MAT-041: Probabilidad y Estadística **Pauta de Corrección**

Control 2. Septiembre 2, 2023 Francisco Cuevas, Felipe Osorio

---

1. Sea M_i el evento: la pieza producida en la i-ésima máquina ($i = 1, 2, 3, 4$) y A: la pieza es defectuosa. Tenemos

$$\mathsf{P}(M_1) = \frac{5000}{10000} = 0.50, \qquad \mathsf{P}(M_2) = \frac{2500}{10000} = 0.25,$$
$$\mathsf{P}(M_3) = \frac{1500}{10000} = 0.15, \qquad \mathsf{P}(M_4) = \frac{1000}{10000} = 0.10.$$

Además sabemos desde el enunciado que

$$\mathsf{P}(A|M_1) = 0.01, \quad \mathsf{P}(A|M_2) = 0.03, \quad \mathsf{P}(A|M_3) = 0.60, \quad \mathsf{P}(A|M_4) = 0.10.$$

Se pide calcular

$$\mathsf{P}(M_i|A) = \frac{\mathsf{P}(M_i)\,\mathsf{P}(A|M_i)}{\sum_{i=1}^4 \mathsf{P}(M_i)\,\mathsf{P}(A|M_i)}, \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

como $\sum_{i=1}^4 P(M_i)P(A|M_i) = 0.1125$, obtenemos:

$$\mathsf{P}(M_1|A) = \frac{0.50 \cdot 0.01}{0.1125} = 0.0444, \qquad \mathsf{P}(M_2|A) = \frac{0.25 \cdot 0.03}{0.1125} = 0.0667,$$
$$\mathsf{P}(M_3|A) = \frac{0.15 \cdot 0.60}{0.1125} = 0.8000, \qquad \mathsf{P}(M_4|A) = \frac{0.10 \cdot 0.10}{0.1125} = 0.0889.$$

2.a. Se debe verificar las siguientes condiciones:

(a) $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \left\{1 - \tfrac{1}{2}\exp(-\lambda x)\right\} = 1 - \tfrac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 1,$$

para $\lambda > 0$.

(b) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$:

$$\lim_{x\to-\infty} \tfrac{1}{2}\exp(\lambda x) = \tfrac{1}{2} \lim_{x\to-\infty} e^{\lambda x} = 0,$$

siempre que $\lambda > 0$.

(c) $F_X(x)$ es no decreciente: Para esto inspeccionamos la derivada. En efecto, notamos que

$$\frac{\mathrm{d}\,F_X(x)}{\mathrm{d}\,x} = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}\exp(\lambda x), & x < 0, \\ \frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda x), & x > 0. \end{cases}$$

Por lo cual, concluimos que la función es creciente para $x < 0$ y $x > 0$. Para el caso $x = 0$ bastaría con verificar que los límites laterales existen y equivale a $F_X'(0) = \frac{\lambda}{2}$.

2.b. Se desea calcular

$$\mathsf{P}(X \leq 0) = F_X(0) = 1 - \tfrac{1}{2}\exp(0) = \frac{1}{2}.$$

2.c. Como $\lambda = 1$, sigue que

$$\mathsf{P}(X \leq \lambda^{-1}) = F_X(1) = 1 - \tfrac{1}{2}\exp(-1) = 1 - \frac{1}{2e} = 0.8161.$$