CIND-221: Problema de flujo máximo

Felipe Osorio

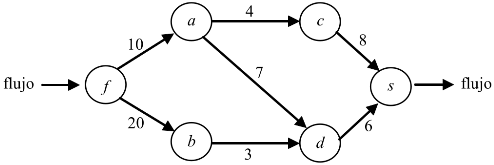
f.osoriosalgado@uandresbello.edu

Facultad de Ingeniería, UNAB

Problema de flujo máximo

Motivación:

Considere una red por la que pasa un fluido (gas, corriente eléctrica, etc.) que ingresa por el nodo f llamado fuente y sale por el nodo s llamado sumidero.



Suponemos que el fluido se desplaza por los arcos que representan canales cuyos valores indican la capacidad que puede fluir.

Problema de flujo máximo

Observación:

Es posible formular el problema de flujo máximo como un problema de programación lineal. Sin embargo, existe un método más directo y eficiente conocido como algoritmo Ford-Fulkerson.

Idea:

El método realiza los siguientes supuestos:

- La cantidad que se desea transportar sale desde la fuente y termina en el sumidero.
- La cantidad máxima que se puede pasar a través de la ruta es igual al valor mínimo de las capacidades de los arcos.

Problema de flujo máximo

Definición:

Se denomina corte a un conjunto de arcos, tales que si estos son suprimidos causan una interrupción total del flujo entre la fuente y el sumidero.

Definición:

La capacidad del corte corresponde a la suma de las capacidades de sus arcos asociados.

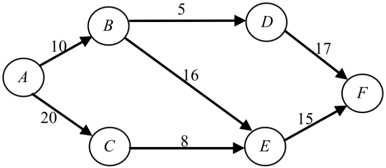
Observación:

Entre todos los cortes posibles[1] el que tenga la menor capacidad permite el flujo máximo en la red.

[1] Enumerar todos los cortes posibles **no** es una tarea sencilla.

Ejemplo:

Considere la siguiente red:



De este modo,[2]

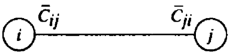
corte	arcos	capacidad
1	$(A, B), (A, C)$	$10 + 20 = 30$
2	$(A, B), (B, E), (C, E)$	$10 + 16 + 8 = 34$
3	$(B, D), (B, E), (C, E)$	$5 + 16 + 8 = 29$
4	$(D, F), (E, F)$	$17 + 15 = 32$
5	$(A, B), (E, F)$	$10 + 15 = 25$
6	$(A, B), (C, E)$	$10 + 8 = 18$

[2] El flujo máximo no puede ser mayor que 18 unidades.

Notación:

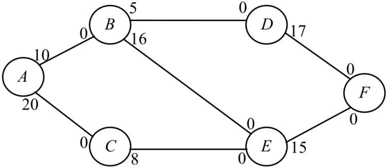
Considere el arco (i, j) con $i < j$. Usamos la notación $(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji})$, para representar las capacidades de flujo en las 2 direcciones, $i \to j$, y $j \to i$, respectivamente.

Para eliminar ambiguedades se anotará $\overline{C}_{ij}$ en el arco junto al nodo i, mientras que $\overline{C}_{ji}$ se ubicará junto al nodo j. Tal como en la siguiente figura:



Ejemplo:

Considere la siguiente red:



En este caso tenemos que, para el arco (A, C), $\overline{C}_{AC} = 20$, mientras que $\overline{C}_{CA} = 0$. Es decir, se puede enviar 20 unidades de A a C, y ninguna de C a A.

Definición:

La capacidad residual de una arista dirigida es la capacidad menos el flujo.

Notación:

Para el arco (i, j) con capacidades iniciales $(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji})$ se asocia una red de capacidades remanentes (o residuales), llamada red residual, cuyos residuales serán denotados por (c_{ij}, c_{ji}).

Para el nodo j que recibe flujo desde el nodo i, se define la etiqueta $[a_j, i]$ donde a_j es el flujo desde el nodo i al nodo j.

Algoritmo de Ford-Fulkerson:

Considere una red $G = (N, A)$ con nodos $N = \{1, \dots, n\}$.[3]

Paso 1: Para todos los arcos (i, j) igualar la capacidad residual con la capacidad inicial, es decir, $(c_{ij}, c_{ji}) = (\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji})$. Sea $a_1 = \infty$ y etiquetar el nodo fuente (nodo 1) como $[\infty, -]$. Hacer $i = 1$ y continuar con el Paso 2.

Paso 2: Determinar S_i el conjunto de todos los nodos j no etiquetados que se pueden alcanzar directamente desde el nodo i, con arcos residuales positivos (esto es $c_{ij} > 0$, $\forall\, i \in S_i$). Si $S_i \neq \varnothing$ ir al Paso 3, sino ir al Paso 4.

Paso 3: Determinar $k \in S_i$, tal que

$$c_{ik} = \max_{j \in S_i} \{c_{ij}\},$$

Hacer $a_k = c_{ik}$ y etiquetar el nodo k con $[a_k, i]$. Si $k = n$, entonces se ha etiquetado el nodo sumidero y de este modo se ha encontrado una ruta de irrupción. Ir al Paso 5. En caso contrario, hacer $i = k$ e ir al Paso 2.

[3] En este contexto el nodo 1 es fuente, y el nodo n sumidero.

Paso 4: *(Retroceso)* Si $i = 1$, no hay otras irrupciones posibles, ir al Paso 6. Sino, sea r el nodo que se ha etiquetado inmediatamente antes del nodo actual i, y remover i del conjunto de nodos adyacentes a r. Igualar $i = r$, y volver al Paso 2.

Paso 5: *(Determinación de la red residual)* Sea $N_p = \{1, k_1, k_2, \ldots, n\}$, los nodos de la p-ésima ruta de irrupción del nodo fuente (nodo 1) al nodo sumidero (nodo n). Entonces el flujo máximo por la ruta se calcula como

$$f_p = \min\{a_1, a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_n\},$$

la capacidad residual de cada arco a lo largo de la ruta de irrupción se disminuye en f_p unidades en la dirección del flujo y se aumenta en la dirección contraria, esto es, para los nodos i y j en la ruta, el flujo residual se cambia del actual (c_{ij}, c_{ji}) a:

- $(c_{ij} - f_p, c_{ji} + f_p)$ si el flujo va de i a j.
- $(c_{ij} + f_p, c_{ji} - f_p)$ si el flujo va de j a i.

Se reinstalan todos los nodos que se hayan eliminado en el Paso 4. Hacer $i = 1$ y regresar al Paso 2 para intentar una nueva ruta de irrupción.

Paso 6: *(Solución)*

- Si se han determinado m rutas de irrupción el flujo máximo de la red es:

$$F = f_1 + f_2 + \cdots f_m.$$

- Como los residuales inicial y final del arco (i, j) se obtienen con $(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji})$ y (c_{ij}, c_{ji}), respectivamente. El flujo óptimo en el arco (i, j) se calcula como: Sea

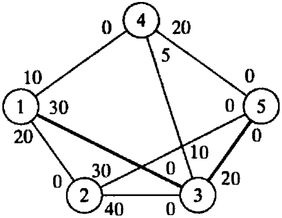
$$(\alpha, \beta) = (\overline{C}_{ij} - c_{ij}, \overline{C}_{ji} - c_{ji}),$$

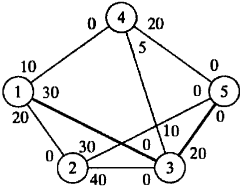
si $\alpha > 0$ el flujo óptimo de i a j es α. Si $\beta > 0$ el flujo óptimo de i a j es β.[4]

[4] **no** es posible que **ambos** α y β sean positivos.

Ejemplo:

Considere la red $G = (N, A)$, con $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ donde el nodo 1 es el nodo fuente, mientras que el nodo 5 es el nodo sumidero.





Inicialización:

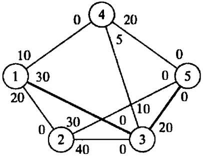
Tenemos que,

$$\overline{C}_{12} = 20,\ \overline{C}_{21} = 0, \quad \overline{C}_{13} = 30,\ \overline{C}_{31} = 0,\ \ldots, \quad \overline{C}_{45} = 20,\ \overline{C}_{54} = 0.$$

De este modo,

$$\overline{\boldsymbol{C}} = \begin{pmatrix} - & 20 & 30 & 10 & - \\ 0 & - & 40 & - & 30 \\ 0 & 0 & - & 10 & 20 \\ 0 & - & 5 & - & 20 \\ - & 0 & 0 & 0 & - \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} - & 20 & 30 & 10 & - \\ 0 & - & 40 & - & 30 \\ 0 & 0 & - & 10 & 20 \\ 0 & - & 5 & - & 20 \\ - & 0 & 0 & 0 & - \end{pmatrix},$$

pues hacemos $c_{ij} = \overline{C}_{ij}$ y $c_{ji} = \overline{C}_{ji}$.



Iteración 1:

Paso 1: Hacer $a_1 = \infty$ y etiquetar el nodo 1 como $[\infty, -]$. Hacer $i = 1$.

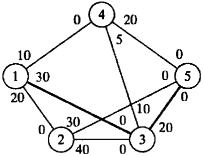
Paso 2: $S_1 = \{2, 3, 4\}$ $(\neq \varnothing)$.

Paso 3: $k = 3$, pues

$$c_{13} = \max\{c_{12}, c_{13}, c_{14}\} = \max\{20, 30, 10\} = 30.$$

Tomar $a_3 = c_{13}$ y etiquetar el nodo 3 como $[30, 1]$. Hacer $i = 3$ y volver al Paso 2.

Paso 2: $S_3 = \{4, 5\}$.



Iteración 1: *(continuación)*

Paso 3: $k = 3$, con

$$a_5 = c_{35} = \max\{c_{34}, c_{35}\} = \max\{10, 20\} = 20.$$

Se etiqueta el nodo 5 como $[20, 3]$ y se obtiene una irrupción. Ir al Paso 5.

Paso 5: La ruta de irrupción es:

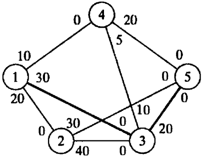
$$\mathbf{(5)} \to [20, 3] \to \mathbf{(3)} \to [30, 1] \to \mathbf{(1)}.$$

Es decir, $N_1 = \{1, 3, 5\}$, y

$$f_1 = \min\{a_1, a_3, a_5\} = \min\{\infty, 30, 20\} = 20.$$

Las capacidades a lo largo de la ruta N_1 son:

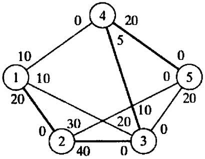
$$(c_{13}, c_{31}) = (30 - 20, 0 + 20) = (10, 20),$$
$$(c_{35}, c_{53}) = (20 - 20, 0 + 20) = (0, 20).$$



Iteración 1: *(continuación)*

De ahí que actualizamos $\boldsymbol{c}$ como:

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} - & 20 & \mathbf{10} & 10 & - \\ 0 & - & 40 & - & 30 \\ \mathbf{20} & 0 & - & 10 & \mathbf{0} \\ 0 & - & 5 & - & 20 \\ - & 0 & \mathbf{20} & 0 & - \end{pmatrix}.$$



Iteración 2:

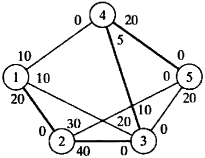
Paso 1: Hacer $a_1 = \infty$ y etiquetar el nodo 1 como $[\infty, -]$. Hacer $i = 1$.

Paso 2: $S_1 = \{2, 3, 4\}$

Paso 3: $k = 2$, además

$$a_2 = c_{12} = \max\{c_{12}, c_{13}, c_{14}\} = \max\{20, 10, 10\} = 20.$$

Etiquetar el nodo 2 como $[20, 1]$. Hacer $i = 2$ y volver al Paso 2.



Iteración 2: *(continuación)*

Paso 2: $S_2 = \{3, 5\}$

Paso 3: $k = 3$, con

$$a_3 = c_{23} = \max\{c_{23}, c_{25}\} = \max\{40, 30\} = 40.$$

Etiquetar el nodo 3 como $[40, 2]$. Hacer $i = 3$ y volver al Paso 2.

Paso 2: $S_3 = \{4\}$[5]

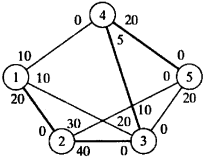
Paso 3: $k = 4$, con

$$a_4 = c_{34} = \max\{c_{34}\} = 10.$$

Etiquetar el nodo 4 como $[10, 3]$. Hacer $i = 4$ y volver al Paso 2.

[5] Pues $c_{35} = 0$ así, no podemos incluir el nodo 5.

Algoritmo de Ford-Fulkerson



Iteración 2: *(continuación)*

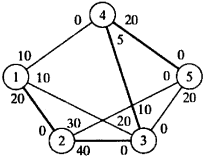
Paso 2: $S_4 = \{5\}$[6]

Paso 3: $k = 5$, con

$$a_5 = c_{45} = \max\{c_{45}\} = 20.$$

Etiquetar el nodo 5 como $[20, 4]$ y hemos obtenido una irrupción. Ir al Paso 5.

[6] Nodos 1 y 3 ya se han etiquetado y no pueden ser incluídos en S_4.



Iteración 2: *(continuación)*

Paso 5: La ruta de irrupción resulta:

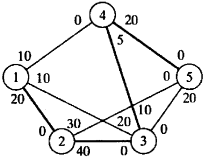
$$\mathbf{(5)} \to [20,4] \to \mathbf{(4)} \to [10,3] \to \mathbf{(3)} \to [40,2] \to \mathbf{(2)} \to [20,1] \to \mathbf{(1)}$$

Es decir, $N_2 = \{1,2,3,4,5\}$, y

$$f_2 = \min\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \min\{\infty, 20, 40, 10, 20\} = 10.$$

Los residuales a lo largo de la ruta son:

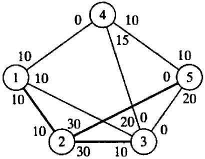
$$\begin{aligned}
(c_{12}, c_{21}) &= (20-10, 0+10) = (10,10),\\
(c_{23}, c_{32}) &= (40-10, 0+10) = (30,10),\\
(c_{34}, c_{43}) &= (10-10, 5+10) = (0,15),\\
(c_{45}, c_{54}) &= (20-10, 0+10) = (10,10).
\end{aligned}$$



Iteración 2: *(continuación)*

De ahí que actualizamos $\boldsymbol{c}$ como:

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} - & \mathbf{10} & \mathbf{10} & 10 & - \\ \mathbf{10} & - & \mathbf{30} & - & 30 \\ \mathbf{20} & \mathbf{10} & - & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & - & \mathbf{15} & - & \mathbf{10} \\ - & 0 & \mathbf{20} & \mathbf{10} & - \end{pmatrix}.$$



Iteración 3:

Paso 1: Hacer $a_1 = \infty$ y etiquetar el nodo 1 como $[\infty, -]$. Hacer $i = 1$.

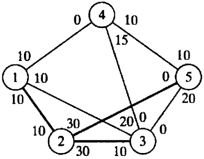
Paso 2: $S_1 = \{2, 3, 4\}$

Paso 3: $k = 2$, además

$$a_2 = c_{12} = \max\{c_{12}, c_{13}, c_{14}\} = \max\{10, 10, 10\} = 10.$$

Observación: Los empates se rompen de forma arbitraria, usaremos el nodo más pequeño, en este caso $i = 2$. Se etiqueta el nodo 2 como $[10, 1]$. Hacer $i = 2$ y volver al Paso 2.

Algoritmo de Ford-Fulkerson



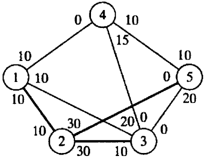
Iteración 3: *(continuación)*

Paso 2: $S_2 = \{3, 5\}$

Paso 3: $k = 3$, además

$$a_3 = c_{23} = \max\{c_{23}, c_{25}\} = \max\{30, 30\} = 30.$$

Etiquetar el nodo 3 como $[30, 2]$. Hacer $i = 3$ y volver al Paso 2.



Iteración 3: *(continuación)*

Paso 2: $S_3 = \varnothing$.[7] Ir al Paso 4 para retroceder.

Paso 4: La etiqueta $[30, 2]$ lleva aal nodo inmedianto anterior $r = 2$. Sacar el nodo 3.

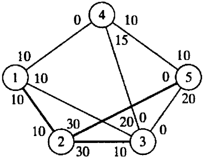
Paso 2: $S_2 = \{5\}$.[8]

Paso 3: $k = 5$, con

$$a_5 = c_{25} = \max\{c_{25}\} = 30.$$

Etiquetar el nodo 5 como $[30, 2]$ y se obtiene una irrupción. Continuar con el Paso 5.

[7] pues $c_{34} = c_{35} = 0$.
[8] el nodo 3 ha sido eliminado.



Iteración 3: *(continuación)*

Paso 5: De este modo, la ruta de irrupción es dada por:

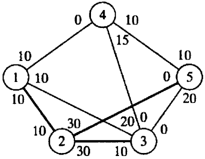
$$\mathbf{(5)} \to [30, 2] \to \mathbf{(2)} \to [10, 1] \to \mathbf{(1)}$$

Es decir, $N_3 = \{1, 2, 5\}$, con

$$f_3 = \min\{a_1, a_2, a_5\} = \min\{\infty, 10, 30\} = 10.$$

y los residuales son dados por:

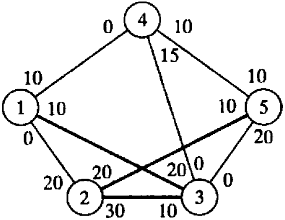
$$(c_{12}, c_{21}) = (10 - 10, 10 + 10) = (0, 20),$$
$$(c_{25}, c_{52}) = (30 - 10, 0 + 10) = (20, 10).$$



Iteración 3: *(continuación)*

De este modo:

$$c = \begin{pmatrix} - & \mathbf{0} & \mathbf{10} & 10 & - \\ \mathbf{20} & - & \mathbf{30} & - & \mathbf{20} \\ \mathbf{20} & \mathbf{10} & - & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & - & \mathbf{15} & - & \mathbf{10} \\ - & \mathbf{10} & \mathbf{20} & \mathbf{10} & - \end{pmatrix}.$$

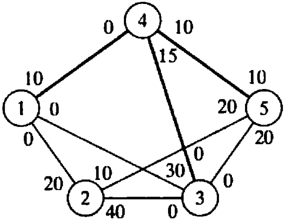


Iteración 4:

Verifique que (Ejercicio de clase):

$$N_4 = \{1, 3, 2, 5\}, \qquad f_4 = 10$$

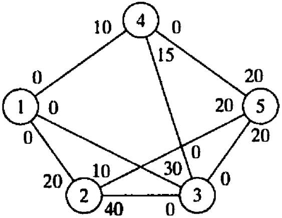
Algoritmo de Ford-Fulkerson



Iteración 5:

Verifique que (Ejercicio de clase):

$$N_5 = \{1, 4, 5\}, \qquad f_5 = 10$$

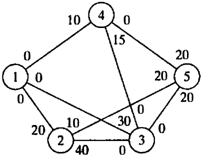


Iteración 6:

Todos los arcos que salen del nodo 1 tienen residuales cero. Así no hay más irrupciones posibles.

Paso 6: El flujo máximo de la red es:

$$
\begin{aligned}
F &= f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 \\
&= 20 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60.
\end{aligned}
$$



Iteración 6: *(continuación)*

Finalmente,

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} - & 0 & 0 & 0 & - \\ 20 & - & 40 & - & 10 \\ 30 & 0 & - & 30 & 0 \\ 10 & - & 15 & - & 0 \\ - & 20 & 20 & 20 & - \end{pmatrix}.$$

Iteración 6: *(continuación)*

El flujo óptimo de los distintos arcos se calcula restando los últimos residuales (c_{ij}, c_{ji}) en la 6ta iteración de las capacidades iniciales $(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji})$. En efecto:

arco	$(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji}) - (c_{ij}, c_{ji})^{(6)}$	flujo	dirección
$(1,2)$	$(20,0)-(0,20)=(20,-20)$	20	$1 \to 2$
$(1,3)$	$(30,0)-(0,30)=(30,-30)$	30	$1 \to 3$
$(1,4)$	$(10,0)-(0,10)=(10,-10)$	10	$1 \to 4$
$(2,3)$	$(40,0)-(40,0)=(0,0)$	0	$-$
$(2,4)$	$(30,0)-(10,20)=(20,-20)$	20	$2 \to 4$
$(3,4)$	$(10,5)-(0,15)=(10,-10)$	10	$3 \to 4$
$(3,5)$	$(20,0)-(0,20)=(20,-20)$	20	$3 \to 5$
$(4,5)$	$(20,0)-(0,20)=(20,-20)$	20	$4 \to 5$

Problema de flujo máximo

Ejercicio propuesto:

Halle el flujo máximo en la siguiente red: