# PRELIMINARES

FELIPE OSORIO

## 1. Elementos de teoría de conjuntos

Un conjunto es una colección bastante general de objetos o números, que en este contexto serán llamados elementos. Indicaremos a un conjunto por letras mayúsculas. Decimos que $a$ es un elemento del conjunto $A$, o bien, que $a$ pertenece a $A$ y escribimos $a \in A$, en caso contrario escribimos $a \notin A$. Para los objetos contenidos en $A$ usaremos la notación

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\},$$

es decir es necesario listar o conocer los elementos de $A$, mientras que

$$A = \{a : a \text{ tiene la propiedad } P\},$$

donde $P$ es una característica que define los elementos de $A$.

**Ejemplo 1.** Considere los siguientes conjuntos:

$$A = \{1, 2, \dots, n\}, \qquad B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}, \qquad C = \{x : 0 < x < 1\}.$$

Tambien existe conjuntos bastante comunes, tales como:

$\mathbb{R}$ es el conjunto de todos los números reales,
$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$,
$(a, b) = \{x : a < x < b\}$ es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$,
$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$ es un intervalo semi-cerrado en $\mathbb{R}$.

Conjuntos pueden ser de naturaleza muy diversa, en el siguiente ejemplo se considera una colección de funciones.

**Ejemplo 2.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y considere

$$A = \{f : f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}\},$$

denota el conjunto de todas las rectas en el plano.

Un conjunto también puede representar una colección de conjuntos. Sea $A$ y $B$ dos conjuntos, entonces $\mathcal{C} = \{A, B\}$ es un conjunto (o colección) de conjuntos.

**Ejemplo 3.** Sea $A = \{0, 1\}$ y $B = \{1, 2, \dots, n\}$. Entonces,

$$\mathcal{C} = \{A, B\} = \{\{0, 1\}, \{1, 2, \dots, n\}\},$$

es decir $\mathcal{C}$ contiene dos elementos. El conjunto $\{0, 1\}$ y el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Note que $\{\{0, 1\}, \{1, 2, \dots, n\}\} \neq \{0, 1, 2, \dots, n\}$. El primero es un conjunto con 2 elementos, mientras el último es un conjunto con $n + 1$ elementos.

Dos conjuntos son de particular interés, el *conjunto universal*, es decir aquél conjunto que contiene todos los objetos bajo consideración, y que será denotado por $\Omega$, mientras que el *conjunto vacio* o *nulo*, denotado por $\varnothing$ corresponde al conjunto que no contiene elementos.

**Ejemplo 4.** Considere $\Omega = \mathbb{R}$ el conjunto de números reales y sea,

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 2 = 0\}.$$

De este modo, $A = \varnothing$, pues la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 2 = 0$ no tiene raíces reales.

Un conjunto $B$ es llamado *subconjunto* de $A$ si y sólo si para todo $x \in B$, entonces $x \in A$, en cuyo caso anotamos $B \subseteq A$. Si $B \subseteq A$ y existe $x \in A$ tal que $x \notin B$, entonces se dice que $B$ es un *subconjunto propio* de $A$ y anotamos $B \subset A$. Cuando $B \subseteq A$ y $A \subseteq B$ entonces los conjuntos $A$ y $B$ consisten de los mismos elementos, y en este caso $A = B$.

**Ejemplo 5.** Suponga que $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 3, 5\}$, en este caso $B \subset A$. Mientras que si $A = \{0, 1\}$ y $B = \{0, 1\}$, entonces $A = B$. Por otro lado, considere $A = \{x : x \geq 0\}$ y $B = \{x : x > 1\}$, luego $B \subset A$.

Evidentemente, tenemos que $\varnothing \subseteq A$ para todo $A$, mientras que $A \subseteq \Omega$. Más aún $\varnothing \subset \Omega$ y $\Omega \subseteq \Omega$. Además, $\Omega$ es un concepto relativo. Por ejemplo, podríamos definir $\Omega = [0, 1]$ y considerar todos los subintervalos en $[0, 1]$.

Un par de elementos $a$ y $b$ (no necesariamente diferentes) donde $a$ es el primer elemento mientras que $b$ es el segundo es llamado *par ordenado* y escribimos $(a, b)$. En general una $n$-upla ordenada es $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ y es usual llamar a $a_i$ la $i$-ésima coordanada de la $n$-upla.

El *producto cartesiano* de los conjuntos $A$ y $B$ denotado por $A \times B$ es definido como

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Esta definición puede ser extendida a $n$ conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ como

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$$

En particular, si $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, entonces el producto cartesiano es denotado por $A^n$. Por ejemplo $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales.

La *unión* de dos conjuntos $A$ y $B$ consiste de todos los elementos en $A$ o en $B$, es decir

$$A \cup B = \{x : x \in A, \text{ o } x \in B\}.$$

Esta definición se extiende a $n$ conjuntos $A_1, \dots, A_n$ como

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \in \Omega : x \in A_k \text{ para al menos un } k \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

y más generalmente para una familia de conjuntos $\{A_i, i \in I\}$, con $I$ un conjunto de índices,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in \Omega : x \in A_i \text{ para al menos un subíndice } i \in I\}.$$

Evidentemente esta última expresión puede ser usada para una secuencia infinita de conjuntos $A_1, A_2, \dots$, es decir $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$, la cual debe satisfacer

$$x \in A_1 \text{ o } x \in A_2 \text{ o } \dots \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ está en al menos uno de } A_1, A_2, \dots.$$

**Ejemplo 6.** Sea $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 5\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 5\}$. Ahora, si $A = (0, 1]$ y $B = (\frac{1}{2}, \infty)$, entonces $A \cup B = (0, \infty)$.

La *intersección* de dos conjuntos $A$ y $B$ es el conjunto que incluye los elementos comunes a ambos conjuntos y es denotado por $A \cap B$, esto es

$$A \cap B = \{x : x \in A, \text{ y } x \in B\}.$$

Esta definición se extiende a $n$ conjuntos $A_1, \dots, A_n$ como

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \in \Omega : x \in A_k \text{ para todos los subíndices } k \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

y más generalmente para una familia de conjuntos $\{A_i, i \in I\}$, como:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in \Omega : x \in A_i \text{ para todos los subíndices } i \in I\}.$$

Para una secuencia infinita de conjuntos $A_1, A_2, \dots$, la intersección $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ debe satisfacer

$$x \in A_1 \text{ y } x \in A_2 \text{ y } \dots \iff x \text{ pertenece a todo } A_1, A_2, \dots.$$

**Ejemplo 7.** Para $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 5\}$, entonces $A \cap B = \{1\}$. Mientras que, si $A = (0, 1]$ y $B = (\frac{1}{2}, \infty)$, entonces $A \cap B = (\frac{1}{2}, 1]$.

El *complemento* (con respecto al conjunto universal $\Omega$) de un conjunto $A$ es definido como:

$$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}.$$

**Ejemplo 8.** Suponga $\Omega = [0, 1]$ y $A = [0, \frac{1}{2})$, luego $A^c = [\frac{1}{2}, 1]$. Por otro lado, sea $\Omega = \mathbb{R}$ y $A = \mathbb{R}$, entonces $A^c = \varnothing$.

Además, es fácil notar que

$$(A^c)^c = A, \qquad \Omega^c = \varnothing, \qquad \varnothing^c = \Omega.$$

La *diferencia* del conjunto $B$ con el conjunto $A$ es definida como el conjunto de los elementos de $A$ que no pertenecen a $B$, esto es,

$$A - B = \{x \in \Omega : x \in A, x \notin B\}.$$

Podemos apreciar que,

$$A - B = A \cap B^c, \qquad A^c = \Omega - A.$$

**Propiedad 9.** Sean $A, B$ y $C$ conjuntos definidos en $\Omega$. Tenemos que,

(i) *Asociatividad de la unión e intersección*:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

(ii) *Distributividad de la intersección con respecto a la unión y de la unión con respecto a la intersección*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(iii) *Conmutatividad de la unión e intersección*

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

(iv) *El conjunto vacío* $\varnothing$ *es el elemento neutro para la unión*

$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A.$$

(v) *El conjunto universal* $\Omega$ *es el elemento neutro para la intersección*

$$A \cap \Omega = \Omega \cap A = A.$$

(vi) *El complemento satisface*

$$A \cap A^c = \varnothing, \qquad A \cup A^c = \Omega.$$

(vii) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

(viii) *Leyes de De Morgan*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Las fórmulas de De Morgan pueden ser extendidas para $n$ conjuntos $A_1, \dots, A_n$, como:

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c,$$
$$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c,$$

y para una familia de conjuntos $\{A_i, i \in I\}$, como:

$$\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c, \qquad \Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

Dos conjuntos $A$ y $B$ se dicen *disjuntos* si ellos no tienen elementos en común, y escribimos $A \cap B = \varnothing$, Más generalmente, los conjuntos $A_1, \dots, A_n$ se dicen *disjuntos por pares* (o mutuamente excluyentes) si

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \qquad i \neq j,$$

con $\{i, j\}$ desde el conjunto de índices $\{1, 2, \dots, n\}$.

**Ejemplo 10.** Sea $A = \{x : x > 1\}$ y $B = \{x : x < 0\}$. Entonces $A$ y $B$ son disjuntos.

**Ejemplo 11.** Sea $A$ y $B$ dos conjuntos en $\Omega$. Entonces,

$$(A - B) \cap (B - A) = (A \cap B^c) \cap (B \cap A^c) = (A \cap A^c) \cap (B \cap B^c) = \varnothing,$$

es decir $A - B$ y $B - A$ son disjuntos.

**Definición 12.** Una colección de conjuntos $\{A_1, \dots, A_n\}$ es una *partición* del conjunto $A$, si satisface las condiciones:

(i) $\{A_1, \dots, A_n\}$ son disjuntos por pares.
(ii) $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$.

**Propiedad 13.** Suponga que $\{A_1, \dots, A_n\}$ es una partición de $A$, y suponga $B \subseteq A$. Entonces $\{B \cap A_1, \dots, B \cap A_n\}$ es una partición de $B \cap A$. En efecto,

$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap (A_i \cap A_j) = \varnothing, \qquad \forall\, i \neq j,$$

y

$$\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i) = B \cap \Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = B \cap A.$$

**Ejemplo 14.** La familia de conjuntos $A_i = [i, i+1)$, para $i = 0, 1, 2, \dots$ forman una partición de $[0, \infty)$.

**Ejemplo 15.** $A$ y $A^c$ son una partición de $\Omega$, pues
$$A \cap A^c = \varnothing, \qquad A \cup A^c = \Omega.$$

**Definición 16.** La secuencia de conjuntos $\{A_n\}_{n\geq 1}$, se dice monótona, si:

(i) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$. Es decir, $\{A_n\}$ es creciente ($A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$) y anotamos $A_n \uparrow$.
(ii) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$. Es decir, $\{A_n\}$ es decreciente ($A_n \supseteq A_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$) y anotamos $A_n \downarrow$.

**Definición 17.** El límite de una secuencia monótona se define como:

(i) Si $A_n \uparrow$, entonces $\lim_{n\to\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
(ii) Si $A_n \downarrow$, entonces $\lim_{n\to\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Facultad de Ingeniería, Universidad Andrés Bello
*Orcid ID*: 0000-0002-4675-5201
*Email address*: f.osoriosalgado@uandresbello.edu