# 电磁学&近代物理 物竞复习

## 一、电学

### 1.基本微分方程组

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{D}&=\rho_f\\ \nabla\times\boldsymbol{E}&=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}&=0\\ \nabla\times\boldsymbol{H}&=\boldsymbol{j}_f+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

### 2.静电场极化

#### (1).介质球柱的极化

首先给出静电场的拉普拉斯方程：

$$\nabla^2\varphi=0$$

以及球坐标系下轴对称拉普拉斯方程的通解：

$$\varphi=\sum_n\left(A_nr^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

其中 $P_n(x)$ 是勒让德多项式。
设球外电势分布为 $\varphi_1$，设球内电势分布为 $\varphi_2$.
根据基本微分方程组，我们可以给出本问题的边值关系：

$$\begin{aligned}\varphi_1|_R&=\varphi_2|_R\\ \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\bigg|_R&=\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\bigg|_R\end{aligned}$$

以及边界条件：

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\varphi_1&=-E_0r\cos\theta\\ \lim_{r\to0}\varphi_2&=finity\end{aligned}$$

将通解带入边界条件，有：

$$\begin{aligned}\varphi_1&=-E_0r\cos\theta+\sum_n\frac{B_{1n}}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta)\\ \varphi_2&=\sum_nA_{2n}r^nP_n(\cos\theta)\end{aligned}$$

再将通解带入边值关系，有：

$$-E_0R\cos\theta+\sum_n\frac{B_{1n}}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)=\sum_nA_{2n}R^nP_n(\cos\theta)$$

以及：

$$\varepsilon_1\left(-E_0\cos\theta-\sum_n(n+1)\frac{B_{1n}}{R^{n+2}}P_n(\cos\theta)\right)=\varepsilon_2\left(\sum_nnA_{2n}R^{n-1}P_n(\cos\theta)\right)$$

依据勒让德多项式的正交性，进行对比系数，有：

$$\begin{aligned}-E_0+\frac{B_{11}}{R^3}&=A_{21}\\ -\varepsilon_1\left(E_0+2\frac{B_{11}}{R^3}\right)&=\varepsilon_2A_{21}\end{aligned}$$

联立解得：

$$B_{11}=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}E_0R^3$$
$$A_{21}=-\frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}E_0$$

于是有：

$$\varphi_1=-E_0r\cos\theta+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}\frac{R^3}{r^2}E_0\cos\theta$$
$$\varphi_2=-\frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}E_0r\cos\theta$$

**以上过程演示了简单情况下拉普拉斯方程的求解。**
**接下来我们不加证明的给出其余结论方便记忆。**

### (2).介质柱在匀强场的极化

球坐标系下轴对称体系拉普拉斯方程的通解为：

$$\varphi=C_0+D_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right)\left(C_nr^n+D_nr^{-n}\right)$$

基于此通解，我们可以得到介质柱在匀强场中的极化：

$$\varphi_1=-E_0r\cos\theta+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\frac{R^2}{r}E_0\cos\theta$$
$$\varphi_2=-\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}E_0r\cos\theta$$

### (3).导体椭球的电容

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2-c^2}}{F\left(\arcsin\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}},\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\right)}$$

其中 $F(\phi,k)$ 为第一类椭圆积分。
*特殊情况*:
旋转椭球面的电容：

$$C=\begin{cases}\dfrac{8\pi\varepsilon_0\sqrt{b^2-a^2}}{\ln\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{b-\sqrt{b^2-a^2}}} & b>a\\[2ex] \dfrac{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2-b^2}}{\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}} & b<a\end{cases}$$

## 2.轴对称磁场的相关性质

考虑与 $\theta$ 无关的轴对称磁场，根据磁场散度为零，我们有：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho B_\rho)}{\partial\rho}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0$$

认为 $\dfrac{\partial B_z}{\partial z}$ 近似不变，我们就有：

$$B_\rho\approx-\frac{\rho}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

该关系在磁镜等情况下十分常用。

## 3.偶极子相关

偶极子产生的势与场：

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$$
$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}(2\cos\theta\hat{r}+\sin\theta\hat{\theta})$$

偶极子在外场中的性质：

$$E_p=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}\quad(\text{力偶矩})$$

## 4.介质气体极化率的微观解释

考虑一个充满分子小球的气体，对该气体施加一个外场，则其中的每个小球都会受到一个场的作用而产生极化，于是整个气体宏观上便会产生极化，考虑研究宏观的极化性质与微观的粒子极化之间的关系。

假设分子数密度为 $n$，每个分子小球在感受到外电场后会产生偶极矩，满足：

$$\boldsymbol{p}=\alpha\boldsymbol{E_{micro}}$$

依据极化强度矢量的定义，有：

$$\boldsymbol{P}=\frac{N\boldsymbol{p}}{V}=n\boldsymbol{p}$$

以及宏观极化性质：

$$\boldsymbol{P}=\chi\epsilon_0\boldsymbol{E_{macro}}$$

认为小球所感受到的电场与小球本身的电场叠加后产生宏观外电场，于是有：

$$\boldsymbol{E_{micro}}-\frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}=\boldsymbol{E_{macro}}$$

于是我们有：

$$\boldsymbol{E_{micro}}-\frac{n\alpha\boldsymbol{E_{micro}}}{3\varepsilon_0}=\frac{n\alpha\boldsymbol{E_{micro}}}{\chi\varepsilon_0}$$

得出：

$$\chi=\frac{n\alpha}{(1-\frac{n\alpha}{3\varepsilon_0})\varepsilon_0}$$

认为分子是导体球，带入 $\alpha=4\pi R^3\varepsilon_0$，有：

$$\chi=\frac{4\pi R^3 n}{1-\frac{4\pi R^3 n}{3}}$$

## 5.磁电类比

以上所有公式中，进行如下替换，即可适用于静磁场。

$$\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu}$$
$$\varepsilon\to\mu$$
$$\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p_m}=\mu_0\boldsymbol{m}$$
$$\boldsymbol{P}\to\boldsymbol{P_m}=\mu_0\boldsymbol{M}$$

## 6.电磁场的洛伦兹变换

$$E_x'=E_x$$
$$E_y'=\gamma(E_y-\beta B_z)$$
$$E_z'=\gamma(E_z+\beta B_y)$$
$$B_x'=B_x$$
$$B_y'=\gamma\left(B_y+\beta\frac{E_z}{c}\right)$$
$$B_z'=\gamma\left(B_z-\beta\frac{E_y}{c}\right)$$

## 7.等离子相关

### (1).屏蔽库伦势

考虑热平衡下的等离子体中放置一个静止点电荷，其位置为 $\boldsymbol{x}=0$，电荷密度 $\rho=q\delta(\boldsymbol{x})$，记等离子体中正离子数密度为 $n_p(\boldsymbol{x})$，电子数密度 $n_e(\boldsymbol{x})$，设正离子带电量 $Ze$，满足 $n_pZe=n_{e0}$.

依据泊松方程，有:

$$\varepsilon_0\nabla^2\varphi=-n_pZe+n_ee-q\delta(\boldsymbol{x})$$

一般情况下忽略正离子运动，并认为电子密度满足玻尔兹曼分布，有:

$$n_e=n_{e0}\exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right)\sim n_{e0}\left(1+\frac{e\varphi}{kT}\right)$$

带回方程，得到:

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{\lambda^2}\right)\varphi=-\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{x})$$

其中有 $\lambda^2=\dfrac{kT\varepsilon_0}{n_{e0}e^2}$.

上式为标准的亥姆霍兹方程，考虑到方程右侧是Delta函数，其解显然为亥姆霍兹方程的格林函数，即:

$$G(\boldsymbol{x})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right)$$

称为屏蔽库伦势。

于是，依据格林函数法，我们可以得到等离子体内任意额外电荷分布 $\rho_e$ 产生的电势:

$$\varphi=\int\frac{\rho_e(\boldsymbol{x'})}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{x'}-\boldsymbol{x}|}\exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x'}-\boldsymbol{x}|}{\lambda}\right)d^3x'$$

### (2).等离子体振荡

忽略正离子运动，设电子平均运动速度为 $\boldsymbol{v}$，有:

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}+\nabla\cdot(n\boldsymbol{v})=0\\ m\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+m(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-e\boldsymbol{E}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{E}=-(n-n_{e0})\frac{e}{\varepsilon_0}\end{gathered}$$

认为 $n'=(n-n_0)$ 与 $\boldsymbol{v}$ 是小量，线性化并消元后有:

$$\frac{\mathrm{d}^2n'}{\mathrm{d}t^2}+\frac{e^2n_{e0}}{m\varepsilon_0}n'=0$$

于是有:

$$\omega=\sqrt{\frac{e^2n_{e0}}{m\varepsilon_0}}$$

# 二、近代物理

## 1.康普顿散射

结论公式:

$$\lambda'-\lambda=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\varphi)$$

## 2.氢原子能级

### (1).里德伯常量、玻尔半径

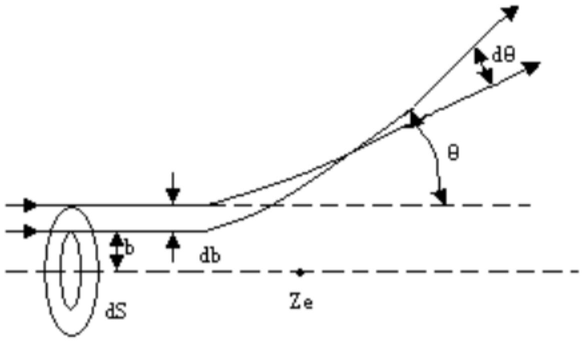
$$R_H=\frac{m_ee^4}{8\varepsilon_0^2ch^3}=1.097373157\times10^7(m^{-1})a_0=\frac{\hbar}{m_ec\alpha}$$

其中 $\alpha$ 为精细结构常数，有 $\alpha=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c\hbar}$.

### (2).氢原子能级

$$\frac{1}{\lambda}=R_H\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)$$

## 3.微分散射界面与卢瑟福公式




$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{1}{16}\left(\frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 E}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}$$

其中 $E=\frac{1}{2}mv_0^2$ 为入射粒子动量。