1-1试证明两个空间矢量$\boldsymbol{r}_1(r_1,\theta_1,\varphi_1)$ 和矢量$\boldsymbol{r}_2(r_2,\theta_2,\varphi_2)$ 之间的夹角Θ的余弦为

$$\cos\Theta=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

解：矢量 $\boldsymbol{r}_1\{r_1\sin\theta_1\cos\varphi_1, r_1\sin\theta_1\sin\varphi_1, r_1\cos\theta_1\}$ ，

矢量 $\boldsymbol{r}_2\{r_2\sin\theta_2\cos\varphi_2, r_2\sin\theta_2\sin\varphi_2, r_2\cos\theta_2\}$ ，

$$\boldsymbol{r}_1\bullet\boldsymbol{r}_2=r_1\ r_2\cos\Theta,\qquad r_1\bullet r_2=r_{1x}r_{2x}+r_{1y}r_{2y}+r_{1z}r_{2z}$$

所以

$$\cos\Theta=\frac{\mathrm{r}_1\bullet\mathrm{r}_2}{r_1\ r_2}$$

$$=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$

$$=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

1-2 设 $R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$, 试证 $\nabla R=\frac{\boldsymbol{R}}{R}$, $\nabla\frac{1}{R}=-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}$ 。

当用算符作用在R或$1/R$上时，结果为$\nabla=-\nabla'$ 。

解：

$$\nabla R=\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{e}_x+\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{e}_y+\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{e}_z=\frac{1}{2}\ \frac{2(x-x')}{R}\mathrm{e}_x+\frac{1}{2}\ \frac{2(y-y')}{R}\mathrm{e}_y+\frac{1}{2}\ \frac{2(z-z')}{R}\mathrm{e}_z=\frac{\mathrm{R}}{R}$$

$$\nabla\frac{1}{R}=-\frac{1}{2}\frac{2(x-x')}{R^3}\boldsymbol{e}_x-\frac{1}{2}\frac{2(y-y')}{R^3}\boldsymbol{e}_y-\frac{1}{2}\frac{2(z-z')}{R^3}\boldsymbol{e}_z=-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}$$

$$\nabla' R=\frac{\partial R}{\partial x'}\mathrm{e}_x+\frac{\partial R}{\partial y'}\mathrm{e}_y+\frac{\partial R}{\partial z'}\mathrm{e}_z=-\frac{1}{2}\ \frac{2(x-x')}{R}\mathrm{e}_x-\frac{1}{2}\ \frac{2(y-y')}{R}\mathrm{e}_y-\frac{1}{2}\ \frac{2(z-z')}{R}\mathrm{e}_z=-\frac{\mathrm{R}}{R}$$

$$\nabla'\frac{1}{R}=\frac{1}{2}\frac{2(x-x')}{R^3}\boldsymbol{e}_x+\frac{1}{2}\frac{2(y-y')}{R^3}\boldsymbol{e}_y+\frac{1}{2}\frac{2(z-z')}{R^3}\boldsymbol{e}_z=\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}$$

结果为 $\nabla=-\nabla'$ 。很明显，这只是对R的函数作用才有此结果，对别的函数作用要另外考虑。

1-4 已知 $\vec{B}=\vec{r}10e^{-2r}\cos\varphi+\vec{Z}10\sin\varphi$ 在（2，0，3）

计算 $\nabla\bullet B$ 和 $\nabla\times B$

解：柱坐标系下 $\nabla\bullet a=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial a_z}{\partial z}$

$$\therefore\nabla\bullet B=\frac{10e^{-2r}\cos\varphi}{r}-20e^{-2r}\cos\varphi\Big|_{(2,0,3)}=-15e^{-4}$$

$$\nabla\times a=e_\rho\left(\frac{\partial a_z}{\rho\partial\varphi}-\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)+e_\varphi\left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial\rho}\right)+\frac{e_z}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}\right]$$

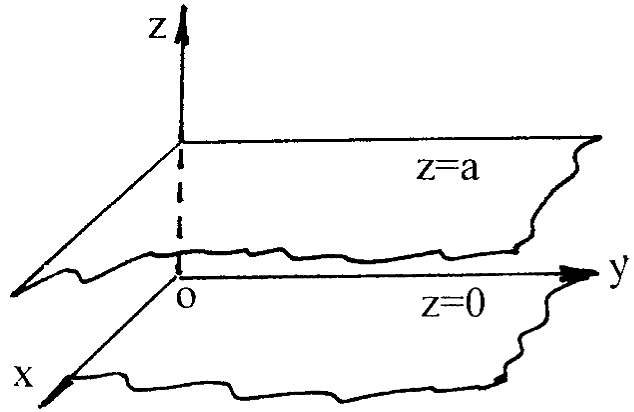
$$\nabla\times B=\frac{10\cos\varphi}{r}\vec{r}+\frac{10e^{-2r}\sin\varphi}{r}\vec{z}\Big|_{(2,0,3)}=5\vec{r}$$

或者（5，0，0）矢量

2-1两无限大相互平行的理想导体平板，间距为a，其间存在一随时间变化的电场。当取其中一块板为$z=0$平面时，电场强度为

$$\boldsymbol{E}=A\sin\frac{\pi z}{a}\cos\frac{\pi ct}{a}$$

式中 c是光速。试求



a. 磁感应强度$\boldsymbol{B}$

b. 导电板上的面电荷密度

c. 导电板上的面电流密度

解：a. $\boldsymbol{E}=A\sin\frac{\pi z}{a}\cos\frac{\pi ct}{a}\boldsymbol{e}_x$ 满足在$z=0$,和$z=a$面上的边界条件，

由Maxwell方程可作运算：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial z}\left[A\sin\frac{\pi z}{a}\cos\frac{\pi ct}{a}\right]=\boldsymbol{e}_y\left[A\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi z}{a}\cos\frac{\pi ct}{a}\right]$$

$$\boldsymbol{B}=-\frac{A}{c}\boldsymbol{e}_y\cos\frac{\pi z}{a}\int\left[\cos\frac{\pi ct}{a}\right]\mathrm{d}\frac{\pi ct}{a}=-\frac{A}{c}\boldsymbol{e}_y\cos\frac{\pi z}{a}\sin\frac{\pi ct}{a}$$

式中积分常数因与时间无关，系静磁场，所以令其为零。

b.在z=0,和z=a面上,由边界条件$\sigma_f=E_n\varepsilon_0=0$

c.由边界条件 $\boldsymbol{k}_f=\boldsymbol{e}_n\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)$，$\boldsymbol{e}_n$ 由1指向2，

在z=0面上,

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{H}_2=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0},\boldsymbol{H}_1=0\\ \boldsymbol{k}_f=-\dfrac{A}{\mu_0 c}\cos\dfrac{\pi z}{a}\sin\dfrac{\pi ct}{a}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_y\Big|_{z=0}=\boldsymbol{e}_x\dfrac{A}{\mu_0 c}\sin\dfrac{\pi ct}{a}\end{cases}$$

在$z=a$面上,

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{H}_1 = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}, \boldsymbol{H}_2 = 0 \\ \boldsymbol{k}_f = \dfrac{A}{\mu_0 c} \cos\dfrac{\pi z}{a} \sin\dfrac{\pi c t}{a} \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_y \Big|_{z=a} = \boldsymbol{e}_x \dfrac{A}{\mu_0 c} \sin\dfrac{\pi c t}{a} \end{cases}$$

2-2 设在一载有稳恒电流i的长直导线附近，有一矩形闭合回路，边长为a和b，其中b边平行于长导线。当回路在包含长导线的平面内以匀速v离长导线而运动时，求回路中的感应电动势。

解：在矩形线圈内，$\boldsymbol{B}$的方向与线圈平面的法线方向一致，所以有：

$$\Phi=\int \boldsymbol{B}\bullet \mathrm{d}\,\boldsymbol{s}=\int \frac{i\mu_0}{2\pi\rho'}b\mathrm{d}\rho'=\frac{i\mu_0}{2\pi}b\int_{\rho}^{\rho+a}\frac{\mathrm{d}\rho'}{\rho'}=\frac{i\mu_0}{2\pi}b\ \ln\rho'\Big|_{\rho}^{\rho+a}$$

$$=\frac{i\mu_0}{2\pi}b\ \ln\frac{\rho+\mathrm{a}}{\rho}$$

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{i\mu_0 b}{2\pi}\frac{\rho}{\rho+a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+\frac{\mathrm{a}}{\rho})=\frac{i\mu_0 abv}{2\pi\rho(\rho+\mathrm{a})}$$

2-3试利用坡印亭矢量分析稳恒载流直导线中的能量传输问题，并证明由此导线周围流入导线的功率恒等于该导线单位时间内的焦耳损耗。

解：设稳恒载流直导线中的电流强度是I，导线表面的磁场强度是 $\boldsymbol{H}=\frac{I}{2\pi a}\boldsymbol{e}_{\varphi}$，一段$l$长导线周围流入导线的功率：

$$P=-\int(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\bullet\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\frac{I}{\pi a^{2}\sigma}(\boldsymbol{e}_{z}\times\boldsymbol{e}_{\varphi})\bullet\boldsymbol{e}_{\rho}\frac{I}{2\pi a}2\pi al=\frac{I^{2}l}{\pi a^{2}\sigma}$$

$$=I^{2}R,(\text{其中}R=\frac{l}{\pi a^{2}\sigma})$$

这正好是该导线单位时间内的焦耳损耗。

2-4太阳在正午入射地球表面，与入射方向垂直的单位面积上所具有的能量为1.53×10^{6}耳格/秒·厘米^{2}称为太阳常数。试求在地球表面上太阳光的电磁场强度。设太阳半径R_s等于7×10^{10}厘米，太阳中心与地面间的距离R_{s-e}是1.5×10^{13}厘米 。求太阳表面上的电磁场强度。

解：化为国际单位制。1焦耳= 10^{7}尔格

$$g_e = E_e H_e = \frac{E_e^{\ 2}}{c\mu_0} = 1.53\times10^{6}\text{尔格/秒.厘米}^{2}$$

$$= \frac{10^4}{10^7} 1.53\times10^{6}\text{焦耳/秒.米}^{2} = 1.53\times10^{3}\text{焦耳/秒.米}^{2}$$

所以，$$E_e^{\ 2} = c\mu_0 g_e = 3\times10^{8}(\text{米/秒})\times4\pi\times10^{-7}(\text{亨利/米})$$

$$\times1.53\times10^{3}\text{焦耳/秒.米}^{2}$$

$$E_e = 759\text{伏/米}, H_e = \frac{E_e}{c\mu_0} = 2.01\text{安/米}$$

$$g_e = E_e H_e = \frac{E_e^{\ 2}}{c\mu_0} = 1.53\times10^6 \text{尔格} / \text{秒.厘米}^2$$

$$= \frac{10^4}{10^7} 1.53\times10^6 \text{焦耳} / \text{秒.米}^2 = 1.53\times10^3 \text{焦耳} / \text{秒.米}^2$$

$$\frac{g_s}{g_e} = \frac{4\pi r_{s-e}^2}{4\pi r_s^2} = \frac{\dfrac{E_s^{\ 2}}{c\mu_0}}{\dfrac{E_e^{\ 2}}{c\mu_0}}, \qquad E_s = 1.63\times10^5 \text{伏} / \text{米},$$

$$H_s = 431 \text{安} / \text{米}$$

2-5 一平面电磁波 $\begin{cases}\boldsymbol{E}=E_0\cos\omega(t-r/\mathrm{c})\,\boldsymbol{e_x}\\ \boldsymbol{B}=B_0\cos\omega(t-r/\mathrm{c})\,\boldsymbol{e}_y\end{cases}$ 垂直入于 $z=0$ 平面。

求作用在此平面上的压强（单位面积的辐射压力）。

设（a）此平面为完全吸收体；（b）此平面为理想导体.

解：因为 $\overleftrightarrow{\varPhi}=\varepsilon_0\,\boldsymbol{EE}+\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{BB}-\dfrac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2+\dfrac{1}{\mu_0}B^2)\overleftrightarrow{\boldsymbol{S}}$ ，

由电磁场的方向可确定入射波的方向在z方向，即由下半空间入射到 $z=0$ 平面，则平面所受压强为 $-\boldsymbol{e_z}\bullet\overleftrightarrow{\varPhi}$ ，式中的电磁场是边界面上的总场。

(a)平面为完全吸收体,场在边界上没有变化，进入平面后才转变为热能.

$$\boldsymbol{P}_1=-\boldsymbol{e_z}\bullet\left\{\varepsilon_0 E^2\,\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e_x}+\frac{B^2}{\mu_0}\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e_y}-\frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2+\frac{B^2}{\mu_0})(\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e_z})\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2+\frac{B^2}{\mu_0})\boldsymbol{e_z}$$

(b) $E_{总}=0 \qquad B_{总}=2B$

$$\boldsymbol{P}_2=-\boldsymbol{e_z}\bullet\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{4B^2}{\mu_0}\right)(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e_z})\right\}=\frac{2B^2}{\mu_0}\boldsymbol{e_z}$$

因为 $\varepsilon_0 E^2=\dfrac{B^2}{\mu_0}$

所以 $\boldsymbol{P}_2=2\boldsymbol{P}_1$

3-2 对于在任意方向传播的电磁波，试证其群速度为 $\boldsymbol{v}_g = \nabla_k \omega\big|_{\omega_0}$ 。式中 $\nabla_k = \boldsymbol{e}_x \dfrac{\partial}{\partial k_x} + \boldsymbol{e}_y \dfrac{\partial}{\partial k_y} + \boldsymbol{e}_z \dfrac{\partial}{\partial k_z}$，$\omega_0$ 为波包的中心频率。

解：由傅利叶分析知，在$\boldsymbol{k}$方向传播的频率在$\omega_0 - \dfrac{\Delta\omega}{2}$ 到 $\omega_0 + \dfrac{\Delta\omega}{2}$ 之间的所有单色平面波的迭加是

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\Delta\omega}\int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} \boldsymbol{E}_0(\omega)\exp\left[\mathrm{j}(\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{r} - \omega t)\right]\mathrm{d}\omega$$

设在所考虑的区间变化不大，且有

$$\boldsymbol{k}(\omega) = \boldsymbol{k}(\omega_0) + (\omega-\omega_0)\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}\omega}\right)_0 + \cdots \approx \boldsymbol{k}_0 + (\omega-\omega_0)\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}\omega}\right)_0$$

将其代入上式，得

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{E}_0}{\Delta\omega}\int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}}\exp\left[\mathrm{j}(\boldsymbol{k}_0\bullet\boldsymbol{r}+(\omega-\omega_0)(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}\omega})_0\bullet\boldsymbol{r}-\omega t)\right]\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{\boldsymbol{E}_0}{\Delta\omega}\exp[\mathrm{j}(\boldsymbol{k}_0\bullet\boldsymbol{r}-\omega_0 t)]\int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}}\exp\left\{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)\left[(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}\omega})_0\bullet\boldsymbol{r}-t\right]\right\}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{\boldsymbol{E}_0}{\Delta\omega}\exp[\mathrm{j}(\boldsymbol{k}_0\bullet\boldsymbol{r}-\omega_0 t)]\frac{\sin\psi}{\psi}$$

式中 $\psi=\left[(\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{k}}{\mathrm{d}\omega})_0\bullet\mathrm{r}-t\right]\frac{\Delta\omega}{2}=\mathrm{const.}=\left[(\frac{\mathrm{d}k_x}{\mathrm{d}\omega})_0 x+(\frac{\mathrm{d}k_y}{\mathrm{d}\omega})_0 y+(\frac{\mathrm{d}k_z}{\mathrm{d}\omega})_0 z-t\right]\frac{\Delta\omega}{2}$

$$(\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{k}}{\mathrm{d}\omega})_0\bullet\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{r}}{\mathrm{d}t}=1$$

$$(\frac{\partial\omega}{\partial k_x})_0(\frac{\mathrm{d}k_x}{\mathrm{d}\omega})_0+(\frac{\partial\omega}{\partial k_y})_0(\frac{\mathrm{d}k_y}{\mathrm{d}\omega})_0+(\frac{\partial\omega}{\partial k_z})_0(\frac{\mathrm{d}k_z}{\mathrm{d}\omega})_0=(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\omega})_0=1$$

对比上两式，可得

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{g}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(\frac{\partial\omega}{\partial k_x})_0\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}+(\frac{\partial\omega}{\partial k_y})_0\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}}+(\frac{\partial\omega}{\partial k_z})_0\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}}$$

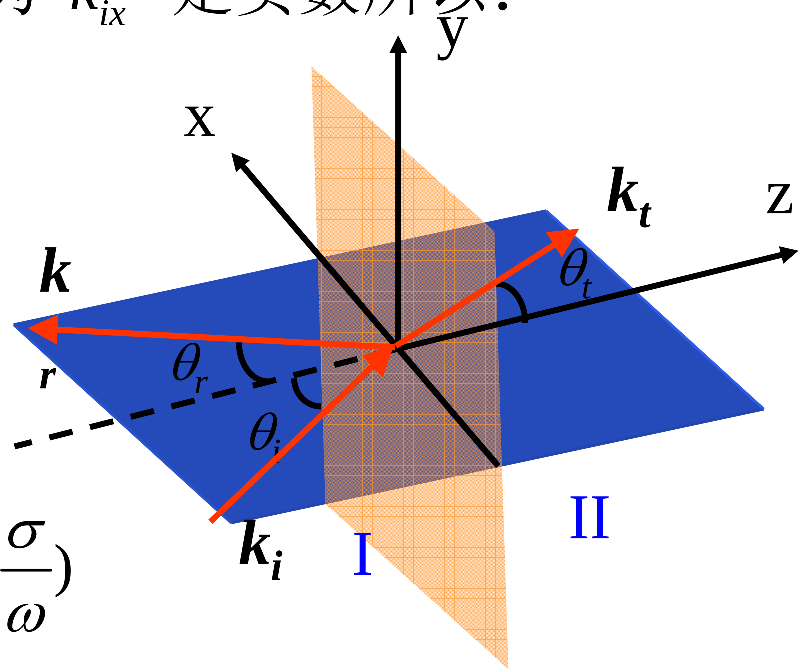
3-3 一平面电磁波 $\boldsymbol{E}_{in}=\boldsymbol{E}_0\exp\left[\mathrm{j}(\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{r}-\omega t)\right]$ 射入一导体平面，设入射角为 θ ，试求其折射角的大小。（导体的导电率为σ，导磁率为μ）

解：取入射平面为xz面，入射角为 θ_i，折射角为θ_t 。由边界条件 $k_{ix}=k_{tx}=\beta_{tx}+\mathrm{j}\alpha_{tx}$,因为 k_{ix} 是实数所以：

$$\alpha_{tx}=0 \qquad k_{ix}=\beta_{tx}$$

$$k_{iy}=0=\beta_{ty}+\mathrm{j}\alpha_{ty}\ ,$$

所以 α_t 垂直于导体表面



$$k_t^2=\beta_t^2-\alpha_t^2+2\mathrm{j}\vec{\alpha}_t\bullet\vec{\beta}_t=\omega^2\mu(\varepsilon+\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega})$$

因为良导体内 $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} >>1$，所以 $\beta_t \approx \alpha_t \approx \sqrt{\dfrac{\omega\mu\sigma}{2}}$

$$\vec{\alpha}_t \bullet \vec{\beta}_t = \alpha_{tz}\beta_{tz} = \frac{1}{2}\omega\mu\sigma = \frac{1}{2}\omega^2\mu_0\varepsilon_0 \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} >> \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{1}{2}k_i^2$$

$$\alpha_{tz}\beta_{tz} >> \frac{1}{2}k_i^2 = \frac{1}{2}(k_{ix}^2 + k_{iz}^2)$$

所以 $\alpha_{tz}\beta_{tz} >> k_{ix}^2 = \beta_{tx}^2$ 所以 $\beta_{tz} >> \beta_{tx}$ 所以 $\beta_{tz} \approx \beta_t$

以上证明了在任意入射角情形下，α_t 垂直于导体表面，β_t 也接近法线方向，

所以折射定理为

$$\frac{\sin\theta_\mathrm{t}}{\sin\theta_\mathrm{i}} = \frac{k_i}{\beta_t} = \frac{\dfrac{\omega}{c}}{\sqrt{\dfrac{\omega\mu\sigma}{2}}}\sqrt{\frac{2\omega}{c^2\mu\sigma}}$$

3-5 1GHz x方向极化的平面波沿+Z方向从空气入射到位于x-y平面的金属面（铜质，ε_r=1，μ_r=1，σ =5.8×10^{7}s/m）上，电场幅度为12mV/m，求金属中的电场磁场时间表达式。

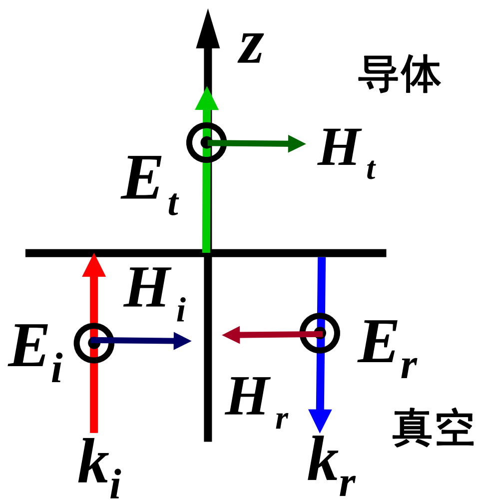
解：首先考虑电磁波在空气和金属表面发生折射和透射的情况：

$$\begin{cases} E_i + E_r = E_t \\ H_i - H_r = H_t \end{cases} \quad \text{又} \ \mu_r = 1 \quad \therefore E_i - E_r = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}(1-j)E_t$$

结合两式得到

$$\frac{2}{1+\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}(1-j)}E_i = E_t$$

$$\because \omega = 2\pi f$$



$$\therefore \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{5.8\times10^7}{4\pi\times10^9\times8.854\times10^{-12}}} \approx 22832$$

$$\therefore E_t \approx \frac{2}{22832(1-j)}E_i = \frac{1}{16145}E_i \times e^{j\frac{\pi}{4}}$$

再利用在导体中的电场表达式：

$$E = E_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}$$

在1GHz频率远远小于10^{17}Hz可以看作良导体

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\omega\mu\sigma/2} = \sqrt{\pi f\mu\sigma} = 4.785\times10^5$$

$$\therefore E = 0.743 e^{-4.785\times10^5 z} \exp[j(2\pi\times10^9 t - 4.785\times10^5 z + \frac{\pi}{4})] \quad \mu V/m$$

$$\because H = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \frac{\vec{k}}{k}\times E$$

$$\therefore H = 63.68 e^{-4.785\times10^5 z} \exp[j(2\pi\times10^9 t - 4.785\times10^5 z)] \quad \mu A/m$$

注意单位

4-3 一特性阻抗为50Ω 的无耗线，与一 200Ω 的负载相接，其工作频率为100MHz，求：

a. 线上的驻波比。

b. 如采用一 $\lambda/4$ 阻抗变换器进行匹配，则该匹配段的特性阻抗Z和长度l为多少？

c. 当工作频率变为80MHz时，如仍采用上述匹配段，则线上的驻波比变为多少？

解：a.

$$\Gamma_l = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} = \frac{200-50}{200+50} = 0.6, \rho = \frac{1+|\Gamma_l|}{1-|\Gamma_l|} = \frac{1+0.6}{1-0.6} = 4$$

b.

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8}{10^8} = 3\text{cm},\ l = \frac{\lambda}{4} = 0.75\text{m}$$

$$Z_0' = \sqrt{Z_l Z_{in}} = \sqrt{50\times200} = 100\Omega$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8}{10^8} = 3\text{cm},\ l = \frac{\lambda}{4} = 0.75\text{m}$$

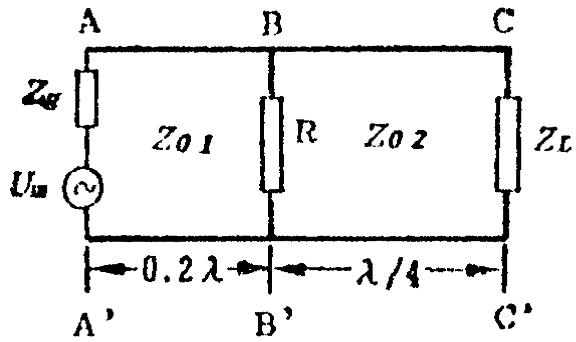
c.

$$f_1 = 80\times10^6\,\mathrm{Hz}, \lambda_1 = 3.75\mathrm{m},\ l = 0.75\mathrm{m} = 0.2\lambda_1,$$

$$Z_{in} = Z_0' \frac{Z_l + \mathrm{j}Z_0'\tan\dfrac{2\pi}{\lambda_1}0.2\lambda_1}{Z_0' + \mathrm{j}Z_l\tan\dfrac{2\pi}{\lambda_1}0.2\lambda_1} = 54 - \mathrm{j}23.7$$

$$\Gamma = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} = \frac{54 - \mathrm{j}23.7 - 50}{54 - \mathrm{j}23.7 + 50},\ |\Gamma| = 0.228,\ \rho = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = 1.59$$

4-5 在如图所示的传输线电路中：



$U_m = 900V \quad Z_g = Z_{01} = 450\Omega \quad Z_{02} = 600\Omega$

$R = 900\Omega \quad Z_L = 400\Omega$

a. 确定各线段上的工作状态。 b. 画出沿线电压、电流和阻抗的振幅分布，并标出它们的最大值和最小值。

解：a. $Z_{in\mathrm{B}} = \dfrac{Z_{02}^2}{Z_l} = \dfrac{600^2}{400} = 900\Omega$ 　图4-5BB’处的总阻抗

$$R_{总\mathrm{B}} = \frac{RZ_{in\mathrm{B}}}{R + Z_{in\mathrm{B}}} = \frac{900}{2} = 450\Omega$$

因为 $Z_g = Z_{01} = 450\Omega$ ，所以AB段工作在行波状态。

又 $Z_{02} = 600\Omega$，$Z_L = 400\Omega$ ，所以BC段工作在行驻波状态。

b. AB段：A点的输入阻抗 $Z_{in\mathrm{B}} = Z_{01} = 450\Omega$

在AA’处的电流 $I_{\mathrm{A}} = \dfrac{U_m}{Z_g + Z_{in\mathrm{A}}} = \dfrac{900}{450+450} = 1\mathrm{A} = J(s)$

在AA’处的电压 $U(s) = 450\mathrm{V} = U_l^+$ $\quad Z_{in}(s) = \dfrac{U(s)}{J(s)} = 450\Omega$

BC段： $\Gamma_l = \dfrac{Z_l - Z_{02}}{Z_l + Z_{02}} = \dfrac{400-600}{400+600} = -0.2 = 0.2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}, \varphi_l = \pi$

由(4.3.12)式 $\left|U(s)\right| = \left|U_{l\mathrm{C}}^+\right|\left|\left[1+\left|\Gamma_l\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi-2\beta s)}\right]\right|,$

在BB‘处的电压为450V

$$= \left|U_{l\mathrm{C}}^+\right|\left|\left[1+0.2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi-2\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4})}\right]\right| = \left|U_{l\mathrm{C}}^+\right|\left|\left[1+0.2\right]\right| = 1.2\left|U_{l\mathrm{C}}^+\right| \qquad \left|U_{l\mathrm{C}}^+\right| = 375\mathrm{V},$$

$$\left|U(s)\right| = 375\sqrt{1+\left|\Gamma_l\right|^2 + 2\left|\Gamma_l\right|\cos(\pi - 2\beta s)}$$

$$\begin{cases} s=0, \left|U_{\min}\right| = 300\text{V} \\ s=\dfrac{\lambda}{4}, \left|U_{\max}\right| = 450\text{V} \end{cases}$$

$$\left|J(s)\right| = \frac{375}{600}\sqrt{1+\left|\Gamma_l\right|^2 - 2\left|\Gamma_l\right|\cos(\pi - 2\beta s)}$$

$$\begin{cases} s=0, \left|J_{\max}\right| = 0.75\text{A} \\ s=\dfrac{\lambda}{4}, \left|J_{\min}\right| = 0.5\text{A} \end{cases}$$

$$\left|Z_{in}\right| = \left|Z_{02}\frac{Z_l + \mathrm{j}Z_{02}\tan\beta s}{Z_{02} + \mathrm{j}Z_l\tan\beta s}\right| = 600\left|\frac{2+\mathrm{j}3\tan\beta s}{3+\mathrm{j}2\tan\beta s}\right|$$

$$= 600\sqrt{\frac{13}{4+5\cos\beta s} - 1}$$

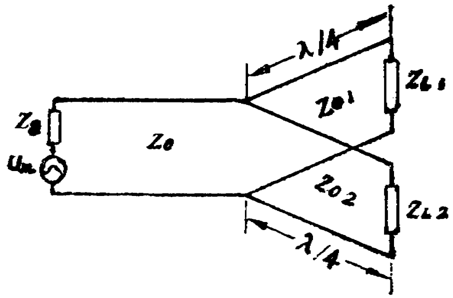
所以
$$\begin{cases} s=0, \left|Z_{\text{in,min}}\right| = 400\Omega \\ s=\dfrac{\lambda}{4}, \left|Z_{in,\max}\right| = 900\Omega \end{cases}$$

4-6 一匹配信号源 $U_m = 10V$，通过一特性阻抗为 50Ω 的无耗传输线，以相等的功率馈送给两个分别为和 $Z_{L1} = 64\Omega$，$Z_{L2} = 25\Omega$ 的并联负载，并用 $\lambda/4$ 变换器来实现负载与主传输线的匹配，如图所示。求：

a. $\lambda/4$ 变换器的特性阻抗 Z_{01}、Z_{02}。

b. 在 $\lambda/4$ 匹配段上的驻波比。

c. 负载 Z_{L1}、Z_{L2} 吸收的功率。



解：a.为了负载与主传输线匹配，要求 Z_{l1}, Z_{l2} 在AA′ 处的并联输入阻抗为 Z_0，为了以相等的功率馈送给两个并联负载，所以要求两个负载在AA’ 处的输入阻抗都等于$2Z_0$ =100Ω，所以，

$$Z_{01} = \sqrt{2Z_0 Z_{l1}} = \sqrt{100 \times 64} = 80\Omega,$$

$$Z_{02} = \sqrt{2Z_0 Z_{l2}} = \sqrt{100 \times 25} = 50\Omega$$

b.在匹配的情形下，主线上的ρ=1，而两支线上的：

1号线：

$$\Gamma_1=\frac{Z_{l1}-Z_0}{Z_{l1}+Z_0}=\frac{64-80}{64+80}=-0.11;$$

$$\rho_1=\frac{1+|\Gamma_1|}{1-|\Gamma_1|}=\frac{1+0.11}{1-0.11}=1.25$$

2号线：

$$\Gamma_2=\frac{Z_{l2}-Z_0}{Z_{l2}+Z_0}=\frac{25-50}{25+50}=-0.33;$$

$$\rho_2=\frac{1+|\Gamma_2|}{1-|\Gamma_2|}=\frac{1+0.33}{1-0.33}=2$$

c.因为是匹配的信号源，

所以 $Z_g=50\Omega,\ Z_{AA'}=50\Omega;\ Z_{in}=50\Omega,$

所以，$U_{AA'}=\dfrac{U_m Z_{AA'}}{Z_g+Z_0}=\dfrac{10\times 50}{50+50}=5\text{V}$，$I_A=\dfrac{10}{50+50}=0.1\text{A}$，

$$P_{AA'}=\frac{1}{2}5\times 0.1=0.25\text{W}$$

所以，$P_1=P_2=\dfrac{1}{2}P_{AA'}=0.125\text{W}$

4-7有一特性阻抗为50Ω的无耗传输线，测得第一个电压最小点和最大点距离负载分别为5cm和15cm，振幅分别为5V 和10V，求：

a. 负载反射系数 Γ_L和负载阻抗 Z_L。

b. 输入阻抗为 Z_L 的等效传输线的长度l及其终端电阻R。

解：（a）15cm-5cm=λ/4,所以λ=40cm；电压驻波比

$$\rho = \frac{10}{5} = 2 \qquad \left|\Gamma_l\right| = \frac{\rho - 1}{\rho + 1} = \frac{1}{3}, \quad \varphi_l = 2\beta d_{min} + \pi = \pi + \frac{4\pi}{40}5 = \frac{3}{2}\pi$$

$$\Gamma_l = \left|\Gamma_l\right| e^{j\varphi_l} = \frac{1}{3} e^{j\frac{3}{2}\pi} = -\frac{1}{3}j, \quad Z_l = Z_0 \frac{1+\Gamma_l}{1-\Gamma_l} = 50\frac{1-\frac{1}{3}j}{1+\frac{1}{3}j} = (40 - j30)\Omega$$

（b）

$$Z_{in} = Z_l = 40 - j30 = 50\frac{R + j50\tan\beta l}{50 + jR\tan\beta l}$$

实部相等得 $200 + 3R\tan\beta l = 5R$

虚部相等得 $4R\tan\beta l - 150 = 250\tan\beta l$

联立解得 $$\begin{cases} R_1 = 100\Omega \quad l_1 = 5\text{cm} \\ R_2 = 25\Omega \quad l_2 = 15\text{cm} \end{cases}$$

4-8 有一长为8cm、特性阻抗为50Ω 的无耗传输线，测得线上驻波比为2，相邻两电压最小点的距离为2.5cm及第一个电压最小点距负载的距离为1.5cm，利用圆图求负载阻抗 Z_L 和始端的输入阻抗 Z_{in}。

解：相邻两电压最小点的距离为$\lambda/2 = 2.5\text{cm}$，所以$\lambda = 5\text{cm}$

第一个电压最小点距负载的距离为$d_{min} = 1.5\text{cm}$ 所以

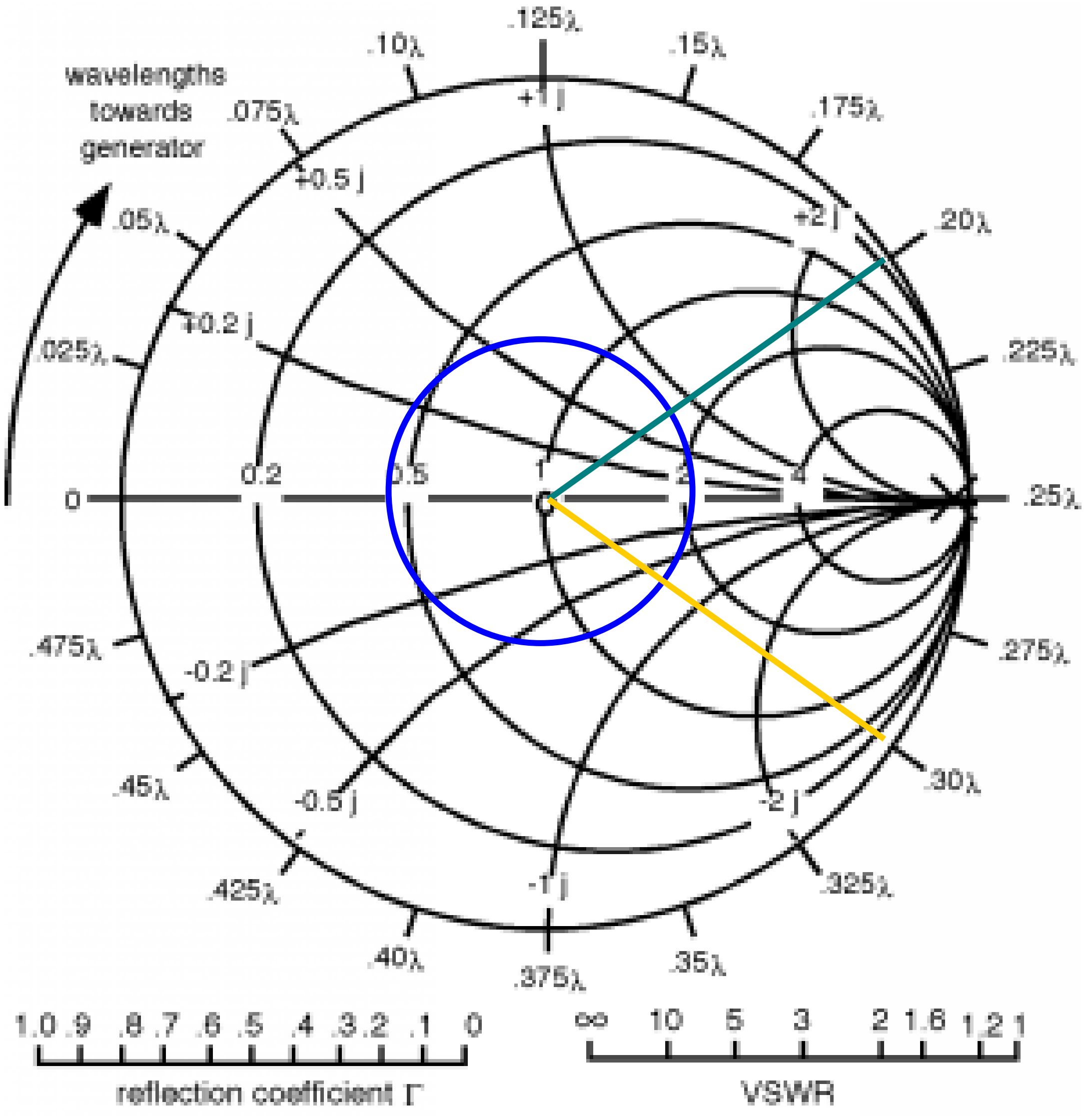
$$\frac{d_{min}}{\lambda} = \frac{1.5}{5} = 0.3$$

输入端距负载的距离为8cm，即1.6λ

(1) 因为$\rho = \tilde{R}_{max} = 2$ ，作等ρ圆，由电压最小点向负载方向(逆时针方向)转0.3得归一化负载阻抗 $\tilde{Z}_l = 1.57 + j0.69$ ，或

$$Z_l = 50\tilde{Z}_l = (78.5 + j34.5)\Omega$$

(2)由负载点向顺时针方向旋转1.6λ或0.1λ,得归一化输入阻抗 $\tilde{Z}_{in} = 1.57 - j0.69$ 或 $Z_{in} = 50\tilde{Z}_{in} = (78.5 - j34.5)\Omega$



4-9 传输线的特性阻抗 $Z_0 = 300\Omega$ ，负载阻抗 $Z_L = (450 - \mathrm{j}150)\Omega$ ，工作频率为1GHz,如利用 $\lambda/4$ 阻抗变换器来匹配这传输线。

a. 求 $\lambda/4$ 变换器的接入位置和阻抗特性。

b. 如将$\lambda/4$变换器直接接在负载与主传输线之间，则需在负载处并联一短路分支。求短路分支的长度和 $\lambda/4$ 变换器的特性阻抗。

解：a. $\lambda = \dfrac{c}{f} = 0.3\mathrm{m}, \Gamma_l = \dfrac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} = \dfrac{450 - \mathrm{j}150 - 300}{450 - \mathrm{j}150 + 300} = \dfrac{3 - \mathrm{j}2}{13},$

$$|\Gamma_l| = 0.277, \rho = \frac{1 + |\Gamma_l|}{1 - |\Gamma_l|} = 1.77$$

$$\varphi_l = \tan^{-1}(\frac{-2}{3}) = -0.588$$

如 $\lambda/4$ 变换器在电压最大点处接入，则该处的 $Z_{in(\max)} = Z_0\rho$，

所以其特性阻抗 $Z_{01} = \sqrt{Z_0 Z_0 \rho} = 300\sqrt{1.77} = 399.12\Omega$

接入位置在 $\varphi_l - 2\beta s = \pm 2n\pi$ $s_{max} = \dfrac{\lambda\varphi_l}{4\pi} + \dfrac{\lambda}{2} = 0.136\text{m}$

如 $\lambda/4$ 变换器在电压最小点处接入，该处的 $Z_{in(\min)} = Z_0/\rho$

其特性阻抗 $Z'_{01} = \sqrt{Z_0 Z_0 / \rho} = 300/\sqrt{1.77} = 225.5\Omega$

接入位置在 $\varphi_l - 2\beta s = \pm(2n+1)\pi$ 处，或 $s_{min} = \dfrac{\lambda\varphi_l}{4\pi} + \dfrac{\lambda}{4} = 0.061\text{m}$

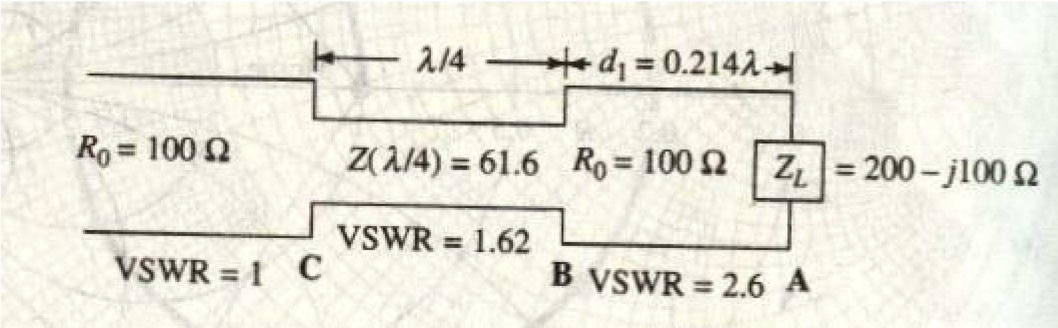
归一化负载阻抗 $\tilde{Z}_l = Z_l/Z_0 = 1.5 - \text{j}0.5$ ，由圆图 $\tilde{Y}_l = 0.6 + \text{j}0.2$。

如将 $\lambda/4$ 变换器直接接在负载与主传输线之间，则需在负载处并联一短路分支，要求它提供 $-\text{j}0.2$, 导纳圆图的短路在0.25处，所以 $l/\lambda = 0.25 - 0.032 = 0.218$ $l \doteq 0.0654\text{m}$

这样 $\tilde{Y}_l^{总} = 0.6, \tilde{Z}_l^{总} = 1.67, Z_l^{总} = 500\Omega, Z_{01}$

$= \sqrt{Z_0 Z_l^{总}} = \sqrt{500 \times 300} = 387.3\Omega$

$\lambda/4$ **Transformer matching.** A 100 Ω line is terminated in a load impedance $Z_L = 200 - j100\Omega$. Referring to Fig. 3_19 , find : (a) d1(min) (b) $Z(\lambda/4)$ (c) VSWR on d1 line (d) VSWR on $\lambda/4$ line



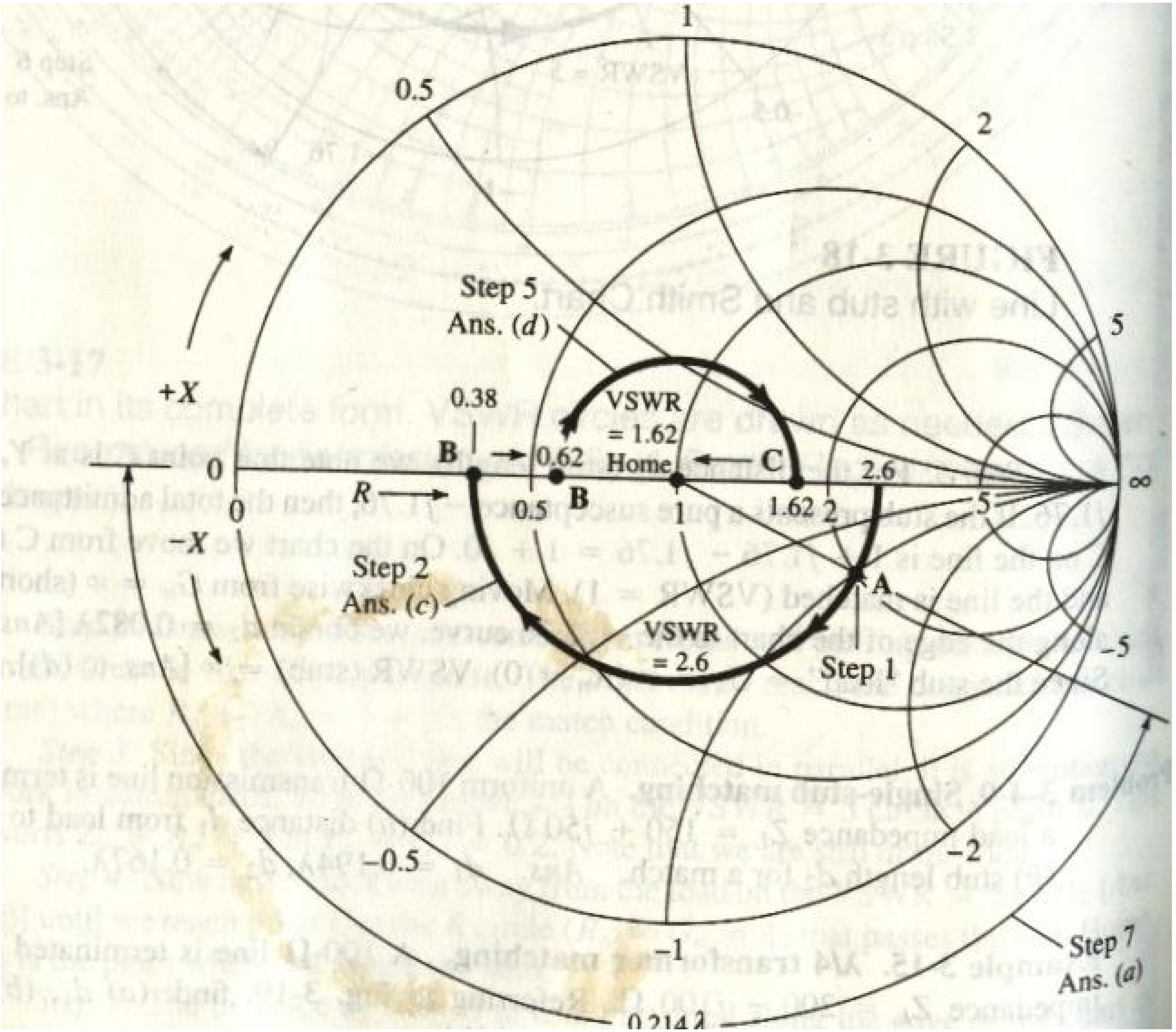
VSWR

Voltage standing wave ratio

$$Z_{nA-B} = \frac{200 - j100}{100} = 2 - j1 \qquad d_1 = 0.214\lambda$$

$$Z(\lambda/4) = \sqrt{Z_B R_0} = \sqrt{38 \times 100} = 61.6\Omega$$

$$Z_{nB-C} = \frac{Z_B}{Z(\lambda/4)} = \frac{38}{61.6} = 0.62$$


1
0.5
2
5
∞
+X
−X
0
0
0.38
B
0.62
B
0.5
R
1
1.62
2.6
2
5
VSWR
= 1.62
Home
C
A
VSWR
= 2.6
Step 5
Ans. (d)
Step 2
Ans. (c)
Step 1
−5
−2
−0.5
−1
Step 7
Ans. (a)
0.214 λ

5-3

用BJ-32波导作馈线。求：

a. 当工作波长分别为10cm、7cm和6cm时，波导中可能传输哪些波型？

b. 波导单模工作的频率范围。

c. 如果该波导中填充以$\varepsilon_r = 2.25$ 的理想介质，其单模工作频率的范围如何变化？

解：波导的宽边a=7.214cm,窄边b=3.404cm 。

由截止波长 $\lambda_c = \dfrac{2}{\sqrt{\left(\dfrac{m}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{n}{b}\right)^2}}$ 知

波型	TE_{10}	TE_{20}	TE_{01}	$TE_{11}(TM_{11})$	$TE_{21}(TM_{21})$
(cm)	14.43	7.21	6.81	6.16	4.95

a. 当 $\lambda < \lambda_c$ 时，波才能传输，所以有

工作波长为10cm时波导中可能传输 TE_{10} 型波。

工作波长分别为7cm时波导中可能传输TE_{10} TE_{20}型波。

工作波长分别为6cm时波导中可能传输 TE_{10} TE_{20} TE_{01} $TE_{11}(TM_{11})$ 型波。

b. 波导单模工作的波长范围为7.21(cm)<λ<14.43(cm),由$f=c/\lambda$,得它相应的单模工作的频率范围为：4.16(GHz)>f>2.079(GHz)

- c. 如果该波导中填充以 $\varepsilon_r = 2.25$ 的理想介质，其单模工作波长的范围不变，而截止频率
- $$f_c = \frac{v}{\lambda_c} = \frac{c}{\lambda_c\sqrt{\varepsilon_r}},$$
- 则波型 TE_{10}， $f_c = 1.39\text{GHz}$; TE_{20} 的 $f_c = 2.77\text{GHz}$。

所以其单模工作频率的范围为 1.39 GHz <*f*<2.77GHz

5-4

矩形波导的工作频率 $f = 5\text{GHz}$ ，传输 TE_{10} 的截止频率 $f_c = 0.8f$ ，宽高比为 2，如通过波导的平均功率为1kW，求：

a. 波导中电场和磁场强度的幅值。

b. 波导壁上纵向和横向壁电流面密度的幅值。

解：a. $f_c = 0.8f = 4\text{GHz}, \lambda_c = \dfrac{3\times10^{10}}{4\times10^{9}} = 7.5(\text{cm}) = 2a$，

所以 $a = 3.75(\text{cm}), b = \dfrac{a}{2} = 1.875(\text{cm})$，$\lambda = \dfrac{3\times10^{10}}{5\times10^{9}} = 6(\text{cm})$ 由（5.1.24）式，在

宽壁中心 $x = \dfrac{a}{2}$ 处，$|E_y| = |E_0| = \dfrac{\omega\mu\, a}{\pi} H_0$

- 通过波导的平均功率为1kW时 $$P=\frac{ab}{4\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}\sqrt{1-(\frac{\lambda}{2a})^2}\left|E_0\right|^2 \qquad (5.1.28)$$
-

所以 $$\left|E_y\right|=\sqrt{\frac{4P\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{ab\sqrt{1-(\frac{\lambda}{2a})^2}}}=597.87\times10^2\,\mathrm{V/m} \qquad (5.1.24)$$

$$H_0=\frac{\pi}{\omega\mu a}\left|E_0\right|=\frac{\pi}{2\pi fa4\pi\times10^{-7}}=1.269\times10^2\,\mathrm{A/m}=\left|H_z\right|_{\max}$$

$$k_z=\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}=0.2\pi,\quad \left|H_x\right|_{\max}=\frac{k_z a}{\pi}H_0=95.2\,\mathrm{A/m}$$

b.在波导窄壁上，只有横向电流 $\left|J_y\right|=\left|H_0\right|=126.9\,\mathrm{A/m}$ (5.1.26)

在波导宽壁上，$\left|J_x\right|_{\max}=\left|H_0\right|=126.9\,\mathrm{A/m},\left|J_z\right|_{\max}=\frac{k_z a}{\pi}\left|H_0\right|=95.2\,\mathrm{A/m}$

(5.1.27)

5-7

空气同轴线内外导体的直径分别为d=32mm，D=75mm，求：

a. 该同轴线的特性阻抗。

b. 当它采用$\varepsilon_r = 2.25$的介质环支撑时，如D不变，则应为多少才能保证匹配？

c. 该同轴线中不产生高次模的最高工作频率。

解：a. 空气同轴线的特性阻抗 $Z_0 = \dfrac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln\dfrac{b}{a} = 60\ln\dfrac{75}{32} = 51.1\Omega$

b. 为了保证匹配，就要求介质环支撑段的特性阻抗保持不变。

即 $Z_0' = \dfrac{60}{\sqrt{2.25}} \ln\dfrac{75}{d'} = 51.1\Omega$，

所以 $d' = 20.9\text{mm}$

c. 在空气同轴线中，不产生高次模的最小工作波长为

$\lambda_{\min} \ge 1.1\pi(a+b) = 1.1\pi(\dfrac{32+75}{2}) = 184.9\text{mm}$所以 $f_{\max} = \dfrac{c}{\lambda_{\min}} = 1.62\text{GHz}$

在介质环支撑段 $\lambda_{\min} \ge 1.1\pi\dfrac{d'+D}{2} = 1.1\pi(\dfrac{20.9+75}{2}) = 165.7\text{mm}$

$$f_{\max} = \frac{c/\sqrt{\varepsilon_r}}{\lambda_{\min}} = \frac{3\times 10^{10}}{\sqrt{2.25}\times 16.57} = 1.21\text{GHz}$$ 所以取该频率能在整个同轴线中都不产生高次模。

5-8

- 设计一特性阻抗为 75Ω 的同轴线，要求它的最高工作频率为4.2GHz，求当分别以空气和的介质填充时同轴线的尺寸。
- 解：特性阻抗，$Z_0=\frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\frac{b}{a}$ 最高工作频率为4. 2GHz

$$\lambda_{\min}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}\,f_{\max}}=\frac{7.143}{\sqrt{\varepsilon_r}}(\mathrm{cm})\qquad a+b\le\frac{\lambda_{\min}}{1.1\pi}$$

- 当以空气填充时， $75=60\ln\frac{b}{a},a+b\le\frac{7.143}{1.1\pi}=2.07(\mathrm{cm})$
- 可联立解得 $a\le 0.46\mathrm{cm},b\le 1.61\mathrm{cm}$
- 当以的介质填充时， $\ln\frac{b}{a}=\frac{75}{60}\sqrt{2.25}=1.875,\lambda_{\min}=\frac{7.143}{\sqrt{2.25}}=4.76(\mathrm{cm})$

$$a+b\le\frac{\lambda_{\min}}{1.1\pi}\le 1.38(\mathrm{cm}),$$

- 可联立解得 $a\le 0.184\mathrm{cm},b\le 1.198\mathrm{cm}$

5-9

- 一空气同轴线内外径尺寸分别为d=3cm，D=7cm，当它的终端接的负载200Ω时，负载吸收的功率为1W，求：
- a. 为保证只传输TEM波的最高工作频率。
- b. 线上的驻波比和入射功率与反射功率。
- c.为使线上无反射，采用$\lambda/4$ 线进行匹配，如保持D不变，则 $\lambda/4$ 线的内径d为多少？匹配后负载吸收的功率为多少？
- 解：为保证同轴线中只传输TEM模，就必须抑制最低次波导模 TE_{11}模。
- A. $\lambda_{\min} \geq \dfrac{1.1\pi}{2}(D+d) = 17.279(\mathrm{cm}),\ f_{\max} = 1.74\mathrm{GHz}$

同轴线的特性阻抗 $Z_0 = \dfrac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln \dfrac{b}{a} = 60\ln 2.3 = 50\Omega$

- B. $|\Gamma| = \left|\dfrac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0}\right| = \dfrac{200-50}{200+50} = 0.6$ $\rho = \dfrac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = 4$
- 线上为行驻波状态，由式(4.3.17)(4.3.18) $P_l(s) = P^+\left[1-|\Gamma_l|^2\right] = 1(\mathrm{W})$

所以 $P^+ = \dfrac{1}{\left[1-|\Gamma_l|^2\right]} = 1.56(\mathrm{W}), P^- = P^+ - P_l(s) = 0.56(\mathrm{W})$

- C.为使线上无反射，采用$\lambda/4$线进行匹配，
- 它的特性阻抗 $Z_{01}=\sqrt{Z_l Z_0}=\sqrt{200\times 50}=100\Omega$
- 由 $100=60\ln\frac{7}{d'}, d'=1.32(\mathrm{cm})$

这样负载吸收全部入射功率 $P_l=1.56(\mathrm{W})$

- # 6-4

- 要求在厚度 $h=0.8\mathrm{mm}, t\to 0, \varepsilon_r=9$的基片上制作特性阻抗分别为
- 50Ω和 100Ω 的微带线，求它们的导带宽度W。
- 解：由判断参数

$$A=\frac{Z_0}{60}\sqrt{\frac{\varepsilon_r+1}{2}}+\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}(0.23+\frac{0.11}{\varepsilon_r})$$

- $$\begin{cases} Z_0=50\Omega, A=2.06 \\ Z_0=100\Omega, A=3.92 \end{cases} \qquad A>1.52 \quad \text{所以}$$

$$\frac{W}{h}=\frac{8}{e^{A}-2e^{-A}}, \begin{cases} Z_0=50\Omega, \frac{W}{h}=1.05, W=0.84\mathrm{mm} \\ Z_0=100\Omega, \frac{W}{h}=0.159, W=0.127\mathrm{mm} \end{cases}$$

6-5

- 已知微带线的参数为 $h=1\text{mm}, W=1\text{mm}, t\to 0, \varepsilon_r=9$，求：
- a. 它的最高工作频率。
- b. 当 $f=5\text{GHz}$ 微带中波的导波波长和相速度。
- 解：A. 为了避免TE和TM表面波和准TEM波之间的强耦合，
- 必须使工作频率低于 f_{TM} 和 f_{TE}，又因为 $f_{\text{TM}}<f_{\text{TE}}$，
- 所以只需要计算 $f_{\text{TM}}=\dfrac{c\sqrt{2}}{4h\sqrt{\varepsilon_r-1}}=37.5\text{GHz}$ 再看高次模的截止波长
- $$\begin{cases} \text{最低波导波型}\begin{cases}(\lambda_c)_{\text{TE}_{10}}=\sqrt{\varepsilon_r}(2W+0.8h)=8.4(\text{mm}) \\ (\lambda_c)_{\text{TM}_{01}}=2\sqrt{\varepsilon_r}h=6(\text{mm})\end{cases} \\ \text{表面波}\begin{cases}(\lambda_c)_{\text{TE}}=4h\sqrt{\varepsilon_r-1}=1.13(\text{cm}),\text{其相应的频率为}\dfrac{c}{(\lambda_c)_{\text{TE}}}=26.5\text{GHz} \\ (\lambda_c)_{\text{TM}}=\infty,\text{所以它总是存在}\end{cases}\end{cases}$$
  f=35.7GHz
- 它的最高工作频率为26.5GHz。

- B. $\varepsilon_e = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2}\left[(1+12\frac{h}{W})^{-\frac{1}{2}} + 0.04(1-\frac{W}{h})^2\right] = 6.11,$

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_e}}\ln(8\frac{h}{W} + \frac{W}{4h}) = 51.2\Omega$$

$$f_0 = \frac{0.95}{(\varepsilon_r - 1)^{\frac{1}{4}}}\sqrt{\frac{Z_0}{h}}(\mathrm{GHz}) = 4.03\mathrm{GHz}$$

在此频率以下，色散效应可基本不考虑。因为 $t \to 0$, 所以 $\Delta W = 0$, $W' = W$

$$\varepsilon_e' = 3\times10^{-6}(1+\varepsilon_r)(\varepsilon_r - 1)h\left[Z_0\frac{W'}{h}\right]^{\frac{1}{2}}(f - f_0) + \varepsilon_e = 6.2$$

$$\lambda_0 = \frac{3\times10^{10}}{5\times10^9} = 6(\mathrm{cm}) \qquad \lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_e'}} = \frac{6}{\sqrt{6.2}} = 2.41(\mathrm{cm})$$

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_e'}} = 1.2\times10^{10}(\mathrm{cm/s})$$

6-6

已知由铜导体构成的微带线，$W/h=1,\ t/h=0.02$，

$\varepsilon_r=9.6, \tan\delta=2\times10^{-4}$，工作频率 $f=10\text{GHz}$，

求微带线的介质衰减 α_d 和导体衰减 α_c。

- 解：因为 $\dfrac{W}{h}=1\geq\dfrac{1}{2\pi}=0.159$
- 所以 $\dfrac{\Delta W}{h}=\dfrac{1.25}{\pi}\dfrac{t}{h}(1+\ln\dfrac{2h}{t})=0.0446, \dfrac{W_e}{h}=\dfrac{W}{h}+\dfrac{\Delta W}{h}=1.0446$

$$\varepsilon_e=\frac{\varepsilon_r+1}{2}+\frac{\varepsilon_r-1}{2}(1+10\frac{h}{W})^{-\frac{1}{2}}-\frac{\varepsilon_r-1}{4.6}\frac{t/h}{\sqrt{W/h}}=6.56,$$

$$Z_0=\frac{120\pi/\sqrt{\varepsilon_e}}{\dfrac{W_e}{h}+1.393+0.667\ln(\dfrac{W_e}{h}+1.444)}=48.16\Omega$$

- 查图6. 4. 5, 得 $\dfrac{\alpha_c' Z_0 h}{R_s}=4\text{dB}$, 铜的$R_s=2.6\times10^{-7}\sqrt{f}\,(\Omega/\text{cm}^2)$

$$\alpha_c'=\frac{4\times2.6\times10^{-7}\sqrt{10\times10^9}}{50h}=0.002/h(\text{dB/cm})$$

$$\lambda_g = \frac{\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_e}}}{f} = \frac{3\times10^{10}}{10\times10^{9}\times2.57} = 1.17(\text{cm}),$$

$$\alpha_\text{d}' = 27.3\frac{\varepsilon_e - 1}{\varepsilon_r - 1}\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e}\frac{\tan\delta}{\lambda_\text{g}}(\text{dB/cm})$$

$$= 27.3\frac{5.6\times9.6\times2\times10^{-4}}{8.6\times6.6\times1.17}(\text{dB/cm}) = 0.0044(\text{dB/cm})$$

- 8-1

有一矩形谐振腔，它沿方向的尺寸分别为a,b,l，试求在(1) $a>b>l$；(2) $a>l>b$；(3) $a=b=l$三种情形下腔的主模和它们的谐振频率。

解：矩形谐振腔的谐振波长为 $\lambda_0 = \dfrac{2}{\sqrt{\left(\dfrac{m}{a}\right)^2+\left(\dfrac{n}{b}\right)^2+\left(\dfrac{p}{l}\right)^2}}$

对于 TE_{mnp} 模：m, n中只能一个为零，p不能为零。

对于 TM_{mnp} 模：m, n都不能为零，p可为零。

- （1）TM_{110} 模为主模，$\lambda_0 = \dfrac{2}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{b}\right)^2}} = \dfrac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- 谐振频率 $f_0 = \dfrac{c}{\lambda_0} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2ab\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$
- （2） TE_{101} 模为主模，$\lambda_0 = \dfrac{2}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{l}\right)^2}} = \dfrac{2al}{\sqrt{a^2 + l^2}}$
- 谐振频率

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{\sqrt{a^2 + l^2}}{2al\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

- （3）TE_{101} TE_{011} TM_{110} 模为主模，$\lambda_0 = \dfrac{2}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{a}\right)^2}} = \sqrt{2}\,a$
- 它们互为简并
- 谐振频率 $f_0 = \dfrac{c}{\lambda_0} = \dfrac{1}{\sqrt{2}a\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

8-2

- 有一矩形谐振腔（ $b = a/2$），已知当 $f = 3\text{GHz}$ 时它谐振于 TE_{101} 模；当
- $f = 6\text{GHz}$ 时它谐振于 TE_{103} 模，求此谐振腔的尺寸。
- 解：f=3GHz相应于 $\lambda_1 = \dfrac{3\times10^{10}}{3\times10^9} = 10(\text{cm})$，
- f=6GHz相应于 $\lambda_2 = \dfrac{3\times10^{10}}{6\times10^9} = 5(\text{cm})$

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{(\frac{\text{m}}{a})^2 + (\frac{\text{n}}{b})^2 + (\frac{\text{p}}{d})^2}}, \begin{cases} \lambda_{0(\text{TE}_{101})} = \dfrac{2}{\sqrt{(\frac{1}{a})^2 + (\frac{1}{d})^2}} = 10(\text{cm}) \\ \lambda_{0(\text{TE}_{103})} = \dfrac{2}{\sqrt{(\frac{1}{a})^2 + (\frac{3}{d})^2}} = 5(\text{cm}) \end{cases}$$

- 联立解得 $a = 6.32(\text{cm}), d = 8.15(\text{cm}), b = \dfrac{a}{2} = 3.16(\text{cm})$

8-3

- 一空气填充的矩形谐振腔尺寸为 $3\times1.5\times4\text{cm}^3$，求：
- a. 当它工作于TE_{101}模时的谐振频率。
- b. 如腔中最大电场强度幅值 $E_m = 10^3(\text{V/m})$，求腔中储存的总能量。
- c. 若在腔中全填充某种介质后，在同一工作频率上它谐振于TE_{102} 模，则该介质的相对介电常数为多少？
- 解：a. $$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{(\frac{\text{m}}{a})^2+(\frac{\text{n}}{b})^2+(\frac{\text{p}}{d})^2}} = \frac{2}{\sqrt{(\frac{1}{a})^2+(\frac{1}{d})^2}}$$

$$= 4.8(\text{cm}),\ f_0 = \frac{3\times10^{10}}{4.8} = 6.25\text{GHz}$$

- b.因谐振腔中电场只有$E_y = E_0\sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{d}z$，当在 $x=\frac{a}{2}$， $z=\frac{d}{2}$ 处，
- $$E_y = E_0 = E_{\max} = 10^3(\text{V/m})$$
- $$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint E_y^2\text{d}V \overset{,}{=} \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^a\text{d}x\int_0^b\text{d}y\int_0^d\text{d}z\left[E_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi z}{d}\right]^2$$
- 腔中总能量

$$= \frac{\varepsilon_0E_0^2abd}{8} = 19.9\times10^{-12}(\text{J})$$

- C.

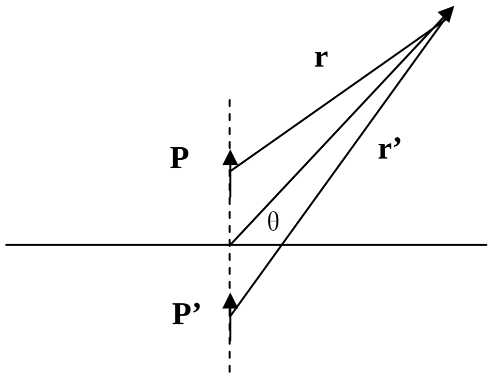
$$f_0=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}\,\lambda_0},\quad \sqrt{\varepsilon_r}=\frac{c}{\lambda_0 f_0}=4.8\frac{\sqrt{(\frac{1}{a})^2+(\frac{2}{d})^2}}{2}=1.44,\quad \varepsilon_r=2.08$$

- # 9-1
- 试证明一个均匀带电的球壳在作径向振动时将不会辐射。
- 解：一个均匀带电的球壳，所产生的电场是相当于电荷位于球心的静电场，作径向振动时也不改变。
- 因为电流的对球心的对称分布，矢量势

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(x',y',z',t-\frac{r}{c})}{r}\mathrm{d}\tau'=\frac{\mu_0}{4\pi r}\int\boldsymbol{j}^{ret}\mathrm{d}\tau'=0,\text{所以}\boldsymbol{B}=0$$

- # 9-3
- 一电偶极子的电偶极矩为P，以频率ω 振荡。它被垂直地放置于离一个无限大理想导体平面距离为$\lambda/2$处，这里λ是和频率ω相应的波长。设此电偶极子的尺度远较λ为小，并指向正z方向。试求其辐射场，辐射功率分布，及辐射总功率。
- 解：由电象法可知，这偶极子的电象为指向正z方向的偶极子，如图取近似

$$\begin{cases} \theta \approx \theta' \approx \theta_0, \\ \text{在相位中} \begin{cases} r = r_0 - \dfrac{\lambda}{2}\cos\theta_0 \\ r' = r_0 + \dfrac{\lambda}{2}\cos\theta_0 \end{cases} \\ \text{在分母中} r \approx r_0 \approx r' \end{cases}$$



- 由单个偶极子的辐射场 $\boldsymbol{E} = \dfrac{\ddot{P}^{ret}\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\boldsymbol{e}_\theta = -\dfrac{\mu_0 P\omega^2 \sin\theta\cos\omega(t-\frac{r}{c})}{4\pi r}\boldsymbol{e}_\theta$

$$\boldsymbol{P} = P\cos\omega t\, \boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{E}_{total} = -\boldsymbol{e}_\theta \frac{\mu_0 P\omega^2 \sin\theta_0}{4\pi r_0}\left\{\cos\left[\omega t - \frac{\omega}{c}(r_0 - \frac{\lambda}{2}\cos\theta_0)\right]\right.$$

$$\left.+\cos\left[\omega t - \frac{\omega}{c}(r_0 + \frac{\lambda}{2}\cos\theta_0)\right]\right\}$$

$$= -\boldsymbol{e}_\theta \frac{\mu_0 P\omega^2 \sin\theta_0}{4\pi r_0} 2\cos(\omega t - \frac{\omega}{c} r_0)\cos(\frac{\omega\lambda}{2c}\cos\theta_0)$$

$$= -\boldsymbol{e}_\theta \frac{\mu_0 P\omega^2 \sin\theta_0}{2\pi r_0} \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} r_0)\cos(\pi\cos\theta_0)$$

$$\mathrm{B}_{total} = -\mathrm{e}_{\varphi}\frac{\mu_0 P\omega^2 \sin\theta_0}{2\pi r_0 c}\cos(\omega t - \frac{\omega}{c}r_0)\cos(\pi\cos\theta_0)$$

$$\mathrm{g} = \mathrm{E}\times\mathrm{H} = \mathrm{e}_{\mathrm{r}}\frac{\mu_0 P^2\omega^4 \sin^2\theta_0}{4\pi^2 r_0^2 c}\cos^2(\omega t - \frac{\omega}{c}r_0)\cos^2(\pi\cos\theta_0)$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{g}\bullet\mathrm{d}\,\mathrm{s}}{\frac{\mathrm{d}s}{r_0^2}} = \frac{\mu_0 P^2\omega^4 \sin^2\theta_0}{4\pi^2 c}\cos^2(\pi\cos\theta_0)\cos^2(\omega\, t - \frac{\omega\, r_0}{c})$$

$$P = \int \mathrm{g}\bullet\mathrm{d}\,\mathrm{s} = \frac{\mu_0 P^2\omega^4}{2\pi c}\cos^2(\omega\, t - \frac{\omega\, r_0}{c})\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta_0\cos^2(\pi\cos\theta_0)\mathrm{d}\theta_0$$

$$= (\frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi^2})\frac{\mu_0 P^2\omega^4}{2\pi c}\cos^2(\omega\, t - \frac{\omega\, r_0}{c})$$

9-4

- 在一长度为$2\pi a$的圆形导线中，通一电流$i = I_0\cos\omega t$ 计算辐射场，辐射功率
- 角分布和辐射总功率。假定$\lambda >> a$.。
- 解：

$$i = I_0\cos\omega t, \boldsymbol{M} = i\boldsymbol{s} = I_0\cos\omega t\pi a^2 \boldsymbol{e_z}$$

$$\ddot{\boldsymbol{M}}^{ret} = -I_0\pi a^2\omega^2(\cos\theta\boldsymbol{e_r} - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)\cos\omega(t - \frac{r}{c})$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\mu_0\, \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{M}}^{\boldsymbol{ret}}}{4\pi c r^2} = \frac{\mu_0 I_0 a^2 \omega^2 \sin\theta \cos\omega(t - \frac{r}{c})}{4cr} \boldsymbol{e}_\varphi \,,$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c} \boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{E} = -\frac{\mu_0 I_0 a^2 \omega^2 \sin\theta \cos\omega(t - \frac{r}{c})}{4c^2 r} \boldsymbol{e}_\theta \,,$$

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I_0^2 a^4 \omega^4 \sin^2\theta \cos^2\omega(t - \frac{r}{c})}{16 c^3 r^2} \boldsymbol{e}_r \,,$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mu_0 I_0^2 a^4 \omega^4 \sin^2\theta \cos^2\omega(t - \frac{r}{c})}{16 c^3} \,,$$

$$P = \int \mathrm{d}P = \frac{\mu_0 I_0^2 a^4 \omega^4 \cos^2\omega(t - \frac{r}{c})}{16 c^3} \int \sin^3\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$$

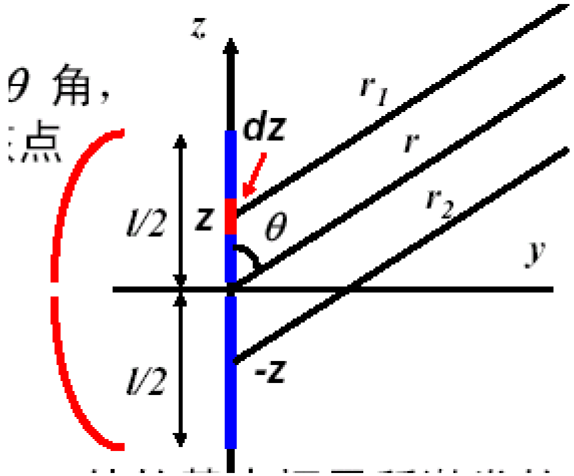
$$= \frac{\mu_0 \pi I_0^2 a^4 \omega^4 \cos^2\omega(t - \frac{r}{c})}{6 c^3}$$

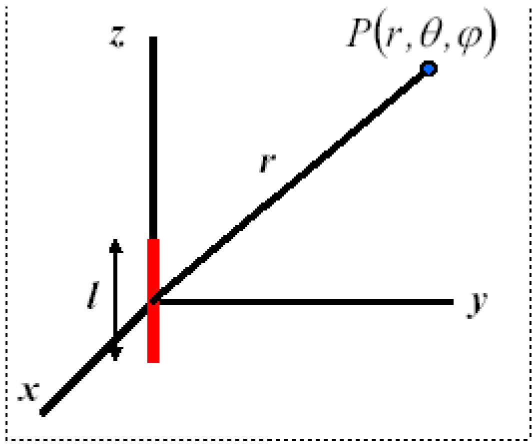
9-5

- 一长为$N\lambda/2$的细的线天线（λ为波长）。计算辐射场，单位立体角辐射功率和辐射总功率。
- 解： $I = I_m e^{j\omega t}$ $\qquad r = r_0 - \frac{\lambda}{2}\cos\theta_0$

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi}\int_{-N\lambda/4}^{N\lambda/4} \frac{I_m e^{j\omega(t-\frac{R}{v})}}{R} dl' = \frac{\mu I_m e^{j\omega t}}{4\pi}\int_{-N\lambda/4}^{N\lambda/4} \frac{e^{-jk(r-Z\cos\theta)}}{R} dz$$

$$= \frac{\mu I_m e^{-jkr}\sin(\frac{N\pi}{2}\cos\theta)}{2\pi kr\cos\theta}$$





$$E_\theta = j\omega\mu \sin\theta \cdot A_z$$

$$H_\phi = \frac{1}{\eta} E_\theta$$

$$\mathrm{g}_r = \mathrm{E}_\theta \times \mathrm{H}_\phi$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{g} \bullet \mathrm{d\,s}}{\frac{\mathrm{d}s}{r_0^2}}$$

$$P = \int \mathrm{g} \bullet \mathrm{d\,s}$$