CIND-221: Taller 5

Felipe Osorio

f.osoriosalgado@uandresbello.edu

Facultad de Ingeniería, UNAB

Ejemplo:

Suponga que la cantidad de tiempo que un cliente está en un trámite bancario es distribuído exponencial con media 10 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente esté más de quince minutos en el banco? ¿Cual es la probabilidad de que el cliente esté más de 15 minutos dado que ya ha estado por más de 10 minutos?

Primeramente, note que $\lambda = 1/10$. De este modo deseamos calcular:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X > 15) &= 1 - \mathsf{P}(X \leq 15) = 1 - (1 - e^{-15\lambda}) = e^{-15\lambda} \\ &= e^{-15/10} \approx 0.2231 \end{aligned}$$

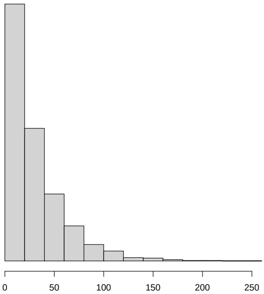
Por otro lado, la distribución exponencial no tiene memoria. Es decir, la probabilidad deseada es equivalente a estar en el banco al menos 5 minutos,

$$\mathsf{P}(X > 5) = e^{-5\lambda} = e^{-5/10} \approx 0.6065$$

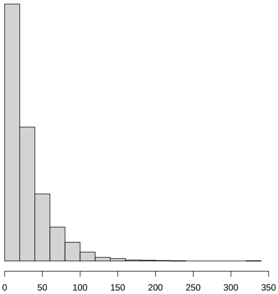
Distribución exponencial

```
# calculando probabilidades (1ra parte)
> exp(-3/2)
[1] 0.2231302

> 1 - pexp(15, rate = 1/10)
[1] 0.2231302

> pexp(15, rate = 1/10, lower = FALSE)
[1] 0.2231302

# calculando probabilidades (2da parte)
> pexp(5, rate = 1/10, lower = FALSE)
[1] 0.6065307

```

```r
# simulando tiempos de espera (slides 6, 7)
trials <- 5000
first <- numeric(trials)
second <- numeric(trials)
for (i in 1:trials) {
  bus <- rexp(1,1/30)
  first[i] <- bus
  while (bus < 10) { bus <- bus + rexp(1,1/30) }
  second[i] <- bus - 10
}
# tiempos de espera promedio
m1 <- mean(first)
m2 <- mean(second)

# histogramas
par(mfrow = c(1,2), pty = "s")
hist(first, xlab="First", ylab="", prob=T, yaxt="n", main="")
hist(second, xlab="Second", ylab="", prob=T, yaxt="n", main="")
```



(a) 1ra persona



(b) 2da persona

Ejemplo:

A partir de las 8 a.m., los clientes llegan a un banco de acuerdo con un proceso Poisson a razón de 30 clientes por hora. Encuentre la probabilidad de que lleguen más de 65 clientes entre las 10 y 12 a.m. Es decir,

$$\mathsf{P}(N(2) > 65) = 1 - \sum_{k=0}^{65} \frac{e^{-30(2)}(30(2))^k}{k!}$$

```
# calculando probabilidades Poisson
> 1 - ppois(65, lambda = 30 * 2)
[1] 0.2355065

> ppois(65, lambda = 30 * 2, lower = FALSE)
[1] 0.2355065
```

Ejemplo:

Esteban recibe mensajes de texto a partir de las 10 a.m. a raźon de 10 mensajes por hora según un proceso de Poisson. Calcule la probabilidad de que Esteban reciba exactamente 18 mensajes de texto al mediodia y 70 mensajes de texto a las 5 p.m.

De ahí que

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(N(2)=18, N(7)=70) &= \mathsf{P}(N(2)=18)\,\mathsf{P}(N(5)=52)\\ &= \frac{e^{-2(10)}(2(10))^{18}}{18!}\,\frac{e^{-5(10)}(5(10))^{52}}{52!}\end{aligned}$$

```
# calculando probabilidades Poisson
> dpois(18, lambda = 2 * 10) * dpois(52, lambda = 5 * 10)
[1] 0.004481021

```

Ejemplo:

Estudiantes llegan a una cafetería según un proceso Poisson no homogéneo. La tasa de llegada aumenta linealmente de 100 a 200 estudiantes por hora entre 11 a.m. y mediodía. La tasa permanece constante durante las ṕroximas 2 horas y luego disminuye linealmente hasta 100 de 2 a 3 p.m. Calcule la probabilidad de que haya al menos 400 personas en la cafetería entre las 11:30 a.m. y la 1:30 p.m.

La función de intensidad es dada por,

$$\lambda(t) = \begin{cases} 100 + 100\,t, & 0 \leq t < 1, \\ 200, & 1 < t \leq 3, \\ 500 - 100\,t, & 3 \leq t < 4, \end{cases}$$

donde t denota el tiempo en horas desde las 11 a.m.

La probabilidad deseada es

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(N(2.5) - N(0.5) \geq 400) &= 1 - \mathsf{P}(N(2.5) - N(0.5) < 400) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{399} \frac{e^{-387.5}(387.5)^k}{k!}\end{aligned}$$

```r
# calculando probabilidades Poisson
> ppois(399, lambda = 387.5, lower = FALSE)
[1] 0.2693037

```

Sea $U_1, \dots, U_n$ una secuencia de variables aleatorias uniformes $[0, t]$. Entonces su densidad conjunta es dada por

$$f_{U_1,\dots,U_n}(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{t^n}, \qquad 0 \le u_1, \dots, u_n \le t.$$

Considere los U_i's ordenados, esto es,

$$U_{(1)} \le U_{(2)} \le \cdots \le U_{(n)}.$$

La secuencia ordenada $U_{(1)}, \dots, U_{(n)}$ es llamada estadísticos de orden, con densidad conjunta

$$f_{U_{(1)},\dots,U_{(n)}}(u_1, \dots, u_n) = \frac{n!}{t^n}, \qquad 0 \le u_1 < \cdots < u_n \le t.$$

Distribución Uniforme

Sea $S_1, S_2, \ldots$ los tiempos de arribo de un proceso Poisson con parámetro λ. Note que, condicional a $N(t) = n$, la distribución conjunta de $(S_1, \ldots, S_n)$ corresponde a la distribución de los estadísticos de orden de n variables aleatorias IID U$[0, t]$, esto es

$$f(s_1, \ldots, s_n) = \frac{n!}{t^n}, \qquad 0 < s_1 < \cdots < u_n < t.$$

Equivalentemente, sea $U_1, \ldots, U_n$ una secuencia de variables IID U$[0, t]$. Entonces, condicional a $N(t) = n$

$$(S_1, \ldots, S_n) \overset{\mathsf{d}}{=} (U_{(1)}, \ldots, U_{(n)}).$$

```
pois.sim <- function(lambda = 1, time = 10)
{ ## Simulating a Poisson process on [0,t]
  n <- rpois(1, lambda * time)
  u <- runif(n, min = 0, max = time)
  arrivals <- sort(u)
  arrivals
}

# interpreta el script
> source("pois.sim.R")

# ejecuta la función 'pois.sim'
> z <- pois.sim(lambda = 1/2, time = 30)
> z
 [1]  0.5587434 10.1999337 11.7802697 11.8546402 14.9954662
 [6] 15.2716948 15.2992384 17.3412190 18.8554550 20.2532313
[11] 21.0426627 25.3869250 29.4826872
```

Distribución Poisson

Sea $X \sim \mathsf{Poi}(\lambda)$ y considere

$$P_\lambda(k) := \mathsf{P}(X = k),$$

es fácil notar que

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda}{k}\, P_\lambda(k-1),$$

con condición inicial $P_\lambda(0) = e^{-\lambda}$.

Algoritmo:

Entrada: λ y n, con n el número de términos.

Salida: $P_\lambda(k)$, para $k = 0, 1, \ldots, n$.

Inicialización: $P_\lambda(0) = e^{-\lambda}$.

Iteración: para $k = 0, 1, \ldots, n-1$, hacer:

$$\mathsf{P}_\lambda(k+1) = \frac{\lambda}{k+1}\, P_\lambda(k).$$