1.设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,求证$\nabla^2 f(r)=f''(r)+2\frac{f'(r)}{r}$

证法一

在球坐标系中，有

$$\nabla^2 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

当$u=f(r)$时，上式第二项第三项为0

$$\nabla^2 f(r)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right)=\frac{1}{r^2}\left(2r\frac{df(r)}{dr}+r^2\frac{d^2 f(r)}{dr^2}\right)$$

$$=f''(r)+2\frac{f'(r)}{r}$$

得证

证法二

$$\nabla^2 f(r)=\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x}=\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=f'(r)\frac{x}{r}=\frac{f'(r)}{r}x$$

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f'(r)}{r}x\right)=\frac{d}{dr}\frac{f'(r)}{r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{f'(r)}{r}=x\frac{rf''(r)-f'(r)}{r^2}\frac{x}{r}+\frac{f'(r)}{r}$$

$$=\frac{x^2(rf''(r)-f'(r))}{r^3}+\frac{f'(r)}{r}$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2}=\frac{y^2(rf''(r)-f'(r))}{r^3}+\frac{f'(r)}{r}$$

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2}=\frac{z^2(rf''(r)-f'(r))}{r^3}+\frac{f'(r)}{r}$$

所以

$$\nabla^2 f(r)=\frac{r^2(rf''(r)-f'(r))}{r^3}+\frac{3f'(r)}{r}=f''(r)+2\frac{f'(r)}{r}$$

得证

2.如果$\nabla^2 f(r)$=0,试确定$f(r)$

（注意，r是柱坐标中的r，所以满足$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，因此满足$\nabla^2 f(r)=f''(r)+2\frac{f'(r)}{r}$）

解法一

$$\nabla^2 f(r)=f''(r)+2\frac{f'(r)}{r}=0$$

$$rf''(r)+2f'(r)=0$$

方程两边同时积分

$$\int rdf'(r)+2f(r)=C_1$$

$$rf'(r)-\int f'(r)dr+2f(r)=C_1$$

$$rf'(r)+f(r)=C_1$$

两边再积分

$$\int r d f(r) + \int f(r) dr = C_1 r + C_2$$

$$r f(r) - \int f(r) dr + \int f(r) dr = C_1 r + C_2$$

$$r f(r) = C_1 r + C_2$$

$$f(r) = C_1 + \frac{C_2}{r}$$

解法二

令

$$g(r) = f'(r)$$

则

$$\nabla^2 f(r) = f''(r) + 2\frac{f'(r)}{r} = g'(r) + 2\frac{g(r)}{r} = 0$$

$$\frac{dg}{dr} + 2\frac{g}{r} = 0$$

$$\frac{1}{g} dg = \frac{-2}{r} dr$$

两边同时积分

$$\ln g = -2\ln(r) + C_1$$

$$g=\frac{C_2}{r^2}=f'(r)$$

所以

$$f(r)=\frac{C_3}{r}+C_4$$

解法三

令

$$r=e^t,t=\ln(r)$$

$$f'(r)=\frac{f'(t)}{r}$$

$$f''(r)=\frac{\frac{f''(t)}{r}r-f'(t)}{r^2}$$

$$rf''(r)+2f'(r)=\frac{f''(t)}{r}+\frac{f'(t)}{r}=0$$

$$f''(t)+f'(t)=0$$

上式的通解为

$$f(t)=C_1+C_2e^{-t}$$

将$t=\ln(r)$代入得

$$f(r)=C_1+\frac{C_2}{r}$$

3. 如 a 为常数矢量，求证

$$\nabla\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)=a,\quad \nabla\cdot\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)=0,\quad \nabla\times\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)=2\vec{a}$$

这里主要说一说 $\nabla(\vec{a}\cdot\vec{r})=\vec{a}$
矢量点乘结果为标量，标量场的梯度为矢量，显然，题目中的a应该是矢量而不是标量，应该是伍老师出题的时候不小心写错了。
有同学不理解 $\vec{r}$是什么，可能会和球坐标的r基矢联系起来。实际上我们应该认为 $\vec{r}=(x,y,z)$， $\vec{r}$代表的是一个矢量场，而不是一个单纯的矢量（梯度算符是作用在标量场的，而不是某个标量，所以$\vec{r}$ 代表的是一个矢量场，它在空间(x0, y0, z0)处的矢量为(x0, y0, z0)）

$$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{r})=\nabla\left(a_x x+a_y y+a_z z\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\left(a_x x+a_y y+a_z\right)=\vec{a}$$

2020届新题：若各向同性的介质介电常数$\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$与位置有关，试证明E和B所满足的波动方程为（设$\mu=\mu_0\mu_r$）

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}+\frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{B}+\frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\varepsilon_r(\nabla\times\vec{B})\times\nabla\frac{1}{\varepsilon_r}$$

各向同性介质含义是介质性质（介电常数和磁导率）与电场或磁场方向无关，均匀介质则是指介质性质与位置无关，这里是各向同性的非均匀材料。

第一个式子的证明与书上式3.1.1到式3.1.2的推导类似：

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} & ① \\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_f+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} & ② \\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_f & ③ \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 & ④\end{cases}$$

①式两端同时取旋度，得到：

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\frac{\partial(\nabla\times\boldsymbol{B})}{\partial t}$$

在介质中可以认为自由电流密度$\boldsymbol{j}_f=\boldsymbol{0}$，一般情况下，除非特殊说明，可以认为$\mu_r=1$

$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\frac{\partial(\nabla\times\mu_r\mu_0\boldsymbol{H})}{\partial t}$ = -$\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{D}}{\partial t^2}$ = -$\frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ 其中$c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$

第一式得证

对于第二式，②式两端同时取旋度，得到：

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \frac{\partial(\nabla \times \boldsymbol{D})}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \mu_0 \frac{\partial(\nabla \times (\varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E}))}{\partial t}$$

ε_r与位置有关，是(x, y, z)的函数，所以在旋度运算中不能当成常数直接提出来

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial(\nabla \times (\varepsilon_r \boldsymbol{E}))}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times (\varepsilon_r \boldsymbol{E}))$$

- 常用公式

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$

$$\nabla\cdot(\phi\vec{A}) = \vec{A}\cdot\nabla\phi + \phi\nabla\cdot\vec{A}$$

$$\boxed{\nabla\times(\phi\vec{A}) = \nabla\phi\times\vec{A} + \phi\nabla\times\vec{A}}$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$

按照课件中的常用公式展开：

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_r(\nabla \times \boldsymbol{E}) + (\nabla\varepsilon_r) \times \boldsymbol{E})$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} + \frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}((\nabla\varepsilon_r) \times \boldsymbol{E})$$

$$= \frac{1}{c^2}((\nabla\varepsilon_r) \times \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\left((\nabla\varepsilon_r) \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\right) = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0 c^2}\left((\nabla\varepsilon_r) \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla \times \boldsymbol{B})\right)\right) = (\nabla\varepsilon_r) \times (\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla \times \boldsymbol{B}))$$

由于 $\nabla\frac{1}{\varepsilon_r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\frac{1}{\varepsilon_r} = \frac{1}{-\varepsilon_r^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\varepsilon_r = \frac{1}{-\varepsilon_r^2}\nabla\varepsilon_r$

所以

$(\nabla\varepsilon_r) \times (\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla \times \boldsymbol{B})) = -\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times (\nabla\varepsilon_r) = \varepsilon_r(\nabla \times \vec{B}) \times \nabla\frac{1}{\varepsilon_r}$ 第二式得证

3.证明麦克斯韦方程组为非线性独立方程组

证法一
麦克斯韦方程组

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} & ① \\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_f+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} & ② \\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_f & ③ \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 & ④\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{j}_f=\boldsymbol{E}\sigma\end{cases}$$

当介质为各向同性的线性媒质时，ε,μ为常数，当介质各向异性的线性媒质时，ε,μ为已知的张量，当介质非线性时，ε,μ是**E,H**的函数；旋度和散度运算的本质是对向量的线性运算，因此麦克斯韦方程组是关于**E,H**的线性方程组，方程中只有两个自变量**E,H**，一个未知标量ρ_f，却有四个方程，因此该方程组是非线性独立的。特别地，当无源时$\rho_f=0$，方程组仅有两个方程是线性独立的。

证法二

对①两边同时取散度

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\frac{\partial\nabla\cdot\boldsymbol{B}}{\partial t}=0$$

可见④的解是①的解的子集，因此④和①不独立

对②两边同时取散度

$$\nabla\cdot\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\nabla\cdot\boldsymbol{j}_f+\frac{\partial\nabla\cdot\boldsymbol{D}}{\partial t}=0$$

且由电荷守恒

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}_f=-\frac{\partial\rho_f}{\partial t}$$

于是

$$\frac{\partial(\nabla\cdot\boldsymbol{D}-\rho_f)}{\partial t}=0$$

可见③的解是②的解的子集，因此③和②不独立

4.判断场分布是不是电磁波那个题目思路：

电磁波在传播时，$\rho_f = 0$，麦克斯韦方程组仅有两个方程是线性独立的，因此场分布只需要满足两个方程即可。对于电场，只要满足

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} \neq 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \end{cases}$$

就是电磁波，不满足就不是电磁波，因此$\boldsymbol{E}_1$是电磁波，$\boldsymbol{E}_2$ $\boldsymbol{E}_3$不是。