CIND-221: Problema de la ruta más corta

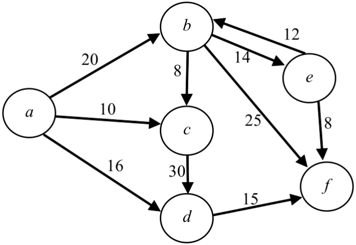
Felipe Osorio

f.osoriosalgado@uandresbello.edu

Facultad de Ingeniería, UNAB

Problema de la ruta más corta

Para motivar ideas considere la siguiente red:



donde $N = \{a, b, c, d, e, f\}$, mientras que

$$A = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,e),(b,f),(c,d),(d,f),(e,b),(e,f)\}.$$

Definición (Ruta):

Una ruta en un grafo dirigido $G = (N, A)$ con $N = \{1, \ldots, n\}$, es una secuencia de nodos de la forma:

$$P = \{n_0, n_1, \ldots, n_k\},$$

donde $n_i \in N$ $(i = 0, \ldots, k)$ y n_0, n_k denotan el nodo inicial y final de la ruta.

Observación:

Los pares de nodos

$$n_0\, n_1, \quad n_1\, n_2, \quad \ldots \quad n_{k-1}\, n_k,$$

son adyacentes.

Además, se suele decir que la ruta parte en n_0 y termina en n_k, o que une n_0 con n_k.

Definición (Costo de la ruta):

Considere una ruta $P = \{n_0, n_1, \ldots, n_k\}$. El costo de la ruta se define como la suma de los valores (costos[1]) de sus arcos.

Observación:

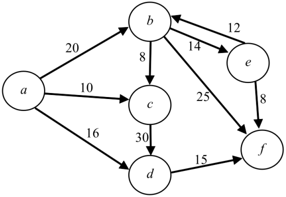
Una ruta compuesta de un único nodo tendrá costo 0.

Notación:

Denotaremos por c_{ij} al costo asociado a cada arco (i, j), $(i, j \in N)$.

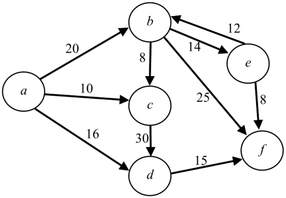
[1] costo puede representar longitud o tiempo de la ruta.

Ejemplo:



Ruta	Costo
$\{a, b, e\}$	$20 + 14 = 34$
$\{a, b, c, d\}$	$20 + 8 + 30 = 58$
$\{c, d, f\}$	$30 + 15 = 45$
$\{c\}$	0
$\{a, b, e, f\}$	$20 + 14 + 8 = 42$

Observación:



Podemos representar los costos de forma matricial como sigue:

	a	b	c	d	e	f
a	-	20	10	16	-	-
b	-	-	8	-	14	25
c	-	-	-	30	-	-
d	-	-	-	-	-	15
e	-	12	-	-	-	8

Problema de la ruta más corta

Problema:

¿Cuál es la ruta que debe seguir un vehículo de reparto para realizar la entrega a un conjunto de clientes minimizando la distancia recorrida?[2]

[2] de la forma más eficiente, económica o rápida.

Problema de la ruta más corta

Objetivo:

Encontrar la ruta óptima para transitar desde el nodo n_0 (origen) al nodo n_k (destino).

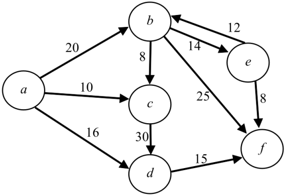
Es decir, se desea determinar la ruta P más corta (o de costo mínimo), tal que se minimice la función

$$\phi(P) = \sum_{(i,j)\in P} c_{ij},$$

donde $c_{ij} \geq 0$ representa el costo asociado a cada arco (i, j).

Problema de la ruta más corta

Ejemplo:

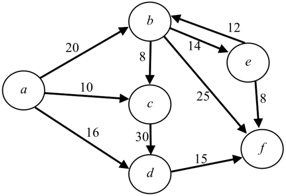


Se desea viajar desde el nodo a al nodo f, y suponga que debemos desarrollar un algoritmo para llevar a cabo esta tarea.

¿Cuál sería su primer paso? Es decir, ¿cuál sería el primer nodo que usted visitaría?

Problema de la ruta más corta

Ejemplo:

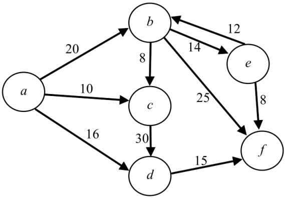


Se desea viajar desde el nodo a al nodo f, y suponga que debemos desarrollar un algoritmo para llevar a cabo esta tarea.

¿Cuál sería su primer paso? Es decir, ¿cuál sería el primer nodo que usted visitaría?

Problema de la ruta más corta

Ejemplo:



Algunas rutas y sus costos:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \{a, b, f\}, & \phi(P_1) &= 45,\\
P_2 &= \{a, b, e, f\}, & \phi(P_2) &= 42,\\
P_3 &= \{a, b, c, d, f\}, & \phi(P_3) &= 63,\\
P_4 &= \{a, c, d, f\}, & \phi(P_4) &= 45,\\
P_5 &= \{a, d, f\}, & \phi(P_5) &= 31.
\end{aligned}
$$

Problema de la ruta más corta

Procedimiento:

Sea u_i la distancia más corta del nodo origen al nodo i, y considere $c_{ij} \geq 0$ la longitud del arco (i, j).

Para los siguientes nodos, se introduce la siguiente etiqueta:

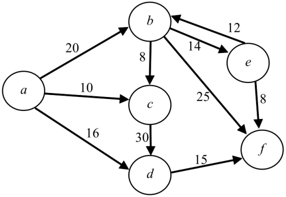
$$[u_j, i] = [u_i + c_{ij}, i], \qquad d_{ij} \geq 0,$$

y la etiqueta inicial es denotada por $[0, -]$.

Adicionalmente, estas etiquetas pueden adoptar 2 estados: temporales y permanentes.

- Una etiqueta temporal puede ser modificada si es posible determinar una ruta más corta hacia un nodo.
- Cuando no es posible encontrar una mejor ruta, la etiqueta pasa de temporal a permanente.

Ejemplo:



0. Asignamos la etiqueta permanente al nodo inicial $\boldsymbol{a}$, $[0, -]$.

1. Desde el nodo $\boldsymbol{a}$ podemos llegar a los nodos $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$. Luego:

Nodo	Etiqueta	Estado
$\boldsymbol{a}$	$[0, -]$	**permanente**
b	$[0 + 20, a]$	temporal
c	$[0 + 10, a]$	temporal
d	$[0 + 16, a]$	temporal

La ruta más corta al nodo $\boldsymbol{c}$, es $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}$ (el nodo $\boldsymbol{c}$ tiene la menor distancia $u_c = 10$), luego su etiqueta adopta el estado permanente, es decir:

Nodo	Etiqueta	Estado
$\boldsymbol{a}$	$[0, -]$	permanente
b	$[20, a]$	temporal
$\boldsymbol{c}$	$[10, a]$	**permanente**
d	$[16, a]$	temporal

Note que, para llegar al nodo $\boldsymbol{c}$ tenemos las siguientes rutas:

$$P_1 = \{a, c\}, \qquad Q_1 = \{a, b, c\},$$

con costos asociados $\phi(P_1) = 10$ y $\phi(Q_1) = 28$.

2. Desde el nuevo nodo permanente $\boldsymbol{c}$, es posible llegar al nodo $\boldsymbol{d}$, así:

Nodo	Etiqueta	Estado
$\boldsymbol{c}$	$[10, a]$	**permanente**
d	$[10 + 30, c] = [40, c]$	temporal

Note que las etiquetas para $\boldsymbol{d}$, son

$$[16, a] \qquad \text{y} \qquad [40, c].$$

Es decir, podemos llegar a $\boldsymbol{d}$ desde $\boldsymbol{a}$ con costo de 16 unidades, o pasando por $\boldsymbol{c}$, usando 40 unidades en total (10 para llegar a $\boldsymbol{c}$ y luego 30 para ir de $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{d}$)

En efecto, tenemos las rutas:

$$P_2 = \{a, d\}, \qquad \phi(P_2) = 16,$$
$$Q_2 = \{a, c, d\}, \qquad \phi(Q_2) = 40.$$

Adicionalmente, para llegar a $\boldsymbol{d}$ también tenemos la ruta $R_2 = \{a, b, c, d\}$, con costo $\phi(R_2) = 58$.

3. Marcamos el nodo $\boldsymbol{d}$ como permanente, lo que lleva a:

Nodo	Etiqueta	Estado
$\boldsymbol{d}$	$[16, a]$	**permanente**
f	$[16+15, d] = [31, d]$	temporal

Es decir, tenemos la ruta $P_3 = \{a, d, f\}$ con $\phi(P_3) = 31$.

Otras rutas para transitar de $\boldsymbol{a}$ hacia $\boldsymbol{f}$, son:

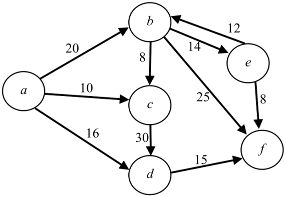
$$
\begin{aligned}
Q_3 &= \{a, b, f\}, & \phi(Q_3) &= 45,\\
R_3 &= \{a, c, d, f\}, & \phi(R_3) &= 55,\\
S_3 &= \{a, b, e, f\}, & \phi(S_3) &= 42.
\end{aligned}
$$

De este modo, podemos marcar el nodo $\boldsymbol{f}$ con el estado permanente.

En resumen, tenemos:

Nodo	Etiqueta	Estado
$\boldsymbol{a}$	$[0, -]$	permanente
b	$[20, a]$	temporal
c	$[10, a]$	temporal
$\boldsymbol{d}$	$[16, a]$	permanente
$\boldsymbol{f}$	$[31, d]$	permanente

que lleva a la ruta óptima $P_* = \{a, d, f\}$.



Problema de la ruta más corta

Observación:

- El procedimiento anterior es conocido como algoritmo de Dijkstra (1959).[3]
- Un supuesto clave en el algoritmo de Dijkstra es que las distancias (costos) son positivas.
- Para una red con n nodos $(N = \{1, \dots, n\})$ el tiempo total de cálculo del algoritmo es proporcional a n^2.
- Una modificación no muy compleja del algoritmo permite el cálculo de la ruta más corta desde el nodo de inicio hacia todos los nodos de la red.[4]
- Existen modificaciones que permiten que el algoritmo sea más rápido (conocido como algoritmo de búsqueda A^*).

[3] Numerische Mathematik 1, 269-271.

[4] Ejercicio: Calcular esto para el ejemplo de clases.

Algoritmo de Dijkstra:

Inicialización: Al nodo inicial s se le atribuye el estado permanente y la etiqueta $[0, -]$. Para los nodos n_i con $i \neq s$ atribuir las etiquetas temporales

$$[u_i, s] = [c_{si}, s].$$

Paso 1: Entre todos los nodos n_i con etiqueta temporal, determine aquél con distancia u_i más pequeña. Suponga que esto se satisface para el nodo n_k, entonces marcar el nodo como permanente y hacer $p := k$.

Paso 2: Para todo nodo n_i con etiqueta temporal, tal que el arco (p, i) existe y $u_p + c_{pi} < u_i$, ajustar la etiqueta como sigue:

$$[u_i, p] = [u_p + c_{pi}, p].$$

Paso 3: Repetir **Pasos 1** y **2**, hasta que todos los nodos tengan el estado permanente.