组合数学复习提纲

SYSU Ziyue Fan 2020.11.03

Chapter1 计数的基本原则

加法原则

若$A_1,A_2,\cdots,A_n$是互不相交的有穷集，则$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|$。

Chapter2 排列与组合

一、排列

$$P(n,r)=A_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

二、组合

$$C(n,r)=\mathrm{C}_n^r=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{A_n^r}{r!}=\binom{n}{n-r}$$

三、二项式定理

$$\begin{aligned}(x+y)^n=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}x^{(n-i)}y^i\\ =\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{n}y^n\end{aligned}$$

其中，$\binom{n}{i}$为二项式系数。

四、组合数恒等式

1. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^k$
    - 令$x=y=1$，则$(x+y)^n=2^n$，再运用二项式定理即证。
2. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$
    - 令$x=y=$0，则$(x+y)^n=0$，再运用二项式定理即证。
3. $\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}=3^k$
    - 令$x=1,y=2$，则$(x+y)^n=3^n$，再运用二项式定理即证。
4. $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$
    - 令$x=1$，再在两边对y求导，注意此时$k=0$项为不含y的常数项，因此在求导时被消为0，故在等式中k从1开始。之后再令$y=1$即证。
5. （Pascal等式）$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$

- 利用组合证明：令集合$|S|=n+1$，在S中直接选k个元素，即$\binom{n+1}{k}$。或将集合任意分为大小为n和1的两份，在大小为n的集合中选取k个元素即$\binom{n}{k}$；或在大小为n的集合中先选$k-1$个，再选取大小为1的集合中的元素，即$\binom{n}{k-1}$。
- 常用该定理进行组合数相加形式的化简。

6. （Vandermonde等式）$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{r-k}+\binom{n}{k}$

五、在n种元素中取r个允许重复的组合

从n个元素的集合中取允许重复的r组合的方案数为

$$\binom{n+r-1}{r}=\binom{n+r-1}{n-1}$$

- 实际上，假设有7种钱币（无限数量），从这些钱币中拿出5个，则相当于拿出6个（$6=7-1$）隔板和5个球进行排列。由于隔板和球不可区分，因此先在这11个空位中选5个位置填球，剩下的空位就自动填为隔板了，故最后的方案数为$\binom{6+5-1}{5}$种。
- 更一般地，有n个变量（$x_1,x_2,\cdots,x_n$），这些变量的和为r，限定$\forall i,x_i\geqslant 0$（相当于在钱币中可以取0个），则最后解的数量为$\binom{n+r-1}{r}$个。

六、k种不可区别的元素排列

对k种元素，分别有n_k个不可区别的对象，总计n个元素（$\sum_{i=1}^{k}n_i=n$）。这些元素在一起的排列方案总数为

$$\binom{n}{n_1}\cdot\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

- 利用具体数值摆开组合数公式，将会很容易看出来化简过程。

七、将小球放入盒子中的模型

1. 将可区别的小球放入可区别的盒子中（需要指定盒子中放几个小球），同6理。
2. 将不可区别的小球放入可区别的盒子中（允许有空盒），同5理。
3. 其余情况太过复杂，在此处不作讨论。

Chapter3 容斥原理与鸽笼原理

一、容斥原理

1. 两个集合的并的容斥原理

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

2. 三个集合的并的容斥原理

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

3. 有否定形式的容斥原理

   首先由De Morgan律，有

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$
$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

   因此有（以三个集合为例）

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|=N-|A_1\cup A_2\cup A_3|$$

再使用三个集合的并的容斥原理即可。

二、利用容斥原理求方程组非负整数解的数目（一般为$\geqslant$）

1. 未知数的解有下界

   先换元，令$y_i = x_i - k$，即由$x_i \geqslant k$变换到$y_i \geqslant 0$，对等式右边的和进行相应修改（千万不要弄错加减），再利用§2.5的知识求解。

2. 未知数的解有上界

   设$P_i : x_i \geqslant k$，则有$\overline{P_i} : x_i < k$。利用容斥原理，即$N(\overline{P_1}\,\overline{P_2}\,\overline{P_3}) = N - N(P_1 \cup P_2 \cup P_3) = \cdots$，再通过1中方法算$N(P_1 \cup P_2 \cup P_3)$。

3. 未知数的解有上界和下界

   先换元，令$y_i = x_i - k$，即由$k \leqslant x_i \leqslant k'$变换到$0 \leqslant x_i \leqslant k' - k$上，再通过结合1和2的方法完成求解。注意到若存在$x_i \geq m$，则就先在右侧减去$m$，再在剩下的按1的后面部分求解。

三、利用容斥原理求（不）被整除的整数个数

1. 若题设要求在$1 \sim M$中被k整除的个数，则令

$$N = \lfloor \frac{M}{k} \rfloor$$

2. 若题设要求在$1 \sim M$中被a, b同时整除的个数，则令

$$N = \lfloor \frac{M}{[a, b]} \rfloor$$

   其中$[a, b]$为a和b的最小公倍数。

四、鸽笼原理的应用

> 鸽笼原理的加强形式：设A是有限集，$q_1, q_2, \ldots, q_n$都是正整数。若$|A| \geq q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n + 1, A_i \subseteq A, (i = 1, 2, \ldots, n)$且$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$，则必存在正整数$k(1 \geq k \geq n)$，使得$|A_k| \geq q_k$。

- 举例说明

倍数问题： 将一堆球（数量大于10）放入10个盒子里，每个盒子至少放一个。求证：必有若干个盒子，其中球的数量之和为10的倍数。

证明：

设第$i(i = 1, 2, \ldots, 10)$个盒子中有x_i个球。令$A = a_1, a_2, \ldots, a_{10}$，且有$a_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_j, (j = 1, 2, \ldots, 10)$。

对任意一个整数$j, (0 \leq j \leq 9)$，令$A_j = \{a | a \in A 且 a 除以10余数为 j\}$，则有$A_j \subseteq A$，且$\bigcup_{j=0}^{9} A_j = A$。

1) 若$A_0 \neq \varnothing$，则显然存在。

2) 若$A_0 = \varnothing$，则$\bigcup_{j=1}^{9} A_j = A$，由鸽笼原理，必$\exists t \in [1, 9]$使得$|A_t| \geq 2$。之后证明略（通过将两者相减，得出的$x_i$之和即为所求）。

差数问题： 37个盒子排成一排，将60个球放入盒子中，每个盒子至少放一个。求证：必存在若干个连续的盒子，其中球的数量之和恰为13个。

证明：

设从第1个盒子到第$i(i = 1, 2, \ldots, 37)$个盒子共有a_i个球。则有

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{37} = 60$$

令$b_i = a_i + 13(i \le i \le 37)$，则有

$$14 \le b_1 < b_2 < \cdots < b_{37} = 73$$

令$A = 1, 2, \ldots, 73, A_1 = a_1, a_2, \ldots, a_{37}, A_2 = b_1, b_2, \ldots, b_{37}$，则$A_1 \cup A_2 \subseteq A$。

若$A_1 \cap A_2 = \varnothing$，则$|A| \ge |A_1| + |A_2| = 74$，这与$|A| = 73$矛盾，因此$A_1 \cap A_2 \ne \varnothing$。

从而存在$a_k \in A_1, b_l \in A_2$，使得$a_k = b_l$，即$a_k = a_l + 13 \Rightarrow a_k - a_l = 13$，得证。

Chapter4 母函数

一、母函数$G(x)$与原数列$\{a_n\}$的对应关系

1. 由$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$，可知

$$\frac{1}{1-x} \Rightarrow \{1, 1, 1, \cdots\} \Rightarrow \boxed{a_n = 1}$$

2. 由$\frac{1}{1-kx} = 1 + kx + k^2x^2 + k^3x^3 + \cdots$，可知

$$\frac{1}{1-kx} \Rightarrow \{1, k, k^2, \cdots\} \Rightarrow \boxed{a_n = k^n}$$

3. 由$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$，可知

$$\frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \{1, 2, 3, \cdots\} \Rightarrow \boxed{a_n = n}$$

4. 由$\frac{1}{(1-x)^n} = \binom{n-1}{0} + \binom{1+n-1}{1}x + \binom{2+n-1}{2}x^2 + \binom{3+n-1}{3}x^3 + \cdots$，可知

$$\frac{1}{(1-x)^n} \Rightarrow \{\binom{n-1}{0}, \binom{1+n-1}{1}, \binom{2+n-1}{2}, \cdots, \binom{r+n-1}{r}, \cdots\} \Rightarrow \boxed{a_n = \binom{n+r-1}{n}}$$

二、整数的拆分与多项式的设法

权重代表多项式中x最低次的次数（≥ 1），个数代表多项式中x^i的个数。

例： 有1g的砝码3枚，2g的砝码4枚，4g的砝码2枚，求组合成15g的方案数。

显然依次对应多项式：$(1 + x + x^2 + x^3), (1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8), (1 + x^4 + x^8)$，再将三个式子相乘计算$x^{15}$项的系数即可。

> 注意到在计算相乘的过程中，若取到因子1则代表不取该类砝码，取到因子x^a则代表取bg的砝码a/b个。

三、递推数列的构造方法

对于一般情况，通常是找第a_n与a_{n-1}的关系。因此，把第$n-1$种情况和第n种情况分别列出来，则可得递推关系式。

例： 由A、B、C、D取n个做可重复的排列，要求其中A出现偶数次，求其分别的排列数a_n。

先令当取$n-1$个时，A出现偶数次的排列数为a_{n-1}；

则当取n个时，A出现偶数次的排列数为：

1) 前$n-1$个数中A出现了偶数次，则第n位必不为A，此时有$3a_n$；

2) 前$n-1$个数中A出现了奇数次，则第n位必为A，此时有$1 \times (4^n - a_n)$。

因此得到递推关系式：$a_n = 2a_n + 4^n$。之后列出首项，通过母函数求解（注意因式分解分式的方法：分解成$\frac{A}{f(x)} + \frac{B}{g(x)} + \cdots$的形式）。

- 尤为注意最后分解分式的方法。例如分母为$(1-2x)(1-x)^2$，则必须要设出一次方分母项，即设
$$\frac{A}{1-2x}+\frac{B}{1-x}+\frac{C}{(1-x)^2}$$
最后根据对应次数前的系数相等求出A,B,C。

四、母函数的应用

- 求具体的组合方案

  对于不同种类的元素，各给定一个变量，根据各自具体数量列出相应多项式。所得结果中，各变量的次数为该方案中各个元素取出的个数。

  例：设红球、白球、黄球数量分别为2、1、1，列出所有的组合方案。

  显然，设分别为x,y,z，对应的多项式则分别为$(1+x+x^2),(1+y),(1+z)$。之后相乘即可。

- 求组合方案的总和

  类似于上一类题目，但是均设为x，将所有项系数相加即可求解。

注意到这里变量的次数同样和所取数量有关，可以根据题目要求保留特定次数的项。

五、错排问题

- 错排的递推公式为
$$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$$
- 错排的公式为
$$D_n=n!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!})\approx n!e^{-1}$$

六、线性常系数递推关系式

- 适用于该方法的递推关系式必须为线性的，即不含常数项的线性组合。若不满足，可通过列出第$n+2,n+1,n$项多次相减进行常数项消去（消去$n,C(C\in R)$）。递推关系式形式如下：
$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_ka_{n-k}$$
- 解题过程
  1. 先将递推关系式转化为线性的（如上）。
  2. 写出特征方程。由最低次到最高次从x的0次幂（即1）开始排。如$a_n=3a_{n-2}-2a_{n-3}\Rightarrow x^3-3x+2=0$。

     解这个方程后，设多个参数$c_1,c_2,\ldots$，设x_i为特征方程的k_i重根，则列出通项公式
$$a_n=\sum(c_{i1}+c_{i2}n+\cdots+c_{ik_i}n^{k_i-1})x_i^n$$
     又如上面的$x^3-3x+2=0$可以因式分解为$(x+2)(x-1)^2$，则列出通项公式$a_n=(c_1+c_2n)1^n+c_3(-2)^n$。

     代入初始条件（通常为前几项），列出方程组即可求出通项。
- 若用母函数的方式求递推关系式，则要先令
$$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$
  写出首项，依次摆开竖式相加求解$G(x)$，最后再分解分式。

Chapter5 Pólya计数法

一、群需要满足的四个条件

给定一个集合$G = a, b, c, \cdots$和集合G上的二元运算"·"。

1. 封闭性：任意两个集合中元素的运算结果还是在集合中。
$$\forall a, b \in G, \exists c \in G, s.t. a \cdot b = c$$
2. 结合律成立
$$\forall a, b, c \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
3. 存在单位元
$$\exists e \in G, s.t. \forall a \in G, e \cdot a = a \cdot e = a$$
4. 存在逆元
$$\forall a \in G, \exists b \in G, s.t. a \cdot b = b \cdot a = e$$
此时记作$b = a^{-1}$

二、奇置换与偶置换

- 若一个置换可以分解为奇数个对换之积，则叫做奇置换；反之则成为偶置换。
- n个文字的对称群S_n中偶置换的全体构成一个大小为$\frac{1}{2}n!$的子群记作A_n，称为交代群；反之记作B_n。这两者大小均为$\frac{1}{2}n!$，他们的关系为
$$|A_n| + |B_n| = n!$$

三、置换分解的格式与共轭类

- 针对置换中每个循环阶数对应出现的次数，置换可以相应格式。例如
$$(1)(23)(4567) \Rightarrow (1)^1(2)^1(3)^0(4)^1(5)^0(6)^0(7)^0(8)^0$$
- 在S_n中具有相同格式的置换全体，叫做与该格式相应的共轭类。
对于S_n中属于$(1)^{c_1}(2)^{c_2}\cdots(n)^{c_n}$的共轭类元素个数为
$$\frac{n!}{c_1!c_2!\cdots c_n!1^{c_1}2^{c_2}\cdots n^{c_n}}$$
例如在S_4中，$(1)^0(2)^2(3)^0(4)^0$的共轭类共有$\frac{4!}{2!2^2} = 3$个置换，即$(12)(34), (13)(24), (14)(23)$。

四、k不动置换类

设G是$1, 2, \ldots, n$的置换群，k是1到n中的一个整数，则G中使k保持不变的置换全体记作Z_k，叫做G中的k不动置换类。

- 实际上，Z_k是G中有因子(k)的置换的全体。

五、等价类

设G是$1, 2, \ldots, n$的置换群，k是1到n中的一个整数，若存在置换p_1使k变为l，则称k和l属于同一个等价类，数k所属的等价类记为E_k。

- 注意到k不动置换类和数k所属的等价类都是相对于特定置换群G而言。
- 注意到运算符"+"代表不相交集合的并

存在如下定理：
$$|E_k||Z_k| = |G|, k = 1, 2, \ldots, n$$

六、利用Pólya定理求着色问题等价类的个数

1. 首先对n个对象进行编号为$1, 2, \ldots, n$，确定置换群的单位元为$(1)(2)\cdots(n)$，且有k种颜色用于着色。
2. 根据对象的各种等价类变换，写出相应的置换群G。
    - 通常对于各种平面图形沿对称轴旋转；对于空间图形要考虑到空间中的旋转、翻转。
3. 最后所得方案数为

$$m = \frac{1}{|G|}(k^{c_1} + k^{c_2} + \cdots + k^{c_{|G|}})$$

   其中，c_i代表置换群G中置换p_i的循环节数，如存在置换$p = (23)(1)(4)$（有多少对括号就有多少个循环节），则后面的括号中要加上一项k^3。

七、利用Pólya定理和母函数求着色问题具体某个方案的个数

从特殊的情况开始研究。若存在3种颜色，4个格子，则可令变量x, y, z。由§5.6中可知，总的方案数为$m = \frac{1}{|G|}(k^{c_1} + k^{c_2} + \cdots + k^{c_{|G|}})$，将之后的括号中内容改写。具体规则如下：

- 对于形如$(1)(2)(3)(4)$的，在总方案数中表示的一项为k^4（因为有4个循环节），在此处记为$(x+y+z)^4$。
- 对于形如(1234)的，在总方案数中表示的一项为k^1，在此处记为$(x^4+y^4+z^4)$。
- 对于形如$(12)(34)$的，在总方案中表示的一项为k^2，在此处记为$(x^2+y^2+z^2)^2$。
- 对于形如$(1)(2)(34)$的，在总方案中表示的一项为k^3，在此处记为$(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2)$。

之后得出的结果中，如$4x^2yz$表示选取2个颜色x，1个颜色y，1个颜色z的方案数有4种。

下面是一般的情况。总着色数为n，分别表示为变量$x_1, x_2, \ldots, x_n$。对于置换群G中的一个置换p，若其能表示为

$$(1)^{c_1}(2)^{c_2}\cdots(n)^{c_n}$$

则在总方案中表示的一项为$k^{\sum_{i=1}^{n} c_i}$，在此处记为

$$\prod_{i=1}^{n}(x_1^i + x_2^i + \cdots + x_n^i)^{c_i}$$

$$-END-$$