

CIND-221: Fundamentos de probabilidad

Felipe Osorio

f.osoriosalgado@uandresbello.edu

Facultad de Ingeniería, UNAB

Nuestro objetivo es caracterizar el concepto de **medir un conjunto**, y usando elementos de teoría de conjuntos, describiremos el resultado de un **experimento aleatorio**.

Definición 1 (Espacio muestral):

El conjunto Ω , de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio es llamado **espacio muestral**.

Ejemplos:

Considere los siguientes experimentos aleatorios.

- (a) Lanzar una moneda, en cuyo caso $\Omega = \{C, S\}$.
- (b) Lanzar un dado. De este modo, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- (c) Jugar al “cachipún” (piedra/papel/tijeras), así $\Omega = \{\text{papel, piedra, tijeras}\}$.
- (d) Duración de un artículo eléctrico. En este caso $\Omega = [0, \infty)$.

Definición 2 (Evento):

Un **evento** (o suceso) es cualquier colección de resultados posibles de un experimento aleatorio, es decir, cualquier subconjunto de Ω ¹

Sea $A \subseteq \Omega$, diremos que A ocurre si $\omega \in A$ con $\omega \in \Omega$ un resultado asociado a un experimento aleatorio.

Definiremos una **familia de conjuntos**, tal que todo evento $A \subseteq \Omega$, pertenezca al **espacio de eventos**, denotado por \mathcal{F} . Es decir, \mathcal{F} es conjunto de todos los subconjuntos posibles de Ω .

Objetivo:

Es decir, para todo evento $A \in \mathcal{F}$ deseamos asociar un número entre cero y uno llamado **probabilidad** de A .

¹Incluyendo al propio Ω .

Definición 3 (σ -álgebra):

Una colección de subconjuntos de Ω es llamado σ -álgebra y es denotada por \mathcal{F} si satisface las propiedades:

- (a) $\emptyset \in \mathcal{F}$.
- (b) Si $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$.
- (c) Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Note que $\emptyset \subset \Omega$ y $\Omega = \emptyset^c$, así por la Propiedad (a) y (b) sigue que $\Omega \in \mathcal{F}$.

Además, si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ entonces $A_1^c, A_2^c, \dots \in \mathcal{F}$ y de este modo, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{F}$. Por las leyes de De Morgan, tenemos

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Es decir, tenemos que $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Observación:

Asociado a un espacio muestral Ω puede haber muchas σ -álgebras. Por ejemplo, la colección $\{\emptyset, \Omega\}$ es σ -álgebra (minimal).

Ejemplo:

Considere $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Los siguientes subconjuntos de Ω , ¿son σ -álgebras?

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}\},$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$$

Claramente se verifica que \mathcal{F}_1 es una σ -álgebra, mientras que \mathcal{F}_2 no.

Definición 4 (Probabilidad):

Dado un espacio muestral Ω y un σ -álgebra asociada \mathcal{F} , una **función de probabilidad** $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, satisface:

- (a) $P(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{F}$.
- (b) $P(\Omega) = 1$.
- (c) Si A_1, A_2, \dots son mutuamente excluyentes, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Observación:

Considere P una medida de probabilidad definida en \mathcal{F} . Entonces (Ω, \mathcal{F}, P) se denomina **espacio de probabilidad**.

Resultado 1:

Si P es una función de probabilidad y A es cualquier conjunto en \mathcal{F} , entonces

- (a) $P(\emptyset) = 0$.
- (b) $P(A) \leq 1$.
- (c) $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Resultado 2:

Si P es una función de probabilidad y $A, B \in \mathcal{F}$. Entonces,

- (a) $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$.
- (b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- (c) Si $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

Ejemplo:

En una cierta zona urbana, el 60% de los propietarios están suscritos a Netflix y el 80% está suscrito a Prime Video, mientras que el 50% está suscrito a ambos servicios.

Si un propietario es seleccionado al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que esté suscrito al menos a uno de estos servicios?

Defina el evento A : un propietario está suscrito a Netflix, y B : un propietario está suscrito a Prime Video. Se desea calcular la probabilidad

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.8 - 0.5 = 0.9.$$

Además, ¿cuál es la probabilidad de que esté suscrito sólo a uno de los dos servicios?

$$\begin{aligned} P[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] &= P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ &= 0.6 + 0.8 - 2 \cdot 0.5 = 0.4. \end{aligned}$$

Fundamentos de probabilidad

Considere

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\},$$

un **espacio muestral finito**.

Para caracterizar $P(A)$ supondremos eventos elementales, $A = \{\omega_i\}$ y defina $p_i = P(\{\omega_i\})$ la probabilidad de $\{\omega_i\}$ tal que,

(a) $p_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, n$.

(b) $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Suponga además que cada $\{\omega_i\}$ es **igualmente probable**. Es decir, $p_i = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$. Luego, para un evento $A = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_r}\}$ sigue que

$$P(A) = \frac{r}{n},$$

o bien,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)},$$

con $N(A)$ la cardinalidad del conjunto A .

Ejemplo:

Se lanza un dados dos veces. Considere los siguientes eventos:

A : la suma de los resultados es menor o igual a 3.

B : el resultado del primer lanzamiento es impar.

Primeramente, describiremos el espacio muestral asociado al experimento, es decir:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Luego,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{2}.$$

Además,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{12} + \frac{18}{36} - \frac{2}{36} = \frac{19}{36}.$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

Ejemplo:

En un lote de 50 ampolletas hay 2 defectuosas. Se extraen 5 de ellas al azar sin reemplazo. Hallar la probabilidad de que **al menos una sea defectuosa**.

Considere el evento A : existe al menos una ampolleta defectuosa en las 5 extracciones.

De ahí que A^c corresponde al evento: **ninguna ampolleta es defectuosa**. Entonces,

$$\begin{aligned} P(A^c) &= \frac{48}{50} \frac{47}{49} \frac{46}{48} \frac{45}{47} \frac{44}{46} = 0.9600 \cdot 0.9592 \cdot 0.9583 \cdot 0.9574 \cdot 0.9565 \\ &= 0.8082. \end{aligned}$$

Así, $P(A) \approx 0.2$. Note que una manera alternativa de calcular esta probabilidad es usando combinatorios. En efecto,

$$P(A^c) = \frac{\binom{48}{5} \binom{2}{0}}{\binom{50}{5}} = \frac{1\,712\,304}{2\,118\,760} = 0.8082.$$

Ejemplo (Problema del cumpleaños):

Suponga que existe 50 personas en una sala y que deseamos determinar la probabilidad de que **al menos un par** de personas tengan la **misma fecha de cumpleaños**.²

Para abordar el problema, sea A el evento de que 2 personas tengan cumpleaños en días **diferentes**, entonces:

$$P(A) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365}.$$

Considere ahora que escogemos una tercera persona, es decir, para el evento B : que 3 personas tengan cumpleaños en días diferentes, es dado por

$$P(A) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}.$$

²No consideraremos el 29 de febrero para este problema.

Problema del cumpleaños (continuación):

Suponga un grupo de k personas y considere que se desea calcular la probabilidad de que al menos 2 personas cumplan años el mismo día.

Defina el evento A_k : k personas tienen sus cumpleaños en fechas diferentes. Como el año tiene 365 días, el número de cumpleaños posibles es 365^k . Así,

$$P(A_k) = \frac{(365)_k}{365^k} = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - k + 1)}{365^k} = \frac{365!}{(365 - k)!} \frac{1}{365^k},$$

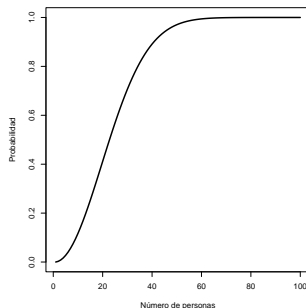
y por la regla del complemento,

$$P(A_k^c) = 1 - \frac{(365)_k}{365^k}.$$

Fundamentos de probabilidad

Es decir, por ejemplo

k	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$P(A_k^c)$	0.117	0.253	0.411	0.569	0.706	0.814	0.891	0.941	0.970



Ejemplo:

Considere un lote con 80 artículos sin defectos y 20 defectuosos y suponga que se selecciona 2 artículos (a) **con substitución**, y (b) **sin substitución**.

Defina los eventos:

$A = \{\text{el 1er artículo es defectuoso}\},$

$B = \{\text{el 2do artículo es defectuoso}\}.$

Cuando escogemos **con substitución**, tenemos:

$$P(A) = P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}.$$

Cuando escogemos **sin substitución**, tenemos que:

$$P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5},$$

pero, ¿cambia $P(B)$?

Definición 5 (Probabilidad condicional):

Si A y B son dos eventos en Ω y $P(B) > 0$, entonces la **probabilidad condicional** de A dado B , escrito $P(A|B)$ es

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Note que $P(B|B) = 1$, es decir, B “actúa” como Ω . En efecto, como $A = A \cap \Omega$, tenemos

$$P(A) = P(A|\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(\Omega)}.$$

La ocurrencia de A es calibrada con relación a B .

Ejemplo (continuación):

En el ejemplo anterior, se desea calcular $P(B|A) = 19/99$, pues si A ya ha ocurrido sólo quedan 19 defectuosos entre los 99 artículos.

Reexpresando la probabilidad condicional, tenemos

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B),$$

o bien

$$P(A \cap B) = P(B|A) P(A).$$

Las expresiones anteriores permiten “contornar” cálculos complicados, usando³

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)}.$$

³Esto es un caso particular del Teorema de Bayes.

Observación:

El espacio de probabilidad definido por $\mathcal{F} \cap B$ permite notar que $P(A|B)$ es una función de probabilidad, es decir satisface:

- (a) $P(A|B) \geq 0$.
- (b) $P(\Omega|B) = 1$.
- (c) Para $\{A_n\}_{n \geq 1}$ sucesión disjunta

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n | B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | B).$$

Resultado 3:

Si P es una función de probabilidad. Entonces,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap C_i),$$

para cualquier partición C_1, C_2, \dots .

Resultado 4 (Probabilidad total):

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y sea C_1, C_2, \dots , una partición contable de Ω tal que $P(C_i) \geq 0, \forall i$. Entonces, para todo $A \in \mathcal{F}$,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|C_i) P(C_i).$$

Resultado 5 (Teorema de Bayes):

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) espacio de probabilidad y sea $\{C_i\}_{i \geq 1}$ partición contable de Ω con $P(C_i) \geq 0, \forall i$. Entonces, para todo $A \in \mathcal{F}$, tenemos que

$$P(C_i|A) = \frac{P(A|C_i) P(C_i)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(A|C_k) P(C_k)},$$

siempre que $P(A) > 0$.

Ejemplo:

Considere un lote de 20 artículos defectuosos y 80 sin defectos, desde los que se escoge 2 artículos sin reemplazo. Sea

$A = \{\text{el 1er artículo es defectuoso}\},$

$B = \{\text{el 2do artículo es defectuoso}\}.$

Para calcular $P(B)$ podemos hacer

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A) P(A) + P(B|A^c) P(A^c) = \frac{19}{99} \frac{1}{5} + \frac{20}{99} \frac{4}{5} \\ &= \frac{1}{5} \frac{1}{99} (19 + 20 \cdot 4) = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Definición 6 (Independencia):

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y sean $A, B \in \mathcal{F}$. Se dice que A y B son **independientes** si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Interpretación:

Podemos entender la independencia como: “la ocurrencia de un evento B **no tiene efecto** en la probabilidad de otro evento A ”. Es decir,

$$P(A|B) = P(A).$$

Además,

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(B),$$

es decir, la ocurrencia de A **no** tiene efecto en B .

Ejemplo:

Se tienen tres urnas, la primera con 2 bolas blancas y dos bolas negras, la segunda con dos bolas blancas y una negra y la tercera con tres bolas negras y una blanca.

Suponga que se extrae una bola de cada urna, ¿cuál es la probabilidad de que las tres bolas sean blancas?

Defina el evento B_i : extraer una bola blanca de la i -ésima urna, $i = 1, 2, 3$. De este modo, **asumiendo independencia**⁴ obtenemos

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1) P(B_2) P(B_3) = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

⁴¿Es un supuesto razonable?

Ejemplo (continuación):

Suponga que se extrae una bola de una urna al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca? Defina los eventos,

U_i : la bola extraída proviene de la i -ésima urna, $i = 1, 2, 3$.

B : extraer una bola blanca.

Luego,

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(B|U_i) P(U_i) = \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \frac{1}{3} = \frac{17}{36}.$$

Si se sabe que la bola extraída es de color blanco, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraída de la urna 1? En efecto,

$$P(U_1|B) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|U_1) P(U_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{3}}{\frac{17}{36}} = \frac{6}{17}.$$

Resultado 6:

Si A y B son independientes, entonces los siguientes pares también son independientes

- (a) A y B^c .
- (b) A^c y B .
- (c) A^c y B^c .

Definición 7:

Una colección de eventos A_1, A_2, \dots, A_n es **mutuamente independiente** si para cualquier subcolección A_{i_1}, \dots, A_{i_k} , tenemos

$$P\left(\prod_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j}).$$

Ejemplo:

Se lanzan 3 dados de distinto color: blanco, rojo y negro ¿Cuál es la probabilidad de que el dado blanco salga 3 y los otros dos no? Considere A , B y C los eventos

A : resultado del dado blanco es 3,

B : resultado del dado rojo es 3,

C : resultado del dado negro es 3,

tenemos $P(A) = P(B) = P(C) = 1/6$ y se pide calcular

$$P(A \cap B^c \cap C^c) = P(A) P(B^c) P(C^c) = \frac{1}{6} \frac{5}{6} \frac{5}{6} = \frac{25}{216}.$$