1.设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,求证$\nabla^2 f(r)=f''(r)+2\frac{f'(r)}{r}$

证法一

在球坐标系中，有

$$\nabla^2 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

当$u=f(r)$时，上式第二项第三项为0

$$\nabla^2 f(r)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right)=\frac{1}{r^2}\left(2r\frac{df(r)}{dr}+r^2\frac{d^2 f(r)}{dr^2}\right)$$

$$=f''(r)+2\frac{f'(r)}{r}$$

得证

证法二

$$\nabla^2 f(r)=\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x}=\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=f'(r)\frac{x}{r}=\frac{f'(r)}{r}x$$

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f'(r)}{r}x\right) = \frac{d}{dr}\frac{f'(r)}{r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{f'(r)}{r} = x\frac{rf''(r) - f'(r)}{r^2}\frac{x}{r} + \frac{f'(r)}{r}$$
$$= \frac{x^2(rf''(r) - f'(r))}{r^3} + \frac{f'(r)}{r}$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2} = \frac{y^2(rf''(r) - f'(r))}{r^3} + \frac{f'(r)}{r}$$

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2} = \frac{z^2(rf''(r) - f'(r))}{r^3} + \frac{f'(r)}{r}$$

所以

$$\nabla^2 f(r) = \frac{r^2(rf''(r) - f'(r))}{r^3} + \frac{3f'(r)}{r} = f''(r) + 2\frac{f'(r)}{r}$$

得证

2.如果$\nabla^2 f(r)$=0,试确定$f(r)$

（注意，r是柱坐标中的r，所以满足$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，因此满足$\nabla^2 f(r)=f''(r)+2\frac{f'(r)}{r}$）

解法一

$$\nabla^2 f(r)=f''(r)+2\frac{f'(r)}{r}=0$$
$$rf''(r)+2f'(r)=0$$

方程两边同时积分

$$\int r df'(r)+2f(r)=C_1$$

$$rf'(r)-\int f'(r)dr+2f(r)=C_1$$

$$rf'(r)+f(r)=C_1$$

两边再积分

$$\int r df(r) + \int f(r)dr = C_1 r + C_2$$

$$rf(r) - \int f(r)dr + \int f(r)dr = C_1 r + C_2$$

$$rf(r) = C_1 r + C_2$$

$$f(r) = C_1 + \frac{C_2}{r}$$

解法二

令

$$g(r) = f'(r)$$

则

$$\nabla^2 f(r) = f''(r) + 2\frac{f'(r)}{r} = g'(r) + 2\frac{g(r)}{r} = 0$$

$$\frac{dg}{dr} + 2\frac{g}{r} = 0$$

$$\frac{1}{g}dg = \frac{-2}{r}dr$$

两边同时积分

$$\ln g = -2\ln(r) + C_1$$

$$g = \frac{C_2}{r^2} = f'(r)$$

所以

$$f(r) = \frac{C_3}{r} + C_4$$

解法三

令

$$r = e^t, t = \ln(r)$$

$$f'(r) = \frac{f'(t)}{r}$$

$$f''(r) = \frac{\frac{f''(t)}{r} r - f'(t)}{r^2}$$

$$rf''(r) + 2f'(r) = \frac{f''(t)}{r} + \frac{f'(t)}{r} = 0$$

$$f''(t) + f'(t) = 0$$

上式的通解为

$$f(t) = C_1 + C_2 e^{-t}$$

将$t = \ln(r)$代入得

$$f(r) = C_1 + \frac{C_2}{r}$$

3.证明麦克斯韦方程组为非线性独立方程组

证法一
麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} & ① \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_f + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} & ② \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f & ③ \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 & ④ \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{j}_f = \boldsymbol{E}\sigma \end{cases}$$

当介质为各向同性的线性媒质时，ε, μ为常数，当介质各向异性的线性媒质时，ε, μ为已知的张量，当介质非线性时，ε, μ是**E,H**的函数；旋度和散度运算的本质是对向量的线性运算，因此麦克斯韦方程组是关于**E,H**的线性方程组，方程中只有两个自变量**E,H**，一个未知标量ρ_f，却有四个方程，因此该方程组是非线性独立的。特别地，当无源时$\rho_f = 0$，方程组仅有两个方程是线性独立的。

证法二

对 ① 两边同时取散度

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\frac{\partial \nabla \cdot \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

可见④的解是①的解的子集，因此④和①不独立

对②两边同时取散度

$$\nabla \cdot \ \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \cdot \boldsymbol{j}_f + \frac{\partial \nabla \cdot \boldsymbol{D}}{\partial t} = 0$$

且由电荷守恒

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j}_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}$$

于是

$$\frac{\partial (\nabla \cdot \boldsymbol{D} - \rho_f)}{\partial t} = 0$$

可见③的解是②的解的子集，因此③和②不独立

4.判断场分布是不是电磁波那个题目思路：

电磁波在传播时，$\rho_f = 0$，麦克斯韦方程组仅有两个方程是线性独立的，因此场分布只需要满足两个方程即可。对于电场，只要满足

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} \neq 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \end{cases}$$

就是电磁波，不满足就不是电磁波，因此$\boldsymbol{E}_1$是电磁波，$\boldsymbol{E}_2$ $\boldsymbol{E}_3$不是。