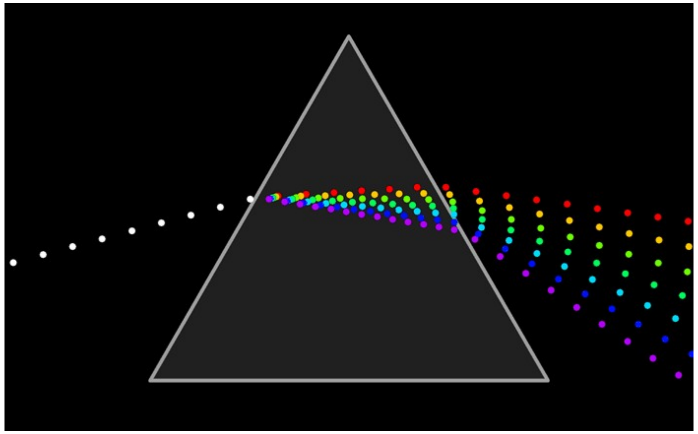
第三章　电磁波的传播

3.1　电磁波在介质中的传播

- 电磁场在各向同性的线性介质中传播时，一般存在色散现象。
- 复杂电磁波可以利用傅立叶级数展开成单色（单频）波的叠加。
- 无界空间的单色波是最简单的形式。



了解电磁波的性质，可首先研究在不存在电荷与电流的（无源区域）空间电磁场的运动形式（ $\rho=0,\ \boldsymbol{j}=0$ ）

介质中的麦克斯韦方程组　→

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\ \nabla \bullet \boldsymbol{E} = 0 \\ \nabla \bullet \boldsymbol{B} = 0 \end{cases}$$

$$\nabla \bullet \boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \Rightarrow \nabla(\nabla \bullet \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B})$$

Maxwell Eq 2,3 ⇒

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0$$

电磁场波动方程

介质中的波速：

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \Rightarrow \nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{\boldsymbol{v}^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \boldsymbol{B} - \frac{1}{\boldsymbol{v}^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0$$

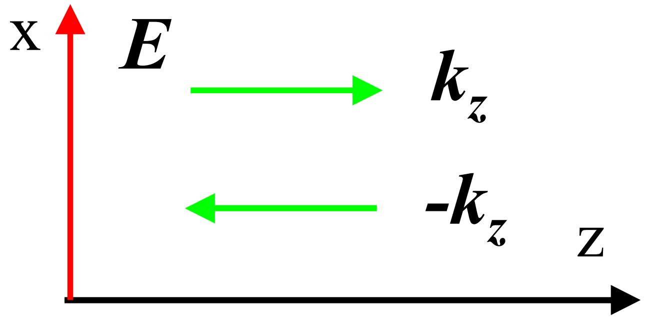
真空中的电磁波波速为：

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

特例：沿z方向传播的单色平面波解：

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e_x} E_x(z)\cos\omega t \qquad \dot{\boldsymbol{E}} e^{j\omega t} = \boldsymbol{e_x} \dot{E}_x(z) e^{j\omega t}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\dot{E}_x(z) + \omega^2 \varepsilon\mu \dot{E}_x(z) = 0$$



波矢量： $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, $\quad \dfrac{d^2}{dz^2}\dot{E}_x(z) + k^2 \dot{E}_x(z) = 0$ 一维波动方程

方程解：

$$\dot{E}_x(z) = A_1 e^{-jkz} + A_2 e^{+jkz}$$

$$E^+{}_x(z) = \mathrm{Re}\left(E^+{}_{xm} e^{-jkz} e^{j\omega t}\right) = E^+{}_{xm}\cos(\omega t - kz)$$

或：

$$E^-{}_x(z) = \mathrm{Re}\left(E_{xm} e^{+jkz} e^{j\omega t}\right) = E^-{}_{xm}\cos(\omega t + kz)$$

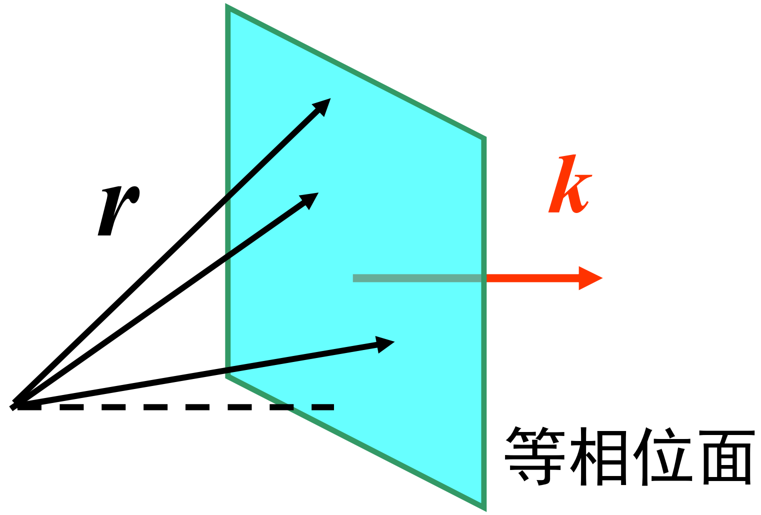
一般单色平面波解：

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t - \boldsymbol{k} \bullet \boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 \cos(\omega t - \boldsymbol{k} \bullet \boldsymbol{r}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}_0 \exp[j(\omega t - \boldsymbol{k} \bullet \boldsymbol{r})] \\ \dot{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}_0 \exp[j(\omega t - \boldsymbol{k} \bullet \boldsymbol{r})] \end{cases}$$

复数形式

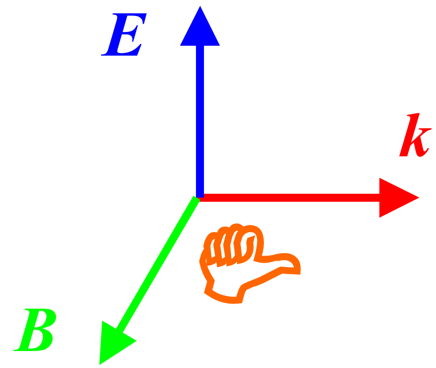
波矢量 $$|\boldsymbol{k}| = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

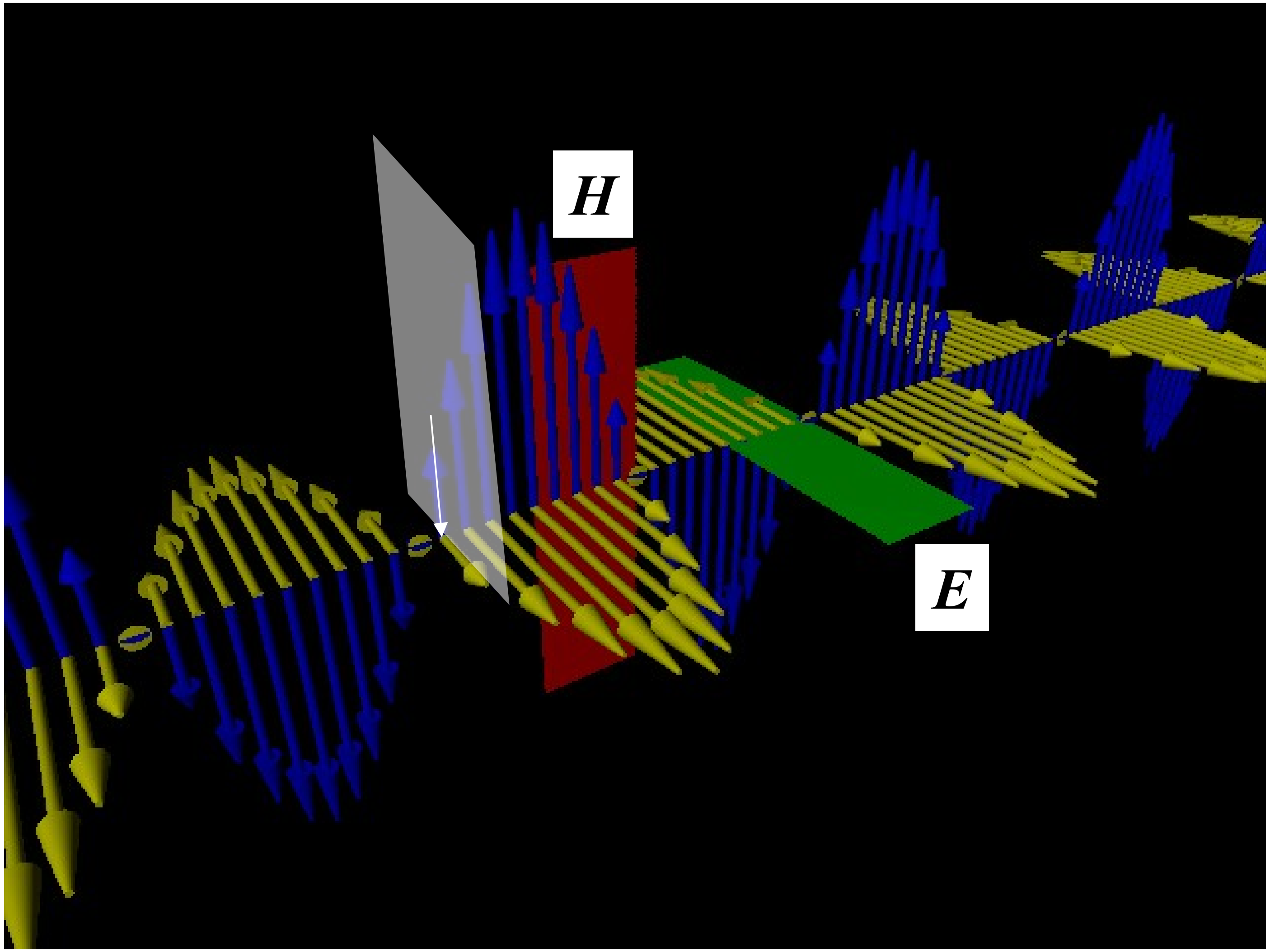


等相位面为平面：与$\boldsymbol{k}$ 垂直的平面

将单色平面波解代入麦氏方程

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{k} = -\omega \boldsymbol{B}_0 \text{ 或 } \boldsymbol{B}_0 = \dfrac{1}{v}\dfrac{\boldsymbol{k}}{k} \times \boldsymbol{E}_0 \\ \boldsymbol{B}_0 \times \boldsymbol{k} = \dfrac{1}{v^2}\omega \boldsymbol{E}_0 \\ \boldsymbol{k} \bullet \boldsymbol{E}_0 = 0 \\ \boldsymbol{k} \bullet \boldsymbol{B}_0 = 0 \end{cases}$$




H
E

- 介质中传播的电磁波为横波。
- 电场和磁场都与传播方向垂直，**E, B** 同相位。

振幅：

$$\left|\frac{\boldsymbol{E}_0}{\boldsymbol{B}_0}\right| = v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

无限大介质的波阻抗：

$$\left|\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{H}}\right| = \frac{\mu E_0}{B_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta$$

真空中：

$$\left|\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{B}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c$$

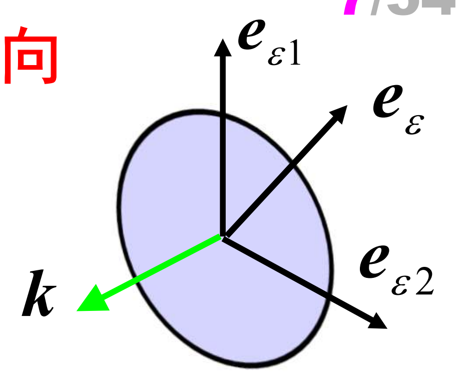
真空中的波阻抗：

$$\left|\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{H}}\right| = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \eta_0$$

$$= 120\pi = 377\Omega$$

介质只改变电场和磁场强度的比值，不改变电磁波的基本性质

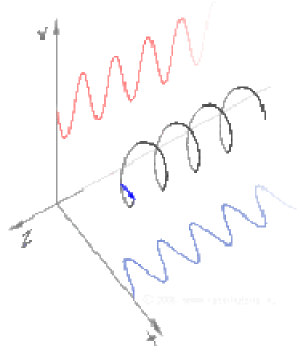
电磁波的极化（偏振）：电场振荡的方向→极化方向



电磁波按其极化性质可分为三类：

(1) 线极化波： $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_{\varepsilon}E_0 exp[j(\omega t-\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{r})]$

(2) 圆极化波： $\boldsymbol{E}=E_0 cos(\omega t\text{-}k\bullet r)\boldsymbol{e}_{\varepsilon 1}+E_0 sin(\omega t\text{-}k\bullet r)\boldsymbol{e}_{\varepsilon 2}$

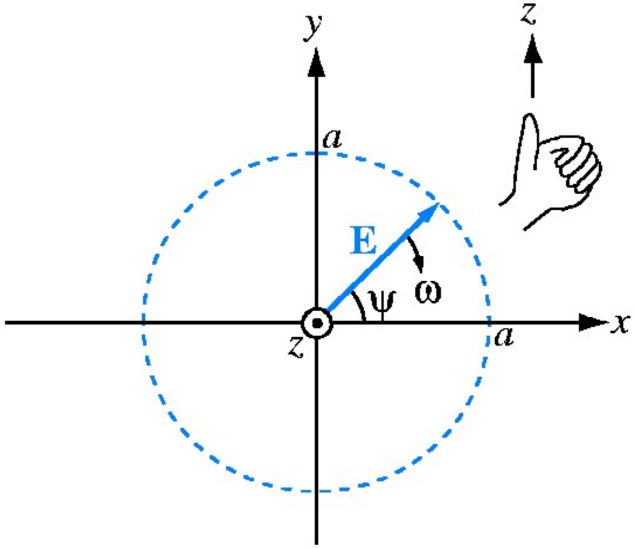


式中两偏振单位矢量 $\boldsymbol{e}_{\varepsilon 1}$ 和 $\boldsymbol{e}_{\varepsilon 2}$ 互相垂直。

(3) 椭圆极化波： $\boldsymbol{E}=A cos(\omega t-\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_{\varepsilon 1}+B sin(\omega t-\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_{\varepsilon 2}$

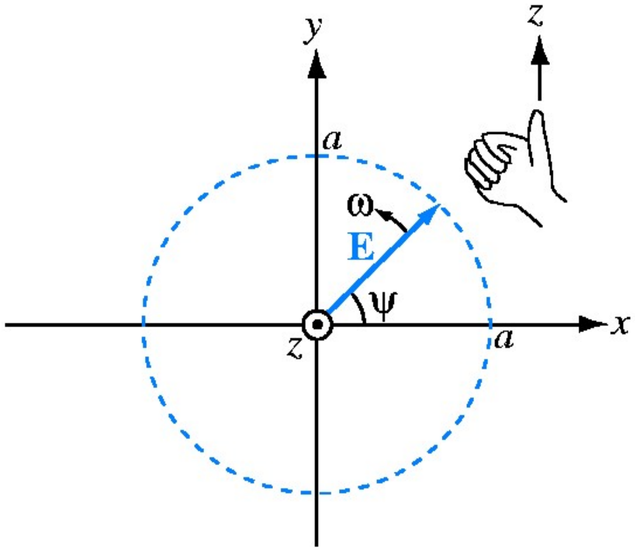
其两个分量为 $\boldsymbol{E}_1=A cos(\omega t\text{-}\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_{\varepsilon 1}$ 和 $\boldsymbol{E}_2=B sin(\omega t\text{-}\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_{\varepsilon 2}$

端点的时间轨迹为椭圆： $\dfrac{E_1^2}{A^2}+\dfrac{E_2^2}{B^2}=1$



左旋圆极化波

(a) LHC polarization

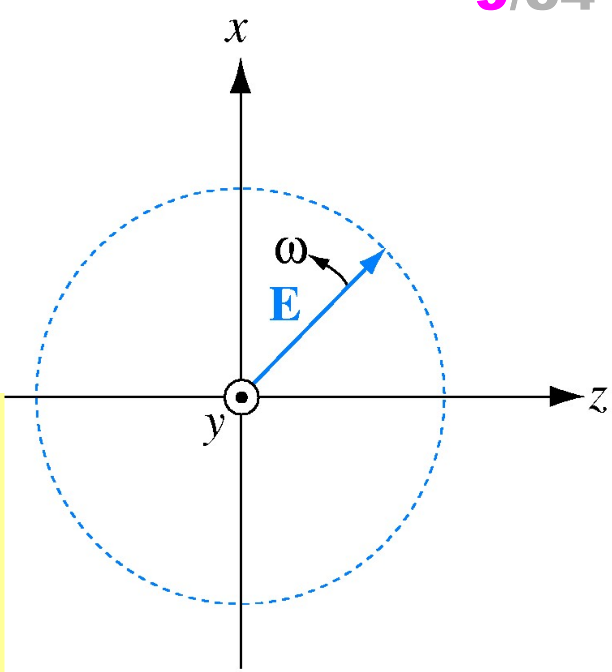


右旋圆极化波

(b) RHC polarization

右旋圆极化波的电场强度为3mV/m，沿+y方向在$\varepsilon=4\varepsilon_0$，$\mu=\mu_0$的介质里传播，如果频率为100MHz，求$\boldsymbol{E}(y,t)$，$\boldsymbol{H}(y,t)$。

相位滞后90度



ure 7-10

$$\dot{\boldsymbol{E}}(y)=\hat{\boldsymbol{x}}\dot{E}_x+\hat{\boldsymbol{z}}\dot{E}_z$$

$$=\hat{\boldsymbol{x}}ae^{-j\pi/2}e^{-jky}+\hat{\boldsymbol{z}}ae^{-jky}=(-j\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{z}})3e^{-jky}$$

$$\dot{\boldsymbol{H}}(y)=\frac{1}{\eta}\hat{\boldsymbol{y}}\times\dot{\boldsymbol{E}}(y)=\frac{1}{\eta}\hat{\boldsymbol{y}}\times(-j\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{z}})3e^{-jky}=\frac{3}{\eta}(\hat{\boldsymbol{z}}j+\hat{\boldsymbol{x}})e^{-jky}$$

$$\omega=2\pi f=2\pi\times10^8\quad(rad/s)$$

$$k=\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_r}}{c}=\frac{4}{3}\pi\qquad\eta=\frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}=\frac{120\pi}{\sqrt{4}}=60\pi$$

$$\boldsymbol{e}(y,t)=\mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{E}}(y)e^{j\omega t}\right]=3[\hat{\boldsymbol{x}}\sin(\omega t-ky)+\hat{\boldsymbol{z}}\cos(\omega t-ky)]\quad(\mathrm{mV/m})$$

$$\boldsymbol{h}(y,t)=\mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{H}}(y)e^{j\omega t}\right]=\frac{1}{20\pi}[\hat{\boldsymbol{x}}\cos(\omega t-ky)-\hat{\boldsymbol{z}}\sin(\omega t-ky)]\quad(\mathrm{mA/m})$$

例　对平面电磁波，试证明存在如下关系：

（1）　能量密度u 与能流密度g 之间满足：$\boldsymbol{g} = uv\dfrac{\boldsymbol{k}}{k}$ 。式中，$v=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ k为波矢量。

（2）　麦克斯韦应力张量$\overset{\leftrightarrow}{\Phi}$ 与场动量密度G 之间满足：$\overset{\leftrightarrow}{\Phi} = -\boldsymbol{G}v\dfrac{\boldsymbol{k}}{k}$ 。

解：（1）$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ ，对于平面电磁波，$\boldsymbol{B}=\sqrt{\mu\varepsilon}\dfrac{\boldsymbol{k}}{k}\times\boldsymbol{E}=\mu\boldsymbol{H}$ ，代入展开，得到，

$$g=\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{\mu}E^2\frac{\boldsymbol{k}}{k}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\frac{\boldsymbol{k}}{k}=\varepsilon v E^2\frac{\boldsymbol{k}}{k}$$

而 $u=\dfrac{1}{2}(\varepsilon E^2+\dfrac{B^2}{\mu})=\dfrac{1}{2}(\varepsilon E^2+\varepsilon\ v^2B^2)=\varepsilon E^2$ ，于是将它代入上式就可得证。

（2）$\overset{\leftrightarrow}{\Phi}=\boldsymbol{DE}+\boldsymbol{HB}-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{D}\bullet\boldsymbol{E}+\boldsymbol{H}\bullet\boldsymbol{B})\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{S}}$ ，为简化数学运算，且不失其一般性，

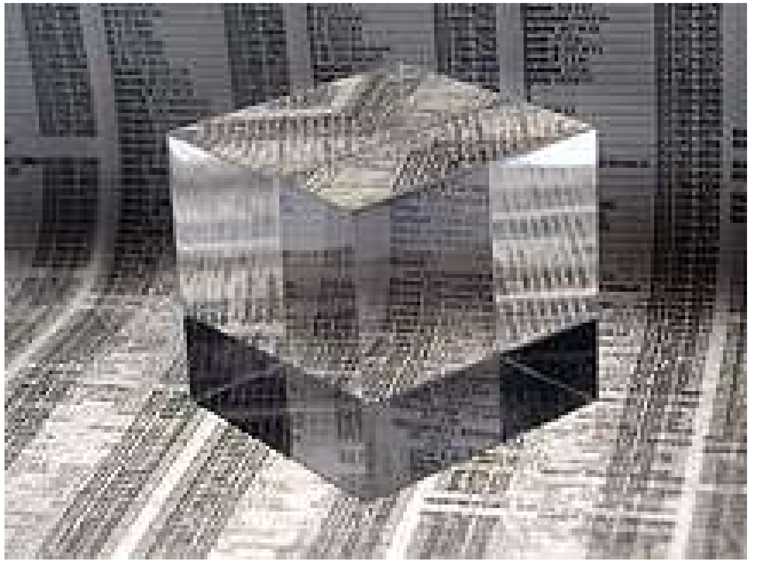
可以这样取坐标：$\boldsymbol{E}=E\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{e}_y$，再设介质是线性的，那么，就有关系

$$\overset{\leftrightarrow}{\Phi}=\varepsilon E^2\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x+\frac{1}{\mu}B^2\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y-\frac{1}{2}(\varepsilon E^2+\frac{1}{\mu}B^2)(\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z)$$

$$=-\varepsilon E^2\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z=-(\varepsilon E^2\frac{1}{v}\frac{\boldsymbol{k}}{k})\frac{\boldsymbol{k}}{k}v$$

而 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}=\varepsilon\mu\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\dfrac{1}{v^2}\boldsymbol{g}=\dfrac{1}{v}\varepsilon E^2\dfrac{\boldsymbol{k}}{k}$ ，将它代入上式，就可证明。这里，$-\overset{\leftrightarrow}{\Phi}$ 代表动量流密度。

3.2 电磁波在介质分界面上的反射和折射



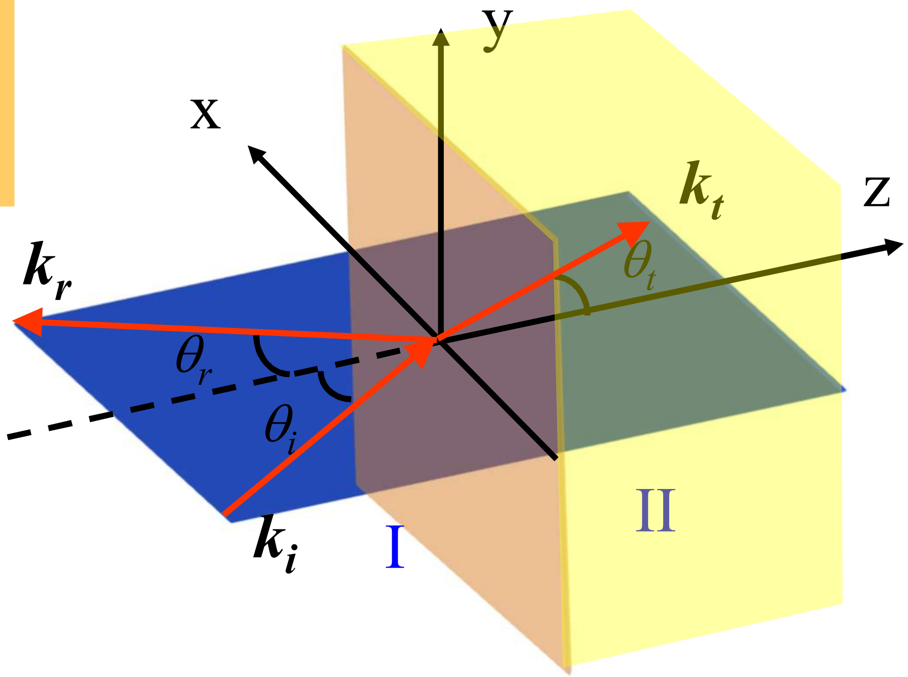
考虑一定频率的单色平面波

入射波为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_0 \exp[\mathrm{j}(\omega t - \boldsymbol{k}_i \bullet \boldsymbol{r})] \\ \boldsymbol{B}_i = \sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\dfrac{\boldsymbol{k}_i}{k_i} \times \boldsymbol{E}_0 \exp[\mathrm{j}(\omega t - \boldsymbol{k}_i \bullet \boldsymbol{r})] \end{cases}$$

Maxwell方程：

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega\mu\boldsymbol{H} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = j\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \\ \nabla \bullet \boldsymbol{E} = 0 \\ \nabla \bullet \boldsymbol{H} = 0 \end{cases}$$



上式只有一、二式是独立的。

一般在界面上： $\sigma_f = 0, \quad \boldsymbol{k}_f = 0$

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0 \\ \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{E}_{1t} = \boldsymbol{E}_{2t} \\ \boldsymbol{H}_{1t} = \boldsymbol{H}_{2t} \end{cases}$$

设反射波和折射波也是平面波，分界面为xy面，入射面为xz面：

反射波电场：

$$\boldsymbol{E}_r = \boldsymbol{E}_{r0}\exp[\mathrm{j}(\omega_r t - \boldsymbol{k}_r \bullet \boldsymbol{r})]$$

磁感应强度：

$$\boldsymbol{B}_r = \sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\frac{\boldsymbol{k}_r}{k_r}\times\boldsymbol{E}_{r0}\exp[\mathrm{j}(\omega_r t - \boldsymbol{k}_r \bullet \boldsymbol{r})]$$

折射（透射）波：

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{E}_{t0}\exp[\mathrm{j}(\omega_t t - \boldsymbol{k}_t \bullet \boldsymbol{r})] \\ \boldsymbol{B}_t = \sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\dfrac{\boldsymbol{k}_t}{k_t}\times\boldsymbol{E}_{t0}\exp[\mathrm{j}(\omega_t t - \boldsymbol{k}_t \bullet \boldsymbol{r})] \end{cases}$$

在z=0面上，对任意r、t满足边值关系，必须有：

$$\begin{cases} \omega = \omega_r = \omega_t \\ k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} \\ k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} \end{cases}$$

相位匹配

由边值关系：

$$\begin{cases} (\boldsymbol{E}_0)_t + (\boldsymbol{E}_{r0})_t = (\boldsymbol{E}_{t0})_t \\ \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\left(\dfrac{\boldsymbol{k}_i}{k_i}\times\boldsymbol{E}_0\right)_t + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\left(\dfrac{\boldsymbol{k}_r}{k_r}\times\boldsymbol{E}_{r0}\right)_t = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\left(\dfrac{\boldsymbol{k}_t}{k_t}\times\boldsymbol{E}_{t0}\right)_t \end{cases}$$

入射波矢量在xz平面，有 $k_{iy} = 0$ 所以：$k_{ry} = k_{ty} = 0$

入射角、反射角和折射角满足

$$\begin{cases} k_{ix} = k_i \sin\theta_i \\ k_{rx} = k_r \sin\theta_r \\ k_{tx} = k_t \sin\theta_t \end{cases}$$

设 v_1, v_2 为在介质中的相速，有

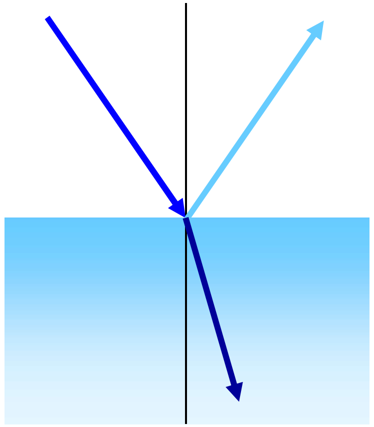
$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \Rightarrow \begin{cases} k_i = \dfrac{\omega}{v_1} = k_r \\ k_t = \dfrac{\omega}{v_2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} k_{ix} &= k_{rx} \\ k_{ix} &= k_{tx} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \theta_i = \theta_r \\ k_i \sin\theta_i = k_t \sin\theta_t \end{cases}$$

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{k_t}{k_i} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

反射和折射定律（Snell定律）

$$\boxed{\theta_i = \theta_r} \qquad \boxed{n_1 \sin\theta_{\mathrm{i}} = n_2 \sin\theta_{\mathrm{t}}}$$



n_1, n_2 为介质I和II的折射率，n_{21}为介质II 对I的相对折射率。对非铁磁物质：

$$n_{21} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

入射波、反射波和折射波的振幅：

（1） *E* 垂直于入射面的情形(垂直极化)。这时 $E_{0x} = E_{0z} = 0 \qquad E_{0y} = E_0$

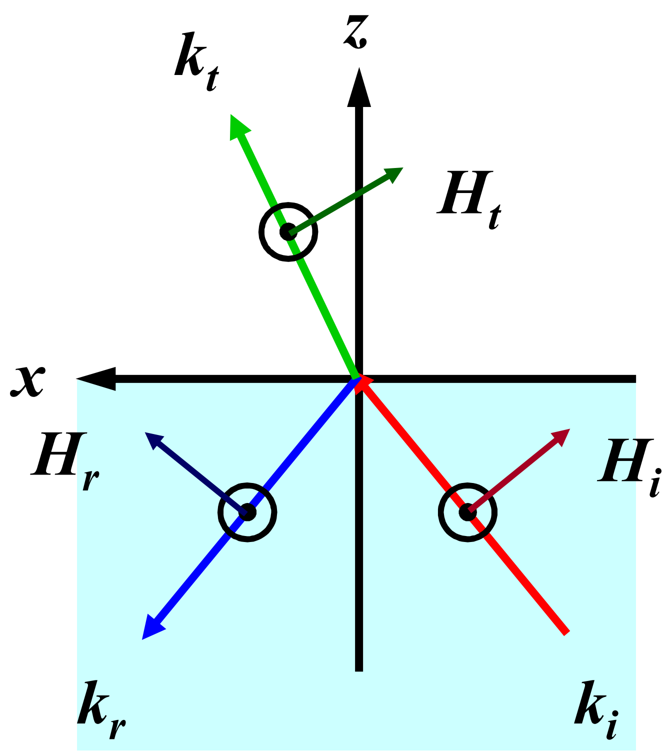
$$E_0 + E_{r0} = E_{t0}$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(E_0\cos\theta_i - E_{r0}\cos\theta_r) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_{t0}\cos\theta_t$$

$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$

$$\sqrt{\varepsilon_1}(E_0 - E_{r0})\cos\theta_i = \sqrt{\varepsilon_2}E_{t0}\cos\theta_t$$

$$\begin{cases} \dfrac{E_{r0}^{\perp}}{E_0^{\perp}} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_i - \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_t}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_t} = -\dfrac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \\ \dfrac{E_{t0}^{\perp}}{E_0^{\perp}} = \dfrac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_i}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_t} = \dfrac{2\cos\theta_i\sin\theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \end{cases}$$

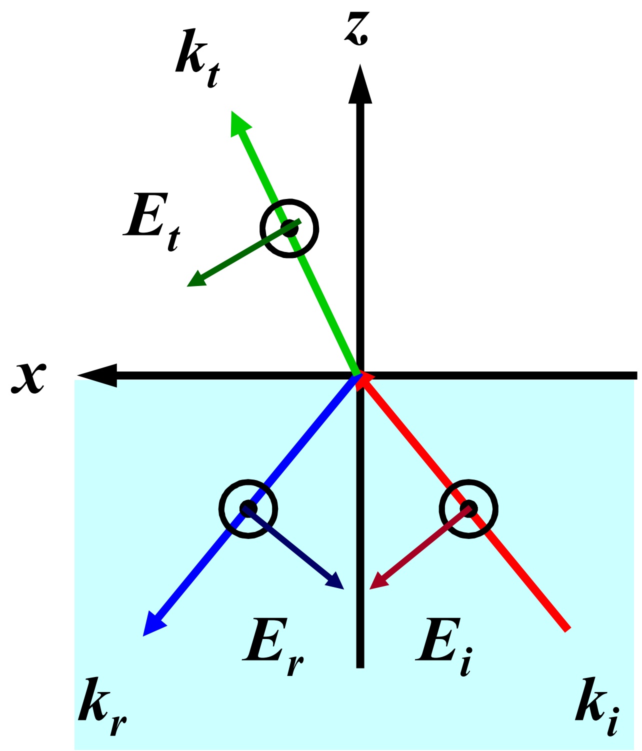


E 垂直于入射面

(2) *E* 平行于入射面的情形（平行极化）。这时：$E_{0y}=0$

$$E_0\cos\theta_i - E_{r0}\cos\theta_r = E_{t0}\cos\theta_t$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}(E_0+E_{r0})=\sqrt{\varepsilon_2}E_{t0}$$



***E* 平行于入射面**

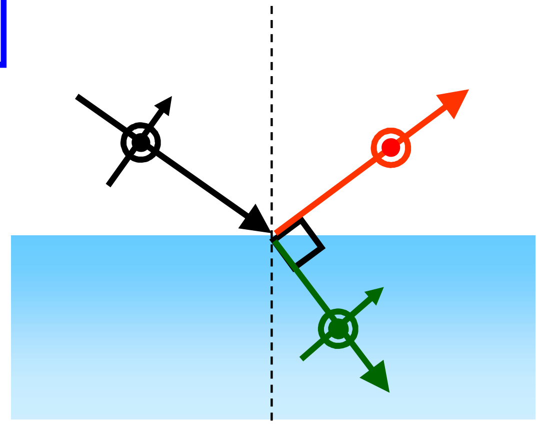
菲涅耳(Fresnel)公式

$$\begin{cases} \dfrac{E_{r0}^{//}}{E_0^{//}} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_i - \sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_t}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_t} = \dfrac{\sin\theta_i\cos\theta_i - \sin\theta_t\cos\theta_t}{\sin\theta_i\cos\theta_i + \sin\theta_t\cos\theta_t} = \dfrac{\tan(\theta_i-\theta_t)}{\tan(\theta_i+\theta_t)} \\ \dfrac{E_{t0}^{//}}{E_0^{//}} = \dfrac{2\cos\theta_i\sin\theta_t}{\sin\theta_i\cos\theta_i + \sin\theta_t\cos\theta_t} = \dfrac{2\cos\theta_i\sin\theta_t}{\sin(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_i-\theta_t)} \end{cases}$$

讨论一些特殊情形下的反射与折射现象

（1） $\theta_i + \theta_t = \pi/2$ 情形。反射波为垂直于入射面的完全偏振波

➡ **Brewster 定律**

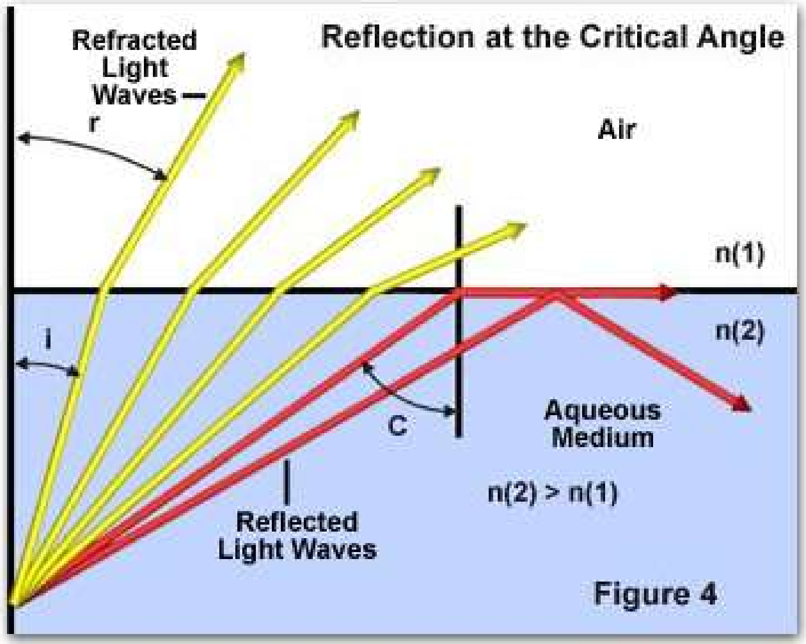


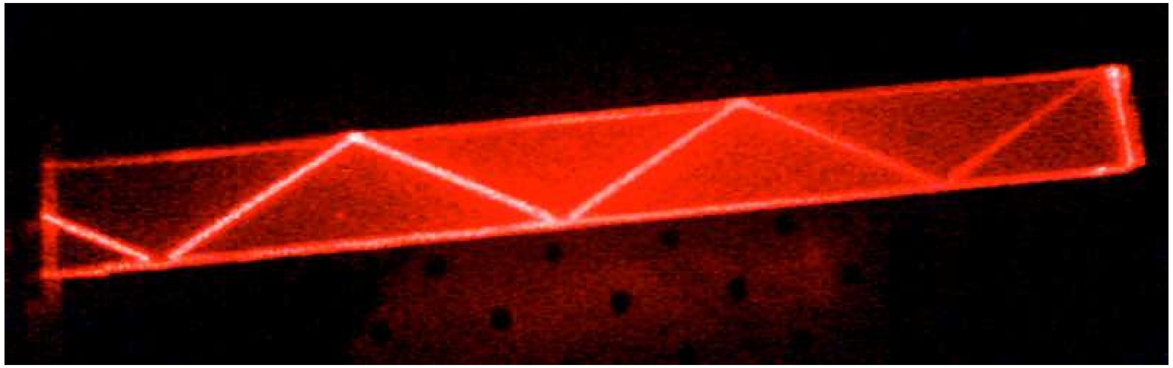
$$
\begin{cases}
\dfrac{E_{r0}^{//}}{E_0^{//}} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_i - \sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_t}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_t} = \dfrac{\sin\theta_i\cos\theta_i - \sin\theta_t\cos\theta_t}{\sin\theta_i\cos\theta_i + \sin\theta_t\cos\theta_t} = \dfrac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \\
\dfrac{E_{t0}^{//}}{E_0^{//}} = \dfrac{2\cos\theta_i\sin\theta_t}{\sin\theta_i\cos\theta_i + \sin\theta_t\cos\theta_t} = \dfrac{2\cos\theta_i\sin\theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)}
\end{cases}
$$

（2）电场垂直于入射平面的情形，如果 $\theta_i > \theta_t$（$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ 就能满足），E_{r0}/E_0 就为负数，即反射波电场与入射波电场反相，这种现象称为反射过程中的半波损失（垂直极化）。

（3）全反射

在 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ 的条件下，必然有 $n_{21} < 1$ 。当增大入射角到 $(\theta_i)_c = \arcsin n_{21}$ 时，θ_t 将变成 $\pi/2$，这时折射波沿界面掠过；如果再增大入射角到 $\sin\theta_t = \sin\theta_i / n_{21} > 1$ ，能够满足该条件的 θ_t 就不再存在，出现了“全反射”现象，$(\theta_i)_c$ 称为临界角。

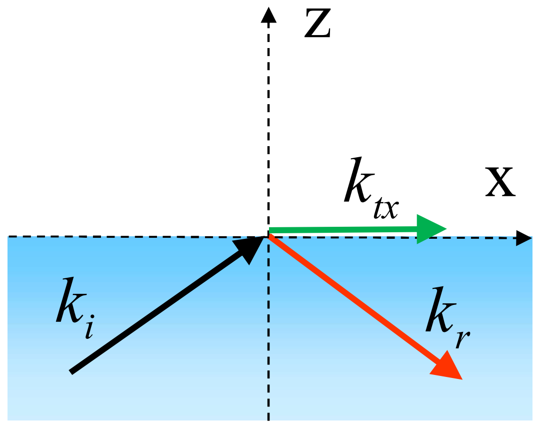




在入射角 θ_i 大于临界角$(\theta_i)_c$时电场的表示形式仍然不变，边值关系当然也仍然成立，即 $k_{tx}=k_{ix}=k_i\sin\theta_\mathrm{i}$ 及 $k_t=k_i v_1/v_2=k_i n_{21}$ 仍然成立。在$k_{tx}>k_t$ 情形下，有$\sin\theta_\mathrm{i}>n_{21}$，因而

$$\boxed{k_{tz}=\sqrt{k_t^2-k_{tx}^2}=-jk_i\sqrt{\sin^2\theta_i-n_{21}^2}}$$

虚数



令：$k_{tz}=-j\alpha$, $\alpha=k_i\sqrt{\sin^2\theta_i-n_{21}^2}$

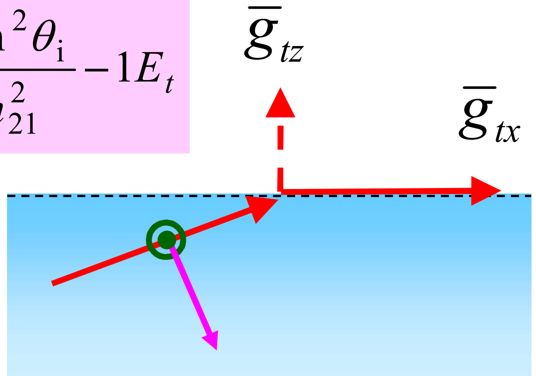
折射电场为：$\boxed{\boldsymbol{E}_t=\boldsymbol{E}_{t0}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-k_{tx}x)}}$ 沿 x 传播的波，场强沿 z 方向指数衰减。

$$\boxed{\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{k_i\sqrt{\sin^2\theta_i-n_{21}^2}}=\frac{\lambda_\mathrm{i}}{2\pi\sqrt{\sin^2\theta_i-n_{21}^2}}}$$

考虑 $\boldsymbol{E}_t$ 垂直于入射面的情形（ $\boldsymbol{E}_t = E_{ty}\,\boldsymbol{e}_y$ ）：

$$\boldsymbol{H}_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\frac{\boldsymbol{k}_t}{k_t}\times\boldsymbol{E}_t$$

$$\begin{cases} H_{tz} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\dfrac{k_{tx}}{k_t}E_{ty} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\dfrac{\sin\theta_{\mathrm{i}}}{n_{21}}E_t \\ H_{tx} = -\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\dfrac{k_{tz}}{k_t}E_{ty} = -\mathrm{j}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta_{\mathrm{i}}}{n_{21}^2}-1}\,E_t \end{cases}$$



H_{tz} 与 E_t 同相，而H_{tx}与 E_t有π/2相位差。
折射波的平均能流密度为：

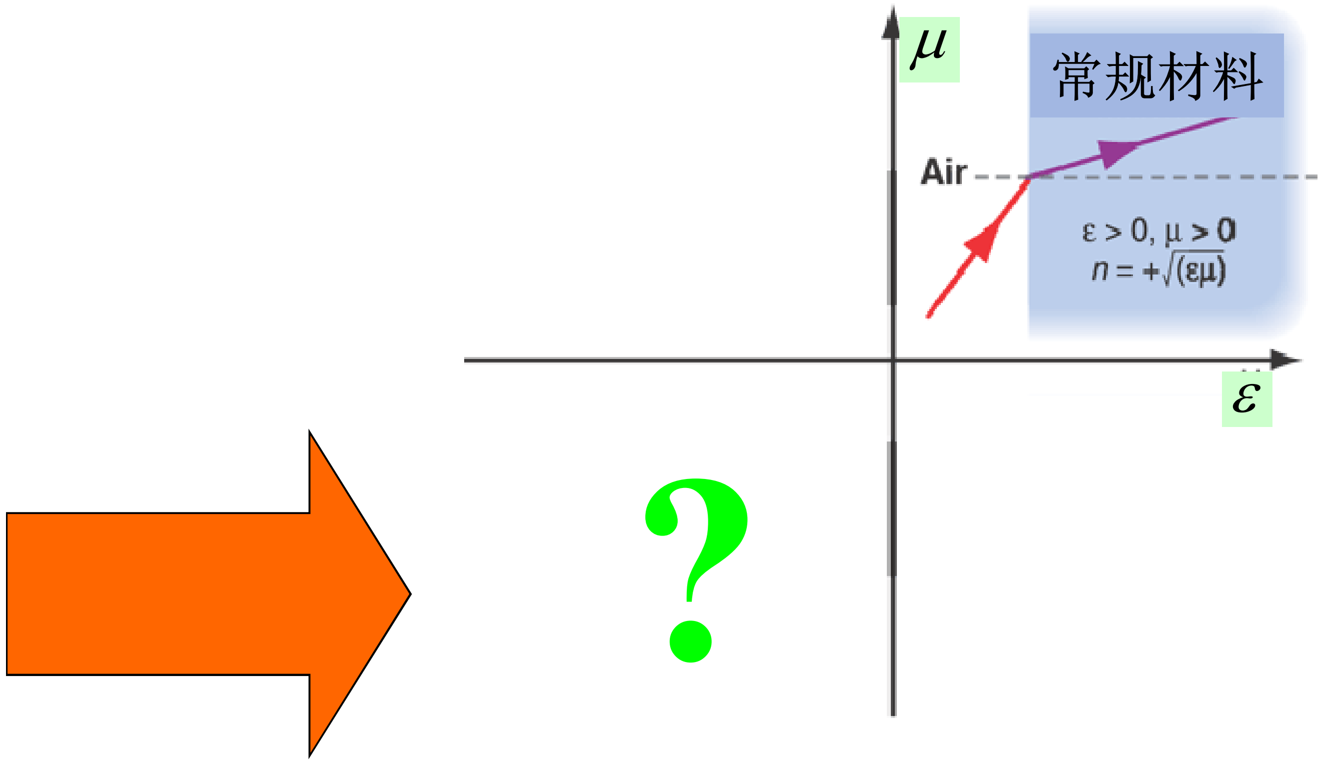
$$\bar{\boldsymbol{g}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)$$

$$\begin{cases} \bar{g}_{tx} = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}(E_{ty}H_{tz}^*) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}|E_{t0}|^2\mathrm{e}^{-2\alpha z}\dfrac{\sin\theta_{\mathrm{i}}}{n_{21}} \\ \bar{g}_{tz} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}(E_{ty}H_{tx}^*) = 0 \end{cases}$$

折射波平均能流密度只有x分量，z分量为零。

菲涅耳公式在 $\sin\theta_\mathrm{i} > n_{21}$ 情形下形式上仍然成立，只要注意到下式

$$\begin{cases} \sin\theta_t \to \dfrac{\sin\theta_i}{n_{21}} > 1 \\ \cos\theta_t \to \mathrm{j}\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta_i}{n_{21}^2} - 1} \end{cases}$$



V. G. Veselago

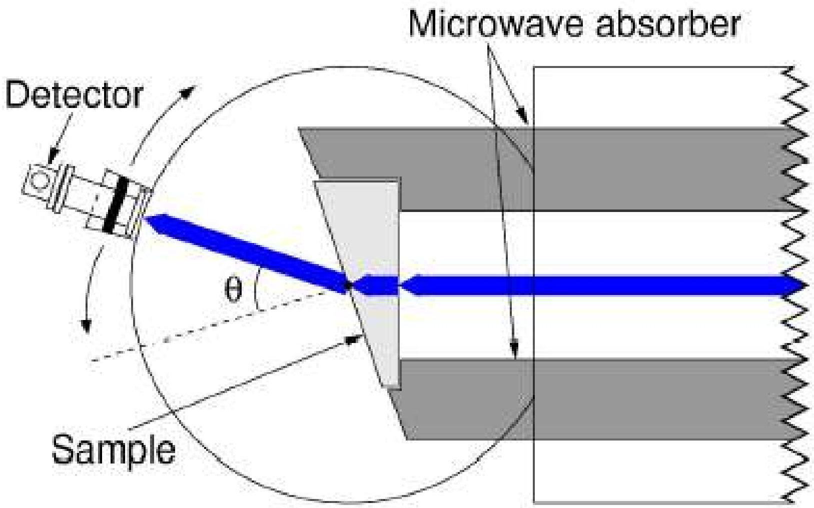
左手材料（*left-handed material*）（$\varepsilon < 0, \mu < 0$）

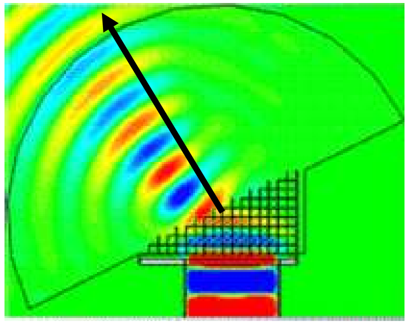
1968 苏联科学家 **V. Veselago** 院士理论分析

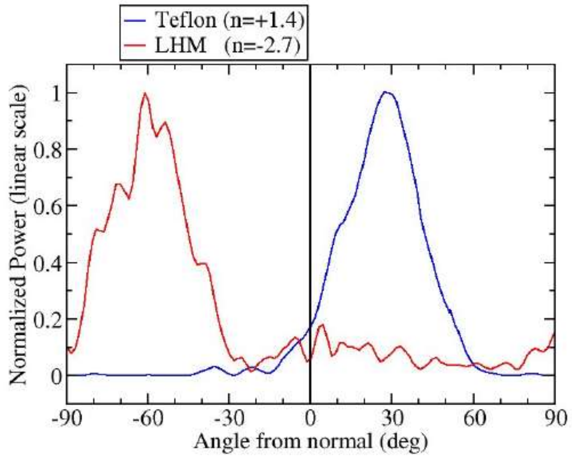
2000 美国加州大学圣地亚哥分校**D. R. Smith**教授进行了实验验证

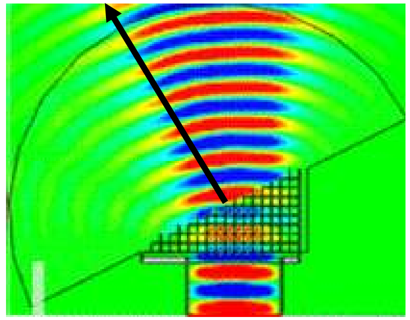
人工电磁材料：$\varepsilon < 0, \mu < 0$ ➡ $n < 0$ 负折射率材料

负折射现象实验验证





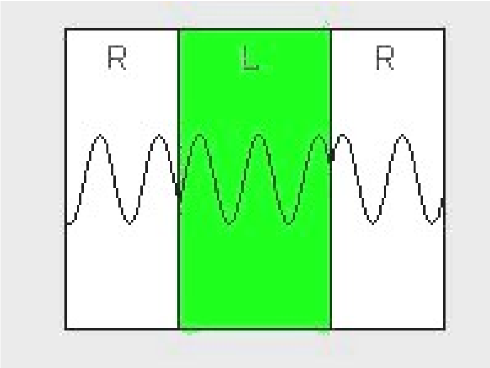


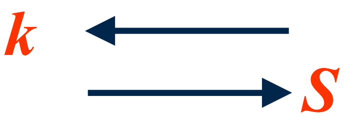


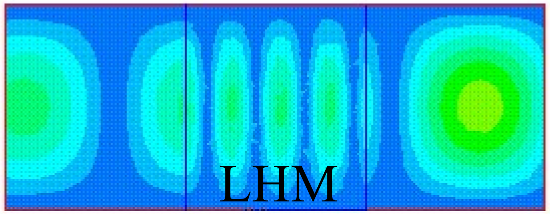
负折射

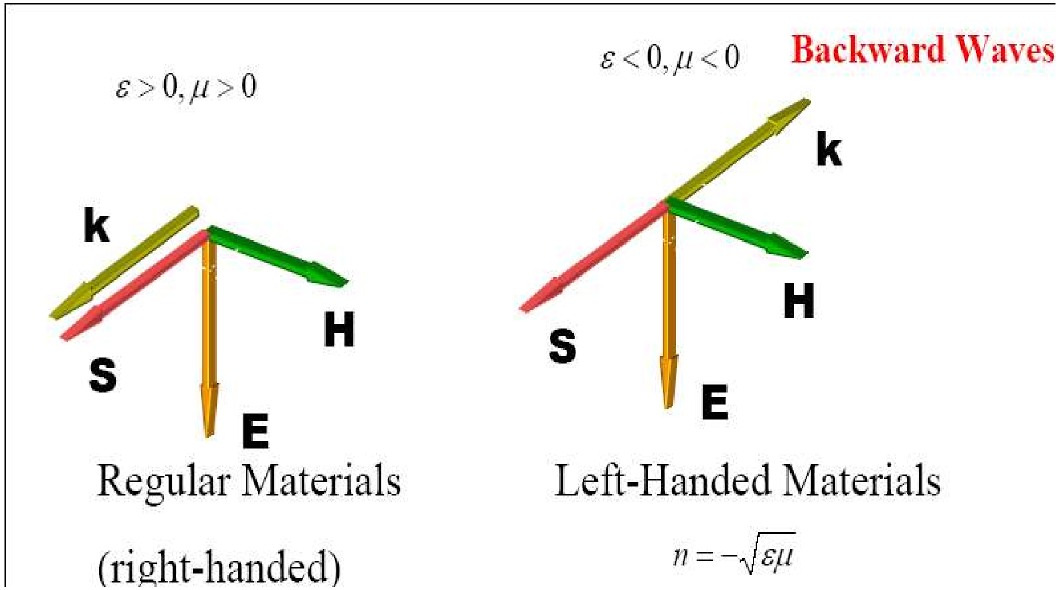
正折射

传播方向和能流方向反向平行：反向波



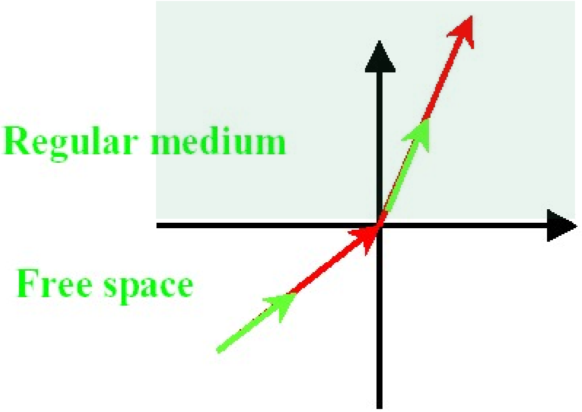


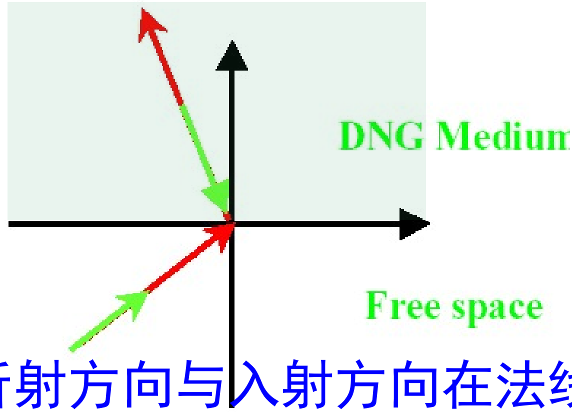




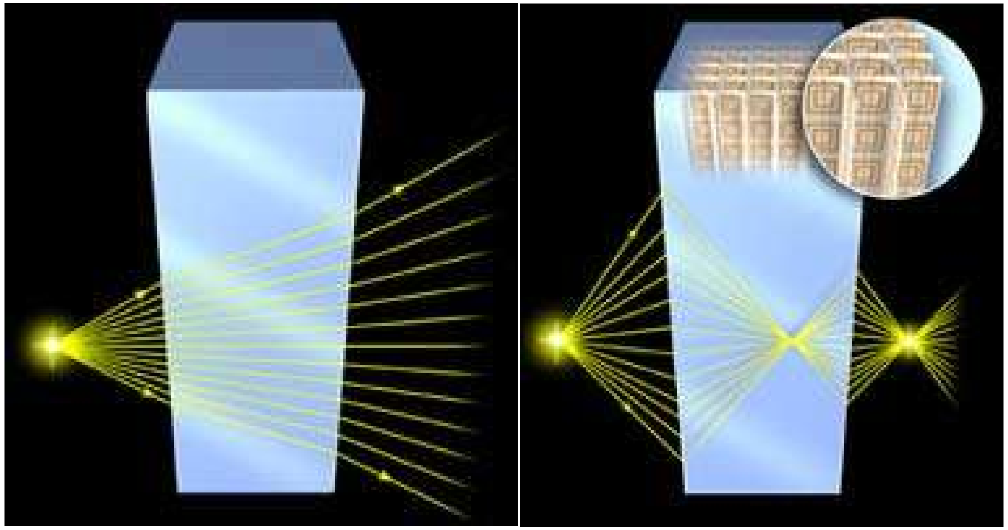
$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} &= -\omega|\mu|\boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H} &= +\omega|\varepsilon|\boldsymbol{E} \end{aligned}}$$

负折射现象（negative refraction）





- 折射方向与入射方向在法线的同侧。
- 折射能量与波矢量方向相反。



平板会聚透镜

Giving light the second hand!

例1：试证明线偏振波在介质分界面上全反射后，在一般情况下变为椭圆偏振波，并求出变为圆偏振波时所需要满足的条件。

解：将线偏振波的电场强度矢量分解为垂直于入射面和平行于入射面的两个分量，分别计算它们在全反射后的情况。

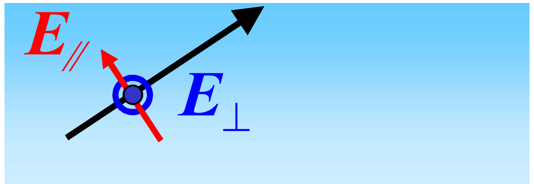
（1） 对入射波电场强度垂直于入射面的分量，用近似关系式

$n_{21}=\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$ 得到：

$$\left(\frac{E_{r0}}{E_0}\right)_\perp=\frac{\cos\theta_i-n_{21}\cos\theta_t}{\cos\theta_i+n_{21}\cos\theta_t}、$$

当发生全反射时，$\theta_i>(\theta_i)_c$，

$$\cos\theta_t=\mathrm{j}\sqrt{\frac{\sin^2\theta_i}{n_{21}^2}-1}$$



$$\left(\frac{E_{r0}}{E_0}\right)_\perp=\frac{\cos\theta_i-\mathrm{j}\sqrt{\sin^2\theta_i-n_{21}^2}}{\cos\theta_i+\mathrm{j}\sqrt{\sin^2\theta_i-n_{21}^2}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta_\perp}$$

对入射波电场强度平行于入射面的分量，有

$$\left(\frac{E_{r0}}{E_0}\right)_{/\!/}=\frac{n_{21}\cos\theta_i-\cos\theta_t}{n_{21}\cos\theta_i+\cos\theta_t}=\frac{n_{21}^2\cos\theta_i-\mathrm{j}\sqrt{\sin^2\theta_i-n_{21}^2}}{n_{21}^2\cos\theta_i+\mathrm{j}\sqrt{\sin^2\theta_i-n_{21}^2}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta_{/\!/}}$$

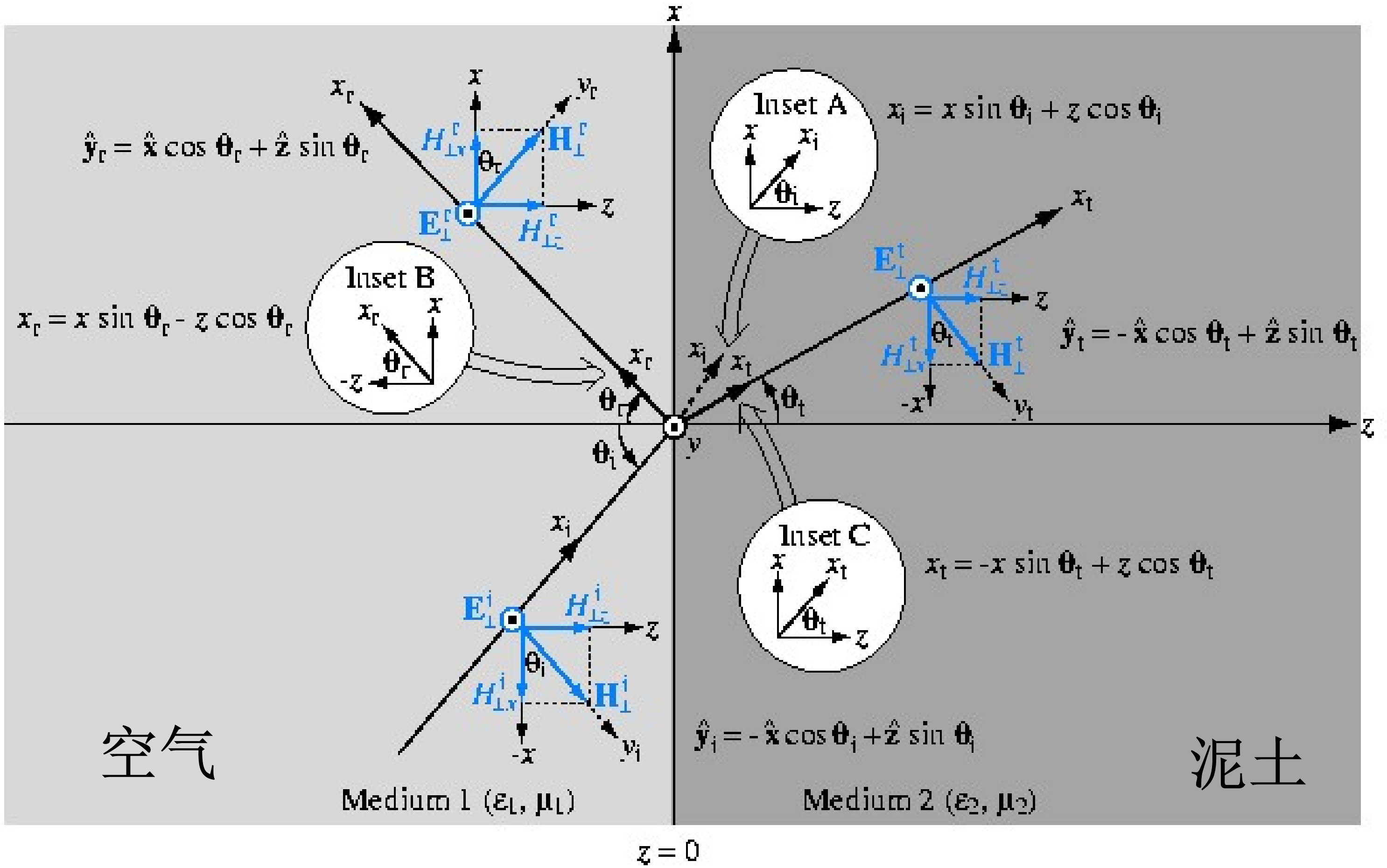
$$\tan\frac{\delta_{/\!/}}{2}=\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i-n_{21}^2}}{n_{21}^2\cos\theta_i}\qquad \tan\frac{\delta_\perp}{2}=\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i-n_{21}^2}}{\cos\theta_i}$$

令 $\delta=\delta_{/\!/}-\delta_\perp$，显然 $\delta_{/\!/}\neq\delta_\perp$ 。如果线偏振波有垂直于入射面和平行于入射面的分量，那么在全反射之后，由于两分量有相位差，电场矢量就不再是线偏振波，通常它会形成椭圆偏振波。如果要使全反射后得到圆偏振波，一方面入射波电场必须与入射面成45^{0}角，这样两个分量幅度相等，在全反射后振幅仍然相等；另一方面还必须要使 $\delta=\pi/2$ ，即：

$$\tan\frac{\delta}{2}=\frac{\tan\frac{\delta_{/\!/}}{2}-\tan\frac{\delta_\perp}{2}}{1+\tan\frac{\delta_{/\!/}}{2}\tan\frac{\delta_\perp}{2}}=\frac{\cos\theta_i\sqrt{\sin^2\theta_i-n_{21}^2}}{\sin^2\theta_i}=1$$

当 $n_{21}<0.41$ 时有实数解。

$$\cos\theta_i=\frac{1}{2}\sqrt{(3-n_{21}^2)\pm\sqrt{(n_{21}^2-3)^2-8}}$$



例2：平面波从空气斜入射到泥土表面，入射电场为；

$$\boldsymbol{E}^i = \hat{\boldsymbol{y}}100\cos(\omega t - \pi x - 1.73\pi z)$$

泥土可看作无损介质，介电常数为4，求$\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, 和入射角θ_i及空气和泥土中的总电场。

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{i} = \hat{\boldsymbol{y}}100e^{-j\pi x - j1.73\pi z} = \hat{\boldsymbol{y}}100e^{-j\boldsymbol{k}_1 \bullet \boldsymbol{r}}$$

$$\boldsymbol{k}_1 \bullet \boldsymbol{r} = k_1 x sin\theta_i + k_1 z cos\theta_i = \pi x + 1.73\pi z$$

$$k_1 sin\theta_i = \pi \qquad k_1 cos\theta_i = 1.73\pi$$

$$k_1 = \sqrt{\pi^2 + (1.73\pi)^2} = 2\pi \qquad \theta_i = \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{1.73\pi}\right) = 30^\circ$$

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1} = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} = 0.5 \qquad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = 4\pi$$

关键：平面波的表达形式

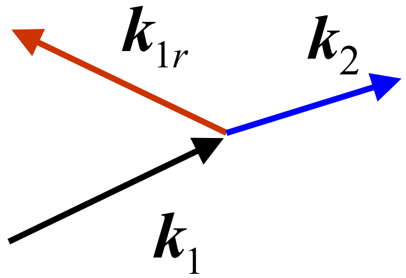
$$sin\theta_t = \frac{k_1}{k_2} sin\theta_i = \frac{2\pi}{4\pi} sin30^\circ \qquad \theta_t = 14.5^\circ$$

$$\Gamma_\perp = \frac{E_{r0}^{\perp}}{E_0^{\perp}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} cos\theta_i - \sqrt{\varepsilon_2} cos\theta_t}{\sqrt{\varepsilon_1} cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_2} cos\theta_t} = -0.38$$

$$\tau_\perp = \frac{E_{t0}^{\perp}}{E_0^{\perp}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1} cos\theta_i}{\sqrt{\varepsilon_1} cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_2} cos\theta_t} = 0.62 = 1 + \Gamma_\perp$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{1}{}_{\perp} = \dot{\boldsymbol{E}}^{i}{}_{\perp} + \dot{\boldsymbol{E}}^{r}{}_{\perp} = \hat{\boldsymbol{y}} E^{i}{}_{\perp 0} e^{-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} + \hat{\boldsymbol{y}} \Gamma E^{i}{}_{\perp 0} e^{-jk_1(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)}$$

$$= \hat{\boldsymbol{y}} 100 e^{-jk_1(\pi x + 1.73\pi z)} - \hat{\boldsymbol{y}} 38 e^{-jk_1(\pi x - 1.73\pi z)}$$



$$\dot{\boldsymbol{E}}^{t}{}_{\perp} = \hat{\boldsymbol{y}} \tau E^{i}{}_{\perp 0} e^{-jk_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

$$= \hat{\boldsymbol{y}} 62 e^{-j(\pi x + 3.87\pi z)}$$

$$\boldsymbol{e}^{1}{}_{\perp} = Re\left(\dot{\boldsymbol{E}}^{1}{}_{\perp} e^{j\omega t}\right)$$

$$= \hat{\boldsymbol{y}} 100 \cos(\omega t - \pi x - 1.73\pi z) - \hat{\boldsymbol{y}} 38 \cos(\omega t - \pi x + 1.73\pi z)$$

$$\boldsymbol{e}^{t}{}_{\perp}(x, z, t) = Re\left(\dot{\boldsymbol{E}}^{t}_{\perp} e^{j\omega t}\right) = \hat{\boldsymbol{y}} 62 \cos(\omega t - \pi x - 3.87\pi z)$$

关键：平面波的表达形式