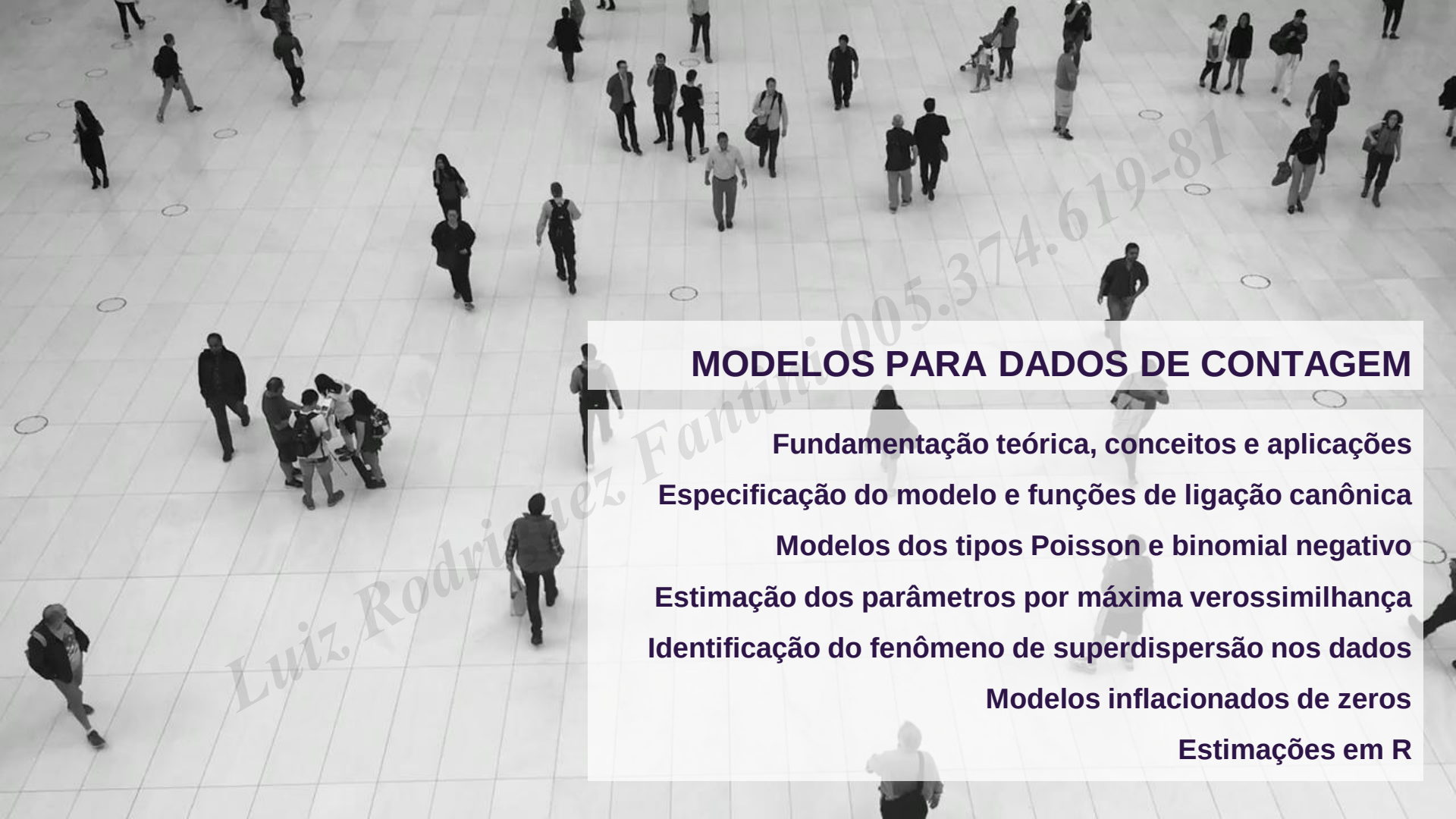
MBA USP ESALQ

Supervised Machine Learning: Modelos de Regressão para Dados de Contagem

Prof. Dr. Luiz Paulo Fávero



MODELOS PARA DADOS DE CONTAGEM

Fundamentação teórica, conceitos e aplicações

Especificação do modelo e funções de ligação canônica

Modelos dos tipos Poisson e binomial negativo

Estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança

Identificação do fenômeno de superdispersão nos dados

Modelos inflacionados de zeros

Estimações em R

Modelos Lineares Generalizados (GLM)

$$\eta_i = \alpha + \beta_1.X_{1i} + \beta_2.X_{2i} + \ldots \beta_k.X_{ki}$$

Modelos lineares generalizados, características da variável dependente e funções de ligação canônica.

Modelo de Regressão	Característica da Variável Dependente	Distribuição	Função de Ligação Canônica (η)
Linear	Quantitativa	Normal	$\hat{Y}$
Com Transformação de Box-Cox	Quantitativa	Normal Após a Transformação	$\frac{\hat{Y}^{\lambda}-1}{\lambda}$
Logística Binária	Qualitativa com 2 Categorias (*Dummy*)	Bernoulli	$\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$
Logística Multinomial	Qualitativa M ($M > 2$) Categorias	Binomial	$\ln\left(\frac{p_m}{1-p_m}\right)$
Poisson	Quantitativa com Valores Inteiros e Não Negativos (Dados de Contagem)	Poisson	$\ln\left(\lambda_{poisson}\right)$
Binomial Negativo	Quantitativa com Valores Inteiros e Não Negativos (Dados de Contagem)	Poisson-Gama	$\ln\left(\lambda_{bneg}\right)$

Siméon Denis Poisson

(1781-1840)

Modelos para Dados de Contagem

Os modelos de regressão Poisson e binomial negativo fazem parte do que é conhecido por modelos de regressão para dados de contagem, e têm por objetivo analisar o comportamento, em função de variáveis preditoras, de uma determinada variável dependente que se apresenta na forma quantitativa, com valores discretos e não negativos. Deve ser definida também a exposição (unidade temporal, espacial, social, etc.).

Modelos para Dados de Contagem: Exemplos e Aplicações

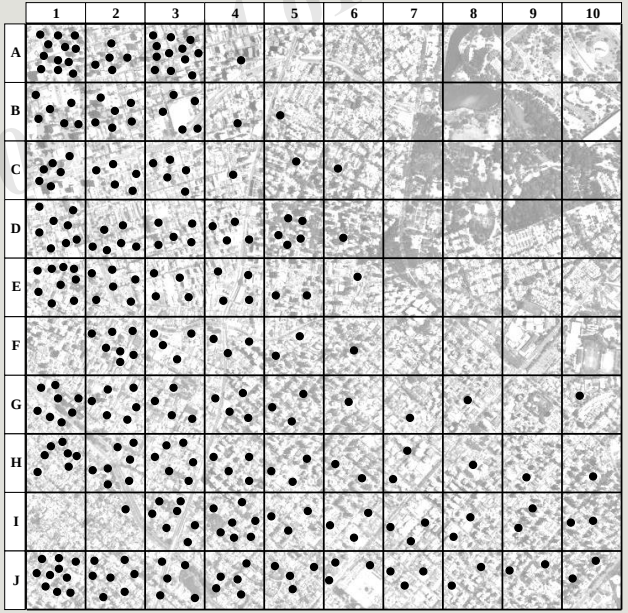
- Avaliação da quantidade de vezes que um grupo de pacientes idosos vai ao médico por ano, em função da idade de cada um deles, do sexo e das características dos seus planos de saúde.

- Estudo sobre a quantidade de ofertas públicas de ações que são realizadas em uma amostra de países desenvolvidos e emergentes em determinado ano, com base em seus desempenhos econômicos, como inflação, taxa de juros, produto interno bruto e taxa de investimento estrangeiro.

  Note que a quantidade de visitas ao médico ou a quantidade de ofertas públicas de ações são as variáveis dependentes nos dois casos, sendo representadas por dados quantitativos que assumem valores discretos, não negativos, e com exposição anual. Ou seja, oferecem dados de contagem.

Modelos para Dados de Contagem: Exemplos e Aplicações

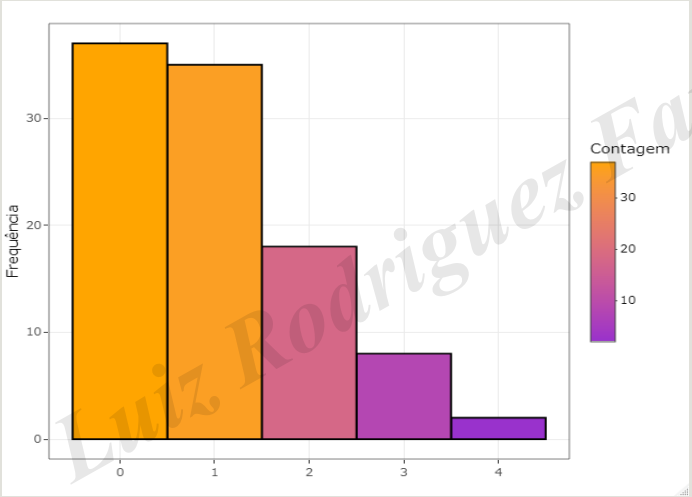
Ecologia

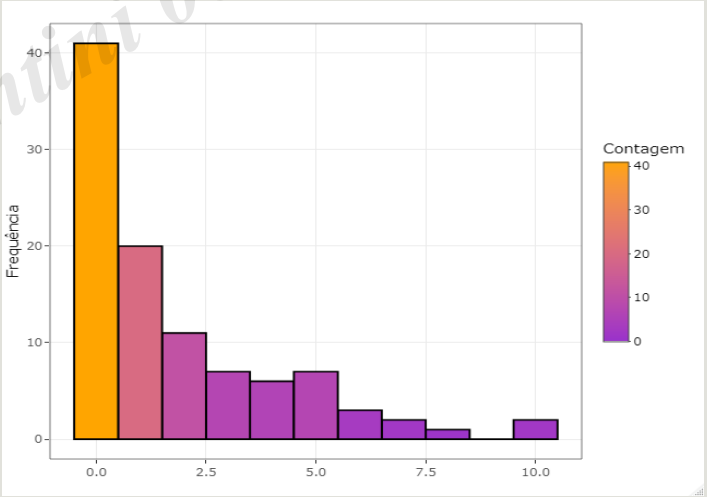


Mercado Imobiliário

Distribuições Poisson e Binomial Negativa

$$\ln\left(\hat{Y}_i\right) = \alpha + \beta_1.X_{1i} + \beta_2.X_{2i} + ... + \beta_k.X_{ki}$$



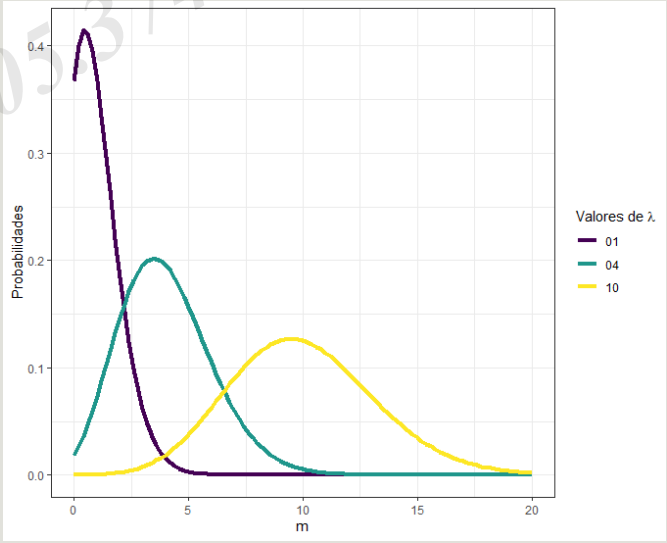


A Distribuição Poisson

Determinada observação *i* (*i* = 1, 2, ..., *n*, em que *n* é o tamanho da amostra) possui a seguinte probabilidade de ocorrência de uma contagem *m* em uma determinada exposição (período, área, região, entre outros exemplos):

$$p(Y_i = m) = \frac{e^{-\lambda_i} . \lambda_i^m}{m!}$$

em que λ é o número esperado de ocorrências ou a taxa média estimada de incidência do fenômeno em estudo para uma dada exposição.



A Distribuição Poisson e o Modelo Poisson

Média: $$E(Y) = \sum_{m=0}^{\infty} m.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{m}}{m!} = \lambda.\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{m-1}}{(m-1!)} = \lambda.1 = \lambda$$

Variância: $Var(Y) = \sum_{m=0}^{\infty} m.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{m}}{m!}.(m-\lambda)^2 = \sum_{m=0}^{\infty} m.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{m}}{m!}.(m^2 - 2.m.\lambda + \lambda^2)$ $\lambda^2.\sum_{m=2}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{m-2}}{(m-2!)} + \lambda.\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{m-1}}{(m-1!)} - \lambda^2 = \lambda$

Modelo Geral:

$$\ln\left(\hat{Y}_i\right) = \ln\left(\lambda_{poisson_i}\right) = \alpha + \beta_1.X_{1i} + \beta_2.X_{2i} + \ldots + \beta_k.X_{ki}$$


EXCEL
R

Teste de Superdispersão

$$Y_i^* = \frac{\left[\left(Y_i - \lambda_{poisson_i}\right)^2 - Y_i\right]}{\lambda_{poisson_i}}$$

$$Y_i^* = \beta \cdot \lambda_{poisson_i}$$

Cameron e Trivedi (1990) salientam que, se ocorrer o fenômeno da superdispersão nos dados, o parâmetro estimado β deste **modelo auxiliar sem intercepto** será estatisticamente diferente de zero, a determinado nível de significância (5%, usualmente).

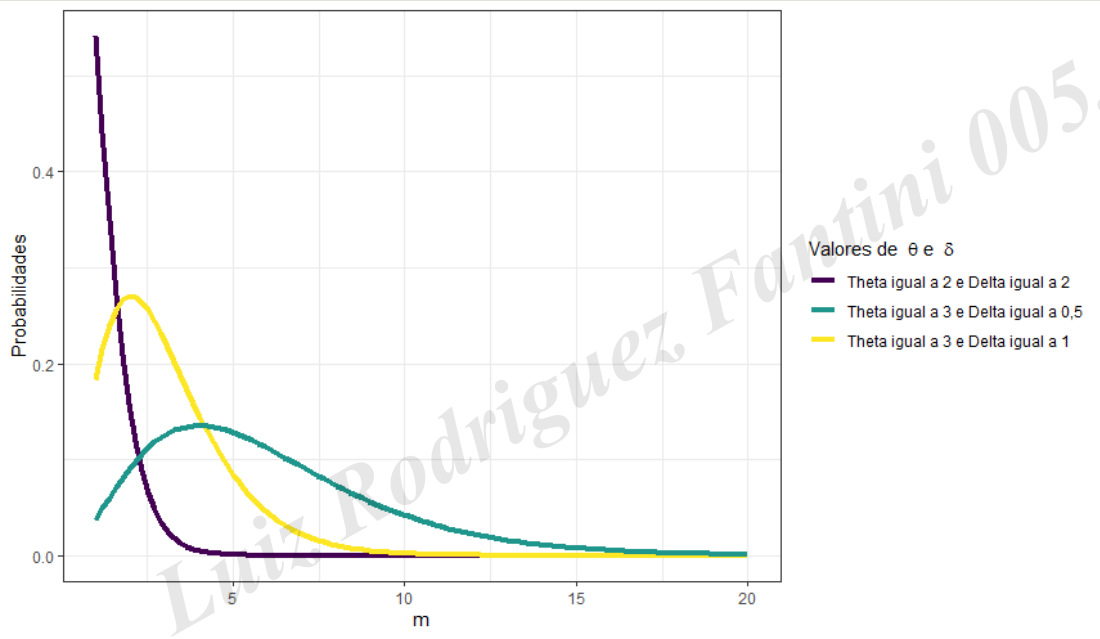
A Distribuição Poisson-Gama ou Binomial Negativa

Para uma determinada observação *i* (*i* = 1, 2, ..., *n*, em que *n* é o tamanho da amostra), a função da distribuição de probabilidade da variável dependente *Y* será dada por:

$$p\left(Y_i = m\right) = \frac{\delta^{\theta}.m_i^{\theta-1}.e^{-m_i.\delta}}{\left(\theta-1\right)!}$$

em que θ é chamado de parâmetro de forma ($\theta > 0$) e δ é chamado de parâmetro de taxa de decaimento ($\delta > 0$).

A Distribuição Poisson-Gama ou Binomial Negativa



- Média:

$$E(Y) = \lambda_{bneg}$$

- Variância:

$$Var(Y) = \lambda_{bneg} + \phi \cdot \left(\lambda_{bneg}\right)^2$$

$$\phi = \frac{1}{\theta}$$

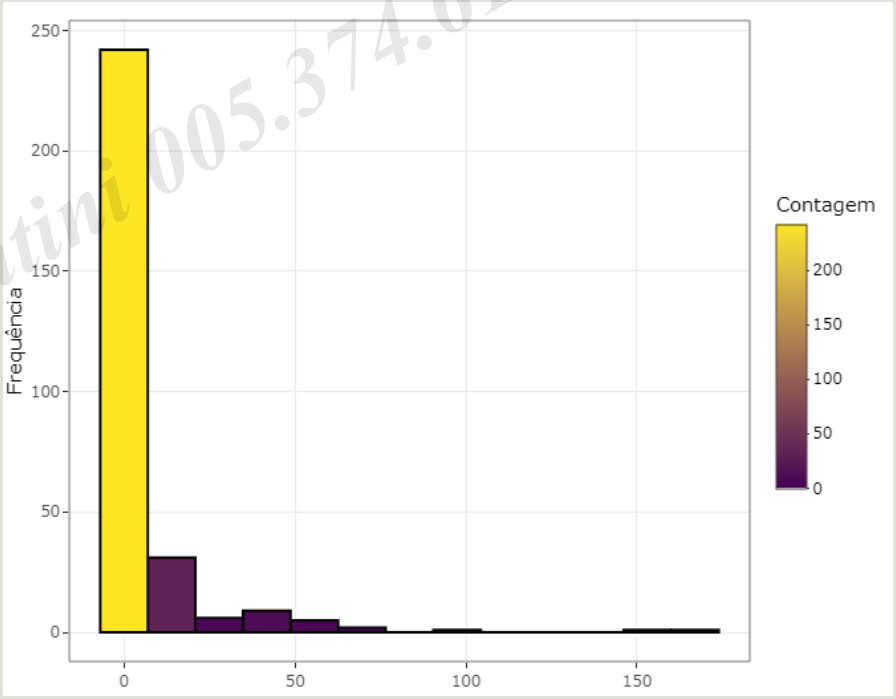
Modelos NB2

O Modelo Poisson-Gama ou Binomial Negativo

$$\ln\left(\hat{Y}_i\right) = \ln\left(\lambda_{bneg_i}\right) = \alpha + \beta_1.X_{1i} + \beta_2.X_{2i} + \ldots + \beta_k.X_{ki}$$


EXCEL
R

Modelos Inflacionados de Zeros



Escolha do Modelo

Verificação	Modelo de Regressão para Dados de Contagem			
	Poisson	**Binomial Negativo**	**Poisson Inflacionado de Zeros (ZIP)**	**Binomial Negativo Inflacionado de Zeros (ZINB)**
Superdispersão nos Dados da Variável Dependente	Não	Sim	Não	Sim
Quantidade Excessiva de Zeros na Variável Dependente	Não	Não	Sim	Sim

Modelos Inflacionados de Zeros

São considerados uma combinação entre um modelo para dados de contagem e um modelo para dados binários, já que são utilizados para investigar as razões que levam a determinada quantidade de ocorrências (contagens) de um fenômeno, bem como as razões que levam (ou não) à ocorrência propriamente dita deste fenômeno, independentemente da quantidade de contagens observadas.

Enquanto um modelo Poisson inflacionado de zeros é estimado a partir da **combinação de uma distribuição Bernoulli com uma distribuição Poisson**, um modelo binomial negativo inflacionado de zeros é estimado por meio da **combinação de uma distribuição Bernoulli com uma distribuição Poisson-Gama**.

LAMBERT, D. Zero-inflated Poisson regression, with an application to defects in manufacturing. **Technometrics**, v. 34, n. 1, p. 1-14, 1992.

Modelos Inflacionados de Zeros

A definição sobre a existência ou não de uma quantidade excessiva de zeros na variável dependente *Y* é elaborada por meio de um teste específico, conhecido por **teste de Vuong** (1989), que representará um importante *output* a ser analisado na estimação de modelos de regressão para dados de contagem, quando houver a suspeita de existência de inflação de zeros.

VUONG, Q. H. Likelihood ratio tests for model selection and non-nested hypotheses. **Econometrica**, v. 57, n. 2, p. 307-333, 1989.

Modelos Inflacionados de Zeros do Tipo Poisson (ZIP)

Em relação especificamente aos **modelos de regressão Poisson inflacionados de zeros**, podemos definir que, enquanto a **probabilidade *p* de ocorrência de nenhuma contagem** para dada observação *i* (*i* = 1, 2, ..., *n*, em que *n* é o tamanho da amostra), ou seja, $\boldsymbol{p(Y_i = 0)}$, é calculada levando-se em consideração a soma de um componente dicotômico com um componente de contagem e, portanto, deve-se definir a probabilidade p_{logit} de não ocorrer nenhuma contagem devido exclusivamente ao componente dicotômico, a **probabilidade *p* de ocorrência de determinada contagem *m*** (*m* = 1, 2, ...), ou seja, $\boldsymbol{p(Y_i = m)}$, segue a própria expressão da probabilidade da distribuição Poisson, multiplicada por $(1 - p_{logit})$.

Modelos Inflacionados de Zeros do Tipo Poisson (ZIP)

$$\begin{cases} p\left(Y_i = 0\right) = p_{logit_i} + \left(1 - p_{logit_i}\right).e^{-\lambda_i} \\ p\left(Y_i = m\right) = \left(1 - p_{logit_i}\right).\dfrac{e^{-\lambda_i}.\lambda_i^m}{m!}, \qquad m = 1,\ 2,\ \ldots \end{cases}$$

$$p_{logit_i} = \frac{1}{1 + e^{-\left(\gamma + \delta_1.W_{1i} + \delta_2.W_{2i} + \ldots + \delta_q.W_{qi}\right)}}$$

$$\lambda_{poisson_i} = e^{\left(\alpha + \beta_1.X_{1i} + \beta_2.X_{2i} + \ldots + \beta_k.X_{ki}\right)}$$

Os modelos de regressão Poisson inflacionados de zeros apresentam dois processos geradores de zeros, sendo um devido à distribuição binária (neste caso, são gerados os chamados zeros estruturais) e outro devido à distribuição Poisson (nesta situação, são gerados dados de contagem, entre os quais os chamados zeros amostrais).

Modelos Inflacionados de Zeros do Tipo Binomial Negativo (ZINB)

Já em relação aos **modelos de regressão do tipo binomial negativo inflacionados de zeros**, podemos definir que, enquanto a **probabilidade *p* de ocorrência de nenhuma contagem** para dada observação *i*, ou seja, $\boldsymbol{p(Y_i = 0)}$, é também calculada levando-se em consideração a soma de um componente dicotômico com um componente de contagem, a **probabilidade *p* de ocorrência de determinada contagem *m*** (*m* = 1, 2, ...), ou seja, $\boldsymbol{p(Y_i = m)}$, segue agora a expressão da probabilidade da distribuição Poisson-Gama.

Modelos Inflacionados de Zeros do Tipo Binomial Negativo (ZINB)

$$\begin{cases} p(Y_i = 0) = p_{logit_i} + (1 - p_{logit_i}) \cdot \left(\dfrac{1}{1 + \theta^{-1} . \lambda_{bneg_i}} \right)^{\theta} \\ p(Y_i = m) = (1 - p_{logit_i}) \cdot \left[\dfrac{\delta^{\theta} . m_i^{\theta - 1} . e^{-m_i . \delta}}{(\theta - 1)!} \right], \quad m = 1,\ 2,\ \ldots \end{cases}$$

$$p_{logit_i} = \frac{1}{1 + e^{-(\gamma + \delta_1 . W_{1i} + \delta_2 . W_{2i} + \ldots + \delta_q . W_{qi})}}$$

$$\lambda_{bneg_i} = e^{(\alpha + \beta_1 . X_{1i} + \beta_2 . X_{2i} + \ldots + \beta_k . X_{ki})}$$


EXCEL
R


MUITO OBRIGADO!
Prof. Dr. Luiz Paulo Fávero
LinkedIn