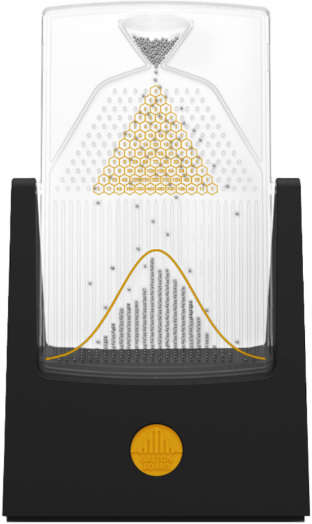
CIND-221: Variable aleatoria

Felipe Osorio

f.osoriosalgado@uandresbello.edu

Facultad de Ingeniería, UNAB

Máquina de Galton



Definición 1 (variable aleatoria):

Una variable aleatoria X es una función

$$X : \Omega \to \mathbb{R},$$

que transforma un resultado $\omega \in \Omega$ en un número $X(\omega)$ en la recta real.

Ejemplo:

Suponga que se lanza una moneda dos veces. En este caso el espacio muestral Ω es dado por

$$\Omega = \{(C, C), (C, S), (S, C), (S, S)\}.$$

Considere X una variable que representa el número de caras. Tenemos,

$$\omega_1 = (C, C), \quad \omega_2 = (C, S), \quad \omega_3 = (S, C), \quad \omega_4 = (S, S),$$

luego,

$$X(\omega_1) = 2, \quad X(\omega_2) = 1, \quad X(\omega_3) = 1, \quad X(\omega_4) = 0.$$

Variable aleatoria

Considere

$$A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\},$$

De este modo, determinar la probabilidad de $X = a$ es equivalente al cálculo de la probabilidad de A

En efecto, podemos considerar

$$X^{-1}(a) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}.$$

Lo que permite calcular,

$$\mathsf{P}(X = a) = \mathsf{P}(X^{-1}(a)) = \mathsf{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}).$$

Variable aleatoria

Ejemplo:

Suponga que lanzamos un dado. Es decir $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. De este modo,

$$X(1) = 1, \quad X(2) = 2, \quad X(3) = 3, \quad \cdots \quad X(6) = 6.$$

Así, por ejemplo

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X \leq 3) &= \mathsf{P}(X = 1) + \mathsf{P}(X = 2) + \mathsf{P}(X = 3) \\
&= \mathsf{P}(X^{-1}(1)) + \mathsf{P}(X^{-1}(2)) + \mathsf{P}(X^{-1}(3)) \\
&= \mathsf{P}(\{1\}) + \mathsf{P}(\{2\}) + \mathsf{P}(\{3\}) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Definición 2 (distribución acumulada):

La función de distribución acumulada (CDF) de X denotada por F_X es definida por

$$F_X(x) = \mathsf{P}(X \leq x).$$

Observación:

Evidentemente, tenemos que:

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1].$$

Función de distribución

Propiedades:

- $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$ (es no decreciente).
- F es continua a la derecha.
- $F(-\infty) = 0$ y $F(+\infty) = 1$. $\quad (0 \leq F(x) \leq 1)$
- $\mathsf{P}(X > x) = 1 - F(x)$.

Definición 3 (función de probabilidad):

X es variable aleatoria discreta si adopta valores en un conjunto finito o numerable $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$. En este caso se define la función de probabilidad

$$p_X(x) = \mathsf{P}(X = x), \qquad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Definición 4 (función de densidad):

Una variable aleatoria X es dicha continua si existe una función $f(x) \geq 0$ tal que

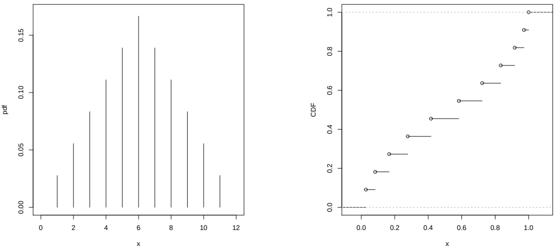
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathsf{d}\,t, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

en este caso decimos que $f(x)$ es función de densidad (pdf) de X.

Ejemplo (lanzamiento de dos dados):

Considere el lanzamiento de 2 dados. Sea X la suma de sus caras. Entonces,

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathsf{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



(a) $p(x)$ (b) CDF

Resultado 1:

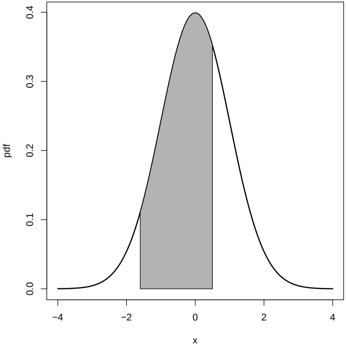
Una función de probabilidad o función de densidad, deben satisfacer:

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} p_X(x) = 1, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathsf{d}\,x = 1,$$

respectivamente.

Variable aleatoria

Sabemos que el área total bajo $f(x)$ es 1, entonces $\mathsf{P}(a \leq X \leq b)$ es el área acotada por las rectas $x = a$ y $x = b$.



Variable aleatoria

Para variables aleatorias continuas,

$$\mathsf{P}(X = a) = \int_a^a f(t)\,\mathsf{d}t = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathsf{P}(X \leq x) = \mathsf{P}(X < x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathsf{d}t \end{aligned}$$

Además,

$$\mathsf{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$\frac{\mathsf{d}F(x)}{\mathsf{d}x} = f(x)$$

Evidentemente, también

$$1 = F(+\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathsf{d}x$$

Ejemplo:

Considere la función,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ kx^2, & -1 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea una función de densidad, debemos tener que

$$1 = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = k\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = k\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{k}{3}\big(1^3 - (-1)^3\big) = \frac{2k}{3}.$$

Es decir, $k = 3/2$.

Ejemplo:

Suponga

$$f(x) = k\exp(-x/2), \qquad x > 0.$$

Evidentemente,

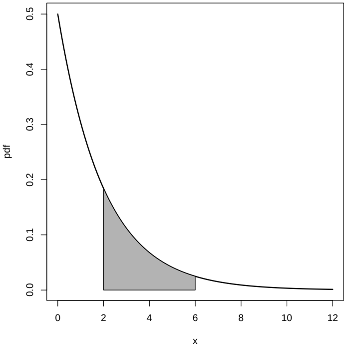
$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty k\exp(-x/2)\,\mathrm{d}x = k\int_0^\infty \exp(-x/2)\,\mathrm{d}x = -2k\exp(-x/2)\Big|_0^\infty \\ &= -2k\Big[\lim_{z\to\infty}\exp(-z/2) - \exp(0)\Big] = 2k. \end{aligned}$$

De ahí que $k = 1/2$. Luego,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 0\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^x \exp(-t/2)\,\mathrm{d}t \\ &= 1 - \exp(-x/2), \qquad x > 0. \end{aligned}$$

Variable aleatoria

Considere P$(2 < X < 6)$, es decir:



De este modo,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(2 < X < 6) &= \frac{1}{2}\int_2^6 \exp(-x/2)\,\mathsf{d}x = F(6) - F(2)\\ &= [1-\exp(-3)] - [1-\exp(-1)] = 0.9502 - 0.6321\\ &= 0.3181\end{aligned}$$

Adicionalmente,

$$\mathsf{P}(X < 8) = F(8) = 1 - \exp(-4) = 0.9817,$$

y

$$\mathsf{P}(X \geq 8) = 1 - F(8) = 1 - 0.9817 = 0.0183.$$

Definición 5 (Esperanza):

Sea X variable aleatoria. La esperanza (siempre que exista) de X es definida por:

- Para X discreta
$$\mathsf{E}(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} x\, p(x),$$
- Si X es continua
$$\mathsf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, \mathsf{d}x.$$

En general, tenemos

$$\mathsf{E}\{g(X)\} = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) p(x), \qquad \mathsf{E}\{g(X)\} = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x)\, \mathsf{d}x.$$

Propiedades:

(a) $\mathsf{E}(a) = a$, para a una constante,

(b) $\mathsf{E}(aX + b) = a\,\mathsf{E}(X) + b$,

(c) $\mathsf{E}(a_1 X + a_2 Y) = a_1\,\mathsf{E}(X) + a_2\,\mathsf{E}(Y)$,

(d) Si $g(x) \geq 0$, para todo x. Entonces $\mathsf{E}\{g(X)\} \geq 0$.

(e) $\mathsf{E}\{g_1(X)\} \leq \mathsf{E}\{g_2(X)\}$ si $g_1(X) \leq g_2(X)$.

Demostración:

En efecto, (a) sigue desde

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(aX + b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) f(x)\,\mathrm{d}x = a \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= a\,\mathsf{E}(X) + b.\end{aligned}$$

las propiedades restantes se muestran de forma similar (Tarea).

Definición 6 (Varianza):

Sea X variable aleatoria. La varianza de X es definida como:

$$\mathsf{var}(X) = \mathsf{E}[\{X - \mathsf{E}(X)\}^2].$$

Suponga $\mu = \mathsf{E}(X)$. Entonces, podemos escribir

$$\mathsf{var}(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} (x - \mu)^2 p(x),$$

para X discreta, y

$$\mathsf{var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) \, \mathrm{d}x,$$

si X es continua.

Propiedades:

(a) $\mathsf{var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}^2(X)$.

(b) $\mathsf{var}(aX + b) = a^2 \,\mathsf{var}(X)$.

Demostración:

Tenemos

$$(X - \mathsf{E}(X))^2 = X^2 - 2X\,\mathsf{E}(X) + \mathsf{E}^2(X),$$

de ahí que

$$\mathsf{var}(X) = \mathsf{E}[\{X - \mathsf{E}(X)\}^2] = \mathsf{E}(X^2) - 2\,\mathsf{E}(X)\,\mathsf{E}(X) + \mathsf{E}^2(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}^2(X).$$

Ahora, para notar (b), sea $Y = aX + b$ y note que

$$Y - \mathsf{E}(Y) = aX + b - a\,\mathsf{E}(X) - b = a(X - \mathsf{E}(X)).$$

De este modo,

$$\mathsf{var}(Y) = \mathsf{E}[\{Y - \mathsf{E}(Y)\}^2] = \mathsf{E}[a^2\{X - \mathsf{E}(X)\}^2] = a^2\,\mathsf{var}(X).$$

Finalmente, podemos definir el r-ésimo momento de X como

$$\mu_r = \mathsf{E}(X^r),$$

mientras que el r-ésimo momento centrado, es dado por:

$$\mu_r' = \mathsf{E}\{(X - \mu)^r\},$$

con $\mu = \mu_1 = \mathsf{E}(X)$.

De este modo es fácil notar que

$$\mathsf{var}(X) = \mu_2 - \mu_1^2.$$

Ejemplo:

Suponga

$$p(x) = \mathsf{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Evidentemente

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{\infty} p(x) &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda}\Big(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots\Big) \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.
\end{aligned}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda}\Big(0 + 1\,\frac{\lambda}{1!} + 2\,\frac{\lambda^2}{2!} + 3\,\frac{\lambda^3}{3!} + \cdots\Big) \\
&= e^{-\lambda}\lambda\Big(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots\Big) \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!},
\end{aligned}
$$

con $y = x - 1$. De ahí que

$$\mathsf{E}(X) = \lambda$$

Resultado 2 (Desigualdad de Markov):

Sea X variable aleatoria no negativa con esperanza finita y t un real positivo. Entonces,

$$\mathsf{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathsf{E}(X)}{t}.$$

Demostración:

Considere,

$$Y = \begin{cases} 0, & X < t, \\ t, & X \geq t. \end{cases}$$

De este modo Y es v.a. discreta con dos valores posibles 0 y t. Además,

$$\mathsf{P}(Y = 0) = \mathsf{P}(X < t), \qquad \mathsf{P}(Y = t) = \mathsf{P}(X \geq t).$$

Luego,

$$\mathsf{E}(Y) = 0 \cdot \mathsf{P}(Y = 0) + t \cdot \mathsf{P}(Y = t) = t \cdot \mathsf{P}(Y = t) = t \cdot \mathsf{P}(X \geq t).$$

Como $Y = t$, sigue que $X \geq Y$ (pues $X \geq t$). Esto lleva a,

$$\mathsf{E}(X) \geq \mathsf{E}(Y) = t \cdot \mathsf{P}(X \geq t),$$

tenemos que $t > 0$, lo que lleva al resultado.

Corolario (Desigualdad de Chebyshev):

Sea X variable aleatoria y $k > 0$. Entonces,

$$\mathsf{P}(|X - \mathsf{E}(X)| \geq k) \leq \frac{\mathsf{var}(X)}{k^2}.$$

Definición 7 (Función generadora de momentos):

Sea X variable aleatoria con densidad $f(x)$ se define la función generadora de momentos (MGF) de X como

$$M_X(t) = \mathsf{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad |t| < h.$$

Observación:

Es posible probar que

$$\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}t^r} M_X(t)\Big|_{t=0} = \mathsf{E}(X^r) = \mu_r$$