PRELIMINARES

FELIPE OSORIO

1. Técnicas de conteo

El análisis combinatorio es el estudio sistemático del conteo de todas las posibles agrupaciones desde un conjunto de objetos. Esta tarea es equivalente contar los elementos de un conjunto finito. A continuación presentaremos ideas preliminares para posteriormente introducir diversas técnicas de conteo.

Los conjuntos A y B se dicen *equivalentes* y anotamos $A \sim B$ si y solo si existe una función biyectiva de A a B.

Ejemplo 1. El conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es equivalente al conjunto $B = \{1, 2, \dots, n\}$ con $f(a_k) = k$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$, es una función biyectiva desde A a B.

Un conjunto A es llamado *finito*, con n elementos si y solo si es equivalente al conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Asumiremos que $\varnothing$ es finito con cero elementos. Un conjunto que no es finito de dice *infinito*, mientras que un conjunto A se denomina *infinito numerable* si y solo si es equivalente al conjunto de números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Un conjunto A es llamado *numerable* (o contable) si es finito o infinito numerable, en caso contrario se dice *no numerable*.

El número de elementos de un conjunto finito A, denotado por $\mathsf{N}(A)$, es llamado *cardinal* de A. En caso que Ω sea un conjunto finito, su cardinalidad será denotada como $\mathsf{N}(\Omega) = N$.

Los principios fundamentales del conteo corresponden al *Principio de multiplicación* y el *Principio de adición*. En lo que sigue consideraremos conjuntos finitos. A partir de las definiciones anteriores podemos destacar el siguiente lema.

Lema 2. *Si A y B son conjuntos finitos y equivalentes, entonces*
$$\mathsf{N}(A) = \mathsf{N}(B).$$

De este modo, el cardinal de un conjunto finito A puede ser determinado desde un conjunto finito B, equivalente a A, cuya cardinalidad sea conocida. A continuación, revisamos algunas propiedades básicas del cardinal, que se pueden reestablecer como los principios del conteo.

Resultado 3. *Si A y B son conjuntos finitos, entonces*
$$\mathsf{N}(A \times B) = \mathsf{N}(A)\,\mathsf{N}(B).$$

La cardinalidad del producto Cartesiano de más que dos conjuntos finitos se deduce desde el resultado anterior, en efecto considere el resultado siguiente.

Corolario 4. *Si $A_1, A_2, \dots, A_k$ son conjuntos finitos, entonces*
$$\mathsf{N}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) = \mathsf{N}(A_1)\,\mathsf{N}(A_2) \cdots \mathsf{N}(A_k).$$

Estos resultados son conocidos frecuentemente como el principio de multiplicación, el cual se puede exponer como sigue:

Resultado 5 (Principio de Multiplicación)**.** *Suponga que el conjunto A_1 contiene n_1 elementos, el conjunto A_2 contiene n_2 elementos, ..., y el conjunto A_k contiene n_k elementos. Entonces el número de maneras de escoger un objeto desde cada uno de los k conjuntos es:*

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_k.$$

Ejemplo 6. En cierto medioambiente, existe 14 especies de mosca de la fruta, 17 especies de polillas y 13 especies de mosquitos. Se desea determinar el número de formas en que se puede escoger una especie de cada tipo. En efecto, tenemos $n_1 = 14$, $n_2 = 17$ y $n_3 = 13$. De este modo, por el principio de multiplicación sigue que existe $14 \cdot 17 \cdot 13 = 3094$ maneras diferentes de seleccionar una especie de cada tipo.

Ahora, considere el siguiente resultado,

Resultado 7. *Si A y B son conjuntos finitos y disjuntos, entonces*

$$\mathsf{N}(A \cup B) = \mathsf{N}(A) + \mathsf{N}(B).$$

Basado en el resultado anterior, se puede mostrar que para A y B subconjuntos de un conjunto universal Ω, entonces:

$$\mathsf{N}(A^c) = N - \mathsf{N}(A),$$

con $N = \mathsf{N}(\Omega)$, mientras que

$$\mathsf{N}(A - B) = \mathsf{N}(A) - \mathsf{N}(A \cap B),$$

y particularmente para $B \subseteq A$,

$$\mathsf{N}(A - B) = \mathsf{N}(A) - \mathsf{N}(B).$$

El siguiente resultado se conoce como principio de adición y corresponde a una extensión del Resultado 7.

Corolario 8. *Si $A_1, A_2, \dots, A_k$ son conjuntos finitos y mutuamente excluyentes, entonces*

$$\mathsf{N}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \mathsf{N}(A_1) + \mathsf{N}(A_2) + \cdots + \mathsf{N}(A_k).$$

Esto permite establecer el siguiente principio.

Resultado 9 (Principio de Adición)**.** *Si un elemento ω_i puede ser seleccionado en n_i maneras diferentes para $i = 1, 2, \dots, k$ y la selección de ω_i excluye la selección simultánea de ω_j, para $i, j = 1, 2, \dots, k$, $i \neq j$. Entonces cualquiera de los elementos ω_1 o ω_2 o ... o ω_k, puede ser seleccionado en*

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k,$$

maneras.

Ejemplo 10. Considere el siguiente experimento: *Lanzar un dado o una moneda.* De este modo, los resultados posibles del experimento son $6 + 2 = 8$.

En análisis combinatorio debemos distinguir entre conjuntos *ordenados* y *desordenados.* En un conjunto ordenado, el orden es relevante, mientras que no lo será para un conjunto desordenado. Para ilustrar, considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11. Sea $A = \{1, 2, 3\}$, el listado de todos los subconjuntos ordenados de tamaño 2, corresponde a

$$(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2),$$

mientras que la lista de todos los subconjuntos desordenados de tamaño 2 consiste en:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}.$$

Note que en este caso el conjunto $\{2, 1\}$ es idéntico al conjunto $\{1, 2\}$, de modo que no se incluye en el listado.

Definición 12. Sea A un conjunto finito con n elementos. Una k-upla ordenada $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ con $a_r \in A$, $r = 1, 2, \ldots, k$, es llamada una k-permutación del conjunto A, o bien una k-permutación de n.

Ejemplo 13. Para el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ de 3 elementos tenemos que las 2-permutaciones son las siguientes:

$$(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2).$$

Note que, cualquier permutación (a_i, a_j) del conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ puede ser construída como sigue:

- Seleccionamos el primer elemento a_i desde el conjunto A con 3 elementos, y
- Seleccionamos el segundo elemento a_j, el cual debe ser diferente de a_i, desde el conjunto $B = A - \{a_i\}$ de 2 elementos.

De este modo, usando el principio de multiplicación, el número de 2-permutaciones de 3 es $3 \cdot 2 = 6$. En efecto, $6 = \mathsf{N}(C)$, donde

$$C = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Definición 14. El número de k-permutaciones de n, denotadas por $P_{n,k}$ o bien $(n)_k$, es dada por

$$P_{n,k} := (n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Ejemplo 15. Suponga que se desea calcular cuantas "palabras"de cuatro letras pueden ser formadas (no necesariamente en español) a partir de la palabra "válido". Note que lo que se desea es obtener el número de todas las 4-permutaciones de 6, es decir:

$$P_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$

Para el caso particular en que $k = n$, tenemos que el número de permutaciones de n, es dada por

$$P_{n,n} = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1.$$

Definición 16. El producto de todos los enteros desde 1 a n, es llamado n *factorial* y se denota como $n!$, es decir

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n = \prod_{j=1}^{n} j.$$

Ejemplo 17. ¿De cuantas formas diferentes podemos ubicar 5 personas en 5 asientos?

$$(5)_5 = 5! = 120.$$

Note que podemos escribir el número $P_{n,k} = (n)_k$ como:

$$\begin{aligned}P_{n,k} &= n(n-1)\cdots(n-(k-1))\\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))(n-k)(n-(k+1))\cdots 2\cdot 1}{(n-k)(n-(k+1))\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!},\end{aligned}$$

para $k = 1, 2, \dots, n$, y $n = 1, 2, \dots$. Asumiremos que $0! = 1$, lo que permite escribir

$$\begin{aligned}P_{n,0} &= (n)_0 = 1, \qquad n = 0, 1, \dots,\\ P_{0,0} &= 1,\end{aligned}$$

y además,

$$P_{n,n-1} = P_{n,n} = n!,$$

mientras que, para $k > n$, $P_{n,k} = (n)_k = 0$. Es fácil notar que el factorial $n!$ crece rápidamente conforme n crece. Por ejemplo,

$$2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 5040, \dots$$

Una aproximación útil es dada a continuación.

Observación 18 (Fórmula de Stirling)*.* Si n es un entero positivo,

$$n! \approx e^{-n} n^{n+1/2} \sqrt{2\pi}.$$

En efecto, es posible mostrar que,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{e^{-n} n^{n+1/2}} = \sqrt{2\pi}.$$

Resultado 19. *El número $n!$ de permutaciones de n, satisface la relación de recurrencia:*

$$n! = n(n-1)!, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

con condición inicial $0! = 1$.

Ejemplo 20. En R se dispone de las funciones `factorial` y `lfactorial` para el cálculo del factorial y su logaritmo, respectivamente. Adicionalmente, podemos llevar a cabo el cálculo de $P_{n,k}$ mediante la función `prod`, por ejemplo:

```
# 4-permutaciones de 6
> prod(6:3)
[1] 360
```

```
# cálculo usando factoriales
> factorial(6) / factorial(6 - 4)
[1] 360
```

Por ejemplo, podemos escribir una función en R para evaluar la formula de Stirling, como:

```
# fórmula de Stirling
> stirling <- function(n) {
+   val <- sqrt(2 * pi) * exp(-n) * n^(n + .5)
+   exact <- factorial(n)
+   rel <- abs(val - exact) / exact
+   attr(val, "error") <- rel
+   val
}
```

```
# aproximación de 5!
> stirling(5)
[1] 118.0192
attr(,"rel")
[1] 0.016507
```

En algunos casos, no todos los objetos que se desea permutar pueden ser distinguidos. Por ejemplo, existe $3! = 6$ permutaciones de las 3 letras AB$\underline{\text{B}}$, a saber:

$$\text{AB}\underline{\text{B}},\ \text{A}\underline{\text{B}}\text{B},\ \text{BA}\underline{\text{B}},\ \text{B}\underline{\text{B}}\text{A},\ \underline{\text{B}}\text{AB},\ \underline{\text{B}}\text{BA}.$$

Sin embargo, las dos B's *no son distinguibles*. En efecto, las únicas permutaciones distinguibles son ABB, BAB y BBA. De este modo, los distintos ordenamientos son

$$\frac{3!}{2!\,1!} = \frac{6}{2} = 3,$$

pues disponemos un total de 3 letras, dos de ellas B y una A.

Para generalizar el concepto anterior, suponga un conjunto de n elementos particionado en r subconjuntos conteniendo $k_1, k_2, \dots, k_r$ elementos con $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_r$. El número de permutaciones de n objetos que incluye $k_1, k_2, \dots, k_r$ objetos indistinguibles, es dado en el siguiente resultado.

Resultado 21. *El número de permutaciones de n tipos de elementos con $k_1, k_2, \dots, k_r$ elementos, respectivamente, es dado por*

$$M_{k_1,k_2,\dots,k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}, \qquad n = k_1 + k_2 + \cdots + k_r.$$

Observación 22. Es frecuente escribir $M_{k_1,k_2,\dots,k_r}$ usando el *coeficiente multinomial*,

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}.$$

Ejemplo 23. Calcular el número de permutaciones distintas con las cifras $\{4, 7, 3, 4, 7, 7, 3\}$. De este modo,

$$\binom{7}{2, 2, 3} = \frac{7!}{2!\,2!\,3!} = \frac{5040}{2 \cdot 2 \cdot 6} = 210.$$

Para motivar ideas considere el siguiente ejemplo,

Ejemplo 24. Suponga que se lanza 3 veces una moneda y registramos si el resulta es cara (C) o sello (S). De este modo, obtenemos:

$$(C, C, C), (C, C, S), (C, S, C), (S, C, C), (C, S, S), (S, C, S), (S, S, C), (S, S, S).$$

Es decir, tenemos $2^3 = 8$ permutaciones con repetición.

El siguiente resultado presenta el número de permutaciones con repeticiones.

Resultado 25. *El número de k-permutaciones de n con repetición, denotada como $U_{n,k}$ es dada por:*

$$U_{n,k} = n^k.$$

Ejemplo 26. Suponga el conjunto $A = \{1,2,3\}$ y considere todas las 2-permutaciones de A con repetición

$$(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3).$$

Es decir, el total del 2-permutaciones de 3 cuando las repeticiones son permitidas es dada por

$$U_{3,2} = 3^2 = 9.$$

Ejemplo 27. Considere un grupo de k personas. ¿Cuántas listas posibles se pueden realizar con los días de sus cumpleaños? En efecto, tenemos

$$\underbrace{365 \cdot 365 \cdots 365}_{k \text{ veces}} = 365^k.$$

Definición 28. Sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunto finito de n elementos. Una colección (desordenada) de k elementos $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ con $a_r \in A$, $r = 1,2,\dots,k$ es llamada una k-combinación del conjunto A, o bien una k-combinación de n.

Ejemplo 29. Considere el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$, las 2-combinaciones de A son las siguientes:

$$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}.$$

En efecto, $\{1,2\}$ y $\{2,1\}$ corresponden al mismo conjunto y sólo difieren en el orden. Mientras que, las 3-combinaciones de A corresponden a

$$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}.$$

En R la función `combn` permite listar todas las combinaciones posibles tomadas desde un conjunto con n elementos. Para el conjunto A, podemos listar las 2-combinaciones y 3-combinaciones, como

```
# conjunto de índices
> a <- 1:4
> a
[1] 1 2 3 4

# 2-combinaciones de 4
> combn(a, m = 2)
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
[1,]    1    1    1    2    2    3
[2,]    2    3    4    3    4    4
```

```
# 3-combinaciones de 4
> combn(a, m = 3)
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    1    1    2
[2,]    2    2    3    3
[3,]    3    4    4    4
```

Resultado 30. *El número de k-combinaciones de n, denotada por $C_{n,k}$ o bien $\binom{n}{k}$ es dada por*

$$C_{n,k} := \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ejemplo 31. Un comité está conformado por 12 miembros y el quorum mínimo para su funcionamiento es de 8 miembros. Deseamos saber en cuantas maneras podemos constituir el comité de manera tal que tengamos el quorum mínimo. De ahí que, existe

$$\binom{12}{8} = \frac{12!}{8!\,4!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{8!\,4!} = \frac{11880}{24} = 495,$$

maneras de escoger 8 miembros. Por otro lado, suponga que deseamos conocer en cuantas formas podemos tener quorum. Como tenemos quorum cuando tenemos 8, 9, 10, 11 o 12 miembros, el número de maneras en que se tiene quorum es:

$$\binom{12}{8} + \binom{12}{9} + \binom{12}{10} + \binom{12}{11} + \binom{12}{12} = 495 + 220 + 66 + 12 + 1 = 794,$$

maneras.

En R se encuentra disponible la función `choose` para el cálculo de combinatorios, es decir podemos obtener los resultados anteriores usando:

```
# quorum mínimo
> choose(12, 8)
[1] 495

# quorum, i.e. 8,9,10,11 o 12 miembros
> accum <- 0
> for (i in 8:12) {
+  accum <- accum + choose(12, i)
+ }
> accum
[1] 794
```

El número $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ es conocido como *coeficiente binomial*, y satisface la siguiente relación

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

A continuación se presenta una propiedad muy relevante del coeficiente binomial.

Resultado 32 (Triángulo de Pascal)**.** *El número $C_{n,k} = \binom{n}{k}$, de k-combinaciones de n, satisface la relación de recurrencia*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

para $k = 1, 2, \dots,$ $n = 1, 2, \dots,$ con condiciones iniciales

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad n = 0, 1, \dots,$$
$$\binom{n}{k} = 0, \qquad k > n.$$

Corolario 33. *El número $C_{n,k} = \binom{n}{k}$, de k-combinaciones de n, satisface la relación de recurrencia*

$$\binom{n}{k} = \sum_{r=k}^{n} \binom{r-1}{k-1}, \qquad k = 1, 2, \dots, n, n = 1, 2, \dots.$$

Las definiciones anteriores permiten escribir el siguiente resultado.

Resultado 34 (Fórmula del binomio de Newton)**.** *Sea a, b dos número reales y n un entero positivo. Entonces*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Ejemplo 35. Un caso especial del teorema del binomio es

$$\begin{aligned} 2^n = (1+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}. \end{aligned}$$

Esta fórmula es interesante pues representa el número de todos los subconjuntos posibles que se pueden formar desde un conjunto con n elementos.

Facultad de Ingeniería, Universidad Andrés Bello
Orcid ID: 0000-0002-4675-5201
Email address: f.osoriosalgado@uandresbello.edu