CIND-221: Distribuciones bivariadas

Felipe Osorio

f.osoriosalgado@uandresbello.edu

Facultad de Ingeniería, UNAB

Distribuciones bivariadas

Para un par de variables aleatorias X e Y se tiene la función de densidad conjunta como

$$f(x, y) = \mathsf{P}(X = x, Y = y)$$

Notación:

Escribiremos

$$\mathsf{P}(X = x, Y = y) = \mathsf{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}).$$

Ejemplo:

Distribución bivariada con X e Y tomando valores 0 o 1

$X \setminus Y$	0	1	total
0	1/9	2/9	3/9
1	3/9	3/9	6/9
total	4/9	5/9	1

En este caso,

$$f(1, 1) = \mathsf{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{3}{9}.$$

Definición 1 (Densidad conjunta):

Decimos que $f(x, y)$ es la función de densidad del vector aleatorio (X, Y) si:

(a) $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y).

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$,

(c) Para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{P}((X, Y) \in A) = \int\int_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Observación:

Para el caso de distribuciones discretas, la definición es análoga.

Ejemplo:

Sea (X, Y) con densidad,

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 (x+y)\,\mathsf{d}x\,\mathsf{d}y &= \int_0^1 \Big[\int_0^1 x\,\mathsf{d}x\Big]\,\mathsf{d}y + \int_0^1 \Big[\int_0^1 y\,\mathsf{d}x\Big]\,\mathsf{d}y \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}\,\mathsf{d}y + \int_0^1 y\,\mathsf{d}y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

es decir, $f(x, y)$ es una densidad.

Definición 2 (Distribución acumulada conjunta):

La función de distribución acumulada conjunta (CDF) $F(x, y)$ es definida como:

$$F(x, y) = \mathsf{P}(X \leq x, Y \leq y).$$

Propiedades:

La CDF tiene las siguientes propiedades:

(a) $F(x, y)$ es función monótona creciente y continua a la derecha en (x, y).

(b) $0 \leq F(x, y) \leq 1$.

(c) $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$.

(d) $F(+\infty, +\infty) = 1$.

Para el caso continuo, tenemos:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(r,s)\, \mathsf{d}r\, \mathsf{d}s$$

Además, por el Teorema fundamental del Cálculo,

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

Resultado 1 (Densidad marginal):

Sea (X, Y) un vector aleatorio bivariado con densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$. Entonces, las densidades marginales de X e Y, $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ son, respectivamente dadas por:

(a) Para el caso discreto:

$$p_X(x) = \sum_y p(x, y) = \sum_y \mathsf{P}(X = x, Y = y),$$
$$p_Y(y) = \sum_x p(x, y) = \sum_x \mathsf{P}(X = x, Y = y).$$

(b) Para variables continuas:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}y, \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x.$$

Ejemplo:

Suponga que

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)}, \qquad x, y \geq 0.$$

De este modo,

$$f_X(x) = e^{-x} \int_0^\infty e^{-y} \, \mathsf{d}y = e^{-x}, \qquad x \geq 0.$$

Observación:

Para variables aleatorias continuas podemos usar la siguiente relación:

$$\begin{aligned} F_X(x) = \mathsf{P}(X \leq x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathsf{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(t,y)\,\mathsf{d}y\,\mathsf{d}t \\ &= F_{X,Y}(x,+\infty). \end{aligned}$$

Además,

$$f_X(x) = \frac{\mathsf{d}F_X(x)}{\mathsf{d}x},$$

y análogamente

$$F_Y(y) = F_{X,Y}(+\infty, y).$$

Definición 3 (Densidad condicional):

La función de densidad condicional para el caso discreto es definida como:

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) = \mathsf{P}(X = x|Y = y) &= \frac{\mathsf{P}(X = x, Y = y)}{\mathsf{P}(Y = y)} \\ &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, \end{aligned}$$

si $f_Y(y) > 0$. Para el caso continuo, tenemos

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, \qquad f_Y(y) > 0.$$

Observación:

A pesar de la notación $f_{X|Y}(x|y)$ se debe destacar que $f_{X|Y}(x|y)$ es función de X.

Observación:

Evidentemente,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)},$$

y

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x} \\ &= \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x)\,\mathrm{d}x}, \end{aligned}$$

que corresponde al Teorema de Bayes para densidades.

En efecto, la densidad condicional debe satisfacer las condiciones de una densidad.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)\,\mathsf{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}\,\mathsf{d}x \\ &= \frac{1}{f_Y(y)}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathsf{d}x \\ &= \frac{f_Y(y)}{f_Y(y)} = 1.\end{aligned}$$

Además, es obvio que

$$f_{X|Y}(x|y) \geq 0.$$

Los momentos de una variable aleatoria condicional se definen de forma análoga:

$$\mathsf{E}(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,\mathsf{d}x,$$
$$\mathsf{E}(Y|X) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)\,\mathsf{d}y,$$

y

$$\mathsf{var}(Y|X) = \mathsf{E}(Y^2|X) - \{\mathsf{E}(Y|X)\}^2.$$

Definición 4 (Independencia):

Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta $f(x, y)$ y densidades marginales $f_X(x)$, $f_Y(y)$, respectivamente. Entonces X e Y se dicen independientes si, para todo $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Observación:

Análogamente, si $F(x, y)$ representa la CDF del vector (X, Y) y $G(x)$, $H(y)$ las CDFs de X e Y, respectivamente. Entonces X e Y son independientes, si

$$F(x, y) = G(x) \cdot H(y).$$

Además, si X e Y son independientes, tenemos que:

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f_X(x) \cdot f_Y(y)}{f_X(x)} = f_Y(y).$$

Extensiones multivariadas

Observación:

Diremos que $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_k)^\top$ es un vector aleatorio k-dimensional.[1] Usaremos la notación $f(\boldsymbol{x})$ y $F(\boldsymbol{x})$ para la densidad y CDF del vector aleatorio $\boldsymbol{X}$. En este caso

$$F(\boldsymbol{x}) = \mathsf{P}(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x}) = \mathsf{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k),$$

y asumiremos que existe f no negativa, tal que

$$F(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{x} f(\boldsymbol{u})\,\mathsf{d}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k.$$

Además,

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^k F(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \cdots \partial x_k},$$

con $\int_{\mathbb{R}^k} f(\boldsymbol{x})\,\mathsf{d}\boldsymbol{x} = 1$.

[1] donde $X_1, \dots, X_k$ son variables aleatorias.

Definición 5 (Variables IID):

Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables independientes y cada una tiene la misma distribución marginal con CDF F, decimos que $X_1, \ldots, X_n$ son independientes e identicamente distribuídas (IID) y escribimos

$$X_1, \ldots, X_n \sim F.$$

Si F tiene densidad F podemos escribir $X_1, \ldots, X_n \sim f$.

Observación:

Cuando $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{IID}}{\sim} F$ también decimos que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de tamaño n desde F (o f).[2]

Si $X_1, \ldots, X_n$ son independientes, es fácil notar que

$$f(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i).$$

[2] Y anotamos que $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a.(n) desde F.

Definición 6 (Distribución normal multivariada):

Decimos que un vector aleatorio $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_p)^\top$ tiene una distribución normal multivariada si su función de densidad adopta la forma:

$$f_X(\boldsymbol{x}) = |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp\{-\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p.$$

donde $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ es matriz definida positiva y anotamos $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Resultado 2:

Sea $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, entonces:

$$\mathsf{E}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\mu}, \qquad \operatorname{cov}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\Sigma}.$$

Resultado 3 (Transformación afín):

Suponga que $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ y considere la transformación $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$, donde $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times p}$ con $\operatorname{rg}(\boldsymbol{A}) = m$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Entonces

$$\boldsymbol{Y} \sim \mathsf{N}_m(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}^\top).$$

Ejemplo:

Sea $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ donde

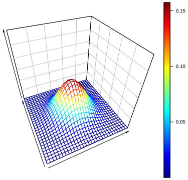
$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \qquad -1 < \rho < 1.$$

En cuyo caso, la función de densidad es dada por:

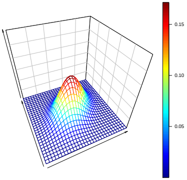
$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2)\Big\}.$$

A continuación se presenta la función de densidad para los casos $\rho = 0.0, 0.4$ y 0.8.

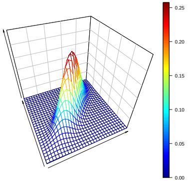
Distribución normal multivariada



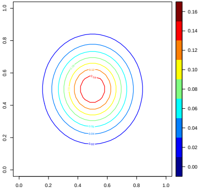
(a) $\rho = 0.0$



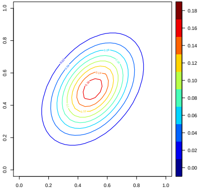
(b) $\rho = 0.4$



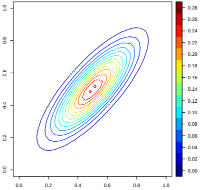
(c) $\rho = 0.8$



(d) contornos



(e) contornos



(f) contornos