

CIND-221: Introducción a Procesos Estocásticos

Felipe Osorio

f.osoriosalgado@uandresbello.edu

Facultad de Ingeniería, UNAB

Definición 1 (Proceso estocástico):

Un **proceso estocástico** es una colección de variables aleatorias $\{X_t, t \in T\}$ definidas en un mismo espacio de probabilidades (Ω, \mathcal{F}, P) con T el conjunto de índices del proceso.¹

El conjunto de valores que adopta la variable X_t es llamado **espacio de estados** del proceso y es denotado por S , y cada elemento de S es un estado del proceso.

¹También llamado **espacio paramétrico**.

Observación:

Para cada $\omega \in \Omega$ fijo, tenemos que la transformación definida como:

$$\begin{aligned} X(\omega) : T &\rightarrow S \\ t &\rightarrow X_t(\omega) \end{aligned}$$

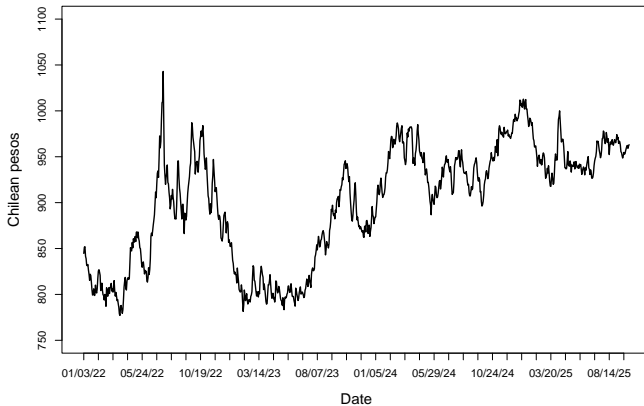
es llamada **trayectoria del proceso**.²

A continuación se presenta ejemplos de trayectorias con un conjunto de datos reales y mediante datos simulados, a saber:

- ▶ **Dólar observado vs. peso chileno** desde Enero-2022 a Octubre-2025.
- ▶ Trayectorias simuladas desde una **caminata aleatoria**.

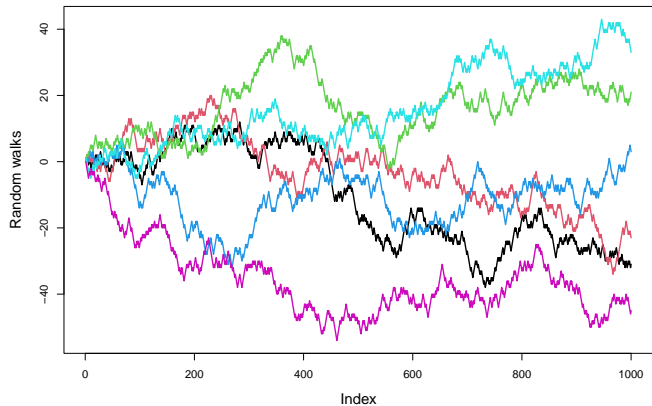
²o realización del proceso estocástico.

Trayectoria del dólar observado vs. peso chileno desde Enero-2022 a Octubre-2025³



³Datos extraídos desde página del Banco Central.

Trayectorias simuladas



Procesos estocásticos pueden clasificarse en 4 tipos, dependiendo de la naturaleza del espacio de estados y espacio paramétrico.

► **Proceso estocástico de tiempo discreto y espacio de estado discreto**

- El número de individuos en una población al final del año t , que se puede modelar como $\{X_t : t \in T\}$, donde $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ y $S = \{0, 1, 2, \dots\}$.

► **Proceso estocástico de tiempo continuo y espacio de estado discreto**

- El número de llamadas entrantes X_t en un intervalo $[0, t]$. Es decir, para el proceso estocástico $\{X_t : t \in T\}$ tenemos $T = \{t : 0 \leq t < \infty\}$ y $S = \{0, 1, \dots\}$.

► Proceso estocástico de tiempo discreto y espacio de estado continuo

- El precio de cierre de una acción en el día t . De este modo el proceso $\{X_t : t \in T\}$, tiene $T = \{0, 1, \dots\}$ y $S = \{x : 0 \leq x < \infty\}$.

► Proceso estocástico de tiempo continuo y espacio de estado continuo

- El flujo de un río que se observa en un año.⁴ En este caso

$$T = \{t : 0 \leq t < \infty\}, \quad S = \{x : 0 \leq x < \infty\}.$$

⁴ X_t es el flujo en el tiempo t .

Definición 2:

Si, para todo t_0, t_1, \dots, t_n tal que $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, las variables aleatorias

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

son independientes, entonces el proceso $\{X_t : t \in T\}$ se dice un **proceso con incrementos independientes**.

Definición 3:

Un proceso estocástico $\{X_t : t \in T\}$ se dice con **incrementos estacionarios** si

$$X_{t+h} - X_{s+h} \stackrel{d}{=} X_t - X_s,$$

para cualquier $t, s \in T$ y $h > 0$.

Definición 4:

Si, para todo t_1, t_2, \dots, t_n la distribución conjunta de los vectores

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})^\top, \quad (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})^\top,$$

es la misma, para todo $h > 0$. Entonces, El proceso $\{X_t : t \in T\}$ se dice **estacionario**.

Notación:

Sea $\{X_t : t \in T\}$ un proceso estocástico. Entonces, denotamos:

- ▶ $m(t) = E(X_t)$, $t \in T$ a la **función de media** del proceso.
- ▶ $K(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t)$, para $s, t \in T$ como la **función de covarianza** del proceso.

Definición 5:

Un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$ se denomina **proceso de segundo orden** si $E(X_t^2) < \infty$, para todo $t \in T$.

Ejemplo:

Sean Z_1 y Z_2 variables aleatorias independientes normalmente distribuidas, cada una con media 0 y varianza σ^2 . Para $\lambda \in \mathbb{R}$, considere

$$X_t = Z_1 \cos(\lambda t) + Z_2 \sin(\lambda t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entonces $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ es un proceso estacionario de segundo orden.

Note que la función de medias es dada por

$$E(X_t) = E\{Z_1 \cos(\lambda t) + Z_2 \sin(\lambda t)\} = E(Z_1) \cos(\lambda t) + E(Z_2) \sin(\lambda t).$$

Sin embargo, $Z_j \sim N(0, \sigma^2)$, para $j = 1, 2$. De este modo, $E(X_t) = 0$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} E(X_t^2) &= E\{[Z_1 \cos(\lambda t) + Z_2 \sin(\lambda t)]^2\} \\ &= E\{Z_1^2 \cos^2(\lambda t) + Z_2^2 \sin^2(\lambda t) + 2Z_1 Z_2 \cos(\lambda t) \sin(\lambda t)\} \\ &= E(Z_1^2) \cos^2(\lambda t) + E(Z_2^2) \sin^2(\lambda t) + 2E(Z_1 Z_2) \cos(\lambda t) \sin(\lambda t), \end{aligned}$$

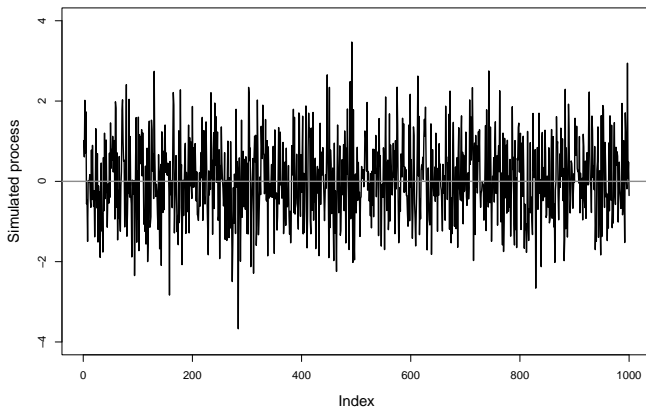
como Z_1 y Z_2 son independientes, sigue que $E(Z_1 Z_2) = E(Z_1) E(Z_2) = 0$, y como $E(Z_1^2) = E(Z_2^2) = \sigma^2$, obtenemos:

$$E(X_t^2) = \sigma^2 \{\cos^2(\lambda t) + \sin^2(\lambda t)\} = \sigma^2 < \infty.$$

Es decir, el proceso $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ es de segundo orden.

Procesos Estocásticos

Proceso simulado: $X_t = Z_{1t} \cos(\lambda t) + Z_{2t} \sin(\lambda t)$, con $t \in [1, T]$ donde $T = 1000$, $\{Z_{jt}\}$ es simulado desde $N(0, 1)$, para $j = 1, 2$, y $\lambda = 1$.



Definición 6:

Un proceso estocástico de segundo orden $\{X_t, t \in T\}$ se dice **débilmente estacionario** si $m(t) = E(X_t)$ es independiente de t y su función de covarianza $K(s, t)$ depende sólo de la diferencia $|t - s|$, es decir,

$$\text{cov}(X_s, X_t) = f(|t - s|).$$

Ejemplo:

Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ variables aleatorias no correlacionadas con media 0 y varianza 1. Entonces

$$\text{cov}(X_r, X_n) = E(X_r X_n) = \begin{cases} 0, & r \neq n, \\ 1, & r = n. \end{cases}$$

Entonces $\{X_n : n \geq 1\}$ es un proceso débilmente estacionario.

Definición 7 (Proceso de Markov):

Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ un proceso estocástico definido sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) con espacio de estados S discreto. Se dice que $\{X_t : t \geq 0\}$ es un **proceso de Markov** si para cualquier $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$ y para todo $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y$, se tiene que

$$P(X_{t_n} = y | X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = P(X_{t_n} = y | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}).$$

Observación:

Cualquier proceso estocástico que tenga incrementos independientes es un proceso de Markov.

Definición 8 (Función de transición):

Si $\{X_t : t \geq 0\}$ es un proceso de Markov, a la probabilidad condicional:

$$p_{st}(x, y) = P(X_t = y | X_s = x),$$

se le denomina **función de transición** del proceso.⁵

Observación:

A continuación supondremos que la función de transición será estacionaria,

$$p_t(x, y) = p_{uv}(x, y) = P(X_v = y | X_u = x),$$

con $t = v - u \geq 0$.

⁵Es decir, $p_{st}(x, y)$ es la probabilidad de transición del tiempo s al tiempo t ($s \rightarrow t$).

Definición 9 (Cadena de Markov):

Sea S un conjunto discreto. Una **cadena de Markov** es una secuencia de variables aleatorias $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ que satisface

$$P(X_{n+1} = y | X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) = P(X_{n+1} = y | X_n = x),$$

para todo $x_1, \dots, x_{n-1}, x, y \in S$ y $n \geq 1$.

Observación:

Podemos interpretar la propiedad anterior como: *Si conocemos $X_n = x$, conocer la historia anterior $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_1$ no tiene influencia en el estado futuro X_{n+1} .*

Definición 10 (Probabilidad de transición):

Sea $\{X_n : n \geq 0\}$ una cadena de Markov. Las probabilidades

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

son llamadas **probabilidades de transición**.

Observación:

A continuación caracterizaremos una cadena de Markov organizando las probabilidades p_{ij} en una matriz. Considere la siguiente definición.

Definición 11 (Vector de probabilidades):

Sea $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^\top$ se dice un **vector de probabilidades**, si satisface:

- (i) $p_i \geq 0, i = 1, \dots, n.$
- (ii)⁶ $\sum_{i=1}^n p_i = 1.$

⁶o equivalentemente $\mathbf{1}^\top \mathbf{p} = 1$ con $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\top$

Definición 12 (Cadena homogénea):

Una cadena de Markov $\{X_n : n \geq 0\}$ es llamada **homogénea** si las probabilidades de transición no dependen de n . Esto es,

$$p_{ij} = P(X_1 = j | X_0 = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

Definición 13 (Distribución inicial):

La distribución de probabilidades $\pi := \{\pi_i\}_{i \in S}$, con

$$\pi_i = P(X_0 = i),$$

es llamada **distribución inicial**.

Definición 13 (Matriz de transición):

La matriz

$$\mathbf{P} = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

es llamada **matriz de transición**.

Note que una matriz de transición es una **matriz estocástica**⁷ que satisface:

- (i) $p_{ij} \geq 0$, para todo $i, j \in S$.
- (ii) $\sum_j p_{ij} = 1$, para todo $j \in S$.

⁷Una matriz de transición también es llamada **matriz de probabilidad**.

Ejemplo:

Considere la matriz

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

En efecto, $p_{ij} > 0$, $\forall i, j$, y

$$0.5 + 0.4 + 0.1 = 1,$$

$$0.3 + 0.4 + 0.3 = 1,$$

$$0.2 + 0.3 + 0.5 = 1.$$

Ejemplo (Secuencia IID):

Asuma que X_0, X_2, \dots es una secuencia de variables aleatorias IID que toma valores en $\{1, \dots, k\}$, con

$$P(X_n = j) = p_j, \quad \text{para } j = 1, \dots, k, \text{ y } n \geq 0,$$

donde $p_1 + \dots + p_k = 1$. Por independencia, tenemos que

$$P(X_1 = j | X_0 = i) = P(X_1 = j) = p_j.$$

La matriz de transición es dada por:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k \end{pmatrix}.$$

Ejemplo (Caminata aleatoria):

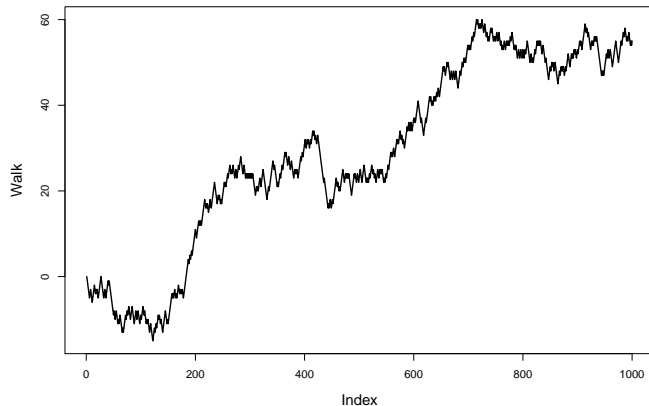
Una cadena de Markov cuyo espacio de estados es dado por los enteros $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ se dice una **caminata aleatoria** si para $0 < p < 1$, tenemos

$$p_{i,i+1} = p = p_{i,i-1}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1-p & 0 & p & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \cdots & 0 & 1-p & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & 0 & 1-p & 0 & p & \cdots & 0 \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Caminata aleatoria 1-D⁸



⁸En inglés, [random walk](#).

Resultado 1:

- (a) Considere P matriz de transición, entonces la condición (ii) puede ser expresada como:

$$P\mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

- (b) Cualquier fila de la matriz P es un vector de probabilidades.

Demostración:

Considere $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Para verificar (a), note que $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$, es decir:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$p_{11} + p_{12} + \cdots + p_{1n} = 1$$

$$p_{21} + p_{22} + \cdots + p_{2n} = 1$$

$$\vdots$$

$$p_{n1} + p_{n2} + \cdots + p_{nn} = 1$$

o equivalentemente

$$\sum_{j=1}^n p_{1j} = 1, \quad \sum_{j=1}^n p_{2j} = 1, \quad \dots \quad \sum_{j=1}^n p_{nj} = 1.$$

De este modo,

$$\sum_{j=1}^n p_{ij}, \quad i = 1, \dots, n.$$

La demostración de (b) es directa.

Resultado 2:

Si $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es matriz de transición y q es vector de probabilidades n -dimensional. Entonces $q^\top P$ es vector de probabilidades.

Demostración:

Sea $r^\top = q^\top P$, con $r = (r_1, \dots, r_n)^\top$. Evidentemente $r_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, n$. Note que $r^\top \mathbf{1} = \sum_{j=1}^n r_j$. Así,

$$r^\top \mathbf{1} = q^\top P \mathbf{1} = q^\top \mathbf{1} = 1,$$

pues q es vector de probabilidades.

Resultado 3:

Si $P = (p_{ij})$ y $Q = (q_{ij})$ son matrices de transición $n \times n$. Entonces el producto PQ es una matriz de transición.

Demostración:

Sabemos que $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$ y $Q\mathbf{1} = \mathbf{1}$. Deseamos mostrar $PQ\mathbf{1} = \mathbf{1}$. En efecto,

$$PQ\mathbf{1} = P\mathbf{1} = \mathbf{1},$$

lo que verifica el resultado.

Resultado 4:

Si P es matriz de transición $n \times n$, entonces P^2, P^3, \dots, P^m son matrices de transición.

Demostración:

El resultado sigue inmediatamente desde el [Resultado 3](#). En efecto, tomando $Q = P$, sigue que:

$$P^2 \mathbf{1} = PQ \mathbf{1} = \mathbf{1},$$

análogamente para $P^3 \mathbf{1} = P^2 Q \mathbf{1} = \mathbf{1}$ y así sucesivamente para P^m .⁹

⁹ Este resultado también se puede mostrar usando inducción.

Resultado 5 (Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov):

Si la secuencia de variables aleatorias $\{X_n : n \geq 0\}$ es una cadena de Markov y si $k < m < n$, entonces tenemos que para todo $h, j \in S$,

$$P(X_n = j | X_k = h) = \sum_{i \in S} P(X_n = j | X_m = i) P(X_m = i | X_k = h).$$

Definición 14:

Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov, la **probabilidad de transición en m pasos** desde el estado i al j , es dada por:

$$p_{ij}^{(m)} = P(X_{n+m} = j | X_n = i).$$

Además,

$$p_{ij}^{(0)} = P(X_n = j | X_n = i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Observación:

La probabilidad $p_{ij}^{(m)}$ es estacionaria si y solo si,

$$p_{ij}^{(m)} = P(X_{n+m} = j | X_n = i) = P(X_m = j | X_0 = i).$$

Observación:

Las **probabilidades de transición de m -pasos**, pueden ser escritas en la matriz de transición:

$$\mathbf{P}^{(m)} = (p_{ij}^{(m)}).$$

Es decir, $\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{I}$.

Definición 15 (Cadena de Markov homogénea):

Una cadena de Markov cuyas probabilidades de transición en m pasos son todas estacionarias es llamada **cadena de Markov homogénea**.

Proposición 1:

Las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov proveen un procedimiento para calcular las probabilidades de transición de n -pasos. En efecto, sigue que:

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)},$$

para todo $n, m \geq 0$ y todo $i, j \in S$.

Observación:

En forma matricial la **Proposición 1** puede ser escrita como:

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)},$$

donde \cdot denota multiplicación matricial.

Note la condición inicial,

$$P^{(2)} = P^{(1+1)} = P \cdot P = P^2,$$

continuyendo por inducción tenemos que la **matriz de transición de n -pasos** puede ser escrita como:

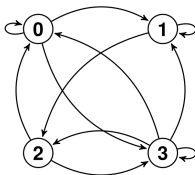
$$P^{(n)} = P^{(n-1+1)} = P^{(n-1)} P = P^n.$$

Observación:

Si $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cadena de Markov con conjunto de estados $S = \{0, 1, 2, 3\}$, con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$

que puede ser representada por una red con vértices que indican los estados y arcos indicando transiciones.



Corolario 1 (Matriz de transición de n -pasos):

Sea X_0, X_1, \dots una cadena de Markov con matriz de transición \mathbf{P} . La matriz de transición de n -pasos de la cadena es dada por:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}, \quad n \geq 0,$$

con $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i), \forall i, j$.

Ejercicio:

Considere la matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad q = 1 - p.$$

Obtenga \mathbf{P}^3 y verifique que es matriz de transición.

Ejercicio:

Considere una cadena de Markov con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix},$$

donde $p, q \in (0, 1)$ y $p + q > 0$. Determine P^n .

Sugerencia:

- ▶ Calcular valores y vectores propios de P , esto es $Pu_i = \lambda_i u_i$, $i = 1, 2$.
- ▶ Sea $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ y $U = (u_1, u_2)$, luego $P = U\Lambda U^{-1}$.
- ▶ Ahora, $P^n = U\Lambda^n U^{-1}$ (¿por qué?).
- ▶ Calcular U^{-1} y Λ^n para obtener P^n .

Ejercicio:

Considere

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

verifique (por inducción) que la n -ésima potencia de \mathbf{P} es dada por:

$$\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Qué sucede cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n$?