CIND-221: Proceso de Poisson

Felipe Osorio

f.osoriosalgado@uandresbello.edu

Facultad de Ingeniería, UNAB

Proceso de Poisson

Definición 1 (Distribución exponencial):

Se dice que la variable aleatoria X tiene distribución exponencial con parámetro $\lambda > 0$, si su función de densidad es dada por:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0,$$

o equivalentemente, si su CDF es dada por,

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - e^{-\lambda x} \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda u}\, \mathsf{d}u, \qquad x \geq 0, \end{aligned}$$

en cuyo caso anotamos $X \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$.

Propiedad 1:

Para $X \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$, tenemos que:

(i) $\mathsf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.

(ii) $\mathsf{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

(iii) $M_X(t) = \frac{\lambda}{1-\lambda}$, $t < \lambda$.

Demostración:

Recuerde que

$$\mathsf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathsf{d}x, \quad \mathsf{var}(X) = \mathsf{E}\{(X - \mathsf{E}(X))^2\}, \quad M_X(t) = \mathsf{E}(e^{tx}).$$

Definición 2:

Una variable aleatoria X se dice sin memoria, si:

$$\mathsf{P}(X > s + t | X > t) = \mathsf{P}(X > s), \qquad \forall\, s, t \geq 0.$$

Propiedad 2:

Si $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, entonces X es sin memoria.

Demostración:

Note que, para $s, t \in [0, \infty)$,

$$\mathsf{P}(X > s + t | X > t) = \frac{\mathsf{P}(\{X > s + t\} \cap \{X > t\})}{\mathsf{P}(X > t)}.$$

Sin embargo, $\{X > s + t\} \subseteq \{X > t\})$, luego

$$\{X > s + t\} \cap \{X > t\}) = \{X > s + t\}.$$

De ahí que

$$\mathsf{P}(X > s + t | X > t) = \frac{\mathsf{P}(\{X > s + t\} \cap \{X > t\})}{\mathsf{P}(X > t)}.$$

Ahora,

$$\mathsf{P}(X > t) = 1 - \mathsf{P}(X \leq t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t},$$

y análogamente, para $\mathsf{P}(X > s + t)$. Así,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X > s + t | X > t) &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} \\ &= \mathsf{P}(X > s) \end{aligned}$$

Observación:

Adicionalmente, es fácil notar que

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X > s + t) = \mathsf{P}(X > s)\, \mathsf{P}(X > t) &= e^{-\lambda s} e^{-\lambda t} \\ &= e^{-\lambda(s+t)}. \end{aligned}$$

Ejemplo:

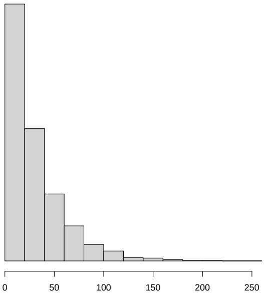
Suponga que 2 personas esperan la llegada de un bus. Buses arriban a la parada a cada 30 minutos.[1]

La 1ra persona llega a la parada apenas el bus ha salido, mientras que la 2da persona llega 10 minutos después.

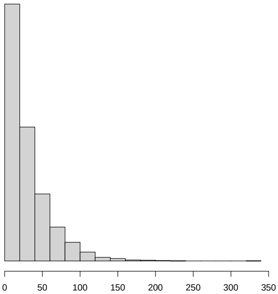
Sin memoria, significa que los tiempos de espera, en promedio, de ambas personas son los mismos.

[1] i.e., de acuerdo a un proceso Poisson con parámetro $\lambda = 1/30$ (ver siguientes slides).

Proceso de Poisson



(a) 1ra persona



(b) 2da persona

Propiedad 3:

Sea $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes tal que $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces,

$$Y = X_1 + \cdots + X_n,$$

tiene función de densidad

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{(\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda y} \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\lambda y}, \qquad y > 0, \end{aligned}$$

es decir, $Y \sim \text{Gama}(n, \lambda)$.

Definición 2 (Proceso de conteo):

Un proceso estocástico $\{N(t) : t \geq 0\}$ se dice de conteo, si es una colección de variables aleatorias no negativas con valores enteros tales que:

(i) $N(t) \geq 0$.

(ii) si $s < t$, entonces $N(s) \leq N(t)$.

(iii) para $s < t$, $N(t) - N(s)$ es el número de eventos que ocurren en el intervalo $(s, t]$.

Observación:

El proceso $\{N(t) : t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes si

$$N(t_1) - N(t_0),\ N(t_2) - N(t_1),\ \ldots,\ N(t_n) - N(t_{n-1}),$$

para $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ son variables aleatorias independientes. Adicionalmente, los incrementos son estacionarios si

$$N(t) - N(s) \stackrel{\mathsf{d}}{=} N(t+h) - N(s+h), \qquad \forall\, s, t, h.$$

Definición 2 (Proceso Poisson):

Un proceso de conteo $\{N(t) : t \geq 0\}$ se dice un proceso de Poisson con parámetro $\lambda > 0$, si:

(i) $N(0) = 0$.

(ii) El proceso tiene incrementos independientes.

(iii) Para todo $t \geq 0$, $N(t)$ tiene una distribución Poisson con parámetro λt,

$$\mathsf{P}(N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n \in \{0, 1, \dots\}.$$

Observación:

Si $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ es un proceso Poisson, entonces $N(t+s) - N(s)$ tiene la misma distribución $(s, t > 0)$. Además,

$$\mathsf{E}(N(t)) = \mathsf{var}(N(t)) = \lambda t.$$

Ejemplo:

A partir de las 8 a.m., los clientes llegan a un banco de acuerdo con un proceso Poisson a razón de 30 clientes por hora. Encuentre la probabilidad de que lleguen más de 65 clientes entre las 10 y 12 a.m.

Sea $t = 0$ las 8 a.m., luego la probabilidad deseada es

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(N(4) - N(2) > 65) &= \mathsf{P}(N(2) > 65) = 1 - \mathsf{P}(N(2) \leq 65) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{65} \mathsf{P}(N(2) = k) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{65} \frac{e^{-30(2)}(30(2))^k}{k!} \\
&= 0.2355
\end{aligned}$$

Ejemplo:

Esteban recibe mensajes de texto a partir de las 10 a.m. a raźon de 10 mensajes por hora según un proceso de Poisson. Calcule la probabilidad de que Esteban reciba exactamente 18 mensajes de texto al mediodia y 70 mensajes de texto a las 5 p.m.

La probabilidad deseada es $\mathsf{P}(N(2) = 18, N(7) = 70)$. Además, si llegan 18 textos en $[0, 2]$ y 70 textos en $[0, 7]$, entonces hay $70 - 18 = 52$ mensajes en $(2, 7]$. Es decir,

$$\{N(2) = 18, N(7) = 70\} = \{N(2) = 18, N(7) - N(2) = 52\}$$

Los intervalos $[0, 2]$ y $(2, 7]$ son disjuntos, luego

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(N(2) = 18, N(7) = 70) &= \mathsf{P}(N(2) = 18, N(7) - N(2) = 52) \\ &= \mathsf{P}(N(2) = 18)\, \mathsf{P}(N(7) - N(2) = 52) \\ &= \mathsf{P}(N(2) = 18)\, \mathsf{P}(N(5) = 52) \\ &= \frac{e^{-2(10)}(2(10))^{18}}{18!} \frac{e^{-5(10)}(5(10))^{52}}{52!} \\ &= 0.0844 \cdot 0.0531 = 0.0045 \end{aligned}$$

Definición 3 (Notación $o(\cdot)$):

La función $f(\cdot)$ se dice $o(h)$, y anotamos $f(h) = o(h)$, si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0,$$

más generalmente, $f(h) = o(g(h))$, si:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{g(h)} = 0.$$

Observación:

Si $f(h) = o(h)$ decimos que $f(h)$ tiende a cero más rápido que h.

Ejemplo:

La función $f(x) = x^2$ es $o(h)$ dado que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0,$$

mientras que $f(x) = x$ no es $o(h)$, pues

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1 \neq 0.$$

Ejemplo:

Considere

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \cdots = 1 + h + R(h),$$

donde $R(h) = e^z\, h^2/2$, para algún $z \in (-h, h)$. Note que

$$\frac{R(h)}{h} = \frac{e^z h^2/2}{h} = \frac{e^z}{2} h \to 0,$$

cuando $h \to 0$. Así,

$$e^h = 1 + h + o(h).$$

Propiedad:

(i) Si $f(h) = o(h)$, y $g(h) = o(h)$, entonces $f(h) + g(h) = o(h)$. En efecto

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) + g(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = 0 + 0 = 0.$$

(ii) Si $f(h) = o(h)$, entonces $cf(h) = o(h)$. Es fácil notar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{cf(h)}{h} = c \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = c \cdot 0 = 0$$

Observación:

Si $f(h) = o(1)$, entonces $f(h) \to 0$, siempre que $h \to 0$.

Definición 4 (Proceso Poisson):

Un proceso de conteo $\{N(t) : t \geq 0\}$ se dice proceso Poisson con parámetro $\lambda > 0$, si:

(i) $N(0) = 0$.

(ii) El proceso tiene incrementos independientes.

(iii) $\mathsf{P}(N(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$.

(iv) $\mathsf{P}(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$.

(v) $\mathsf{P}(N(h) > 1) = o(h)$.

Observación:

Note que

$$\mathsf{P}(N(h) = 0) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(N(h)=1) &= e^{-\lambda h}\lambda h = (1-\lambda h + o(h))\lambda h \\ &= \lambda h + \lambda^2 h^2 + \lambda h\, o(h).\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\lambda^2 h^2 = o(h), \qquad \lambda h\, o(h) = o(h).$$

Además,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(N(h)>1) &= 1 - \mathsf{P}(N(h)=0) - \mathsf{P}(N(h)=1) \\ &= 1 - (1-\lambda h + o(h)) - (\lambda h + o(h)) \\ &= o(h).\end{aligned}$$

Definición 5 (Tiempo entre eventos):

Considere $\{N(t) : t \geq 0\}$ un proceso Poisson y sea T_1 el tiempo hasta la ocurrencia del 1er evento. En general, para $n > 1$, sea T_n el tiempo entre los eventos $n-1$ y n. La secuencia $\{T_n\}_{n\geq 1}$ es llamada secuencia de tiempos entre arribos.

Ejemplo:

Considere $\{N(t) : t \geq 0\}$, entonces

$$T_1 = 5, \qquad T_2 = 10,$$

denota que el 1er evento del proceso Poisson ocurrió en el tiempo 5, mientras que el 2do en el tiempo 15.

Resultado 1:

T_n para $n = 1, 2, \ldots$, son variables aleatorias IID con distribución $\text{Exp}(\lambda)$

Note que el tiempo de espera hasta el n-ésimo evento en un proceso de Poisson es dado por:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i, \qquad n \geq 1,$$

considere el siguiente resultado.

Resultado 2:

Sea $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ un proceso Poisson con tasa λ y sea S_n el instante de ocurrencia del n-ésimo evento. Entonces $f(s)$ es una variable aleatoria con densidad

$$f(s) = \frac{\lambda e^{-\lambda s}(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad 0 < s < \infty,$$

es decir, $S_n \sim \text{Gama}(n, \lambda)$.

Observación:

Otra forma de caracterizar el Resultado 1, es notar que podemos escribir:

$$T_i = S_i - S_{i-1}, \qquad i = 2, \ldots, n.$$

Entonces, para $\{N(t) : t \geq 0\}$, sigue que $\{T_1, \ldots, T_n\}$ son IID $\mathsf{Exp}(\lambda)$.

Ejemplo:

Suponga que en el ejemplo de llegada de clientes al banco, deseamos saber ¿Cuál es el tiempo esperado hasta la llegada del cliente 80? En efecto,

$$\mathsf{E}(S_{80}) = \frac{80}{\lambda} = \frac{80}{30} = 2.67 \text{ horas.}$$

Hasta ahora, hemos asumido que la tasa o intensidad λ es constante. En muchos problemas es razonable considerar que la tasa $\lambda = \lambda(t)$ varía con el tiempo.

Definición 4 (Proceso Poisson no homogéneo):

Un proceso $\{N(t) : t \geq 0\}$ sobre $S = \{0, 1, \dots\}$ es un proceso Poisson no homogéneo con función de intensidad $\lambda(t)$, $t \geq 0$, si

(i) $N(0) = 0$.

(ii) $\{N(t) : t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes.

(iii) Para $0 \leq s < t$, la variable aleatoria $N(t)$ tiene distribución Poisson con parámetro $\lambda = \int_s^t \lambda(u)\, \mathrm{d}u$. Es decir,

$$\mathsf{P}(N(t) = n) = \frac{\left(\int_s^t \lambda(u)\, \mathrm{d}u\right)^n \exp\left(-\int_s^t \lambda(u)\, \mathrm{d}u\right)}{n!}$$

Ejemplo:

Estudiantes llegan a una cafetería según un proceso Poisson no homogéneo. La tasa de llegada aumenta linealmente de 100 a 200 estudiantes por hora entre 11 a.m. y mediodía. La tasa permanece constante durante las ṕroximas 2 horas y luego disminuye linealmente hasta 100 de 2 a 3 p.m. Calcule la probabilidad de que haya al menos 400 personas en la cafetería entre las 11:30 a.m. y la 1:30 p.m.

La función de intensidad es dada por,

$$\lambda(t) = \begin{cases} 100 + 100\,t, & 0 \leq t < 1, \\ 200, & 1 < t \leq 3, \\ 500 - 100\,t, & 3 \leq t < 4, \end{cases}$$

donde t denota el tiempo en horas desde las 11 a.m.

Proceso de Poisson

La probabilidad deseada es $\mathsf{P}(N(2.5) - N(0.5) \geq 400)$ donde $N(2.5) - N(0.5)$ tiene distribución Poisson con parámetro

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \int_{0.5}^{2.5} \lambda(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0.5}^{1} (100 + 100\,t)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{2.5} 200\,\mathrm{d}t \\
&= 100\,t\Big|_{0.5}^{1} + 100\,\frac{t^2}{2}\Big|_{0.5}^{1} + 200\,t\Big|_{1}^{2.5} \\
&= 100\big(1 - \tfrac{1}{2}\big) + \frac{100}{2}\big(1 - (\tfrac{1}{2})^2\big) + 200(2.5 - 1) = 387.5
\end{aligned}
$$

De ahí que

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(N(2.5) - N(0.5) \geq 400) &= 1 - \mathsf{P}(N(2.5) - N(0.5) < 400) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{399} \frac{e^{-387.5}(387.5)^k}{k!} \\
&= 0.2693
\end{aligned}
$$

Ejemplo:

El área de confiabilidad tiene por interés calcular la probabilidad que un sistema se mantenga operativo en un intervalo de tiempo. Un modelo común para tiempos de falla es un proceso Poisson no homogéneo con función de intensidad

$$\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}, \qquad \alpha, \beta > 0,$$

con t representando la "edad" del sistema. Si el sistema inicia en $t = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(N(t)) &= \int_0^t \lambda(u)\,\mathsf{d}u = \int_0^t \alpha\beta u^{\beta-1}\,\mathsf{d}u \\ &= \alpha\beta\,\frac{u^\beta}{\beta}\Big|_0^t = \alpha\,t^\beta. \end{aligned}$$

Debido a la forma de la media para los tiempos de falla, el proceso es llamado proceso de Poisson ley potencia.