规则金属波导

- 什么是规则金属波导，规则金属波导的种类。
- 规则金属波导中的电磁波满足的波动方程及其边界条件，电磁波的模式。
- 矩形波导中电磁波的传输常数k_z

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \qquad k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}$$

TE波形，*m,n*不能同时为零；TM波形没有*0n, m0*

- 截至波长，截至频率，导波波长
- 矩形波导的主模式，主模式的频率范围，电场分布，传输功率，等效特性阻抗

- 同轴线中电磁波满足的波动方程及其边界条件
- 同轴线中的主模式波形，传播常数，导波波长，场分布形式，特性阻抗，传输功率
- 同轴线的高次模

微带线

- 微带线的工作波型
- 微带线的特性阻抗，有效介电常数和衰减
- 微带线的色散特点：高次模的类型，产生原因

谐振腔与振荡器

- 矩形谐振腔

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \qquad k_x = \frac{m\pi}{a}, k_y = \frac{n\pi}{b}, k_z = \frac{p\pi}{d}$$

TE波形，*m,n*不能同时为零，*p*=1,2…；

TM波形，*m*,*n=1,2,…, p=0,1,…*

- 谐振腔的谐振频率，波长的计算
- 矩形谐振腔的主模式
- 同轴谐振腔
- 振荡器的种类及其特点

辐射与天线

- 电磁场用矢量势和标量势表示；势函数满足的波动方程；Lorenz条件及其物理意义
- 推迟势的表达形式及其物理意义
- 振子天线的远区辐射场，天线辐射功率计算
- 天线阵的作用，直线式天线阵最大辐射方向的确定
- 常见的天线形式及其应用

习题（二）

9-1 试证明一个均匀带电的球壳在作径向振动时将不会辐射。

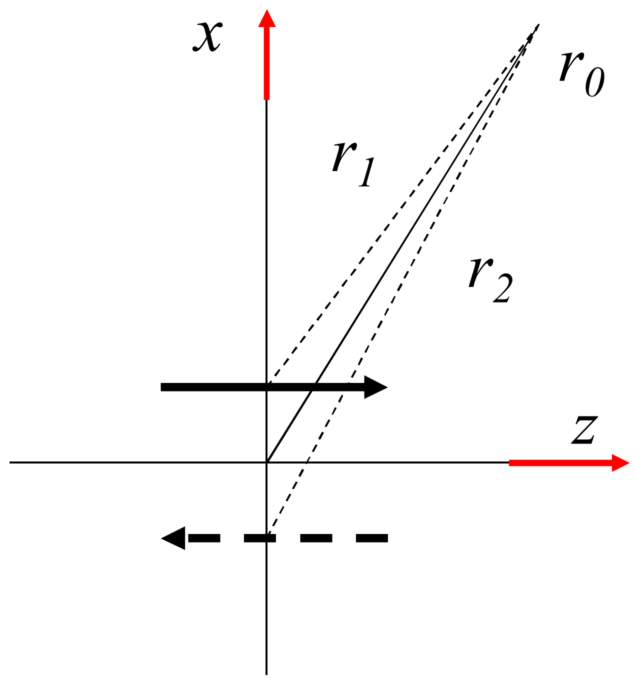
解：一个均匀带点球壳产生的电场和位于球心的点电荷的场相同。径向振动时电荷没有位移，J=0

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,',t-r/c\right)}{r}dV = 0$$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = 0$$

9-2 一电偶极子以频率ω振荡，振幅为P_0。它被平行地放置于离一个无限大理想导体平面距离为$a/2$处，试求其辐射场强及平均辐射功率角分布。

解：$\vec{P} = P_0 \cos(\omega t)\hat{z}$



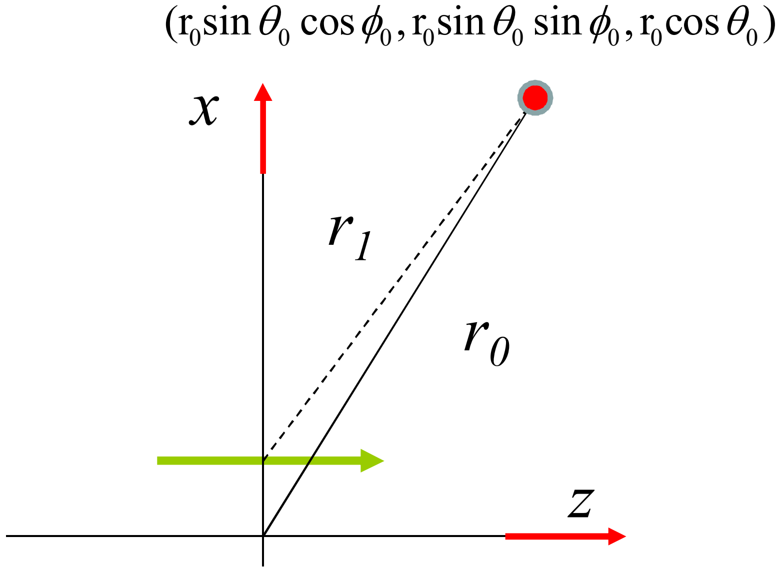
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2 c}\ddot{\vec{P}}^{ret} \times \vec{r}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r^2 c}\left(-\omega^2 P_0\right)\cos(\omega t)^{ret}\ \hat{z} \times \vec{r}$$

$$= -\frac{\mu_0 \omega^2 P_0}{4\pi r c}\cos\left(\omega\left(t - r/c\right)\right)\sin\theta\hat{\varphi}$$

$$\vec{B}_{tot} = \vec{B}(r_1) + \vec{B}(r_2)$$

$$r_1^2 = r_0^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2r_0\left(\frac{a}{2}\right)\cos\Theta$$



$$r_1 = \left(r_0^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - r_0 a\sin\theta_0\cos\varphi_0\right)^{1/2}$$

$$\simeq r_0 - \left(\frac{a}{2}\right)\sin\theta_0\cos\varphi_0$$

$$r_1 = r_0 - \frac{a}{2}\sin\theta_0\cos\varphi_0, \quad r_2 = r_0 + \frac{a}{2}\sin\theta_0\cos\varphi_0$$

$$\vec{B}_{tot} = \left(\frac{\mu_0\omega^2 P_0}{4\pi rc}\sin\theta_0\right)2\sin\left(\omega\left(t - \frac{r_0}{c}\right)\right)\sin\left(\frac{\omega a}{2c}\sin\theta_0\cos\varphi_0\right)$$

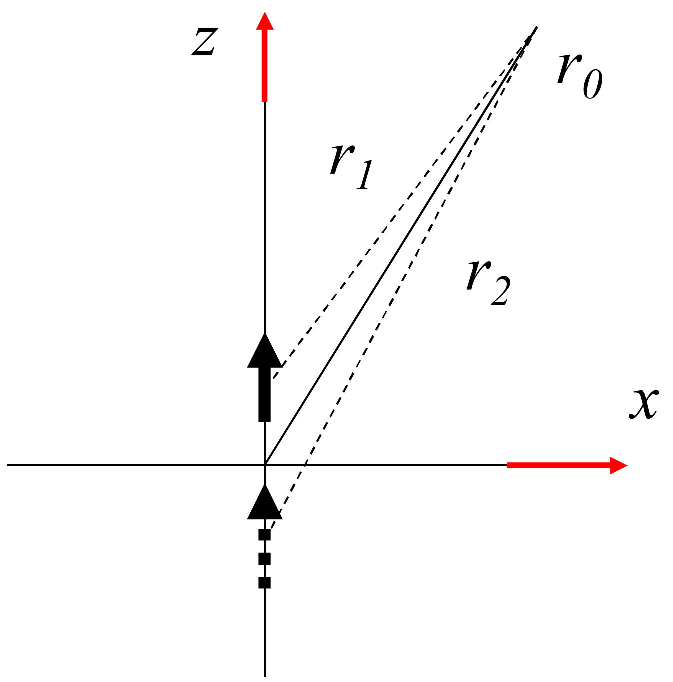
$$\vec{E} = c\vec{B}\times\hat{r} = cB_{tot}\hat{\theta}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\vec{g}\cdot d\vec{S}}{dS/r^2} = \left(\vec{g}\cdot\hat{r}\right)r^2 =$$

9-3 一电偶极子的电偶极矩为P，以频率ω振荡。它被垂直地放置于离一个无限大理想导体平面距离为$\lambda/2$处，这里λ是和频率ω相应的波长。设此电偶极子的尺度远较λ为小，并指向正z方向。试求其辐射场，辐射功率分布，及辐射总功率。

解：
$$\vec{E}=\frac{\ddot{P}^{ret}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin\theta\hat{\theta}$$

$$=-\frac{\mu_0 P_0\omega^2}{4\pi r}\sin\theta\cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\hat{\theta}$$



$$r_1=r_0-\frac{\lambda}{2}\cos\theta_0$$

$$r_2=r_0+\frac{\lambda}{2}\cos\theta_0$$

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}(r_1) + \vec{E}(r_2)$$
$$= -\frac{\mu_0 P_0 \omega^2}{2\pi r_0} \sin\theta_0 \cos(\pi\cos\theta_0) \cos\left(\omega\left(t - \frac{r_0}{c}\right)\right)\hat{\theta}$$

$$\vec{B}_{tot} = \frac{\vec{E}_{tot}}{c} = -\frac{\mu_0 P_0 \omega^2}{2\pi r_0 c} \sin\theta_0 \cos(\pi\cos\theta_0) \cos\left(\omega\left(t - \frac{r_0}{c}\right)\right)\hat{\varphi}$$

$$\vec{g} = \left(\frac{\mu_0 P_0 \omega^2}{2\pi r_0}\right)^2 \frac{1}{c} \sin^2\theta_0 \cos^2(\pi\cos\theta_0) \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{r_0}{c}\right)\right)\hat{r}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \left(\frac{\mu_0 P_0 \omega^2}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{c} \sin^2\theta_0 \cos^2(\pi\cos\theta_0) \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{r_0}{c}\right)\right)\hat{r}$$

$$P = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi^2}\right)\left(\frac{\mu_0^2 P_0^2 \omega^4}{2\pi c}\right) \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{r_0}{c}\right)\right)$$

9-4 在一长度为$2\pi a$的圆形导线中，通一电流$i = I\cos\omega t$。计算辐射场，辐射功率角分布和辐射总功率。假定$\lambda >> a$.。

解：
$$\vec{M} = i\vec{S} = \left(I_0 \cos\omega t\right)\pi a^2 \hat{z}$$

$$\ddot{\vec{M}}^{ret} = -I_0 \pi a^2 \omega^2 \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 \vec{r} \times \ddot{\vec{M}}^{ret}}{4\pi r^2 c} = \frac{I_0 \pi a^2 \omega^2 \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)}{4rc}\hat{\varphi}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{r} \times \vec{E} = -\frac{I_0 \pi a^2 \omega^2 \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)}{4rc^2}\hat{\theta}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \left(\vec{g}\cdot\hat{r}\right) r^2 = \frac{\mu_0 I_0^2 a^4 \omega^4 \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)}{16c^3}\sin^2\theta$$

$$P = \oint_s dP = \frac{\mu_0 \pi I_0^2 a^4 \omega^4 \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)}{6c^3}$$

- 矩形波导的变长分别为a,b，TM波的某个模式的纵向电场分量为 $E_z = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}y\right)\cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{2}\pi}{3}z\right)$ ，其中长度单位是厘米。求（1）截止波长和波导波长。（2）如模式是TM32，求波导尺寸。

（1）由电场的表达式得到: $k_x = k_y = \pi/3,\quad \beta = \sqrt{2}\pi/3$

$$k_c = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{2}\pi/3$$

截止波长 $\lambda_c = \dfrac{2\pi}{k_c} = 3\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$

波导波长 $\lambda_g = \dfrac{2\pi}{\beta} = 3\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$

模式是TM32时，m=3，n=2，对比电磁波表示式有

$$k_x = \frac{m\pi}{a} = \frac{3\pi}{a} = \frac{\pi}{3} \qquad k_y = \frac{n\pi}{b} = \frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{3}$$

所以波导尺寸为$9 \times 6\ \mathrm{cm}^2$

- 已知TE模式的电磁波的表示式为

$$E_x = j\frac{\omega\mu_0}{k_c^2}\frac{n\pi}{b}A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z}$$

$$E_y = -j\frac{\omega\mu_0}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z}$$

$$H_z = A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z}$$

$$H_x = j\frac{\beta}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z}$$

$$H_y = j\frac{\beta}{k_c^2}\frac{n\pi}{b}A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z}$$

其中 $k_c^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$ 。求波导中主模的传输功率

主模是TE10，所以电磁场化简为

$$E_y = -j\frac{\omega\mu_0}{k_c^2}\frac{\pi}{a}A_{10}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-j\beta z}$$

$$H_z = A_{10}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-j\beta z}$$

$$H_x = j\frac{\beta}{k_c^2}\frac{\pi}{a}A_{10}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)e^{-j\beta z}$$

其中 $k_c^2 = (\pi/a)^2, \beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{(2\pi/\lambda)^2 - (\pi/a)^2}$

$$P = \mathrm{Re}\left(\iint \frac{1}{2}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\cdot d\vec{s}\right) = \mathrm{Re}\left(\int_0^a\int_0^b\left(-E_y H_x^*\right)dxdy\right)$$

$$= \frac{a^3 b\mu_0 A_{10}^2\omega}{4\pi^2}\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

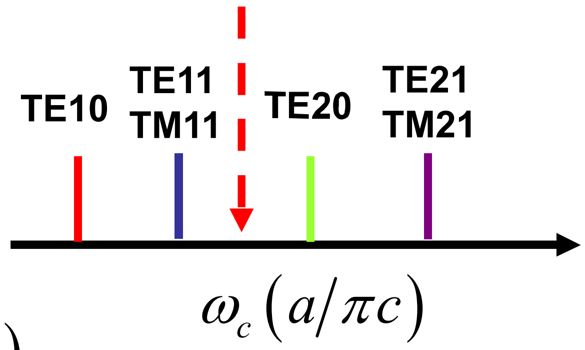
- 为了使方形波导只能传播15GHz模式为TE10，TE01，TE11和TM11的电磁波，求波导边长应设计在什么范围

首先求截止频率

$$k_c^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2=\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(m^2+n^2\right),\quad \omega_c=k_c v$$

TE11和TM11的截止频率 $\omega_{c11}=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{a}c$

TE20等的截止频率 $\omega_{c20}=\dfrac{2\pi}{a}c$



传播条件： $\omega_{c11}<\omega<\omega_{c12}$

所以波导边长应为： $\sqrt{2}\left(\mathrm{cm}\right)<a<2\left(\mathrm{cm}\right)$

- 设计一个谐振频率为10GHz的方形谐振腔。如改用同轴谐振腔实现，求其长度。

$$k^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(m^2 + n^2 + p^2\right) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

$$a = \left(\frac{c\pi}{\omega}\right)\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} = \frac{\sqrt{2}c}{f}$$

10GHz对应的工作波长λ=3cm。同轴线中主模式是TEM，λg=λ。

谐振腔谐振条件是：λg/2，λg/4

- 自由空间中一半径为a=1m的圆形天线中通有f=5MHz的电流I=1A，求其在远区产生的电场强度、磁场强度和辐射功率。已知磁偶极子天线的电场表达式为 $\vec{E}=\hat{\phi}\frac{\eta_0 P_m k^2}{4\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-kr)}$ 式中 $P_m=I\pi a^2, k^2=\omega^2\mu\varepsilon, \eta_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$

由f=5MHz，得波长为60m。天线为磁偶极子天线

远区电场 $\vec{E}=\hat{\phi}\frac{\eta_0 P_m k^2}{4\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-kr)}=\hat{\phi}\frac{1.03}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-kr)}\left(\text{v/m}\right)$

远区磁场 $\vec{H}=\hat{\theta}H_\theta=-\hat{\theta}E_\phi/\eta_0=-\hat{\theta}\frac{2.74\times10^{-3}}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-kr)}\left(\text{A/m}\right)$

辐射功率 $P=\frac{1}{2\eta_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|E\right|^2 r^2\sin\theta d\theta d\phi=0.0118\left(\text{W}\right)$