PRELIMINARES

1. Elementos de teoría de conjuntos

Un conjunto es una colección bastante general de objetos o números, que en este contexto serán llamados elementos. Indicaremos a un conjunto por letras mayúsculas. Decimos que a es un elemento del conjunto A, o bien, que a pertenece a A y escribimos $a \in A$, en caso contrario escribimos $a \notin A$. Para los objetos contenidos en A usaremos la notación

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$

es decir es necesario listar o conocer los elementos de A, mientras que

$$A = \{a : a \text{ tiene la propiedad } P\},$$

donde P es una característica que define los elementos de A.

Ejemplo 1. Considere los siguientes conjuntos:

$$A = \{1, 2, \ldots, n\}, \qquad B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}, \qquad C = \{x : 0 < x < 1\}.$$

Tambien existe conjuntos bastante comunes, tales como:

$\mathbb{R}$ es el conjunto de todos los números reales,

$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$,

$(a, b) = \{x : a < x < b\}$ es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$,

$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$ es un intervalo semi-cerrado en $\mathbb{R}$.

Conjuntos pueden ser de naturaleza muy diversa, en el siguiente ejemplo se considera una colección de funciones.

Ejemplo 2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y considere

$$A = \{f : f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}\},$$

denota el conjunto de todas las rectas en el plano.

Un conjunto también puede representar una colección de conjuntos. Sea A y B dos conjuntos, entonces $\mathcal{C} = \{A, B\}$ es un conjunto (o colección) de conjuntos.

Ejemplo 3. Sea $A = \{0, 1\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces,

$$\mathcal{C} = \{A, B\} = \{\{0, 1\}, \{1, 2, \ldots, n\}\},$$

es decir $\mathcal{C}$ contiene dos elementos. El conjunto $\{0, 1\}$ y el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Note que $\{\{0, 1\}, \{1, 2, \ldots, n\}\} \neq \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. El primero es un conjunto con 2 elementos, mientras el último es un conjunto con $n + 1$ elementos.

Dos conjuntos son de particular interés, el *conjunto universal*, es decir aquél conjunto que contiene todos los objetos bajo consideración, y que será denotado por Ω, mientras que el *conjunto vacio* o *nulo*, denotado por $\varnothing$ corresponde al conjunto que no contiene elementos.

Ejemplo 4. Considere $\Omega = \mathbb{R}$ el conjunto de números reales y sea,

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 2 = 0\}.$$

De este modo, $A = \varnothing$, pues la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 2 = 0$ no tiene raíces reales.

Un conjunto B es llamado *subconjunto* de A si y sólo si para todo $x \in B$, entonces $x \in A$, en cuyo caso anotamos $B \subseteq A$. Si $B \subseteq A$ y existe $x \in A$ tal que $x \notin B$, entonces se dice que B es un *subconjunto propio* de A y anotamos $B \subset A$. Cuando $B \subseteq A$ y $A \subseteq B$ entonces los conjuntos A y B consisten de los mismos elementos, y en este caso $A = B$.

Ejemplo 5. Suponga que $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 3, 5\}$, en este caso $B \subset A$. Mientras que si $A = \{0, 1\}$ y $B = \{0, 1\}$, entonces $A = B$. Por otro lado, considere $A = \{x : x \geq 0\}$ y $B = \{x : x > 1\}$, luego $B \subset A$.

Evidentemente, tenemos que $\varnothing \subseteq A$ para todo A, mientras que $A \subseteq \Omega$. Más aún $\varnothing \subset \Omega$ y $\Omega \subseteq \Omega$. Además, Ω es un concepto relativo. Por ejemplo, podríamos definir $\Omega = [0, 1]$ y considerar todos los subintervalos en $[0, 1]$.

Un par de elementos a y b (no necesariamente diferentes) donde a es el primer elemento mientras que b es el segundo es llamado *par ordenado* y escribimos (a, b). En general una n-upla ordenada es $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ y es usual llamar a a_i la i-ésima coordanada de la n-upla.

El *producto cartesiano* de los conjuntos A y B denotado por $A \times B$ es definido como

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Esta definición puede ser extendida a n conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ como

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$$

En particular, si $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, entonces el producto cartesiano es denotado por A^n. Por ejemplo $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales.

La *unión* de dos conjuntos A y B consiste de todos los elementos en A o en B, es decir

$$A \cup B = \{x : x \in A, \ \text{o } x \in B\}.$$

Esta definición se extiende a n conjuntos $A_1, \dots, A_n$ como

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \in \Omega : x \in A_k \text{ para al menos un } k \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

y más generalmente para una familia de conjuntos $\{A_i, i \in I\}$, con I un conjunto de índices,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in \Omega : x \in A_i \text{ para al menos un subíndice } i \in I\}.$$

Evidentemente esta última expresión puede ser usada para una secuencia infinita de conjuntos $A_1, A_2, \dots,$ es decir $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$, la cual debe satisfacer

$$x \in A_1 \text{ o } x \in A_2 \text{ o } \dots \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ está en al menos uno de } A_1, A_2, \dots.$$

Ejemplo 6. Sea $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 5\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 5\}$. Ahora, si $A = (0, 1]$ y $B = (\frac{1}{2}, \infty)$, entonces $A \cup B = (0, \infty)$.

La *intersección* de dos conjuntos A y B es el conjunto que incluye los elementos comunes a ambos conjuntos y es denotado por $A \cap B$, esto es

$$A \cap B = \{x : x \in A, \text{ y } x \in B\}.$$

Esta definición se extiende a n conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ como

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \in \Omega : x \in A_k \text{ para todos los subíndices } k \in \{1, 2, \ldots, n\}\},$$

y más generalmente para una familia de conjuntos $\{A_i, i \in I\}$, como:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in \Omega : x \in A_i \text{ para todos los subíndices } i \in I\}.$$

Para una secuencia infinita de conjuntos $A_1, A_2, \ldots$, la intersección $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ debe satisfacer

$$x \in A_1 \text{ y } x \in A_2 \text{ y } \ldots \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ pertenece a todo } A_1, A_2, \ldots.$$

Ejemplo 7. Para $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 5\}$, entonces $A \cap B = \{1\}$. Mientras que, si $A = (0, 1]$ y $B = (\frac{1}{2}, \infty)$, entonces $A \cap B = (\frac{1}{2}, 1]$.

El *complemento* (con respecto al conjunto universal Ω) de un conjunto A es definido como:

$$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}.$$

Ejemplo 8. Suponga $\Omega = [0, 1]$ y $A = [0, \frac{1}{2})$, luego $A^c = [\frac{1}{2}, 1]$. Por otro lado, sea $\Omega = \mathbb{R}$ y $A = \mathbb{R}$, entonces $A^c = \varnothing$.

Además, es fácil notar que

$$(A^c)^c = A, \qquad \Omega^c = \varnothing, \qquad \varnothing^c = \Omega.$$

La *diferencia* del conjunto B con el conjunto A es definida como el conjunto de los elementos de A que no pertenecen a B, esto es,

$$A - B = \{x \in \Omega : x \in A, x \notin B\}.$$

Podemos apreciar que,

$$A - B = A \cap B^c, \qquad A^c = \Omega - A.$$

Propiedad 9. Sean A, B y C conjuntos definidos en Ω. Tenemos que,

(i) *Asociatividad de la unión e intersección*:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

(ii) *Distributividad de la intersección con respecto a la unión y de la unión con respecto a la intersección*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(iii) *Conmutatividad de la unión e intersección*

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

(iv) *El conjunto vacío $\varnothing$ es el elemento neutro para la unión*

$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A.$$

(v) *El conjunto universal* Ω *es el elemento neutro para la intersección*

$$A \cap \Omega = \Omega \cap A = A.$$

(vi) *El complemento satisface*

$$A \cap A^c = \varnothing, \qquad A \cup A^c = \Omega.$$

(vii) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

(viii) *Leyes de De Morgan*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Las fórmulas de De Morgan pueden ser extendidas para n conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, como:

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c,$$
$$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c,$$

y para una familia de conjuntos $\{A_i, i \in I\}$, como:

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c, \qquad \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

Dos conjuntos A y B se dicen *disjuntos* si ellos no tienen elementos en común, y escribimos $A \cap B = \varnothing$, Más generalmente, los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ se dicen *disjuntos por pares* (o mutuamente excluyentes) si

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \qquad i \neq j,$$

con $\{i, j\}$ desde el conjunto de índices $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Ejemplo 10. Sea $A = \{x : x > 1\}$ y $B = \{x : x < 0\}$. Entonces A y B son disjuntos.

Ejemplo 11. Sea A y B dos conjuntos en Ω. Entonces,

$$(A - B) \cap (B - A) = (A \cap B^c) \cap (B \cap A^c) = (A \cap A^c) \cap (B \cap B^c) = \varnothing,$$

es decir $A - B$ y $B - A$ son disjuntos.

Definición 12. Una colección de conjuntos $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es una *partición* del conjunto A, si satisface las condiciones:

(i) $\{A_1, \ldots, A_n\}$ son disjuntos por pares.
(ii) $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$.

Propiedad 13. Suponga que $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es una partición de A, y suponga $B \subseteq A$. Entonces $\{B \cap A_1, \ldots, B \cap A_n\}$ es una partición de $B \cap A$. En efecto,

$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap (A_i \cap A_j) = \varnothing, \qquad \forall\, i \neq j,$$

y

$$\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i) = B \cap \Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = B \cap A.$$

Ejemplo 14. La familia de conjuntos $A_i = [i, i+1)$, para $i = 0, 1, 2, \ldots$ forman una partición de $[0, \infty)$.

Ejemplo 15. A y A^c son una partición de Ω, pues

$$A \cap A^c = \varnothing, \qquad A \cup A^c = \Omega.$$

Definición 16. La secuencia de conjuntos $\{A_n\}_{n\geq 1}$, se dice monótona, si:

(i) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$. Es decir, $\{A_n\}$ es creciente ($A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$) y anotamos $A_n \uparrow$.

(ii) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$. Es decir, $\{A_n\}$ es decreciente ($A_n \supseteq A_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$) y anotamos $A_n \downarrow$.

Definición 17. El límite de una secuencia monótona se define como:

(i) Si $A_n \uparrow$, entonces $\text{lím}_{n\to\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

(ii) Si $A_n \downarrow$, entonces $\text{lím}_{n\to\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.