

CIND-221: Elementos de teoría de conjuntos

Felipe Osorio

f.osoriosalgado@uandresbello.edu

Facultad de Ingeniería, UNAB

Elementos de teoría de conjuntos

Un **conjunto** es una **colección** bastante general de objetos o números, los que son llamados elementos.

Decimos que a es un **elemento** del conjunto A , o bien, que a pertenece a A y escribimos $a \in A$, en caso contrario escribimos $a \notin A$.

Para los objetos contenidos en A usaremos la notación:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\},$$

Ejemplos:

$$A = \{1, 2, \dots, n\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}, \quad C = \{x : 0 < x < 1\},$$

$$D = \{f : f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}\},$$

donde \mathbb{R} es el conjunto de todos los números reales.

Un conjunto también puede representar una **colección de conjuntos**. Sea A y B dos conjuntos, entonces $\mathcal{C} = \{A, B\}$ es un conjunto de conjuntos.

Ejemplo:

Sea $A = \{0, 1\}$ y $B = \{1, 2, \dots, n\}$. Entonces,

$$\mathcal{C} = \{A, B\} = \{\{0, 1\}, \{1, 2, \dots, n\}\},$$

es decir \mathcal{C} contiene dos elementos. El conjunto $\{0, 1\}$ y el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.

Definición 1 (Universo y vacío):

El **conjunto universal**, es aquél conjunto que contiene todos los objetos bajo consideración, y será denotado por Ω . Mientras que el **conjunto vacío** o **nulo**, denotado por \emptyset corresponde al conjunto que no contiene elementos.

Ejemplo:

Considere $\Omega = \mathbb{R}$ y sea,

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 2 = 0\}.$$

De este modo, $A = \emptyset$, pues la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 2 = 0$ no tiene raíces reales.

Definición 2 (Subconjunto):

Un conjunto B es llamado **subconjunto** de A si y sólo si para todo $x \in B$, entonces $x \in A$. en cuyo caso anotamos $B \subseteq A$.

Si $B \subseteq A$ y existe $x \in A$ tal que $x \notin B$, entonces se dice que B es un **subconjunto propio** de A y anotamos $B \subset A$.

Definición 3 (Igualdad de conjuntos):

Cuando $B \subseteq A$ y $A \subseteq B$ entonces $A = B$.

Ejemplos:

- ▶ Suponga que $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 3, 5\}$, en este caso $B \subset A$.
- ▶ Si $A = \{0, 1\}$ y $B = \{0, 1\}$, entonces $A = B$.
- ▶ Considere $A = \{x : x \geq 0\}$ y $B = \{x : x > 1\}$, luego $B \subset A$.

Observación:

Tenemos que $\emptyset \subseteq A$ para todo A , mientras que $A \subseteq \Omega$. Más aún $\emptyset \subset \Omega$ y $\Omega \subseteq \Omega$.

Elementos de teoría de conjuntos

Un par de elementos a y b (no necesariamente diferentes) donde a es el primer elemento mientras que b es el segundo es llamado **par ordenado** y escribimos (a, b) .

En general una n -upla ordenada es (a_1, a_2, \dots, a_n) y es usual llamar a a_i la i -ésima coordenada de la n -upla.

Definición 4 (Producto cartesiano):

El **producto cartesiano** de los conjuntos A y B denotado por $A \times B$ es definido como

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Observación:

Esta definición puede ser extendida a n conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n como

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$$

En particular, si $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$, entonces el producto cartesiano es denotado por A^n .

Definición 5 (Unión):

La **unión** de dos conjuntos A y B consiste de todos los elementos en A o en B , es decir

$$A \cup B = \{x : x \in A, \text{ o } x \in B\}.$$

La definición anterior se extiende a n conjuntos A_1, \dots, A_n como

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x \in \Omega : x \in A_k \text{ para al menos un } k \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

y más generalmente para una familia de conjuntos $\{A_i, i \in I\}$, con I un conjunto de índices,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in \Omega : x \in A_i \text{ para al menos un subíndice } i \in I\}.$$

Ejemplo:

Sea $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 5\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 5\}$. Ahora, si $A = (0, 1]$ y $B = (\frac{1}{2}, \infty)$, entonces $A \cup B = (0, \infty)$.

Definición 6 (Intersección):

La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto que incluye los elementos comunes a ambos conjuntos y es denotado por $A \cap B$, esto es

$$A \cap B = \{x : x \in A, \text{ y } x \in B\}.$$

Esta definición puede ser extendida a n conjuntos A_1, \dots, A_n como

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x \in \Omega : x \in A_k \text{ para todos los subíndices } k \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

y más generalmente para una familia de conjuntos $\{A_i, i \in I\}$, como:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in \Omega : x \in A_i \text{ para todos los subíndices } i \in I\}.$$

Ejemplo:

Para $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 5\}$, entonces $A \cap B = \{1\}$. Mientras que, si $A = (0, 1]$ y $B = (\frac{1}{2}, \infty)$, entonces $A \cap B = (\frac{1}{2}, 1]$.

Definición 7 (Complemento):

El **complemento** (con respecto a Ω) de un conjunto A es definido como:

$$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}.$$

Es fácil notar que

$$(A^c)^c = A, \quad \Omega^c = \emptyset, \quad \emptyset^c = \Omega.$$

Ejemplos:

- ▶ Suponga $\Omega = [0, 1]$ y $A = [0, \frac{1}{2})$, luego $A^c = [\frac{1}{2}, 1]$.
- ▶ Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y $A = \mathbb{R}$, entonces $A^c = \emptyset$.

Definición 8 (Diferencia entre conjuntos):

La **diferencia** del conjunto B con el conjunto A es definida como el conjunto de los elementos de A que no pertenecen a B , esto es,

$$A - B = \{x \in \Omega : x \in A, x \notin B\}.$$

Podemos apreciar que,

$$A - B = A \cap B^c, \quad A^c = \Omega - A.$$

Definición 9 (Conjuntos disjuntos):

Dos conjuntos A y B se dicen **disjuntos** si ellos no tienen elementos en común, y escribimos $A \cap B = \emptyset$.

Más generalmente, los conjuntos A_1, \dots, A_n se dicen **disjuntos por pares** (o mutuamente excluyentes) si

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

con $\{i, j\}$ desde el conjunto de índices $\{1, 2, \dots, n\}$.

Ejemplo:

Sea $A = \{x : x > 1\}$ y $B = \{x : x < 0\}$. Entonces A y B son disjuntos.

Propiedades:

► Asociatividad:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

► Conmutatividad:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

► Distributividad:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

► Sobre el vacío y conjunto universo.

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A, \quad A \cap \Omega = \Omega \cap A = A.$$

► Sobre el complemento

$$A \cap A^c = \emptyset, \quad A \cup A^c = \Omega.$$

► Leyes de De Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Las fórmulas de De Morgan pueden ser extendidas para n conjuntos A_1, \dots, A_n , como:

$$(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c,$$

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_n^c,$$

y para una familia de conjuntos $\{A_i, i \in I\}$, como:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c, \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

Definición 10 (Partición):

Una colección de conjuntos $\{A_1, \dots, A_n\}$ es una **partición** del conjunto A , si satisface las condiciones:

- (a) $\{A_1, \dots, A_n\}$ son disjuntos por pares.
- (b) $\cup_{i=1}^n A_i = A$.

Ejemplo:

A y A^c son una partición de Ω , pues

$$A \cap A^c = \emptyset, \quad A \cup A^c = \Omega.$$

Ejemplo:

La familia de conjuntos $A_i = [i, i + 1)$, para $i = 0, 1, 2, \dots$ forman una partición de $[0, \infty)$.