1. Note que el elemento (i,j) de $\boldsymbol{Q}$ es dado por

$$q_{ij} = (1-\alpha)\delta_{ij} + \alpha p_{ij}, \qquad i,j = 1,\dots,k,$$

donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

denota el delta de Kronecker. Luego, es evidente que $q_{ij} \geq 0$, $\forall\, i,j$. Además, debemos verificar $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{1} = \boldsymbol{1}$. En efecto,

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{1} = \{(1-\alpha)\boldsymbol{I} + \alpha\boldsymbol{P}\}\boldsymbol{1} = (1-\alpha)\boldsymbol{1} + \alpha\boldsymbol{P}\boldsymbol{1}.$$

Sabemos que $\boldsymbol{P}\boldsymbol{1} = \boldsymbol{1}$. De este modo,

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{1} = (1-\alpha)\boldsymbol{1} + \alpha\boldsymbol{1} = \boldsymbol{1},$$

y $\boldsymbol{Q}$ es matriz de transición.

2.a. Note que

$$\boldsymbol{Q}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 1-p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 1-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ (1-p)p & p+(1-p)^2 \end{pmatrix}.$$

Para que $\boldsymbol{Q}$ sea matriz de transición regular debemos tener que todos los elementos de $\boldsymbol{Q}^2$ sean positivos, lo que lleva a las siguientes condiciones:

$$p > 0, \qquad 1-p > 0 \;\Rightarrow\; p < 1,$$

es decir, $p \in (0,1)$. Lo que permite verificar también que $(1-p)p > 0$ y $p + (1-p)^2 > 0$.

2.b. Tenemos que, el polinomio característico es dado por:

$$|\boldsymbol{Q} - \lambda\boldsymbol{I}| = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ p & 1-p-\lambda \end{pmatrix} = (1-p-\lambda)(-\lambda) - p = \lambda^2 - \lambda(1-p) - p.$$

Resolviendo $\lambda^2 - \lambda(1-p) - p = 0$, obtenemos

$$\lambda_1 = \frac{(1-p)+(1+p)}{2} = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{(1-p)-(1+p)}{2} = -\frac{2p}{2} = -p.$$

Notando que el vector propio asociado a λ_1 es $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{1}$, pues $\boldsymbol{Q}$ es matriz de transición. Entonces solo resta encontrar el segundo vector propio. Desde $(\boldsymbol{Q} - \lambda_2\boldsymbol{I})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, sigue:

$$\begin{pmatrix} p & 1 \\ p & 1-p+p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1 \\ p & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

obteniendo que $(u_1, u_2)^\top = (1, -p)^\top$ es vector propio asociado a $\lambda_2 = -p$.

3. Desde la condición,

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2),$$

sigue que

$$\frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{6} = \pi_0 \tag{1}$$
$$\frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{2} + \frac{\pi_2}{3} = \pi_1 \tag{2}$$
$$\frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{2} = \pi_2 \tag{3}$$

y adicionalmente,

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \tag{4}$$

Es decir, las ecuaciones (1)-(3) pueden ser escritas como:

$$-\frac{2\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{6} = 0 \tag{5}$$
$$\frac{\pi_0}{3} - \frac{\pi_1}{2} + \frac{\pi_2}{3} = 0 \tag{6}$$
$$\frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{4} - \frac{\pi_2}{2} = 0 \tag{7}$$

Desde las Ecuaciones (6) y (7), sigue:

$$\frac{\pi_0}{3} - \frac{\pi_1}{2} + \frac{\pi_2}{3} = \frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{4} - \frac{\pi_2}{2},$$

esto lleva a,

$$\pi_1\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\Big) = \pi_2\Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\Big) \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = \frac{10}{9}\,\pi_2.$$

Substituyendo en Ecuación (5), obtenemos

$$-\frac{2\pi_0}{3} + \frac{10}{9}\frac{\pi_2}{4} + \frac{\pi_2}{6} = 0,$$

lo que lleva a

$$\pi_0 = \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{4}\frac{10}{9} + \frac{1}{6}\Big)\pi_2 = \frac{2}{3}\pi_2.$$

Así, desde la Ecuación (4), resulta

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{10}{9}\pi_2 + \pi_2 = 1,$$

o bien,

$$\Big(\frac{6}{9} + \frac{10}{9} + \frac{9}{9}\Big)\pi_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_2 = \frac{9}{25}.$$

Es decir,

$$\pi_0 = \frac{2}{3}\frac{9}{25} = \frac{6}{25}, \qquad \pi_1 = \frac{10}{9}\frac{9}{25} = \frac{2}{5}.$$

Finalmente, la distribución estacionaria es dada por:

$$\boldsymbol{\pi} = \Big(\frac{6}{25}, \frac{10}{25}, \frac{9}{25}\Big)^\top.$$

En efecto,

$$\mathbf{1}^\top\boldsymbol{\pi} = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = \frac{6}{25} + \frac{10}{25} + \frac{9}{25} = 1.$$