在其中传播；
当 $\omega < \omega_p$ 时，k 为虚数，电磁波无法通过等离子体；
频率越低，σ 越大，被反射的能量越多。一般微波才可以穿透电离层。

□ 卫星通信、射电天文必须工作在微波频段。

例：电离层是由太阳的紫外线照射等作用而形成的等离子体，它大致可分为D 、E 、F_1和F_2四层，其性质列于下表:

层次	离地面高度	电子浓度（电子数/立方米）	备　注
D	60-80千米	10^9	夜间消失
E	100-120千米	$5\times10^9 \sim 10^{11}$	电子浓度白天大夜间小
F_1	200千米	4×10^{11}	夜间消失，常出现于夏季
F_2	250-400千米	$10^{11} \sim 2\times10^{12}$	电子浓度白天大夜间小，冬季大夏季小

计算各层的等离子体集体振荡频率，分别取$\lambda=10^4$米、10^3米、10^2米和1米为长波、中波、短波和微波的典型波长，讨论它们在电离层中的传播情况。

实际上电离层不像上面所叙述的那样由规则的、平滑的层组成。实际上的电离层由块状的、云一般的、不规则的电离的团或者层组成。

解：等离子体集体振荡频率 $\omega_p=\sqrt{\dfrac{e^2n_e}{m_e\varepsilon_0}}$ ，式中 $e=1.602\times10^{-19}$ 库仑，$m_e=9.1\times10^{-31}$ 千克，$\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}$法拉/米，并将各层电子浓度代入，于是可求得相对各层的。

层次	ω_p
D	1.78×10^5
E	$39.9\times10^5\sim17.8\times10^4$
$\boldsymbol{F_1}$	35.6×10^6
$\boldsymbol{F_2}$	$17.8\times10^6\sim79.6\times10^6$

相对于各波段典型波长的圆频率为：

长波 $\omega_{长}=18.8\times10^4$

中波 $\omega_{中}=18.8\times10^5$

短波 $\omega_{短}=18.8\times10^6$

微波 $\omega_{微}=18.8\times10^8$

Homework

3-2；3-3；

3-4. 证明（1）一个椭圆极化波可分解为一个左旋和一个右旋圆极化波；（2）一个圆极化波可由两个旋向相反的椭圆极化波迭加而成。

3-5. 1GHz x方向极化的平面波沿+z方向从空气入射到位于x-y平面的金属面（铜质，$\varepsilon_r=1$，$\mu_r=1$，$\sigma=5.8\times10^7$S/m）上，电场幅度为12mV/m，求金属中的电场、磁场时间表达式。

3-6. Brewster棱镜可沿特定的Brewster角度无反射传输TM波，如果棱镜的折射率为1.5，求棱镜的顶角θ。