1. Tenemos que el vector aleatorio (X, Y) tiene densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 120\,x(y-x)(1-y), & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a. Para obtener la densidad marginal de Y, se debe calcular:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^y 120\,x(y-x)(1-y)\,\mathrm{d}x = 120(1-y)\Big[\frac{yx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^y \\ &= 120(1-y)\Big(\frac{y^3}{2} - \frac{y^3}{3}\Big) = 20(1-y)y^3, \qquad 0 \leq y \leq 1. \end{aligned}$$

b. La densidad condicional de $X|Y = y$ es dada por:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{120\,x(y-x)(1-y)}{20(1-y)y^3} = \frac{6x(y-x)}{y^3}, \qquad 0 \leq x \leq y.$$

c. Como:

$$f_{X|Y}(x|y = \tfrac{1}{2}) = \frac{6x(\frac{1}{2} - x)}{(\frac{1}{2})^3} = 48\,x(\tfrac{1}{2} - x), \qquad 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2}.$$

sigue que

$$\mathsf{P}(X > \tfrac{1}{4}|Y = \tfrac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 48\,x(\tfrac{1}{2} - x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

d. Tenemos también que

$$\mathsf{E}(X|Y = \tfrac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} 48\,x^2(\tfrac{1}{2} - x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

2. Note que podemos escribir,

$$\mathsf{P}(X < Y) + \mathsf{P}(X = Y) + \mathsf{P}(X > Y) = 1. \tag{1}$$

Dado que X e Y son independientes y variables aleatorias continuas, entonces $\mathsf{P}(X = Y) = 0$. Además, como X e Y son idénticamente distribuídas,

$$\mathsf{P}(X < Y) = \mathsf{P}(X > Y).$$

De esta manera, desde (1) sigue que $\mathsf{P}(X < Y) = \frac{1}{2}$.

Verificación de Ecuación (1): Para $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ variables aleatorias. Defina los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) < Y(\omega)\}, \\ A_2 &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\}, \\ A_3 &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) > Y(\omega)\}. \end{aligned}$$

En efecto, tenemos

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \quad \forall\, i \neq j, \qquad A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega.$$

Luego, $\mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) + \mathsf{P}(A_3) = \mathsf{P}(\Omega) = 1$, es decir (1) se satisface.