# CIND-221: Optimización de redes[1]

**Felipe Osorio**

f.osoriosalgado@uandresbello.edu

Facultad de Ingeniería, UNAB

[1] Agradezco a los prof. Jean Paul Maidana y Javier Palma por facilitarme su material de clases.

## Optimización de redes

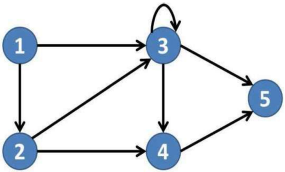
Una gran cantidad de problemas en Investigación de Operaciones se pueden modelar usando un grafo, i.e., un conjunto de vértices o nodos conectados con arcos y aristas.

### Ejemplos:

- Trazar una red de fibra óptica tal que se cubran ciertos puntos de la manera más económica posible (árbol de costo mínimo).
- Determinar la ruta más corta entre dos ciudades (ruta más corta).
- Determinar la cantida máxima de electricidad que se puede transmitir a través de una red eléctica (problema de flujo máximo).
- Decidir las fechas en que se debe iniciar y terminar una serie de tareas para ejecutar un proyecto (camino crítico).

**Definición:**

Un grafo corresponde a un conjunto de vértices (nodos) $N$, un conjunto de aristas $E$, y/o un conjunto de arcos $A$, que unen los vértices.



## Ejemplos de grafos:

- Redes de transporte/sociales.
- Problemas de inventarios.
- Tráfico vehicular.

*Observaciones:*

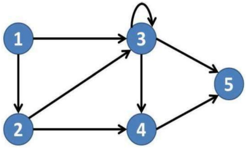
- Una red (o grafo) se dice dirigido si los vértices se pueden recorrer en una dirección.
- Una ruta es una secuencia de arcos que unen dos vértices.
- Un grafo es conexo si cualquier par de vértices puede unirse con una ruta sobre el grafo.
- Se llama flujo a cualquier bien (tangible o no) que circule por las conexiones de la red (electricidad, vehículo, mensaje, tiempo).

**Definición:**

Un grafo dirigido $G = (N, A)$ es un par formado por un conjunto finito no vacío de vértices $N = \{1, \ldots, n\}$ cuyos elementos se denominan nodos y un conjunto de arcos, que adopta la forma:

$$A = \{(i, j) : i, j \in N\}.$$

**Ejemplo:**

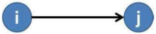



Nodos: $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$

Arcos: $A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}.$

**Definición:**

Se denota $(i, j)$ al arco orientado desde el nodo $i$ al nodo $j$.



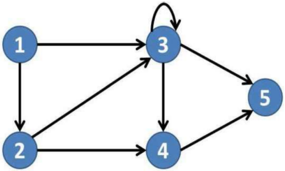

**Definición:**

Dos nodos se dicen adjacentes si están conectados por directamente por un arco.

**Definición:**

El grado de un nodo es el número de arcos que se conectan al nodo (de entrada o salida). Denotamos por $g(i)$ al grado del $i$-ésimo nodo.

**Ejemplo:**




Para nuestra red con nodos $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tenemos los siguientes grados:

$$g(1) = 2, \quad g(2) = 3, \quad g(3) = 6, \quad g(4) = 3, \quad g(5) = 2.$$

*Observación:*

Podemos notar que los arcos frecuentemente tienen asociada una dirección. Esto permite introducir la siguiente definición.

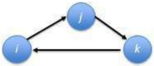
**Definición:**

Una ruta (o camino) con arcos dirigidos se denomina ruta dirigida. En otro caso es llamada una cadena.



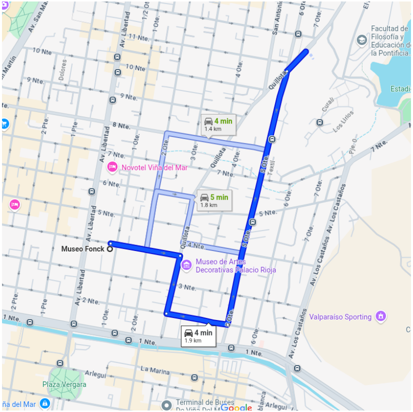
**Definición:**

Un circuito es una ruta sobre una red donde el nodo inicial y el nodo final coinciden.



## Aplicación:

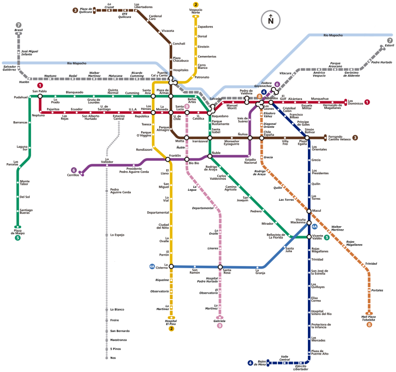
Encontrar la ruta más corta entre dos puntos.



# Optimización de redes

## Aplicación:

La programación de redes es muy útil para diseñar redes de transporte (con el fin de transportar mercancías, pasajeros, conexiones eléctricas, etc).



### Definición (Problema de flujo de costo mínimo):

Considere un grafo dirigido $G = (N, A)$, donde $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $A$ un conjunto de arcos.

Tenemos que cada vértice $(i \in N)$ tiene asociado un número $b_i$ que representa la oferta o demanda en ese vértice de un determinado bien.

- Si $b_i > 0$, se dice que $i$ es un vértice de origen.
- Si $b_i < 0$, se dice que $i$ es un vértice de destino.
- Si $b_i = 0$, se dice que $i$ es un vértice de transbordo.

Cada arco tiene asociada una variable $x_{ij} \geq 0$ que indica el flujo enviado desde $i$ hasta $j$, y una cantidad $c_{ij}$ que indica el costo de enviar una unidad desde $i$ a $j$.

# Optimización de redes

El **problema de flujo de costo mínimo** consiste en determinar como enviar la oferta disponible a través de la red a fin de satisfacer la demanda con un costo mínimo,

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \\ & x_{ij} \geq 0, \quad \forall\,(i,j) \in A. \end{aligned}$$

*Observación:*

Hay situaciones en las que el flujo que puede pasar por cada arco está limitado, esto significa que se dispone de cotas para las variables:

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}.$$

**Ejemplo (Problema de asignación):**

Considere el problema en el que se desea asignar trabajadores de diversos niveles de capacitación a ciertos puestos de trabajo.

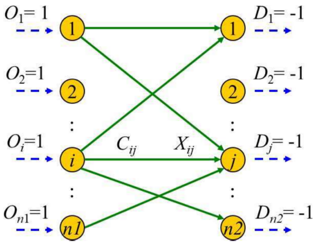
Un puesto que coincide con los conocimiento de un trabajador resulta menos costoso que uno en que el trabajador no es tan hábil.

El objetivo es determinar la asignación óptima (de mínimo costo) de trabajadores a puestos.

*Observación:*

En un problema de asignación, cada nodo de origen oferta una unidad y cada nodo de destino demanda una unidad.

Además, el costo unitario de transporte $c_{ij}$ corresponde al costo de asignación.



En un problema de asignación (PA), se dispone de dos conjuntos $N_1$ y $N_2$ de igual tamaño,[2] una colección de pares ordenados $A \subseteq N_1 \times N_2$, que representa posibles asignaciones y un costo $c_{ij}$ asociado a cada elemento $(i, j) \in A$.

El PA se puede plantear como un problema de flujo de costo mínimo en una red $G = (N_1 \cup N_2, A)$, con:

- $N_1$: Nodos de oferta.
- $N_2$: Nodos de demanda.
- $A$: arcos de las red.

y considerando como parámetros: $c_{ij}$, esto es, el costo unitario de "enviar" (asignar) una unidad por el arco $(i, j) \in A$.

[2] Esto es, $\#(N_1) = \#(N_2)$ (tienen el mismo número de elementos).

Variables:

$x_{ij}$ : número de unidades que circulan sobre el arco $(i,j) \in A$.

Función objetivo:

$$\min \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} c_{ij} x_{ij}.$$

Restricciones:

- Toda tarea debe ser asignada

$$\sum_{i \in N_1} x_{ij} = 1, \qquad \forall\, j \in N_2.$$

- Solo una persona debe ejecutar la tarea

$$\sum_{j \in N_2} x_{ij} \leq 1, \qquad \forall\, i \in N_1.$$

- Naturaleza de las variables

$$x_{ij} \geq 0, \qquad \forall\, i \in N_1, \forall\, j \in N_2.$$

## Ejemplo:

Un departamento necesitar asignar un grupo de personas en un grupo de oficinas, y que cada persona debe ser asignada a una oficina, tal que, oficina debe ser ocupada sólo por una persona.

Suponga que se conoce el costo de asignación de cada persona a cada oficina, el que es dado por la siguiente matriz

| | C118 | C138 | C140 | C246 | C250 | C251 | D237 | D239 | D241 | M233 | M239 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Coullard | 6 | 9 | 8 | 7 | 11 | 10 | 4 | 5 | 3 | 2 | 1 |
| Daskin | 11 | 8 | 7 | 6 | 9 | 10 | 1 | 5 | 4 | 2 | 3 |
| Hazen | 9 | 10 | 11 | 1 | 5 | 6 | 2 | 7 | 8 | 3 | 4 |
| Hopp | 11 | 9 | 8 | 10 | 6 | 5 | 1 | 7 | 4 | 2 | 3 |
| Iravani | 3 | 2 | 8 | 9 | 10 | 11 | 1 | 5 | 4 | 6 | 7 |
| Linetsky | 11 | 9 | 10 | 5 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 1 | 2 |
| Mehrotra | 6 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 1 | 2 | 5 | 4 | 3 |
| Nelson | 11 | 5 | 4 | 6 | 7 | 8 | 1 | 9 | 10 | 2 | 3 |
| Smilowitz | 11 | 9 | 10 | 8 | 6 | 5 | 7 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| Tamhane | 5 | 6 | 9 | 8 | 4 | 3 | 7 | 10 | 11 | 2 | 1 |
| White | 11 | 9 | 8 | 4 | 6 | 5 | 3 | 10 | 7 | 2 | 1 |