

CIND-221: Árbol de expansión mínima

Felipe Osorio

f.osoriosalgado@uandresbello.edu

Facultad de Ingeniería, UNAB

Definición:

Considere una red $G = (N, A)$ con $N = \{1, \dots, n\}$. Un **árbol** corresponde a una red que consiste en un subconjunto de todos los nodos disponibles donde no se permiten ciclos.

Definición:

Un **árbol de expansión** se define como un árbol que une todos los nodos de una red $G = (N, A)$.

Árbol de expansión mínima

Objetivo:

El objetivo es construir un árbol de expansión de manera tal que una todos los nodos de la red y que la suma de los pesos de las aristas sea mínima, donde $G = (N, A)$.

A continuación, se describirá un algoritmo para construir un árbol de expansión de costo mínimo. Suponga $N = \{1, \dots, n\}$ el conjunto de nodos de la red y considere:

C_k : el conjunto de nodos conectados de forma permanente en la k -ésima iteración.

\overline{C}_k : conjunto de nodos que aún se deben conectar de forma permanente.

Árbol de expansión mínima

Algoritmo de árbol de expansión mínima:

Considere una red $G = (N, A)$ con nodos $N = \{1, \dots, n\}$.

Inicialización: Asignar $C_0 = \emptyset$ y $\overline{C}_0 = N$.

Paso 1: Elegir **cualquier** nodo en el conjunto \overline{C}_0 de nodos no conectados y hacer $C_1 = \{i\}$. De este modo, $\overline{C}_1 = N - \{i\}$, y tomar $k = 2$.

Paso k : Seleccionar aquél nodo j^* en el conjunto \overline{C}_{k-1} que produzca el arco más corto hacia un nodo en el conjunto C_{k-1} . Enlazar j^* en forma permanente con C_{k-1} , es decir,

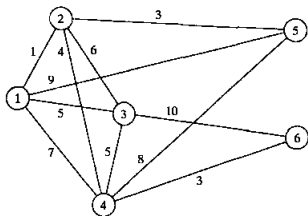
$$C_k = C_{k-1} \cup \{j^*\}, \quad \overline{C}_k = \overline{C}_{k-1} - \{j^*\}.$$

Si el conjunto \overline{C}_k es vacío, detener el algoritmo. En caso contrario, hacer $k = k + 1$ y repetir el paso.

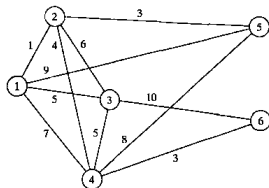
Árbol de expansión mínima

Ejemplo:

Considere la siguiente red $G = (N, A)$, con $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, con:



Árbol de expansión mínima



Iteración 0:

Tenemos que,

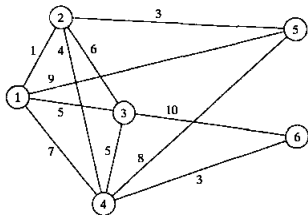
$$C_0 = \emptyset, \quad \overline{C}_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Iteración 1:

Comencemos por el 1er nodo, es decir,

$$C_1 = \{1\}, \quad \overline{C}_1 = N - \{1\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Árbol de expansión mínima



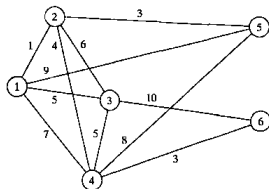
Iteración 2:

Desde el nodo 1, el arco más corto es (1, 2) (longitud 1).¹ Así $j^* = 2$, y

$$C_2 = C_1 \cup \{2\} = \{1, 2\}, \quad \overline{C}_2 = \overline{C}_1 - \{2\} = \{3, 4, 5, 6\}.$$

¹Mientras que los arcos (1, 3), (1, 4) y (1, 5) tienen longitud 5, 7 y 9, respectivamente.

Árbol de expansión mínima



Iteración 3:

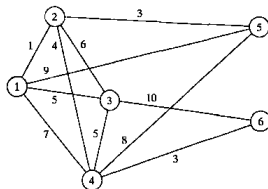
Desde el nodo 2, tenemos los siguientes arcos:

- ▶ (2, 5): con longitud 3,
- ▶ (2, 3): cuya longitud es 6, y
- ▶ (2, 4): de longitud 4.

De este modo, $j^* = 5$, y

$$C_3 = C_2 \cup \{5\} = \{1, 2, 5\}, \quad \overline{C}_3 = \overline{C}_2 - \{5\} = \{3, 4, 6\}.$$

Árbol de expansión mínima



Iteración 4:

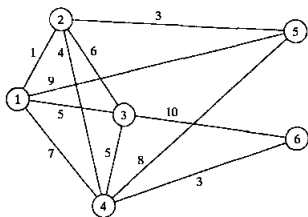
Actualmente $C_3 = \{1, 2, 5\}$ y $\overline{C}_3 = \{3, 4, 6\}$. Note que los arcos desde los nodos 3 o 4 son:

- ▶ $(3, 1)$: con longitud 5, y $(3, 2)$: de longitud 6, mientras que
- ▶ $(4, 1)$: de longitud 7, y $(4, 2)$: cuya longitud es 4.

De este modo, $j^* = 4$, y

$$C_4 = C_3 \cup \{4\} = \{1, 2, 4, 5\}, \quad \overline{C}_4 = \overline{C}_3 - \{4\} = \{3, 6\}.$$

Árbol de expansión mínima



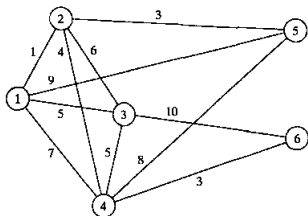
Iteración 5:

Tenemos $C_4 = \{1, 2, 4, 5\}$ y $\overline{C}_4 = \{3, 6\}$. Luego, el arco más corto desde el conjunto de nodos conectados C_4 es $(4, 6)$ con longitud 3. De este modo, $j^* = 6$, y

$$C_5 = C_4 \cup \{6\} = \{1, 2, 4, 5, 6\},$$

$$\overline{C}_5 = \overline{C}_4 - \{6\} = \{3\}.$$

Árbol de expansión mínima



Iteración 6:

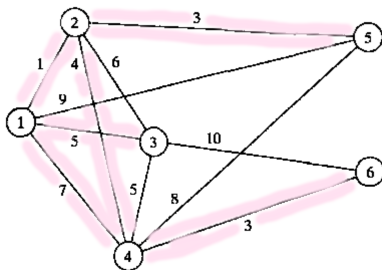
Tenemos $C_5 = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ y $\overline{C}_5 = \{3\}$. Podemos conectar el nodo 3 ya sea con el nodo 1 o el nodo 4, pues sus arcos tienen la misma longitud. De este modo, $j^* = 3$, y

$$C_6 = C_5 \cup \{3\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad \overline{C}_6 = \overline{C}_5 - \{3\} = \emptyset.$$

Como $\overline{C}_6 = \emptyset$ el algoritmo se detiene.

Árbol de expansión mínima

Finalmente el árbol de expansión mínimo luce como sigue:



La longitud total de los arcos $(1, 2) + (2, 5) + (2, 4) + (4, 6) + (3, 1)$ es:

$$1 + 3 + 4 + 3 + 5 = 16.$$

Árbol de expansión mínima

Ejercicio propuesto:

Se planea trazar una red de televisión para dar servicio a cinco área urbanizadas. El costo asociado a cada arista (en kilómetros de cable) es dado en la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5	6
1		1	5	7	9	
2			6	4	3	
3				5		10
4					8	3
5						
6						

- (a) Dibuje la red $G = (N, A)$.
- (b) Obtenga el trazado de la red de costo mínimo.