

CIND-221: Problema de la ruta más corta

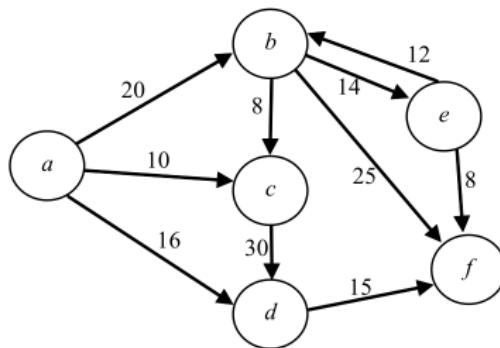
Felipe Osorio

f.osoriosalgado@uandresbello.edu

Facultad de Ingeniería, UNAB

Problema de la ruta más corta

Para motivar ideas considere la siguiente red:



donde $N = \{a, b, c, d, e, f\}$, mientras que

$$A = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, e), (b, f), (c, d), (d, f), (e, b), (e, f)\}.$$

Problema de la ruta más corta

Definición (Ruta):

Una **ruta** en un grafo dirigido $G = (N, A)$ con $N = \{1, \dots, n\}$, es una secuencia de nodos de la forma:

$$P = \{n_0, n_1, \dots, n_k\},$$

donde $n_i \in N$ ($i = 0, \dots, k$) y n_0, n_k denotan el nodo inicial y final de la ruta.

Observación:

Los pares de nodos

$$n_0 \ n_1, \quad n_1 \ n_2, \quad \dots \quad n_{k-1} \ n_k,$$

son **adyacentes**.

Además, se suele decir que la ruta **parte en n_0** y **termina en n_k** , o que une n_0 con n_k .

Problema de la ruta más corta

Definición (Costo de la ruta):

Considere una ruta $P = \{n_0, n_1, \dots, n_k\}$. El costo de la ruta se define como la suma de los valores (costos¹) de sus arcos.

Observación:

Una ruta compuesta de un único nodo tendrá costo 0.

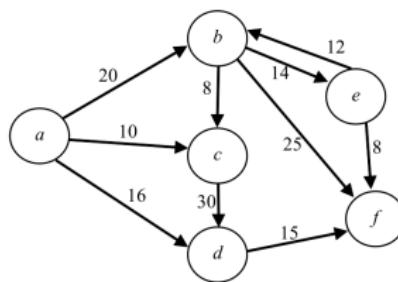
Notación:

Denotaremos por c_{ij} al costo asociado a cada arco (i, j) , $(i, j \in N)$.

¹costo puede representar longitud o tiempo de la ruta.

Problema de la ruta más corta

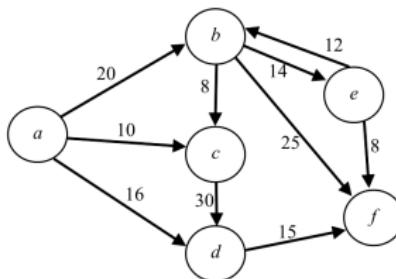
Ejemplo:



Ruta	Costo
$\{a, b, e\}$	$20 + 14 = 34$
$\{a, b, c, d\}$	$20 + 8 + 30 = 58$
$\{c, d, f\}$	$30 + 15 = 45$
$\{c\}$	0
$\{a, b, e, f\}$	$20 + 14 + 8 = 42$

Problema de la ruta más corta

Observación:



Podemos representar los costos de forma matricial como sigue:

	a	b	c	d	e	f
a	-	20	10	16	-	-
b	-	-	8	-	14	25
c	-	-	-	30	-	-
d	-	-	-	-	-	15
e	-	12	-	-	-	8

Problema de la ruta más corta

Problema:

¿Cuál es la ruta que debe seguir un vehículo de reparto para realizar la entrega a un conjunto de clientes **minimizando la distancia recorrida?**²



²de la forma más eficiente, económica o rápida.

Problema de la ruta más corta

Objetivo:

Encontrar la **ruta óptima** para transitar desde el nodo n_0 (origen) al nodo n_k (destino).

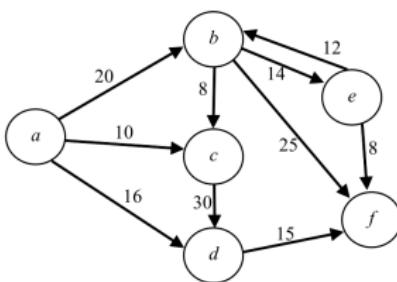
Es decir, se desea determinar la ruta P **más corta** (o de costo mínimo), tal que se minimice la función

$$\phi(P) = \sum_{(i,j) \in P} c_{ij},$$

donde $c_{ij} \geq 0$ representa el costo asociado a cada arco (i, j) .

Problema de la ruta más corta

Ejemplo:

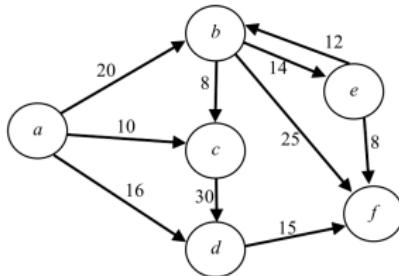


Se desea viajar desde el nodo **a** al nodo **f**, y suponga que debemos desarrollar un algoritmo para llevar a cabo esta tarea.

¿Cuál sería su primer paso? Es decir, ¿cuál sería el primer nodo que usted visitaría?

Problema de la ruta más corta

Ejemplo:



Algunas rutas y sus costos:

$$P_1 = \{a, b, f\}, \quad \phi(P_1) = 45,$$

$$P_2 = \{a, b, e, f\}, \quad \phi(P_2) = 42,$$

$$P_3 = \{a, b, c, d, f\}, \quad \phi(P_3) = 63,$$

$$P_4 = \{a, c, d, f\}, \quad \phi(P_4) = 45,$$

$$P_5 = \{a, d, f\}, \quad \phi(P_5) = 31.$$

Problema de la ruta más corta

Procedimiento:

Sea u_i la distancia más corta del nodo origen al nodo i , y considere $c_{ij} \geq 0$ la longitud del arco (i, j) .

Para los siguientes nodos, se introduce la siguiente etiqueta:

$$[u_j, i] = [u_i + c_{ij}, i], \quad d_{ij} \geq 0,$$

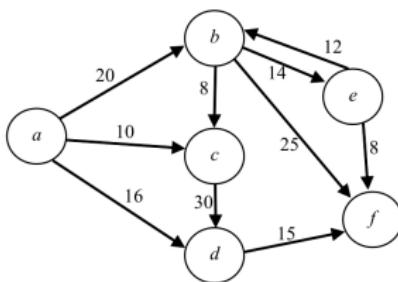
y la etiqueta inicial es denotada por $[0, -]$.

Adicionalmente, estas etiquetas pueden adoptar 2 estados: temporales y permanentes.

- ▶ Una etiqueta temporal puede ser modificada si es posible determinar una ruta más corta hacia un nodo.
- ▶ Cuando no es posible encontrar una mejor ruta, la etiqueta pasa de temporal a permanente.

Problema de la ruta más corta

Ejemplo:



0. Asignamos la etiqueta **permanente** al nodo inicial **a**, $[0, -]$.
1. Desde el nodo **a** podemos llegar a los nodos **b**, **c**, **d**. Luego:

Nodo	Etiqueta	Estado
a	$[0, -]$	permanente
b	$[0 + 20, a]$	temporal
c	$[0 + 10, a]$	temporal
d	$[0 + 16, a]$	temporal

Problema de la ruta más corta

La ruta más corta al nodo c , es $\{a, c\}$ (el nodo c tiene la menor distancia $u_c = 10$), luego su etiqueta adopta el estado permanente, es decir:

Nodo	Etiqueta	Estado
a	$[0, -]$	permanente
b	$[20, a]$	temporal
c	$[10, a]$	permanente
d	$[16, a]$	temporal

Note que, para llegar al nodo c tenemos las siguientes rutas:

$$P_1 = \{a, c\}, \quad Q_1 = \{a, b, c\},$$

con costos asociados $\phi(P_1) = 10$ y $\phi(Q_1) = 28$.

Problema de la ruta más corta

2. Desde el nuevo nodo permanente c , es posible llegar al nodo d , así:

Nodo	Etiqueta	Estado
c	$[10, a]$	permanente
d	$[10 + 30, c] = [40, c]$	temporal

Note que las etiquetas para d , son

$$[16, a] \quad \text{y} \quad [40, c].$$

Es decir, podemos llegar a d desde a con costo de 16 unidades, o pasando por c , usando 40 unidades en total (10 para llegar a c y luego 30 para ir de c a d)

En efecto, tenemos las rutas:

$$P_2 = \{a, d\}, \quad \phi(P_2) = 16,$$

$$Q_2 = \{a, c, d\}, \quad \phi(Q_2) = 40.$$

Adicionalmente, para llegar a d también tenemos la ruta $R_2 = \{a, b, c, d\}$, con costo $\phi(R_2) = 58$.

Problema de la ruta más corta

3. Marcamos el nodo d como permanente, lo que lleva a:

Nodo	Etiqueta	Estado
d	$[16, a]$	permanente
f	$[16 + 15, d] = [31, d]$	temporal

Es decir, tenemos la ruta $P_3 = \{a, d, f\}$ con $\phi(P_3) = 31$.

Otras rutas para transitar de a hacia f , son:

$$Q_3 = \{a, b, f\}, \quad \phi(Q_3) = 45,$$

$$R_3 = \{a, c, d, f\}, \quad \phi(R_3) = 55,$$

$$S_3 = \{a, b, e, f\}, \quad \phi(S_3) = 42.$$

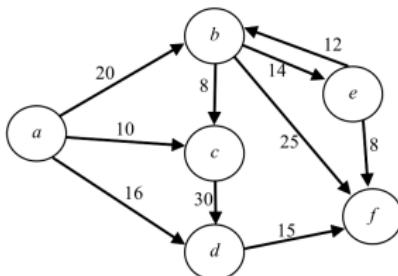
De este modo, podemos marcar el nodo f con el estado permanente.

Problema de la ruta más corta

En resumen, tenemos:

Nodo	Etiqueta	Estado
a	[0, -]	permanente
b	[20, a]	temporal
c	[10, a]	temporal
d	[16, a]	permanente
f	[31, d]	permanente

que lleva a la ruta óptima $P_* = \{a, d, f\}$.



Problema de la ruta más corta

Observación:

- ▶ El procedimiento anterior es conocido como [algoritmo de Dijkstra \(1959\)](#).³
- ▶ Un supuesto clave en el algoritmo de Dijkstra es que las distancias (costos) son positivas.
- ▶ Para una red con n nodos ($N = \{1, \dots, n\}$) el tiempo total de cálculo del algoritmo es proporcional a n^2 .
- ▶ Una modificación no muy compleja del algoritmo permite el cálculo de la ruta más corta desde el nodo de inicio hacia [todos los nodos de la red](#).⁴
- ▶ Existen modificaciones que permiten que el algoritmo sea más rápido (conocido como [algoritmo de búsqueda A*](#)).

³Numerische Mathematik 1, 269-271.

⁴Ejercicio: Calcular esto para el ejemplo de clases.

Problema de la ruta más corta

Algoritmo de Dijkstra:

Inicialización: Al nodo inicial s se le atribuye el estado permanente y la etiqueta $[0, -]$. Para los nodos n_i con $i \neq s$ atribuir las etiquetas temporales

$$[u_i, s] = [c_{si}, s].$$

Paso 1: Entre todos los nodos n_i con etiqueta temporal, determine aquél con distancia u_i más pequeña. Suponga que esto se satisface para el nodo n_k , entonces marcar el nodo como permanente y hacer $p := k$.

Paso 2: Para todo nodo n_i con etiqueta temporal, tal que el arco (p, i) existe y $u_p + c_{pi} < u_i$, ajustar la etiqueta como sigue:

$$[u_i, p] = [u_p + c_{pi}, p].$$

Paso 3: Repetir **Pasos 1** y **2**, hasta que todos los nodos tengan el estado permanente.