CIND-221: Generalizaciones del proceso Poisson

Felipe Osorio

f.osoriosalgado@uandresbello.edu

Facultad de Ingeniería, UNAB

Definición 1 (Proceso Poisson compuesto):

Se dice que $X = \{X_t : t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson compuesto, si este puede ser representado de la forma:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,$$

donde $\{N(t) : t \geq 0\}$ es un proceso Poisson y $\{Y_i : i = 1, 2, \dots\}$ son variables aleatorias IID independientes de $N(t)$, $\forall\, t \geq 0$.

Observación:

Note que, si $Y_i = 1$, $\forall\, i$, entonces X es simplemente un proceso Poisson.

Propiedad 1:

Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ un proceso Poisson compuesto. Entonces

(i) $\mathsf{E}(X_t) = \lambda t \, \mathsf{E}(Y_1)$.

(ii) $\mathsf{var}(X_t) = \lambda t \, \mathsf{E}(Y_1^2)$.

Proposición 1:

Sea $X = \{X_t : t \geq 0\}$ un proceso Poisson compuesto. Entonces la MGF de X es dada por:

$$M_X(u) = \exp\{\lambda t (M_{Y_1}(u) - 1)\},$$

donde $M_{Y_1}(u)$ es la MGF de Y_1.

Demostración:

Tenemos que,

$$
\begin{aligned}
M_X(u) &= \mathsf{E}\{\exp(X_t u)\} = \mathsf{E}\Big\{\exp\Big(u\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\Big)\Big\} = \mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\Big\{\exp\Big(u\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\Big)\Big| N_t\Big\}\Big] \\
&= \mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\Big\{\prod_{i=1}^{N(t)} \exp\Big(uY_i\Big)\Big| N_t\Big\}\Big] = \mathsf{E}\Big[\prod_{i=1}^{N(t)} \mathsf{E}\{\exp(uY_i)|N_t\}\Big] \\
&= \mathsf{E}\Big\{\prod_{i=1}^{N(t)} M_{Y_1}(u)\Big\} = \mathsf{E}\{[M_{Y_1}(u)]^{N(t)}\} = \sum_{n=0}^{\infty}\{M_{Y_1}(u)\}^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{\{\lambda t M_{Y_1}(u)\}^n}{n!} = \exp\{\lambda t(M_{Y_1}(u)-1)\}.
\end{aligned}
$$

Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ un proceso Poisson compuesto y

$$G_n(y) = \mathsf{P}(Y_1 + \cdots + Y_n \leq y),$$

la CDF de $Y_1 + \cdots + Y_n$, que también es conocida como convolución de $F_1, \ldots, F_n$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X_t \leq x) &= \mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \leq x\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \leq x | N(t) = n\Big) \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} G_n(x),
\end{aligned}$$

pues $N(t)$ es independiente de $Y_1, Y_2, \ldots$

Definición 2 (Proceso Poisson mixto):

Sea Λ una variable aleatoria positiva y suponga que $\{N(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson no homogéneo independiente de Λ. Entonces el proceso $\{N(t) : t \geq 0\}$ con tasa Λt se denomina proceso Poisson mixto.

Si Λ tiene densidad $g(\lambda)$ entonces por la ley de probabilidad total, obtenemos que la distribución marginal adopta la forma

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(N(t) = n) &= \int_0^\infty \mathsf{P}(N(t) = n | \Lambda = \lambda)\, g(\lambda)\, \mathsf{d}\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}\, g(\lambda)\, \mathsf{d}\lambda \end{aligned}$$

Observación:

Dado $\Lambda = \lambda$, tenemos que $\{N(t) : t \geq 0\}$ es un proceso Poisson con tasa λ.

Ejemplo:

Sea $\{N(t) : t \geq 0\}$ un proceso Poisson con tasa Λ. Suponga que $\Lambda \sim \text{Gama}(a, b)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(N(t) = n) &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \, \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} e^{-b\lambda} \, \mathsf{d}\lambda \\ &= \frac{t^n b^a}{n!\Gamma(a)} \int_0^\infty \lambda^{(a+n)-1} e^{-(b+t)\lambda} \, \mathsf{d}\lambda \\ &= \frac{t^n b^a}{n!\Gamma(a)} \, \frac{\Gamma(a+n)}{(b+t)^{a+n}} = \frac{\Gamma(a+n)}{n!\Gamma(a)} \Big(\frac{t}{t+b}\Big)^n \Big(\frac{b}{t+b}\Big)^a. \end{aligned}$$

Es decir, $\{N(t) : t \geq 0\}$ sigue una distribución Binomial negativa[1], en cuyo caso:

$$\mathsf{E}\{N(t)\} = \frac{at}{b}, \qquad \text{var}\{N(t)\} = \frac{at}{b} + \frac{at^2}{b^2}.$$

[1] Esto es, $N(t) \stackrel{\mathsf{d}}{=} \text{NB}(a, b)$.

Proposición 2:

Si $\{N(t) : t \geq 0\}$ es un proceso Poisson mixto con tasa aleatoria Λ, entonces

(i) $\mathsf{E}\{N(t)|\Lambda\} = \mathsf{var}\{N(t)|\Lambda\} = t\Lambda$.

(ii) $\mathsf{E}\{N(t)\} = t\,\mathsf{E}(\Lambda)$.

(iii) $\mathsf{var}\{N(t)\} = t\,\mathsf{E}(\Lambda) + t^2\,\mathsf{var}(\Lambda)$.

Observación:

Además, la densidad condicional de $\Lambda|N(t) = n$, es dada por

$$f_{\Lambda|N(t)}(\lambda|n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda t} g(\lambda)}{\int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t} g(\lambda)\,\mathsf{d}\lambda}, \qquad \lambda > 0.$$

Generalizaciones del proceso Poisson

El proceso Poisson espacial es un modelo para la distribución de puntos en un espacio de dos o más dimensiones.

Este tipo de procesos se han usado, por ejemplo, para modelar la ubicación de árboles en un bosque, galaxias en el cielo nocturno, células cancerígenas en diversas zonas de un tejido.

Para $d \geq 1$, y $A \subseteq \mathbb{R}^d$, sea N_A el número de puntos en el conjunto A. Denotamos por $|A|$ el tamaño de A (por ejemplo, el área en $\mathbb{R}^2$, volumen en $\mathbb{R}^3$).

Definición 3 (Proceso Poisson espacial):

Sea S un conjunto en un espacio d-dimensional y sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de S. Una colección de variables aleatorias $\{N_A : A \in \mathcal{A}\}$ es un proceso Poisson espacial con parámetro λ si:

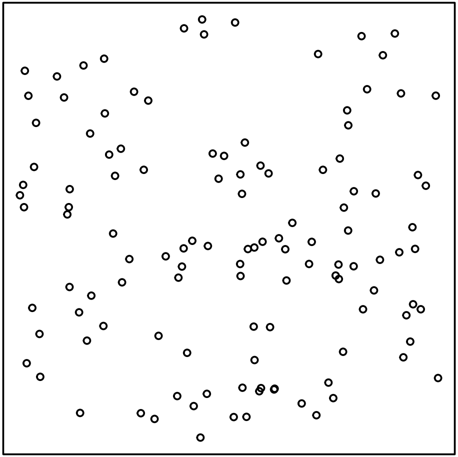
(i) Para cada conjunto $A \in \mathcal{A}$, N_A tiene una distribución Poisson de parámetro $\lambda|A|$.

(ii) Para toda colección finita $A_1, \ldots, A_n$ de conjuntos disjuntos de $\mathcal{A}$, las variables aleatorias $N_{A_1}, \ldots, N_{A_n}$ son independientes.

Observación:

Un proceso Poisson espacial es un caso especial de un proceso puntual.

Generalizaciones del proceso Poisson



Ejemplo:

Considere un proceso Poisson espacial en el plano con parámetro $\lambda = \frac{1}{2}$. Encuentre la probabilidad de que un circulo de radio 2 con centro en $(3, 4)$ contenga exactamente 5 puntos.

Sea A este circulo, entonces $|A| = \pi r^2 = 4\pi$. Luego, la probabilidad deseada es

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(N_A = 5) &= \frac{e^{-\lambda|A|}(\lambda|A|)^5}{5!} = \frac{e^{-2\pi}(2\pi)^5}{5!} \\ &= 0.1524. \end{aligned}$$

Considere un proceso Poisson espacial en $\mathbb{R}^2$ con parámetro λ. Sea x un punto fijo en el plano. Sea D la distancia de x a su vecino más cercano. El evento $\{D > t\}$ ocurre si y solo si no hay puntos en el círculo con centro en x de radio t.

Sea A_x este círculo, entonces

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(D \leq t) &= 1 - \mathsf{P}(D > t) = 1 - \mathsf{P}(N_{A_x} = 0) \\ &= 1 - e^{-\lambda |A_x|} = 1 - e^{-\lambda \pi t^2}, \qquad t > 0. \end{aligned}$$

Derivando, obtenemos

$$f_D(t) = 2\lambda\pi t \exp(-\lambda \pi t^2), \qquad t > 0,$$

con

$$\mathsf{E}(D) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}, \qquad \mathsf{var}(D) = \frac{4-\pi}{4\pi\lambda}.$$