

# CIND-221: Introducción a Procesos Estocásticos

**Felipe Osorio**

[f.osoriosalgado@uandresbello.edu](mailto:f.osoriosalgado@uandresbello.edu)

Facultad de Ingeniería, UNAB

## Definición 1 (Proceso estocástico):

Un **proceso estocástico** es una colección de variables aleatorias  $\{X_t, t \in T\}$  definidas en un mismo espacio de probabilidades  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  con  $T$  el conjunto de índices del proceso.<sup>1</sup>

El conjunto de valores que adopta la variable  $X_t$  es llamado **espacio de estados** del proceso y es denotado por  $S$ , y cada elemento de  $S$  es un estado del proceso.

---

<sup>1</sup>También llamado **espacio paramétrico**.

## *Observación:*

Para cada  $\omega \in \Omega$  fijo, tenemos que la transformación definida como:

$$\begin{aligned} X(\omega) : T &\rightarrow S \\ t &\rightarrow X_t(\omega) \end{aligned}$$

es llamada **trayectoria del proceso**.<sup>2</sup>

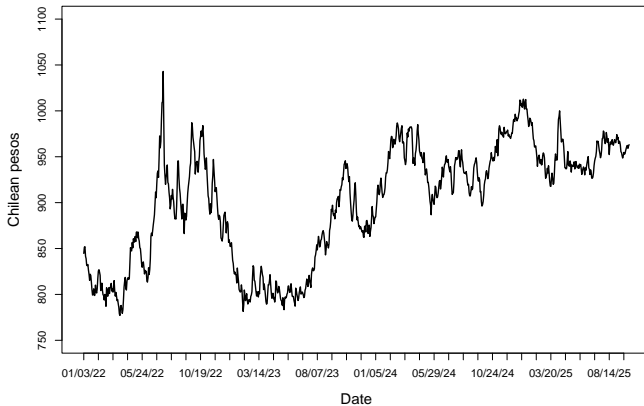
A continuación se presenta ejemplos de trayectorias con un conjunto de datos reales y mediante datos simulados, a saber:

- ▶ **Dólar observado vs. peso chileno** desde Enero-2022 a Octubre-2025.
- ▶ Trayectorias simuladas desde una **caminata aleatoria**.

---

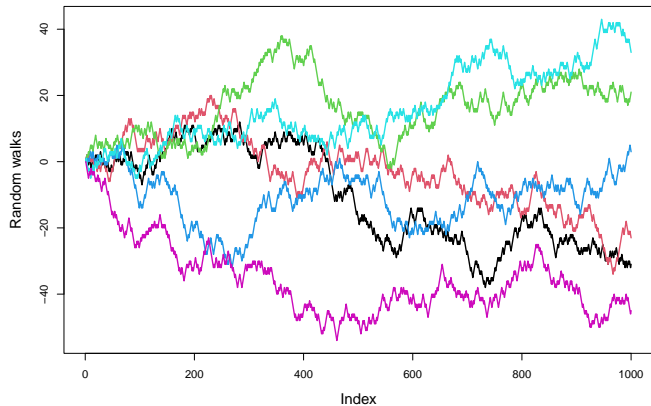
<sup>2</sup>o realización del proceso estocástico.

Trayectoria del dólar observado vs. peso chileno desde Enero-2022 a Octubre-2025<sup>3</sup>



<sup>3</sup>Datos extraídos desde página del Banco Central.

## Trayectorias simuladas



Procesos estocásticos pueden clasificarse en 4 tipos, dependiendo de la naturaleza del espacio de estados y espacio paramétrico.

► **Proceso estocástico de tiempo discreto y espacio de estado discreto**

- El número de individuos en una población al final del año  $t$ , que se puede modelar como  $\{X_t : t \in T\}$ , donde  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$  y  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

► **Proceso estocástico de tiempo continuo y espacio de estado discreto**

- El número de llamadas entrantes  $X_t$  en un intervalo  $[0, t]$ . Es decir, para el proceso estocástico  $\{X_t : t \in T\}$  tenemos  $T = \{t : 0 \leq t < \infty\}$  y  $S = \{0, 1, \dots\}$ .

► Proceso estocástico de tiempo discreto y espacio de estado continuo

- El precio de cierre de una acción en el día  $t$ . De este modo el proceso  $\{X_t : t \in T\}$ , tiene  $T = \{0, 1, \dots\}$  y  $S = \{x : 0 \leq x < \infty\}$ .

► Proceso estocástico de tiempo continuo y espacio de estado continuo

- El flujo de un río que se observa en un año.<sup>4</sup> En este caso

$$T = \{t : 0 \leq t < \infty\}, \quad S = \{x : 0 \leq x < \infty\}.$$

---

<sup>4</sup> $X_t$  es el flujo en el tiempo  $t$ .

## Definición 2:

Si, para todo  $t_0, t_1, \dots, t_n$  tal que  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , las variables aleatorias

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

son independientes, entonces el proceso  $\{X_t : t \in T\}$  se dice un **proceso con incrementos independientes**.

## Definición 3:

Un proceso estocástico  $\{X_t : t \in T\}$  se dice con **incrementos estacionarios** si

$$X_{t+h} - X_{s+h} \stackrel{d}{=} X_t - X_s,$$

para cualquier  $t, s \in T$  y  $h > 0$ .



## Definición 4:

Si, para todo  $t_1, t_2, \dots, t_n$  la distribución conjunta de los vectores

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})^\top, \quad (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})^\top,$$

es la misma, para todo  $h > 0$ . Entonces, El proceso  $\{X_t : t \in T\}$  se dice **estacionario**.

## Notación:

Sea  $\{X_t : t \in T\}$  un proceso estocástico. Entonces, denotamos:

- ▶  $m(t) = E(X_t)$ ,  $t \in T$  a la **función de media** del proceso.
- ▶  $K(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t)$ , para  $s, t \in T$  como la **función de covarianza** del proceso.

## Definición 5:

Un proceso estocástico  $\{X_t, t \in T\}$  se denomina **proceso de segundo orden** si  $E(X_t^2) < \infty$ , para todo  $t \in T$ .

## Ejemplo:

Sean  $Z_1$  y  $Z_2$  variables aleatorias independientes normalmente distribuidas, cada una con media 0 y varianza  $\sigma^2$ . Para  $\lambda \in \mathbb{R}$ , considere

$$X_t = Z_1 \cos(\lambda t) + Z_2 \sin(\lambda t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entonces  $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$  es un proceso estacionario de segundo orden.

Note que la función de medias es dada por

$$E(X_t) = E\{Z_1 \cos(\lambda t) + Z_2 \sin(\lambda t)\} = E(Z_1) \cos(\lambda t) + E(Z_2) \sin(\lambda t).$$

Sin embargo,  $Z_j \sim N(0, \sigma^2)$ , para  $j = 1, 2$ . De este modo,  $E(X_t) = 0$ .

Por otro lado,

$$\begin{aligned} E(X_t^2) &= E\{[Z_1 \cos(\lambda t) + Z_2 \sin(\lambda t)]^2\} \\ &= E\{Z_1^2 \cos^2(\lambda t) + Z_2^2 \sin^2(\lambda t) + 2Z_1 Z_2 \cos(\lambda t) \sin(\lambda t)\} \\ &= E(Z_1^2) \cos^2(\lambda t) + E(Z_2^2) \sin^2(\lambda t) + 2E(Z_1 Z_2) \cos(\lambda t) \sin(\lambda t), \end{aligned}$$

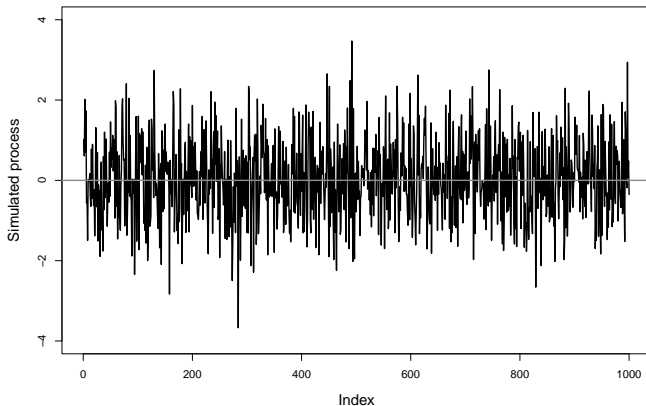
como  $Z_1$  y  $Z_2$  son independientes, sigue que  $E(Z_1 Z_2) = E(Z_1) E(Z_2) = 0$ , y como  $E(Z_1^2) = E(Z_2^2) = \sigma^2$ , obtenemos:

$$E(X_t^2) = \sigma^2 \{\cos^2(\lambda t) + \sin^2(\lambda t)\} = \sigma^2 < \infty.$$

Es decir, el proceso  $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$  es de segundo orden.

# Procesos Estocásticos

**Proceso simulado:**  $X_t = Z_{1t} \cos(\lambda t) + Z_{2t} \sin(\lambda t)$ , con  $t \in [1, T]$  donde  $T = 1000$ ,  $\{Z_{jt}\}$  es simulado desde  $N(0, 1)$ , para  $j = 1, 2$ , y  $\lambda = 1$ .



## Definición 6:

Un proceso estocástico de segundo orden  $\{X_t, t \in T\}$  se dice **débilmente estacionario** si  $m(t) = E(X_t)$  es independiente de  $t$  y su función de covarianza  $K(s, t)$  depende sólo de la diferencia  $|t - s|$ , es decir,

$$\text{cov}(X_s, X_t) = f(|t - s|).$$

## Ejemplo:

Sea  $\{X_n : n \geq 1\}$  variables aleatorias no correlacionadas con media 0 y varianza 1. Entonces

$$\text{cov}(X_r, X_n) = E(X_r X_n) = \begin{cases} 0, & r \neq n, \\ 1, & r = n. \end{cases}$$

Entonces  $\{X_n : n \geq 1\}$  es un proceso débilmente estacionario.

## Definición 7 (Proceso de Markov):

Sea  $\{X_t : t \geq 0\}$  un proceso estocástico definido sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  con espacio de estados  $S$  discreto. Se dice que  $\{X_t : t \geq 0\}$  es un **proceso de Markov** si para cualquier  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$  y para todo  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y$ , se tiene que

$$P(X_{t_n} = y | X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = P(X_{t_n} = y | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}).$$

## Observación:

Cualquier proceso estocástico que tenga incrementos independientes es un proceso de Markov.

## Definición 8 (Función de transición):

Si  $\{X_t : t \geq 0\}$  es un proceso de Markov, a la probabilidad condicional:

$$p_{st}(x, y) = P(X_t = y | X_s = x),$$

se le denomina **función de transición** del proceso.<sup>5</sup>

### Observación:

A continuación supondremos que la función de transición será estacionaria,

$$p_t(x, y) = p_{uv}(x, y) = P(X_v = y | X_u = x),$$

con  $t = v - u \geq 0$ .

---

<sup>5</sup>Es decir,  $p_{st}(x, y)$  es la probabilidad de transición del tiempo  $s$  al tiempo  $t$  ( $s \rightarrow t$ ).

## Definición 9 (Cadena de Markov):

Sea  $S$  un conjunto discreto. Una **cadena de Markov** es una secuencia de variables aleatorias  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  que satisface

$$P(X_{n+1} = y | X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) = P(X_{n+1} = y | X_n = x),$$

para todo  $x_1, \dots, x_{n-1}, x, y \in S$  y  $n \geq 1$ .

### Observación:

Podemos interpretar la propiedad anterior como: *Si conocemos  $X_n = x$ , conocer la historia anterior  $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_1$  no tiene influencia en el estado futuro  $X_{n+1}$ .*



## Definición 10 (Probabilidad de transición):

Sea  $\{X_n : n \geq 0\}$  una cadena de Markov. Las probabilidades

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

son llamadas **probabilidades de transición**.

### Observación:

A continuación caracterizaremos una cadena de Markov organizando las probabilidades  $p_{ij}$  en una matriz. Considere la siguiente definición.

## Definición 11 (Vector de probabilidades):

Sea  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^\top$  se dice un **vector de probabilidades**, si satisface:

- (i)  $p_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
- (ii)<sup>6</sup>  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

---

<sup>6</sup>o equivalentemente  $\mathbf{1}^\top \mathbf{p} = 1$  con  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\top$

## Definición 12 (Cadena homogénea):

Una cadena de Markov  $\{X_n : n \geq 0\}$  es llamada **homogénea** si las probabilidades de transición no dependen de  $n$ . Esto es,

$$p_{ij} = P(X_1 = j | X_0 = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

## Definición 13 (Distribución inicial):

La distribución de probabilidades  $\pi := \{\pi_i\}_{i \in S}$ , con

$$\pi_i = P(X_0 = i),$$

es llamada **distribución inicial**.

## Definición 13 (Matriz de transición):

La matriz

$$\mathbf{P} = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

es llamada **matriz de transición**.

Note que una matriz de transición es una **matriz estocástica**<sup>7</sup> que satisface:

- (i)  $p_{ij} \geq 0$ , para todo  $i, j \in S$ .
- (ii)  $\sum_j p_{ij} = 1$ , para todo  $i \in S$ .

---

<sup>7</sup>Una matriz de transición también es llamada **matriz de probabilidad**.

### *Ejemplo:*

Considere la matriz

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

En efecto,  $p_{ij} > 0$ ,  $\forall i, j$ , y

$$0.5 + 0.4 + 0.1 = 1,$$

$$0.3 + 0.4 + 0.3 = 1,$$

$$0.2 + 0.3 + 0.5 = 1.$$

### *Ejemplo (Secuencia IID):*

Asuma que  $X_0, X_2, \dots$  es una secuencia de variables aleatorias IID que toma valores en  $\{1, \dots, k\}$ , con

$$P(X_n = j) = p_j, \quad \text{para } j = 1, \dots, k, \text{ y } n \geq 0,$$

donde  $p_1 + \dots + p_k = 1$ . Por independencia, tenemos que

$$P(X_1 = j | X_0 = i) = P(X_1 = j) = p_j.$$

La matriz de transición es dada por:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k \end{pmatrix}.$$

## Ejemplo (Caminata aleatoria):

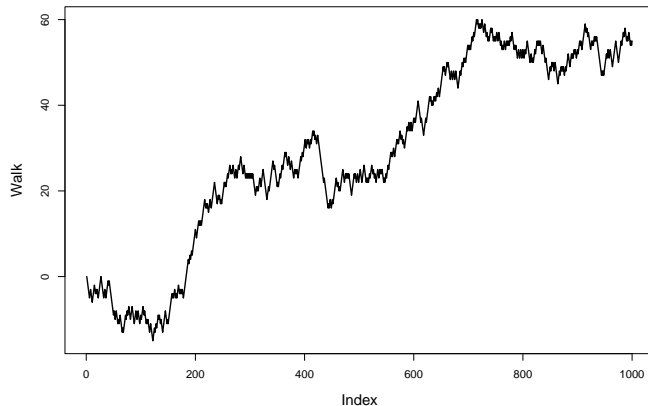
Una cadena de Markov cuyo espacio de estados es dado por los enteros  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  se dice una **caminata aleatoria** si para  $0 < p < 1$ , tenemos

$$p_{i,i+1} = p = p_{i,i-1}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1-p & 0 & p & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \cdots & 0 & 1-p & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & 0 & 1-p & 0 & p & \cdots & 0 \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

## Caminata aleatoria 1-D<sup>8</sup>



---

<sup>8</sup>En inglés, [random walk](#).

## Resultado 1:

- (a) Considere  $P$  matriz de transición, entonces la condición (ii) puede ser expresada como:<sup>9</sup>

$$P\mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

- (b) Cualquier fila de la matriz  $P$  es un vector de probabilidades.

## Demostración:

Considere  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Para verificar (a), note que  $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$ , es decir:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

---

<sup>9</sup>Es decir  $\mathbf{1}$  es vector propio de  $P$  con valor propio asociado  $\lambda = 1$ .



Es decir,

$$p_{11} + p_{12} + \cdots + p_{1n} = 1$$

$$p_{21} + p_{22} + \cdots + p_{2n} = 1$$

$$\vdots$$

$$p_{n1} + p_{n2} + \cdots + p_{nn} = 1$$

o equivalentemente

$$\sum_{j=1}^n p_{1j} = 1, \quad \sum_{j=1}^n p_{2j} = 1, \quad \dots \quad \sum_{j=1}^n p_{nj} = 1.$$

De este modo,

$$\sum_{j=1}^n p_{ij}, \quad i = 1, \dots, n.$$

La demostración de (b) es directa.

## Resultado 2:

Si  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es matriz de transición y  $q$  es vector de probabilidades  $n$ -dimensional. Entonces  $q^\top P$  es vector de probabilidades.

### *Demostración:*

Sea  $r^\top = q^\top P$ , con  $r = (r_1, \dots, r_n)^\top$ . Evidentemente  $r_i \geq 0$  para  $i = 1, \dots, n$ . Note que  $r^\top \mathbf{1} = \sum_{j=1}^n r_j$ . Así,

$$r^\top \mathbf{1} = q^\top P \mathbf{1} = q^\top \mathbf{1} = 1,$$

pues  $q$  es vector de probabilidades.

### Resultado 3:

Si  $P = (p_{ij})$  y  $Q = (q_{ij})$  son matrices de transición  $n \times n$ . Entonces el producto  $PQ$  es una matriz de transición.

### *Demostración:*

Sabemos que  $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$  y  $Q\mathbf{1} = \mathbf{1}$ . Deseamos mostrar  $PQ\mathbf{1} = \mathbf{1}$ . En efecto,

$$PQ\mathbf{1} = P\mathbf{1} = \mathbf{1},$$

lo que verifica el resultado.

### Resultado 4:

Si  $P$  es matriz de transición  $n \times n$ , entonces  $P^2, P^3, \dots, P^m$  son matrices de transición.

#### *Demostración:*

El resultado sigue inmediatamente desde el [Resultado 3](#). En efecto, tomando  $Q = P$ , sigue que:

$$P^2 \mathbf{1} = PQ \mathbf{1} = \mathbf{1},$$

análogamente para  $P^3 \mathbf{1} = P^2 Q \mathbf{1} = \mathbf{1}$  y así sucesivamente para  $P^m$ .<sup>10</sup>

---

<sup>10</sup> Este resultado también se puede mostrar usando inducción.

## Resultado 5 (Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov):

Si la secuencia de variables aleatorias  $\{X_n : n \geq 0\}$  es una cadena de Markov y si  $k < m < n$ , entonces tenemos que para todo  $h, j \in S$ ,

$$P(X_n = j | X_k = h) = \sum_{i \in S} P(X_n = j | X_m = i) P(X_m = i | X_k = h).$$

## Definición 14:

Sea  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  una cadena de Markov, la **probabilidad de transición en  $m$  pasos** desde el estado  $i$  al  $j$ , es dada por:

$$p_{ij}^{(m)} = P(X_{n+m} = j | X_n = i).$$

Además,

$$p_{ij}^{(0)} = P(X_n = j | X_n = i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

## Observación:

La probabilidad  $p_{ij}^{(m)}$  es estacionaria si y solo si,

$$p_{ij}^{(m)} = P(X_{n+m} = j | X_n = i) = P(X_m = j | X_0 = i).$$

## Observación:

Las **probabilidades de transición de  $m$ -pasos**, pueden ser escritas en la matriz de transición:

$$\mathbf{P}^{(m)} = (p_{ij}^{(m)}).$$

Es decir,  $\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{I}$ .

## Definición 15 (Cadena de Markov homogénea):

Una cadena de Markov cuyas probabilidades de transición en  $m$  pasos son todas estacionarias es llamada **cadena de Markov homogénea**.

## Proposición 1:

Las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov proveen un procedimiento para calcular las probabilidades de transición de  $n$ -pasos. En efecto, sigue que:

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)},$$

para todo  $n, m \geq 0$  y todo  $i, j \in S$ .

## *Observación:*

En forma matricial la **Proposición 1** puede ser escrita como:

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)},$$

donde  $\cdot$  denota multiplicación matricial.

Note la condición inicial,

$$P^{(2)} = P^{(1+1)} = P \cdot P = P^2,$$

continuyendo por inducción tenemos que la **matriz de transición de  $n$ -pasos** puede ser escrita como:

$$P^{(n)} = P^{(n-1+1)} = P^{(n-1)} P = P^n.$$

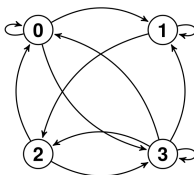


## Observación:

Si  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  es una cadena de Markov con conjunto de estados  $S = \{0, 1, 2, 3\}$ , con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$

que puede ser representada por una red con vértices que indican los estados y arcos indicando transiciones.



## Corolario 1 (Matriz de transición de $n$ -pasos):

Sea  $X_0, X_1, \dots$  una cadena de Markov con matriz de transición  $\mathbf{P}$ . La matriz de transición de  $n$ -pasos de la cadena es dada por:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}, \quad n \geq 0,$$

con  $p_{ij}^{(n)} = \mathbf{P}(X_n = j | X_0 = i), \forall i, j$ .

### *Ejercicio:*

Considere la matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad q = 1 - p.$$

Obtenga  $\mathbf{P}^3$  y verifique que es matriz de transición.

### *Ejercicio:*

Considere una cadena de Markov con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix},$$

donde  $p, q \in (0, 1)$  y  $p + q > 0$ . Determine  $P^n$ .

### *Sugerencia:*

- ▶ Calcular valores y vectores propios de  $P$ , esto es  $Pu_i = \lambda_i u_i$ ,  $i = 1, 2$ .
- ▶ Sea  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$  y  $U = (u_1, u_2)$ , luego  $P = U\Lambda U^{-1}$ .
- ▶ Ahora,  $P^n = U\Lambda^n U^{-1}$  (¿por qué?).
- ▶ Calcular  $U^{-1}$  y  $\Lambda^n$  para obtener  $P^n$ .

### Ejercicio:

Considere

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

verifique (por inducción) que la  $n$ -ésima potencia de  $\mathbf{P}$  es dada por:

$$\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Qué sucede cuando  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n$ ?