CIND-221: Algoritmo de Floyd

Felipe Osorio

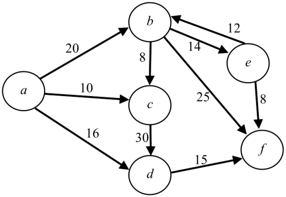
f.osoriosalgado@uandresbello.edu

Facultad de Ingeniería, UNAB

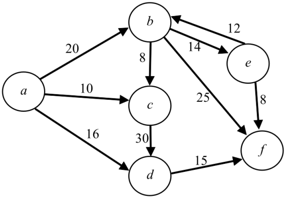
Notación:

Vamos a reescribir la matriz de costos como la matriz $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$, donde el costo (de viajar) del nodo i al nodo j será finito si está conectado directamente (i.e. son adyacentes), e infinito en caso contrario.

Considere la siguiente red:



Ejemplo:



De este modo,

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 10 & 16 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 8 & \infty & 14 & 25 \\ \infty & \infty & 0 & 30 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 15 \\ \infty & 12 & \infty & \infty & 0 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}.$$

Introduciremos el algoritmo de Floyd para obtener la ruta más corta en una red $G = (N, A)$ entre **dos nodos cualquiera**.[1]

Motivación:

La **idea clave** del algoritmo de Floyd, es:

Si para tres nodos i, j, k las distancias (costos) de ir a k desde i es más corto pasando a través de j, es decir,

$$c_{ij} + c_{jk} < c_{ik},$$

entonces la ruta óptima para ir desde i a k es $i \to j \to k$ (en lugar de tomar la ruta $i \to k$).

[1] De este modo, es más general que el Algoritmo de Dijkstra.

Algoritmo de Floyd:

Considere una red $G = (N, A)$ con nodos $N = \{1, \dots, n\}$ y matriz de costos $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$.

Inicialización: Asignar las matrices iniciales $\boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{S}_0$ una matriz cuadrada $n \times n$ de estados para los nodos, dada por:

$$\boldsymbol{S}_0 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & - & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ j & j & j & \cdots & j \\ \vdots & & & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & - \end{pmatrix}$$

es decir, el elemento (i, j) de $\boldsymbol{S}_0$ es dado por i.

Aquí el signo $-$ indica que tales posiciones están bloqueadas.

Algoritmo de Floyd

Paso k: Definir la fila k y columna k como fila y columna pivote. Si se satisface la condición:

$$c_{ik} + c_{kj} < c_{ij}, \qquad i \neq k, j \neq k, i \neq j.$$

Hacer

(a) Crear $\boldsymbol{C}_k$ reemplazando c_{ij} en $\boldsymbol{C}_{k-1}$ por $c_{ik} + c_{kj}$.

(b) Crear $\boldsymbol{S}_k$ reemplazando s_{ij} en $\boldsymbol{S}_{k-1}$ por k.

Actualizar $k = k + 1$. Si $k \leq n$, repetir Paso k. En otro caso detener el algoritmo.

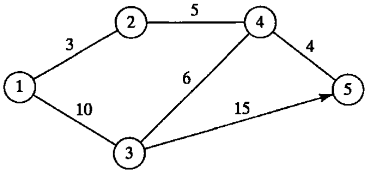
Observación:

Después de n pasos, la ruta más corta entre los nodos i y j se puede extraer desde la información en $\boldsymbol{C}_n$ y $\boldsymbol{S}_n$. En efecto,

1. c_{ij} en $\boldsymbol{C}_n$, representa la distancia más corta entre los nodos i y j.
2. La matriz $\boldsymbol{S}_n$ contiene información sobre las rutas.

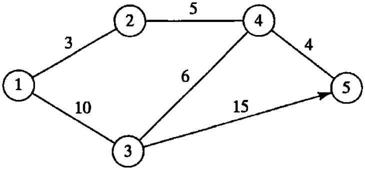
Ejemplo:

Considere la red $G = (N, A)$, con $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, con:



Observación:

Note que sólo podemos viajar desde el nodo 3 al 5 $(3 \to 5)$, pues el arco es "dirigido".



Iteración 0:

Tenemos que,

$$\boldsymbol{C}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 10 & \infty & \infty \\ 3 & 0 & \infty & 5 & \infty \\ 10 & \infty & 0 & 6 & 15 \\ \infty & 5 & 6 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_0 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & - & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & - & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & - & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & - \end{pmatrix}.$$

Iteración 1:

Sea $k = 1$, y considere la 1ra fila y columna como pivote. Es decir, debemos evaluar si:

$$\begin{aligned}
c_{23} &> c_{21} + c_{13}, && (= c_{32}) \\
c_{24} &> c_{21} + c_{14}, && (= c_{24}) \\
c_{25} &> c_{21} + c_{15}, && (= c_{52}) \\
c_{34} &> c_{31} + c_{14}, && (= c_{43}) \\
c_{35} &> c_{31} + c_{15}, && \\
c_{45} &> c_{41} + c_{15}, && (= c_{54}) \\
c_{53} &> c_{51} + c_{13}. &&
\end{aligned}$$

En nuestro caso, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
c_{23} &= \infty > 3 + 10 = c_{21} + c_{13}, \\
c_{24} &= 5 \not> 3 + \infty = c_{21} + c_{14}, \\
c_{25} &= \infty \not> 3 + \infty = c_{21} + c_{15}, \\
c_{34} &= 6 \not> 10 + \infty = c_{31} + c_{14}, \\
c_{35} &= 15 \not> 10 + \infty = c_{31} + c_{15}, \\
c_{45} &= 4 \not> \infty + \infty = c_{41} + c_{15}, \\
c_{53} &= \infty \not> \infty + 10 = c_{51} + c_{13}.
\end{aligned}
$$

Es decir, debemos substituir c_{23} (y también c_{32}) por $c_{21} + c_{13} = 13$, y s_{23} por $k = 1$ (además $s_{32} = 1$).

Al finalizar la iteración 1, obtenemos:

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 10 & \infty & \infty \\ 3 & 0 & \mathbf{13} & 5 & \infty \\ 10 & \mathbf{13} & 0 & 6 & 15 \\ \infty & 5 & 6 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_1 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & - & \mathbf{1} & 2 & 2 \\ 3 & \mathbf{1} & - & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & - & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & - \end{pmatrix}.$$

Iteración 2:

Hacemos $k = 2$, y comparamos:

$$
\begin{aligned}
(c_{31} =) \quad & c_{13} = 10 \not> 3 + 13 = c_{12} + c_{23}, \\
(c_{41} =) \quad & c_{14} = \infty > 3 + 5 = c_{12} + c_{24}, \\
(c_{51} =) \quad & c_{15} = \infty \not> 3 + \infty = c_{12} + c_{25}, \\
(c_{43} =) \quad & c_{34} = 6 \not> 13 + 5 = c_{32} + c_{24}, \\
& c_{35} = 15 \not> 13 + \infty = c_{32} + c_{25}, \\
(c_{54} =) \quad & c_{45} = 4 \not> 5 + \infty = c_{42} + c_{25}, \\
& c_{53} = \infty \not> \infty + 13 = c_{52} + c_{23}.
\end{aligned}
$$

Debemos substituir c_{14} $(\text{y } c_{41})$ por $c_{12} + c_{24}$ y hacer $s_{14} = 2$ $(= s_{41})$, obteniendo:

$$\boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 10 & \mathbf{8} & \infty \\ 3 & 0 & \mathbf{13} & 5 & \infty \\ 10 & \mathbf{13} & 0 & 6 & 15 \\ \mathbf{8} & 5 & 6 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_2 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & \mathbf{2} & 1 \\ 2 & - & \mathbf{1} & 2 & 2 \\ 3 & \mathbf{1} & - & 3 & 3 \\ \mathbf{2} & 4 & 4 & - & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & - \end{pmatrix}.$$

Iteración 3:

Para $k = 3$, tenemos que comparar:

$$
\begin{aligned}
(c_{21} =) \qquad & c_{12} = 3 \not> 10 + 13 = c_{13} + c_{32}, \\
(c_{41} =) \qquad & c_{14} = 8 \not> 10 + 6 = c_{13} + c_{34}, \\
& c_{15} = \infty > 10 + 15 = c_{13} + c_{35}, \\
(c_{42} =) \qquad & c_{24} = 5 \not> 13 + 6 = c_{23} + c_{34}, \\
& c_{25} = \infty > 13 + 15 = c_{23} + c_{35}, \\
(c_{54} =) \qquad & c_{45} = 4 \not> 6 + 15 = c_{43} + c_{35}, \\
& c_{51} = \infty \not> \infty + 10 = c_{53} + c_{31}, \\
& c_{52} = \infty \not> \infty + 13 = c_{53} + c_{32}.
\end{aligned}
$$

Así, substituímos c_{15} por $c_{13} + c_{35}$ y c_{25} por $c_{23} + c_{35}$. Además, hacemos $s_{15} = 3$ y $s_{25} = 3$, luego

$$\boldsymbol{C}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 10 & \mathbf{8} & \mathbf{25} \\ 3 & 0 & \mathbf{13} & 5 & \mathbf{28} \\ 10 & \mathbf{13} & 0 & 6 & 15 \\ \mathbf{8} & 5 & 6 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_3 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 2 & - & \mathbf{1} & 2 & \mathbf{3} \\ 3 & \mathbf{1} & - & 3 & 3 \\ \mathbf{2} & 4 & 4 & - & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & - \end{pmatrix}.$$

Iteración 4:

Sea $k = 4$, luego hacemos las comparaciones:

$$
\begin{aligned}
(c_{21} =) \qquad c_{12} &= 3 \not> 8 + 5 = c_{14} + c_{42}, \\
(c_{31} =) \qquad c_{13} &= 10 \not> 8 + 6 = c_{14} + c_{43}, \\
c_{15} &= 25 > 8 + 4 = c_{14} + c_{45}, \\
(c_{32} =) \qquad c_{23} &= 13 > 5 + 6 = c_{24} + c_{43}, \\
c_{25} &= 28 > 5 + 4 = c_{24} + c_{45}, \\
c_{35} &= 15 > 6 + 4 = c_{34} + c_{45}, \\
c_{51} &= \infty > 4 + 8 = c_{54} + c_{41}, \\
c_{52} &= \infty > 4 + 5 = c_{54} + c_{42}, \\
c_{53} &= \infty > 4 + 6 = c_{54} + c_{43}.
\end{aligned}
$$

Luego, hacemos

$$c_{15} = c_{14} + c_{45} = 12, \qquad c_{23} = c_{24} + c_{43} = 11, \qquad c_{25} = c_{24} + c_{45} = 9,$$
$$c_{32} = c_{34} + c_{42} = 11, \qquad c_{35} = c_{34} + c_{45} = 10, \qquad c_{51} = c_{54} + c_{41} = 12,$$
$$c_{52} = c_{54} + c_{42} = 9, \qquad c_{53} = c_{54} + c_{43} = 10.$$

Además,

$$s_{15} = s_{23} = s_{25} = s_{51} = s_{32} = s_{35} = s_{51} = s_{52} = s_{53} = 4.$$

De este modo,

$$\boldsymbol{C}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 10 & \mathbf{8} & \mathbf{12} \\ 3 & 0 & \mathbf{11} & 5 & \mathbf{9} \\ 10 & \mathbf{11} & 0 & 6 & \mathbf{10} \\ \mathbf{8} & 5 & 6 & 0 & 4 \\ \mathbf{12} & \mathbf{9} & \mathbf{10} & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_4 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ 2 & - & \mathbf{4} & 2 & \mathbf{4} \\ 3 & \mathbf{4} & - & 3 & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & 4 & 4 & - & 4 \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & 5 & - \end{pmatrix}.$$

Iteración 5:

Para $k = 5$, debemos comparar:

$$
\begin{aligned}
(c_{21} =) \qquad & c_{12} = 3 \not> 12 + 9 = c_{15} + c_{52}, \\
(c_{31} =) \qquad & c_{13} = 10 \not> 12 + 10 = c_{15} + c_{53}, \\
(c_{41} =) \qquad & c_{14} = 8 \not> 12 + 4 = c_{15} + c_{54}, \\
(c_{32} =) \qquad & c_{23} = 11 \not> 9 + 10 = c_{25} + c_{53}, \\
(c_{42} =) \qquad & c_{24} = 5 \not> 9 + 4 = c_{25} + c_{54}, \\
(c_{43} =) \qquad & c_{34} = 9 \not> 10 + 4 = c_{35} + c_{54},
\end{aligned}
$$

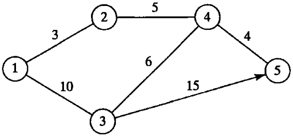
y por tanto no hay mejoras posibles en esta iteración. Como $k = 5$ $(= n)$, el algoritmo se detiene.

Finalmente, obtenemos:

$$\boldsymbol{C}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 10 & \mathbf{8} & \mathbf{12} \\ 3 & 0 & \mathbf{11} & 5 & \mathbf{9} \\ 10 & \mathbf{11} & 0 & 6 & \mathbf{10} \\ \mathbf{8} & 5 & 6 & 0 & 4 \\ \mathbf{12} & \mathbf{9} & \mathbf{10} & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_5 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ 2 & - & \mathbf{4} & 2 & \mathbf{4} \\ 3 & \mathbf{4} & - & 3 & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & 4 & 4 & - & 4 \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & 5 & - \end{pmatrix},$$

y el algoritmo retorna $\boldsymbol{C}_* = \boldsymbol{C}_5$ y $\boldsymbol{S}_* = \boldsymbol{S}_5$ como solución.

Interpretación:



$$
\boldsymbol{C}_* = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 10 & 8 & \mathbf{12} \\ 3 & 0 & 11 & 5 & 9 \\ 10 & 11 & 0 & 6 & 10 \\ 8 & 5 & 6 & 0 & 4 \\ 12 & 9 & 10 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_* = \begin{pmatrix} - & \mathbf{1} & 1 & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ 2 & - & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & - & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & - & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & - \end{pmatrix},
$$

Por ejemplo, la matriz $\boldsymbol{S}_*$ presenta la mejor ruta para ir del nodo 1 al 5 $(1 \to 5)$.[2]
Esto es, la mejor ruta $(1 \to 2 \to 4 \to 5)$ adopta la forma:

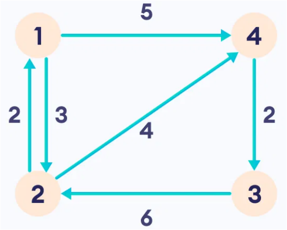
$$
P_* = \{1, 2, 4, 5\}, \qquad \phi(P_*) = 12.
$$

[2] o en general del nodo $i \to j$.

Algoritmo de Floyd

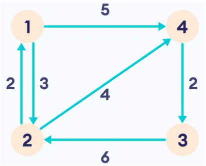
Ejercicio:

Considere la red $G = (N, A)$, con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ dada por:



Aplicar el algoritmo de Floyd.[3]

[3] También conocido como algoritmo de Floyd-Warshall.



Iteración 0:

Aquí $n = 4$, y

$$\boldsymbol{C}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & 5 \\ 2 & 0 & \infty & 4 \\ \infty & 6 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_0 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 1 \\ 2 & - & 2 & 2 \\ 3 & 3 & - & 3 \\ 4 & 4 & 4 & - \end{pmatrix}.$$

Iteración 1:

Considere $k = 1$, luego

$$
\begin{aligned}
c_{22} &= \min(c_{22}, c_{21} + c_{12}) = \min(0, 2 + 3) = 0, \\
c_{23} &= \min(c_{23}, c_{21} + c_{13}) = \min(\infty, 2 + \infty) = \infty, \\
c_{24} &= \min(c_{24}, c_{21} + c_{14}) = \min(4, 2 + 5) = 4, \\
c_{32} &= \min(c_{32}, c_{31} + c_{12}) = \min(6, \infty + 3) = 6, \\
c_{33} &= \min(c_{33}, c_{31} + c_{13}) = \min(0, \infty + \infty) = 0, \\
c_{34} &= \min(c_{34}, c_{31} + c_{14}) = \min(\infty, \infty + 5) = \infty, \\
c_{42} &= \min(c_{42}, c_{41} + c_{12}) = \min(\infty, \infty + 3) = \infty, \\
c_{43} &= \min(c_{43}, c_{41} + c_{13}) = \min(2, \infty + \infty) = 2, \\
c_{44} &= \min(c_{44}, c_{41} + c_{14}) = \min(0, \infty + 5) = 0.
\end{aligned}
$$

Observación:

Note que los elementos diagonales c_{ii} no son alterados (válido para cualquier i).

De este modo,

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & 5 \\ 2 & 0 & \infty & 4 \\ \infty & 6 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_1 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 1 \\ 2 & - & 2 & 2 \\ 3 & 3 & - & 3 \\ 4 & 4 & 4 & - \end{pmatrix}.$$

Iteración 2:

Para $k = 2$, sigue que:

$$\begin{aligned}
c_{13} &= \min(c_{13}, c_{12} + c_{23}) = \min(\infty, 3 + \infty) = \infty, \\
c_{14} &= \min(c_{14}, c_{12} + c_{24}) = \min(5, 3 + 4) = 5, \\
c_{31} &= \min(c_{31}, c_{32} + c_{21}) = \min(\infty, 6 + 2) = 8, \\
c_{34} &= \min(c_{34}, c_{32} + c_{24}) = \min(\infty, 6 + 4) = 10, \\
c_{41} &= \min(c_{41}, c_{42} + c_{21}) = \min(\infty, \infty + 2) = \infty, \\
c_{43} &= \min(c_{43}, c_{42} + c_{23}) = \min(2, \infty + \infty) = 2.
\end{aligned}$$

De este modo,

$$\boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & 5 \\ 2 & 0 & \infty & 4 \\ \mathbf{8} & 1 & 0 & \mathbf{10} \\ \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_2 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 1 \\ 2 & - & 2 & 2 \\ \mathbf{2} & 3 & - & \mathbf{2} \\ 4 & 4 & 4 & - \end{pmatrix}.$$

Iteración 3:

Sea $k = 3$, entonces:

$$
\begin{aligned}
c_{12} &= \min(c_{11}, c_{13} + c_{32}) = \min(3, \infty + 6) = 3,\\
c_{14} &= \min(c_{14}, c_{13} + c_{34}) = \min(5, \infty + 10) = 5,\\
c_{21} &= \min(c_{21}, c_{23} + c_{31}) = \min(2, \infty + 8) = 2,\\
c_{24} &= \min(c_{24}, c_{23} + c_{34}) = \min(4, \infty + 10) = 4,\\
c_{41} &= \min(c_{41}, c_{43} + c_{31}) = \min(\infty, 2 + 8) = 10,\\
c_{42} &= \min(c_{42}, c_{43} + c_{32}) = \min(\infty, 2 + 6) = 8.
\end{aligned}
$$

Lo anterior lleva a:

$$
\boldsymbol{C}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & 5 \\ 2 & 0 & \infty & 4 \\ \mathbf{8} & 1 & 0 & \mathbf{10} \\ \mathbf{10} & \mathbf{8} & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_3 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 1 \\ 2 & - & 2 & 2 \\ \mathbf{2} & 3 & - & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & 4 & - \end{pmatrix}.
$$

Iteración 4:

Tomando $k = 4$, debemos calcular:

$$
\begin{aligned}
c_{12} &= \min(c_{12}, c_{14} + c_{42}) = \min(3, 5 + 8) = 3, \\
c_{13} &= \min(c_{13}, c_{14} + c_{43}) = \min(\infty, 5 + 2) = 7, \\
c_{21} &= \min(c_{21}, c_{24} + c_{41}) = \min(2, 4 + 10) = 2, \\
c_{23} &= \min(c_{23}, c_{24} + c_{43}) = \min(\infty, 4 + 2) = 6, \\
c_{31} &= \min(c_{31}, c_{34} + c_{41}) = \min(8, 10 + 10) = 8, \\
c_{32} &= \min(c_{32}, c_{34} + c_{42}) = \min(6, 10 + 8) = 6.
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$
\boldsymbol{C}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \mathbf{7} & 5 \\ 2 & 0 & \mathbf{6} & 4 \\ \mathbf{8} & 6 & 0 & \mathbf{10} \\ \mathbf{10} & \mathbf{8} & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_4 = \begin{pmatrix} - & 1 & \mathbf{4} & 1 \\ 2 & - & \mathbf{4} & 2 \\ \mathbf{2} & 3 & - & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & 4 & - \end{pmatrix}.
$$

Como $k = n = 4$, detenemos el algoritmo con $\boldsymbol{C}_* = \boldsymbol{C}_4$ y $\boldsymbol{S}_* = \boldsymbol{S}_4$.