PRELIMINARES

1. Fundamentos de Probabilidad

El objetivo de esta sección es caracterizar el concepto de *medir un conjunto*. A partir de este momento consideraremos que es posible describir, usando elementos de teoría de conjuntos, el resultado de un experimento aleatorio. En efecto, considere la siguiente definición.

Definición 1. El conjunto Ω, de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio es llamado *espacio muestral*.

Ejemplo 2. Considere los siguientes experimentos aleatorios.

(a) Lanzar una moneda, en cuyo caso $\Omega = \{C, S\}$.
(b) Lanzar un dado. De este modo, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
(c) Jugar al "cachipún"(piedra/papel/tijeras), así $\Omega = \{\text{papel, piedra,tijeras}\}$.
(d) Duración de un artículo eléctrico. En este caso $\Omega = [0, \infty)$.

Definición 3. Un evento (o suceso) es cualquier colección de resultados posibles de un experimento aleatorio, esto es, cualquier subconjunto de Ω (incluyendo al propio Ω).

Sea $A \subseteq \Omega$, diremos que A ocurre si $\omega \in A$ con $\omega \in \Omega$ un resultado asociado a un experimento aleatorio. Evidentemente, $\omega \notin A$ si y sólo si A no ocurre.

Adicionalmente necesitamos definir una familia de conjuntos, tal que todo evento $A \subseteq \Omega$, pertenezca al *espacio de eventos*, denotado por $\mathcal{F}$. Es decir, $\mathcal{F}$ es conjunto de todos los subconjuntos posibles de Ω. Esto es requerido pues, para todo evento $A \in \mathcal{F}$ deseamos asociar un número entre cero y uno llamado probabilidad de A. Considere las siguientes definiciones.

Definición 4. Una colección de subconjuntos de Ω es llamado *σ-álgebra* y es denotada por $\mathcal{F}$ si satisface las propiedades:

(a) $\varnothing \in \mathcal{F}$.
(b) Si $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$.
(c) Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Note que $\varnothing \subset \Omega$ y $\Omega = \varnothing^c$, así por la Propiedad (a) y (b) sigue que $\Omega \in \mathcal{F}$. Además, si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ entonces $A_1^c, A_2^c, \dots \in \mathcal{F}$ y de este modo, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{F}$. Por las leyes de De Morgan, tenemos

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\Big)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Es decir, tenemos que $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Observación 5. Asociado a un espacio muestral Ω puede haber muchas σ-álgebras. Por ejemplo, la colección $\{\varnothing, \Omega\}$ es σ-álgebra (minimal).

Ejemplo 6. Considere $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Los siguientes subconjuntos de Ω, ¿son σ-álgebras?

$$\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}\},$$
$$\mathcal{F}_2 = \{\varnothing, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$$

Claramente se verifica que $\mathcal{F}_1$ es una σ-álgebra, mientras que $\mathcal{F}_2$ no.

Definición 7. Sea Ω un espacio muestral y sea $\mathcal{F}$ un σ-álgebra, decimos que el par $(\Omega, \mathcal{F})$ es un espacio medible. Si $A \in \mathcal{F}$ decimos que A es medible.

Definición 8 (Probabilidad)**.** Dado un espacio muestral Ω y un σ-álgebra asociada $\mathcal{F}$, una *función de probabilidad* $\mathsf{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, satisface:

(a) $\mathsf{P}(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{F}$.
(b) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.
(c) Si $A_1, A_2, \dots$ son mutuamente excluyentes, entonces
$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i).$$

Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio de medida y P una medida de probabilidad definida en $\mathcal{F}$. Entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ se denomina *espacio de probabilidad.*

Resultado 9. *Si* P *es una función de probabilidad y* A *es cualquier conjunto en* $\mathcal{F}$*, entonces*

(a) $\mathsf{P}(\varnothing) = 0$.
(b) $\mathsf{P}(A) \leq 1$.
(c) $\mathsf{P}(A^c) = 1 - \mathsf{P}(A)$.

Demostración. Primero considere (c). Como A y A^c son una partición de Ω, sigue que
$$\mathsf{P}(A \cup A^c) = \mathsf{P}(\Omega) = 1,$$
además $A \cap A^c = \varnothing$ son disjuntos, luego
$$\mathsf{P}(A \cup A^c) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(A^c) = 1.$$
Como $\mathsf{P}(A^c) \geq 0$, (b) sigue desde (c). Finalmente, para probar (a) note que $\Omega = \Omega \cup \varnothing$ y como $\Omega \cap \varnothing = \varnothing$, tenemos
$$1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega \cup \varnothing) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\varnothing),$$
de este modo $\mathsf{P}(\varnothing) = 0$. □

Resultado 10. *Si* P *es una función de probabilidad y* $A, B \in \mathcal{F}$*. Entonces,*

(a) $\mathsf{P}(B \cap A^c) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$.
(b) $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$.
(c) *Si* $A \subseteq B \Rightarrow \mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$.

Demostración. Para notar (a) considere que para A y B conjuntos cualquiera
$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$
(pues $B = B \cap (A \cup A^c) = B \cap \Omega$). Luego,
$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(\{B \cap A\} \cup \{B \cap A^c\}) = \mathsf{P}(B \cap A) + \mathsf{P}(B \cap A^c).$$
En efecto, $(B \cap A) \cap (B \cap A^c) = B \cap (A \cap A^c) \cap B = \varnothing$. Para probar (b), note que
$$(A \cup B) = A \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) \cap (A \cap A^c) = (A \cup B) \cap \Omega.$$

Además,

$$A \cap (B \cap A^c) = (A \cap A^c) \cap B = \varnothing \cap B = \varnothing.$$

Por tanto, sigue que

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \cap A^c) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B),$$

por parte (a). Si $A \subseteq B$ entonces $A \cap B = A$. De este modo, usando (a) tenemos

$$0 \leq \mathsf{P}(B \cap A^c) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A),$$

y (c) es verificado. □

Como $\mathsf{P}(A \cup B) \leq 1$, reagrupando términos tenemos

$$\mathsf{P}(A \cap B) \geq \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - 1,$$

la desigualdad anterior es un caso particular de la desigualdad de Bonferroni.

Ejemplo 11. En una cierta zona urbana, el 60 % de los propietarios están suscritos al diario y el 80 % está suscrito al servicio de cable, mientras que el 50 % está suscrito a ambos servicios. Si un propietario es seleccionado al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que esté suscrito al menos a uno de estos servicios?

Defina el evento A : un propietario está suscrito al diario, y B : un propietario está suscrito al servicio de cable. Se desea calcular la probabilidad

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}9.$$

Además, ¿cuál es la probabilidad de que esté suscrito sólo a uno de los dos servicios?

$$\begin{aligned}\mathsf{P}[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] &= \mathsf{P}(A \cap B^c) + \mathsf{P}(A^c \cap B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - 2\,\mathsf{P}(A \cap B)\\ &= 0{,}6 + 0{,}8 - 2 \cdot 0{,}5 = 0{,}4.\end{aligned}$$

Resultado 12. *Si* P *es una función de probabilidad. Entonces,*

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A \cap C_i),$$

para cualquier partición $C_1, C_2, \dots$.

Demostración. Dado que $C_1, C_2, \dots$ forman una partición, tenemos $C_i \cap C_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$ y $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. De ahí que

$$A = A \cap \Omega = A \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \Big) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap C_i).$$

De este modo,

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap C_i) \Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A \cap C_i),$$

pues, dado que los C_i's son disjuntos, tambien lo es la secuencia $\{A \cap C_i\}_{i=1}^{\infty}$. □

1.1. Espacios muestrales finitos. En esta sección consideraremos que

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\},$$

para caracterizar $\mathsf{P}(A)$ supondremos eventos elementales, es decir $A = \{\omega_i\}$ y definimos $p_i = \mathsf{P}(\{\omega_i\})$ la probabilidad de $\{\omega_i\}$ tal que,

(a) $p_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$.
(b) $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Suponga ahora que $A = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_r}\}$ está formado por r elementos de Ω, luego

$$\mathsf{P}(A) = p_{j_1} + \cdots + p_{j_r}.$$

Adicionalmente, supondremos que cada $\{\omega_i\}$ es igualmente probable. Entonces,

$$p_i = \mathsf{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}.$$

Luego, para un evento $A = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_r}\}$ sigue que

$$\mathsf{P}(A) = \frac{r}{n},$$

o bien,

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\mathsf{N}(A)}{\mathsf{N}(\Omega)},$$

con $\mathsf{N}(A)$ la cardinalidad del conjunto A. Debemos resaltar que esta *no* es una definición general, sino que apropiada *sólo* bajo el supuesto de espacios muestrales finitos y equiprobables.

Ejemplo 13. Se lanza un dados dos veces. Considere los siguientes eventos:

A : la suma de los resultados es menor o igual a 3.
B : el resultado del primer lanzamiento es impar.

Primeramente, describiremos el espacio muestral asociado al experimento, es decir:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Luego,

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\mathsf{N}(A)}{\mathsf{N}(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, \qquad \mathsf{P}(B) = \frac{\mathsf{N}(B)}{\mathsf{N}(\Omega)} = \frac{1}{2}.$$

Además,

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B) = \frac{1}{12} + \frac{18}{36} - \frac{2}{36} = \frac{19}{36}.$$
$$\mathsf{P}(A^c) = 1 - \mathsf{P}(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

Ejemplo 14. En un lote de 50 ampolletas hay 2 defectuosas. Se extraen 5 de ellas al azar sin reemplazo. Hallar la probabilidad de que al menos una sea defectuosa. De este modo, considere el evento A : existe al menos una ampolleta defectuosa en las 5 extracciones. De ahí que A^c : corresponde al evento: ninguna ampolleta es defectuosa. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A^c) &= \frac{48}{50}\,\frac{47}{49}\,\frac{46}{48}\,\frac{45}{47}\,\frac{44}{46} = 0{,}9600 \cdot 0{,}9592 \cdot 0{,}9583 \cdot 0{,}9574 \cdot 0{,}9565 \\ &= 0{,}8082.\end{aligned}$$

Así, $\mathsf{P}(A) \approx 0{,}2$. Note que una manera alternativa de calcular esta probabilidad es usando combinatorios. En efecto,

$$\mathsf{P}(A^c) = \frac{\binom{48}{5}\binom{2}{0}}{\binom{50}{5}} = \frac{1\,712\,304}{2\,118\,760} = 0{,}8082.$$

Ejemplo 15 (Problema del cumpleaños)**.** Para introducir ideas, suponga que existe 50 personas en una sala y que deseamos determinar la probabilidad de que al menos un par de personas tengan la misma fecha de cumpleaños.[1] Para abordar el problema, sea A el evento de que 2 personas tengan cumpleaños en días *diferentes*, entonces:

$$\mathsf{P}(A) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365}.$$

Considere ahora que escogemos una tercera persona, es decir, para el evento B : que 3 personas tengan cumpleaños en días diferentes, es dado por

$$\mathsf{P}(A) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}.$$

Suponga, un poco más generalmente, un grupo de k personas y suponga que se desea calcular la probabilidad de que al menos 2 personas cumplan años el mismo día. Primeramente defina el evento A_k : k personas tienen sus cumpleaños en fechas diferentes. Como el año tiene 365 días, el número de cumpleaños posibles es 365^k. Así,

$$\mathsf{P}(A_k) = \frac{(365)_k}{365^k} = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - k + 1)}{365^k} = \frac{365!}{(365-k)!}\,\frac{1}{365^k},$$

y por la regla del complemento,

$$\mathsf{P}(A_k^c) = 1 - \frac{(365)_k}{365^k}.$$

Es decir, por ejemplo

k	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$\mathsf{P}(A_k^c)$	0.117	0.253	0.411	0.569	0.706	0.814	0.891	0.941	0.970

El siguiente fragmento de código construye el siguiente gráfico:

```
# secuencia con el número de personas
> k <- 1:100
# probabilidad de que k personas cumplan anos en fechas diferentes
> diferentes <- function(k) {
+   p <- choose(365, k) * factorial(k) / 365^k
+   p
+ }
# construyendo la tabla anterior
> probs <- 1 - diferentes(k)
> cuales <- seq(10, 50, by = 5)
> probs[cuales]
[1] 0.1169 0.2529 0.4114 0.5687 0.7063 0.8144 0.8912 0.9410 0.9704

# despliega el gráfico en la Figura 2
> plot(k, probs, type = "l", xlab = "Número de personas",
+      ylab = "Probabilidad")
```

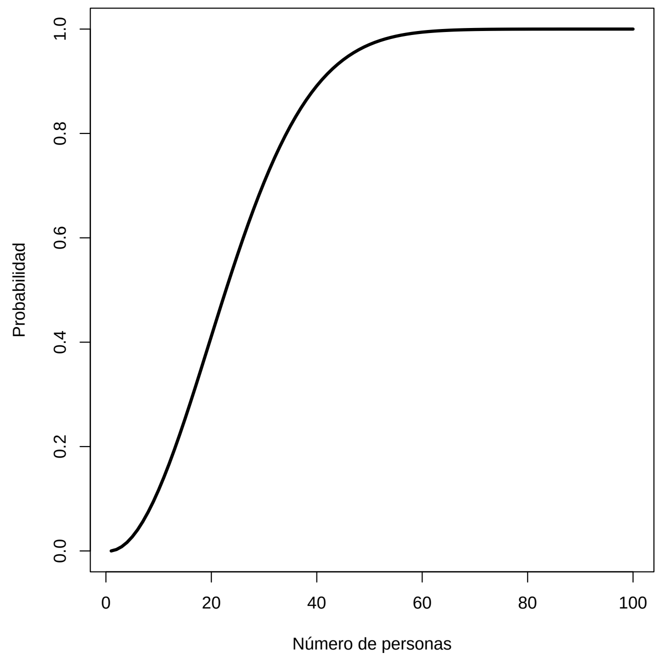

FIGURA 1. Probabilidad de que dos personas en un grupo tengan cumpleaños el mismo día como una función del número de personas en el grupo.

1.2. Probabilidad condicional. Para introducir ideas, considere un lote con 80 artículos sin defectos y 20 defectuosos y suponga que se selecciona 2 artículos (a) con substitución, y (b) sin substitución. Defina los eventos:

$$A = \{\text{el 1er artículo es defectuoso}\},$$
$$B = \{\text{el 2do artículo es defectuoso}\}.$$

Cuando escogemos *con* substitución, tenemos:

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}.$$

Cuando escogemos *sin* substitución, tenemos que:

$$\mathsf{P}(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5},$$

pero, ¿cambia $\mathsf{P}(B)$?

Definición 16. Si A y B son dos eventos en Ω y $\mathsf{P}(B) > 0$, entonces la *probabilidad condicional* de A dado B, escrito $\mathsf{P}(A|B)$ es

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}.$$

[1]No consideraremos el 29 de febrero para este problema.

Note que $\mathsf{P}(B|B) = 1$, es decir, B *"actua"* como Ω. En efecto, como $A = A \cap \Omega$, tenemos

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A|\Omega) = \frac{\mathsf{P}(A \cap \Omega)}{\mathsf{P}(\Omega)}.$$

La ocurrencia de A es calibrada con relación a B. En particular, si $A \cap B = \varnothing$, entonces

$$\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(B|A) = 0.$$

En el ejemplo anterior, se desea calcular $\mathsf{P}(B|A) = 19/99$, pues si A ya ha ocurrido sólo quedan 19 defectuosos entre los 99 artículos.

Reexpresando la probabilidad condicional, tenemos

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B),$$

o bien

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(B|A)\,\mathsf{P}(A).$$

Las expresiones anteriores permiten "contornar" cálculos complicados, usando[2]

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(B|A)\,\mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Observación 17. El espacio de probabilidad definido por $\mathcal{F} \cap B$ permite notar que $\mathsf{P}(A|B)$ es una función de probabilidad, es decir satisface:

(a) $\mathsf{P}(A|B) \geq 0$.
(b) $\mathsf{P}(\Omega|B) = 1$.
(c) Para $\{A_n\}_{n\geq 1}$ sucesión disjunta

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \big| B\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n|B).$$

Resultado 18 (Probabilidad total)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *un espacio de probabilidad y sea* $C_1, C_2, \ldots,$ *una partición contable de* Ω *tal que* $\mathsf{P}(C_i) \geq 0$, $\forall i$*. Entonces, para todo* $A \in \mathcal{F}$*,*

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i|C_i)\,\mathsf{P}(C_i).$$

Demostración. Como los C_i's forman una partición tenemos que

$$A = A \cap \Omega = A \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap C_i).$$

Además,

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A \cap C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A|C_i)\,\mathsf{P}(C_i).$$

□

Resultado 19 (Teorema de Bayes)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *espacio de probabilidad y sea* $\{C_i\}_{i\geq 1}$ *partición contable de* Ω *con* $\mathsf{P}(C_i) \geq 0$, $\forall i$*. Entonces, para todo* $A \in \mathcal{F}$*, tenemos que*

$$\mathsf{P}(C_i|A) = \frac{\mathsf{P}(A|C_i)\,\mathsf{P}(C_i)}{\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A|C_k)\,\mathsf{P}(C_k)},$$

siempre que $\mathsf{P}(A) > 0$.

[2]Esto es un caso particular del Teorema de Bayes.

Demostración. Tenemos que

$$\mathsf{P}(C_i|A)\,\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A|C_i)\,\mathsf{P}(C_i),$$

así

$$\mathsf{P}(C_i|A) = \frac{\mathsf{P}(A|C_i)\,\mathsf{P}(C_i)}{\mathsf{P}(A)}, \qquad \mathsf{P}(A) > 0,$$

desde el Teorema de probabilidad total, sigue que

$$\mathsf{P}(C_i|A) = \frac{\mathsf{P}(A|C_i)\,\mathsf{P}(C_i)}{\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}(A|C_k)\,\mathsf{P}(C_k)}.$$

□

Ejemplo 20. Considere un lote de 20 artículos defectuosos y 80 sin defectos, desde los que se escoge 2 artículos sin reemplazo. Sea

$$A = \{\text{el 1er artículo es defectuoso}\},$$
$$B = \{\text{el 2do artículo es defectuoso}\}.$$

Para calcular $\mathsf{P}(B)$ podemos hacer

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(B) &= \mathsf{P}(B|A)\,\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B|A^c)\,\mathsf{P}(A^c) = \frac{19}{99}\frac{1}{5} + \frac{20}{99}\frac{4}{5}\\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{99}(19 + 20\cdot 4) = \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

1.3. Independencia estadística. Hasta el momento hemos manipulado situaciones donde los eventos A y B están relacionados. A continuación se introduce un concepto clave en estadística que permite caracterizar que dos o más eventos no tienen relación.

Definición 21. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ un espacio de probabilidad y sean $A, B \in \mathcal{F}$. Se dice que A y B son *independientes* si y sólo si

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B).$$

Naturalmente podemos entender la independencia del siguiente modo: "la ocurrencia de un evento B no tiene efecto en la probabilidad de otro evento A". Es decir,

$$\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A).$$

Note tambien que,

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(B)} = \mathsf{P}(B),$$

es decir, la ocurrencia de A *no* tiene efecto en B.

Ejemplo 22. Se tienen tres urnas, la primera con 2 bolas blancas y dos bolas negras, la segunda con dos bolas blancas y una negra y la tercera con tres bolas negras y una blanca.

Suponga que se extrae una bola de cada urna, ¿cuál es la probabilidad de que las tres bolas sean blancas? Para llevar a cabo este cálculo, defina el evento B_i : extraer una bola blanca de la i-ésima urna, $i = 1, 2, 3$. De este modo, asumiendo independencia obtenemos

$$\mathsf{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathsf{P}(B_1)\,\mathsf{P}(B_2)\,\mathsf{P}(B_3) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Ahora suponga que se extrae una bola de una urna al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca? Defina los eventos,

U_i : la bola extraída proviene de la i-ésima urna, $i = 1, 2, 3$.
B : extraer una bola blanca.

Luego,

$$\mathsf{P}(B) = \sum_{i=1}^{3} \mathsf{P}(B|U_i)\, \mathsf{P}(U_i) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{1}{3} = \frac{17}{36}.$$

Si se sabe que la bola extraída es de color blanco, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraída de la urna 1? En efecto, deseamos calcular

$$\mathsf{P}(U_1|B) = \frac{\mathsf{P}(U_1 \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{\mathsf{P}(B|U_1)\, \mathsf{P}(U_1)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{\frac{17}{36}} = \frac{6}{17}.$$

Resultado 23. *Si A y B son independientes, entonces los siguientes pares también son independientes*

(a) *A y B^c.*
(b) *A^c y B.*
(c) *A^c y B^c.*

Demostración. Para probar (a), note que

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A \cap B^c) &= \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A)\, \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A)(1 - \mathsf{P}(B)) \\ &= \mathsf{P}(A)\, \mathsf{P}(B^c).\end{aligned}$$

Partes (b) y (c) son análogas y se dejan de ejercicio para el lector. □

Definición 24. Una colección de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es *mutuamente independiente* si para cualquier subcolección $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$, tenemos

$$\mathsf{P}\Big(\prod_{j=1}^{k} A_{i_j}\Big) = \prod_{j=1}^{k} \mathsf{P}(A_{i_j}).$$

Ejemplo 25. Se lanzan 3 dados de distinto color: blanco, rojo y negro ¿Cuál es la probabilidad de que el dado blanco salga 3 y los otros dos no? Considere A, B y C los eventos

A : resultado del dado blanco es 3,

B : resultado del dado rojo es 3,

C : resultado del dado negro es 3,

tenemos $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(C) = 1/6$ y se pide calcular

$$\mathsf{P}(A \cap B^c \cap C^c) = \mathsf{P}(A)\, \mathsf{P}(B^c)\, \mathsf{P}(C^c) = \frac{1}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6} = \frac{25}{216}.$$

Ejemplo 26. Suponga que se lanza un dado en dos oportunidades de forma consecutiva. Note que los resultados posibles pueden ser expresados por el conjunto,

$$\begin{aligned}\{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.\end{aligned}$$

Ahora, suponga X una variable asociada al evento: *La suma de las caras de un dado en dos lanzamientos consecutivos.* Podemos escribir la siguiente tabla con las probabilidades asociadas a cada uno de los resultados que puede adoptar X, es decir:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathsf{P}(X = x)$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

Asimismo, podemos considerar el siguiente gráfico, donde se aprecia que las probabilidades asociadas a variable X adoptan un comportamiento gobernado por una ley.

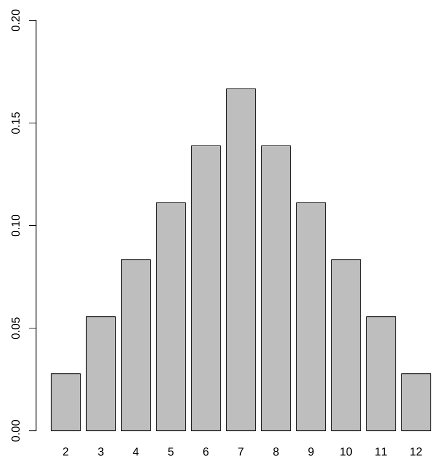

Figura 2. Gráfico de la función de probabilidades asociada a la variable X.