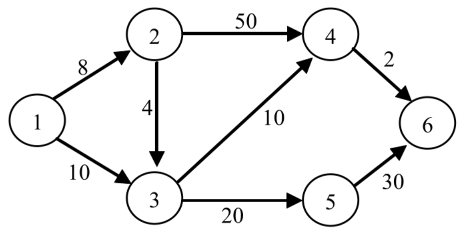
1.a. El gráfico de la red adopta la forma:



1.b. Note que nuestro nodo inicial es **2**. Así,

Nodo	Etiqueta	Estado
2	$[0, -]$	**permanente**
3	$[0+4, 2]$	temporal
4	$[0+50, 2]$	temporal

La ruta más corta es hacia el nodo **3**. Luego su etiqueta adopta el estado permanente. Es decir,

Nodo	Etiqueta	Estado
2	$[0, -]$	**permanente**
3	$[4, 2]$	**permanente**
4	$[50, 2]$	temporal

Desde el nodo **3** tenemos:

Nodo	Etiqueta	Estado
3	$[4, 2]$	**permanente**
4	$[4+10, 3]$	temporal
5	$[4+20, 3]$	temporal

Note que también tenemos la siguiente etiqueta para el nodo 4, $[50, 2]$. Es decir, podemos llegar al nodo 4 desde el nodo 2 con un costo de 50 unidades, o pasando por el nodo 3 con un costo de 14 unidades. Esto lleva a:

Nodo	Etiqueta	Estado
2	$[0, -]$	**permanente**
3	$[4, 2]$	**permanente**
4	$[50, 2]$	temporal
4	$[14, 3]$	**permanente**
5	$[24, 3]$	temporal

Ahora, desde el nodo 4 tenemos

Nodo	Etiqueta	Estado
4	$[14, 3]$	**permanente**
6	$[14 + 2, 4]$	temporal

Otras rutas para llegar al nodo 6 desde el nodo 2, son las siguientes:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{2, 4, 6\}, & \phi(R_1) &= 50 + 2 = 52, \\ R_2 &= \{2, 3, 5, 6\}, & \phi(R_2) &= 4 + 20 + 30 = 54, \end{aligned}$$

es decir, podemos rotular el nodo **6** como permanente. Obteniendo,

Nodo	Etiqueta	Estado
2	$[0, -]$	**permanente**
3	$[4, 2]$	**permanente**
4	$[50, 2]$	temporal
4	$[14, 3]$	**permanente**
5	$[24, 3]$	temporal
6	$[16, 4]$	**permanente**

lo que lleva a la ruta óptima $P_* = \{2, 3, 4, 6\}$ con $\phi(P_*) = 4 + 10 + 2 = 16$.

2. **Iteración 0:** Tenemos $n = 4$, con

$$\boldsymbol{C}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 10 & 16 \\ \infty & 0 & 8 & 14 \\ 25 & \infty & 0 & 30 \\ \infty & 12 & 15 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_0 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 1 \\ 2 & - & 2 & 2 \\ 3 & 3 & - & 3 \\ 4 & 4 & 4 & - \end{pmatrix}.$$

Iteración 1: Sea $k = 1$. De este modo,

$$\begin{aligned} c_{23} &= \min(c_{23}, c_{21} + c_{13}) = \min(8, \infty + 10) = 8, \\ c_{24} &= \min(c_{24}, c_{21} + c_{14}) = \min(14, \infty + 16) = 14, \\ c_{32} &= \min(c_{32}, c_{31} + c_{12}) = \min(\infty, 25 + 20) = 45, \\ c_{34} &= \min(c_{34}, c_{31} + c_{14}) = \min(30, 25 + 16) = 30, \\ c_{42} &= \min(c_{42}, c_{41} + c_{12}) = \min(12, \infty + 20) = 12, \\ c_{43} &= \min(c_{43}, c_{41} + c_{13}) = \min(15, \infty + 10) = 15. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 10 & 16 \\ \infty & 0 & 8 & 14 \\ 25 & 45 & 0 & 30 \\ \infty & 12 & 15 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_1 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 1 \\ 2 & - & 2 & 2 \\ 3 & 1 & - & 3 \\ 4 & 4 & 4 & - \end{pmatrix}.$$

Iteración 2: Tenemos que $k = 1$, así

$$\begin{aligned}
c_{13} &= \min(c_{13}, c_{12} + c_{23}) = \min(10, 20 + 8) = 10,\\
c_{14} &= \min(c_{14}, c_{12} + c_{24}) = \min(16, 20 + 14) = 16,\\
c_{31} &= \min(c_{31}, c_{32} + c_{21}) = \min(25, 45 + \infty) = 25,\\
c_{34} &= \min(c_{34}, c_{32} + c_{24}) = \min(30, 45 + 14) = 30,\\
c_{41} &= \min(c_{41}, c_{42} + c_{21}) = \min(\infty, 12 + \infty) = \infty,\\
c_{43} &= \min(c_{43}, c_{42} + c_{23}) = \min(15, 12 + 8) = 15.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 10 & 16 \\ \infty & 0 & 8 & 14 \\ 25 & 45 & 0 & 30 \\ \infty & 12 & 15 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_2 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 1 \\ 2 & - & 2 & 2 \\ 3 & 1 & - & 3 \\ 4 & 4 & 4 & - \end{pmatrix}.$$

Observación:[1] Es posible verificar que:

$$\boldsymbol{C}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 10 & 16 \\ 33 & 0 & 8 & 14 \\ 25 & 42 & 0 & 30 \\ 40 & 12 & 15 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_4 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 1 \\ 3 & - & 2 & 2 \\ 3 & 4 & - & 3 \\ 3 & 4 & 4 & - \end{pmatrix}.$$

3. En este caso tenemos una red $G = (N, A)$ con $N = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Iteración 0: Inicialmente, tenemos:

$$C_{-} = \varnothing, \qquad \overline{C}_{-} = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Iteración 1: Comenzaremos por el nodo 0. Luego,

$$C_0 = \{0\}, \qquad \overline{C}_0 = N - \{0\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Iteración 2: Desde el nodo 0, el arco más corto es $(0, 2)$ con longitud 13. Esto lleva a $j^* = 2$, así:

$$C_1 = C_0 \cup \{2\} = \{0, 2\}, \qquad \overline{C}_1 = \overline{C}_0 - \{2\} = \{1, 3, 4\}.$$

Iteración 3: Desde el nodo 2 tenemos los siguientes arcos

$$(2, 1), \quad (2, 3), \quad (2, 4),$$

con longitudes 7, 43 y 57, respectivamente. Por tanto, escogemos el nodo 1, y $j^* = 1$. Luego,

$$C_2 = C_1 \cup \{1\} = \{0, 1, 2\}, \qquad \overline{C}_2 = \overline{C}_1 - \{1\} = \{3, 4\}.$$

Iteración 4: Desde el nodo 1 podemos visitar los nodos $(1, 3)$ y $(1, 4)$ con longitudes 53 y 69, respectivamente. De este modo $j^* = 3$, obteniendo:

$$C_3 = C_2 \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\}, \qquad \overline{C}_3 = \overline{C}_2 - \{3\} = \{4\}.$$

[1] No es requerido iterar 4 veces este procedimiento.

Iteración 5: Finalmente desde el nodo 3 conectamos el nodo 4 con longitud de arco 9. Es decir, $j^* = 4$, desde donde sigue que:

$$C_4 = C_3 \cup \{4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \qquad \overline{C}_4 = \overline{C}_3 - \{4\} = \varnothing,$$

y como $\overline{C}_4 = \varnothing$ el algoritmo se detiene.

El árbol de expansión mínimo une los arcos:

$$(0, 2) \to (2, 1) \to (1, 3) \to (3, 4),$$

y tiene longitud total $13 + 7 + 53 + 9 = 82$ unidades.