电磁学&近代物理 物竞复习

一、电学

1.基本微分方程组

$$egin{aligned}
abla \cdot oldsymbol{D} &=
ho_f \
abla imes oldsymbol{E} &= oldsymbol{B} \
abla \cdot oldsymbol{B} &= 0 \
abla imes oldsymbol{H} &= oldsymbol{j}_f + rac{\partial oldsymbol{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

2.静电场极化

(1).介质球柱的极化

首先给出静电场的拉普拉斯方程:

$$abla^2 \varphi = 0$$

以及球坐标系下轴对称拉普拉斯方程的通解:

$$arphi = \sum_n igg(A_n r^n + rac{B_n}{r^{n+1}}igg) P_n(\cos heta)$$

其中 $P_n(x)$ 是勒让德多项式。

设球外电势分布为 φ_1 , 设球内电势分布为 φ_2 .

根据基本微分方程组,我们可以给出本问题的边值关系:

$$egin{aligned} arphi_1|_R &= arphi_2|_R \ arepsilon_1 rac{\partial arphi_1}{\partial r}igg|_R &= arepsilon_2 rac{\partial arphi_2}{\partial r}igg|_R \end{aligned}$$

以及边界条件:

$$\lim_{r o\infty}arphi_1=-E_0r\cos heta \ \lim_{r o0}arphi_2=finity$$

将通解带入边界条件,有:

$$egin{aligned} arphi_1 &= -E_0 r\cos heta + \sum_n rac{B_{1n}}{r^{n+1}} P_n(\cos heta) \ arphi_2 &= \sum_n A_{2n} r^n P_n(\cos heta) \end{aligned}$$

再将通解带入边值关系,有:

$$-E_0R\cos heta+\sum_nrac{B_{1n}}{R^{n+1}}P_n(\cos heta)=\sum_nA_{2n}R^nP_n(\cos heta)$$

以及:

$$arepsilon_1\left(-E_0\cos heta-\sum_n(n+1)rac{B_{1n}}{R^{n+2}}P_n(\cos heta)
ight)=arepsilon_2\left(\sum_nnA_{2n}R^{n-1}P_n(\cos heta)
ight)$$

依据勒让德多项式的正交性,进行对比系数,有:

$$-E_0 + \frac{B_{11}}{R^3} = A_{21}$$
$$-\varepsilon_1 \left(E_0 + 2 \frac{B_{11}}{R^3} \right) = \varepsilon_2 A_{21}$$

联立解得:

$$B_{11} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} E_0 R^3$$

$$A_{21} = -\frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} E_0$$

于是有:

$$arphi_1 = -E_0 r \cos \theta + rac{arepsilon_2 - arepsilon_1}{arepsilon_2 + 2arepsilon_1} rac{R^3}{r^2} E_0 \cos heta$$
 $arphi_2 = -rac{3arepsilon_1}{arepsilon_2 + arepsilon_1} E_0 r \cos heta$

以上过程演示了简单情况下拉普拉斯方程的求解。接下来我们不加证明的给出其余结论方便记忆。

(2).介质柱在匀强场的极化

球坐标系下轴对称体系拉普拉斯方程的通解为:

$$arphi = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n heta + B_n \sin n heta
ight) \left(C_n r^n + D_n r^{-n}
ight)$$

基于此通解, 我们可以得到介质柱在匀强场中的极化:

$$arphi_1 = -E_0 r \cos \theta + rac{arepsilon_2 - arepsilon_1}{arepsilon_2 + arepsilon_1} rac{R^2}{r} E_0 \cos \theta$$
 $arphi_2 = -rac{2arepsilon_1}{arepsilon_2 + arepsilon_1} E_0 r \cos \theta$

(3).导体椭球的电容

$$C = rac{4\piarepsilon_{0}\sqrt{a^{2}-c^{2}}}{F\left(rcsin\sqrt{rac{a^{2}-c^{2}}{a^{2}}},\sqrt{rac{a^{2}-b^{2}}{a^{2}-c^{2}}}
ight)}$$

其中 $F(\phi,k)$ 为第一类椭圆积分。

特殊情况:

旋转椭球面的电容:

$$C = \begin{cases} \frac{8\pi\varepsilon_0\sqrt{b^2 - a^2}}{\ln\frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{b - \sqrt{b^2 - a^2}}} & b > a \\ \\ \frac{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2 - b^2}}{\arcsin\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}} & b < a \end{cases}$$

2.轴对称磁场的相关性质

考虑与 θ 无关的轴对称磁场,根据磁场散度为零,我们有:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho B_{\rho})}{\partial \rho} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

认为 $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ 近似不变,我们就有:

$$B_{
ho} pprox -rac{
ho}{2}rac{\partial B_z}{\partial z}$$

该关系在磁镜等情况下十分常用。

3.偶极子相关

偶极子产生的势与场:

$$egin{align} arphi &= rac{1}{4\piarepsilon_0}rac{m{p}\cdotm{r}}{r^3} \ m{E} &= rac{1}{4\piarepsilon_0}rac{p}{r^3}(2\cos heta\hat{r} + \sin heta\hat{ heta}) \ \end{gathered}$$

偶极子在外场中的性质:

$$E_p = -oldsymbol{p} \cdot oldsymbol{E} \ oldsymbol{F} = (oldsymbol{p} \cdot
abla) oldsymbol{E} \ oldsymbol{M} = oldsymbol{p} imes oldsymbol{E} \quad ($$
力偶矩 $)$

4.介质气体极化率的微观解释

考虑一个充满分子小球的气体,对该气体施加一个外场,则其中的每个小球都会受到一个场的作用而产生极化,于是整个气体宏观上便会产生极化, 考虑研究宏观的极化性质与微观的粒子极化之间的关系。

假设分子数密度为 n,每个分子小球在感受到外电场后会产生偶极矩,满足:

$$p = \alpha E_{micro}$$

依据极化强度矢量的定义,有:

$$oldsymbol{P} = rac{Noldsymbol{p}}{V} = noldsymbol{p}$$

以及宏观极化性质:

$$P = \chi \epsilon_0 E_{macro}$$

认为小球所感受到的电场与小球本身的电场叠加后产生宏观外电场,于是有:

$$m{E_{micro}} - rac{m{P}}{3arepsilon_0} = m{E_{macro}}$$

于是我们有:

$$\boldsymbol{E_{micro}} - \frac{n\alpha\boldsymbol{E_{micro}}}{3\varepsilon_0} = \frac{n\alpha\boldsymbol{E_{micro}}}{\chi\varepsilon_0}$$

得出:

$$\chi = \frac{n\alpha}{(1 - \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0})\varepsilon_0}$$

认为分子是导体球, 带入 $\alpha = 4\pi R^3 \varepsilon_0$, 有:

$$\chi = \frac{4\pi R^3 n}{1 - \frac{4\pi R^3 n}{3}}$$

5.磁电类比

以上所有公式中, 进行如下替换, 即可适用于静磁场。

$$egin{aligned} m{E} &
ightarrow m{H} = rac{m{B}}{\mu} \ m{arepsilon} &
ho m{p}_{m{m}} = \mu_0 m{m} \ m{P} &
ightarrow m{P}_{m{m}} = \mu_0 m{M} \end{aligned}$$

6.电磁场的洛伦兹变换

$$E'_x = E_x$$

$$E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z)$$

$$E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y)$$

$$B'_x = B_x$$

$$B'_y = \gamma \left(B_y + \beta \frac{E_z}{c}\right)$$

$$B'_z = \gamma \left(B_z - \beta \frac{E_y}{c}\right)$$

7.等离子相关

(1).屏蔽库伦势

考虑热平衡下的等离子体中放置一个静止点电荷,其位置为 ${m x}=0$,电荷密度 $\rho=q\delta({m x})$,记等离子体中正离子数密度为 $n_p({m x})$,电子数密度 $n_e({m x})$,设正离子带电量 Ze,满足 $n_pZe=n_{e0}$.

依据泊松方程,有:

$$arepsilon_0
abla^2 arphi = -n_p Z e + n_e e - q \delta(oldsymbol{x})$$

一般情况下忽略正离子运动,并认为电子密度满足玻尔兹曼分布,有:

$$n_e = n_{e0} \exp\left(rac{earphi}{kT}
ight) \sim n_{e0} \left(1 + rac{earphi}{kT}
ight)$$

带回方程,得到:

$$igg(
abla^2 - rac{1}{\lambda^2}igg)arphi = -rac{q}{arepsilon_0}\delta(m{x})$$

其中有 $\lambda^2=rac{kTarepsilon_0}{n_{e0}e^2}.$

上式为标准的亥姆霍兹方程,考虑到方程右侧是Delta函数,其解显然为亥姆霍兹方程的格林函数,即:

$$G(oldsymbol{x}) = rac{q}{4\piarepsilon_0 r} \mathrm{exp}\left(-rac{r}{\lambda}
ight)$$

称为屏蔽库伦势。

于是,依据格林函数法,我们可以得到等离子体内任意额外电荷分布 ρ_e 产生的电势:

$$arphi = \int rac{
ho_e(oldsymbol{x'})}{4\piarepsilon_0 |oldsymbol{x'}-oldsymbol{x}|} \exp\left(-rac{|oldsymbol{x'}-oldsymbol{x}|}{\lambda}
ight) d^3x'$$

(2).等离子体振荡

忽略正离子运动,设电子平均运动速度为 v,有:

$$egin{aligned} rac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} +
abla \cdot (noldsymbol{v}) &= 0 \ mrac{\partial oldsymbol{v}}{\partial t} + m(oldsymbol{v} \cdot
abla) oldsymbol{v} &= -eoldsymbol{E} \
abla \cdot oldsymbol{E} &= -(n-n_{e0})rac{e}{arepsilon_0} \end{aligned}$$

认为 $n' = (n - n_0)$ 与 v 是小量,线性化并消元后有:

$$rac{\mathrm{d}^2 n'}{\mathrm{d}t^2} + rac{e^2 n_{e0}}{m arepsilon_0} n' = 0$$

于是有:

$$\omega = \sqrt{rac{e^2 n_{e0}}{m arepsilon_0}}$$

二、近代物理

1.康普顿散射

结论公式:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi)$$

2.氢原子能级

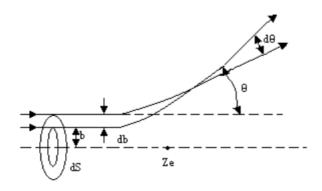
(1).里德伯常量、玻尔半径

$$R_{H} = rac{m_{e}e^{4}}{8arepsilon_{0}^{2}ch^{3}} = 1.097373157 imes 10^{7}(m^{-1})a_{0} = rac{\hbar}{m_{e}clpha}$$

(2).氢原子能级

$$rac{1}{\lambda} = R_H \left(rac{1}{n^2} - rac{1}{m^2}
ight)$$

3.微分散射界面与卢瑟福公式



$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{16} \left(\frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}$$

其中 $E=rac{1}{2}mv_0^2$ 为入射粒子动量。