ESPERANZA Y COVARIANZA

Considere $x = (x_1, \dots, x_k)^T$ vector k-dimensional con función de densidad f entonces para cualquier función g de x, tenemos que

$$E(g(x)) = \int_{\mathbb{R}^k} g(t) f(t)\, dt$$

(siempre que la integral k-dimensional exista)

Más generalmente, sea $Z = (Z_{ij})$ matriz aleatoria, entonces podemos escribir

$$E(Z) = (E(Z_{ij}))$$

Por otro lado si $A = (a_{ij})$ es matriz constante entonces.

$$E(A) = A.$$

RESULTADO. Sea $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ matrices constantes $r \times c$, $n \times p$ y $r \times p$ respectivamente. Entonces

$$E(AZB + C) = AE(Z)B + C.$$

dem: para el lector.

DEF. (Matriz de Covarianza).
Sean X e Y vectores aleatorios k y p-dimensionales, respectivamente. Se define la matriz de covarianza entre X e Y como la matriz $k \times p$,

$$Cov(X, Y) = (Cov(X_i, Y_j)).$$

con

$$Cov(X_i, Y_j) = E\{(X_i - E(X_i))(Y_j - E(Y_j))\}.$$

Además, es fácil mostrar que

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\{(X - E(X))(Y - E(Y))^T\}.$$

Asimismo

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY^T) - E(X)E^T(Y).$$

Definimos la matriz de dispersión como

$$\mathrm{Cov}(X) = \mathrm{Cov}(X,X).$$

$$= E\{(X - E(X))(X - E(X))^T\}.$$

RESULTADO. Si X e Y son vectores k y p-dimensionales. y $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ Entonces.

$$\mathrm{Cov}(AX, BY) = A\,\mathrm{Cov}(X,Y)\,B^T.$$

En particular

$$\mathrm{Cov}(AX) = \mathrm{Cov}(AX, AX)$$

$$= A\,\mathrm{Cov}(X,X)\,A^T.$$

RESULTADO: toda matriz de dispersión es simétrica y semi def. positiva.

dem: Primera parte, sea $z = x - E(x)$ y considere $y = a^T z$ $(a \in \mathbb{R}^k)$ entonces.

$$a^T Cov(x)\, a = a^T E\{(x - E(x))(x - E(x))^T\}\, a$$
$$= a^T E(z z^T)\, a = E(y^2) \geq 0.$$
$$\Rightarrow \quad Cov(x) \geq 0.$$

Ahora, suponga que $Cov(x) \geq 0$. Luego $\exists\, B \in \mathbb{R}^{p \times r}$ con rango r tal que $Cov(x) = B B^T$. Así, considerando y v.a. con $E(y) = 0$ y $Cov(y) = I$. y haciendo $x = By$ sigue que $E(x) = B\,E(y) = 0$ y

$$Cov(x) = Cov(By) = B\, Cov(y)\, B^T = B B^T.$$

Es decir es matriz de cov.