* TRANSFORMACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS

Suponga que X tiene densidad $f_X(x)$ y CDF $F_X(x)$, sea $Y = g(X)$ y suponga que g tiene inversa así, por ejemplo para el caso discreto, tenemos

$$f_Y(y) = P(Y=y) = P(g(X)=y)$$
$$= P(\{x : g(x) = y\})$$
$$= P(X \in g^{-1}(y))$$

Note que como X es discreto, su espacio muestral $\mathbb{X}$ es contable, de modo que el espacio muestral para $Y = g(X)$ es $\mathcal{Y} = \{y : y = g(x), x \in \mathbb{X}\}$ así

$$f_Y(y) = P(Y=y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} P(X=x), \quad y \in \mathcal{Y}.$$

y $f_Y(y) = 0$ para $y \notin \mathcal{Y}$. Es decir se debe identificar $g^{-1}(y)$ para cada $y \in \mathcal{Y}$ y usar las probabilidades apropiadas.

Ejemplo: Considere la v.a. X con densidad

$$f_X(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

para $x = 0, 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ y $p \in [0, 1]$. Suponga $Y = g(X)$ donde $g(x) = n - x = y$. Aquí $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, n\}$ y

$$\mathcal{Y} = \{y : y = g(x), x \in \mathcal{X}\}$$
$$= \{0, 1, \dots, n\},$$

de este modo $g^{-1}(y) = n - y = x$.

De este modo

$$f_Y(y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} f_X(x)$$

$$= f_X(n-y) \quad (\text{pues es un único punto})$$

$$= \binom{n}{n-y} p^{n-y} (1-p)^y$$

$$= \binom{n}{y} p^{n-y} (1-p)^y$$

$$= \binom{n}{y} q^y (1-q)^{n-y}.$$

con $q = 1-p$.

(Recuerde que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$
)

Para el caso continuo, podemos escribir la CDF de Y en términos de la CDF de X como

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$$

$$= P(\{x \in \mathcal{X} : g(x) \leq y\})$$

$$= \int_{A_y} f_X(x)\,dx$$

con $A_y = \{x \in \mathcal{X} : g(x) \leq y\}$

Además $f_Y(y) = F'_Y(y)$

OBS: En ocasiones es difícil identificar $\{x \in \mathcal{X} : g(x) \leq y\}$ y llevar a cabo la integración de $f_X(x)$ sobre esta región.

Ejemplo: Sea $f_X(x) = e^{-x}$, $x > 0$. De ahí que $F_X(x) = \int_0^x e^{-t}\,dt = 1 - e^{-x}$. Sea $Y = g(X) = \log X$. Entonces.

$$A_y = \{x : \log(x) \leq y\} = \{x : x \leq e^y\}$$

y

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\log X \leq y)$$
$$= P(X \leq e^y) = F_X(e^y)$$
$$= 1 - \exp(-\exp(y)).$$

De esta manera

$$f_Y(y) = e^y e^{-e^y} \quad , \text{ para } y \in \mathbb{R}.$$

La situación es simple cuando g es función monótona. Sea $Y = g(X)$ y

$$\mathcal{X} = \{x : f(x) \geq 0\}$$

$$\mathcal{Y} = \{y : y = g(x) \text{ para algún } x \in \mathcal{X}\}$$

Para g monótona, es decir

(a) creciente: $u > v \Rightarrow g(u) > g(v)$.

(b) decreciente: $u < v \Rightarrow g(u) > g(v)$.

(Recuerde que si la transformación $x \to g(x)$ es monótona, entonces es 1 a 1 (en $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$).
Además tenemos $g^{-1}(y) = x$ sólo si $y = g(x)$.)

De este modo,

(a) para g creciente, tenemos

$$\{x \in \mathcal{X} : g(x) \leq y\} = \{x \in \mathcal{X} : g^{-1}(g(x)) \leq g^{-1}(y)\}$$

$$= \{x \in \mathcal{X} : x \leq g^{-1}(y)\}$$

mientras que, para g decreciente, sigue que

$$\{x \in \mathcal{X} : g(x) \le y\} = \{x \in \mathcal{X} : g^{-1}(g(x)) \ge g^{-1}(y)\}$$

$$= \{x \in \mathcal{X} : x \ge g^{-1}(y)\}.$$

De este modo, para g creciente

$$F_Y(y) = \int_{\{x \in \mathcal{X} : x \le g^{-1}(y)\}} f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)\,dx = F_X(g^{-1}(y)),$$

por otro lado, para g decreciente

$$F_Y(y) = \int_{g^{-1}(y)}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 - F_X(g^{-1}(y)).$$

EJEMPLO: Suponga que

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso}, \end{cases}$$

es fácil notar que $F_X(x) = x$, para $0 < x < 1$. Ahora, considere $Y = g(X) = -\log X$. Como

$$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx}(-\log x) = -\frac{1}{x} < 0$$

para $0 < x < 1$, es decir g es decreciente. Además, como x fluctúa entre 0 y 1 tenemos que $-\log x$ fluctúa entre 0 y ∞, es decir $\mathcal{Y} = (0, +\infty)$ y $x = g^{-1}(y) = e^{-y}$. De este modo, para $y > 0$.

$$F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y)) = 1 - F_X(e^{-y})$$

$$= 1 - e^{-y}.$$

OBS: Note que solo es necesario verificar que $g(x) = -\log x$ es monotona en el soporte de X (i.e. $(0,1)$).

RESULTADO. Sea X v.a con densidad $f_X(x)$ y sea $Y = g(X)$, donde g es monotona. Sea $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ los espacios muestrales asociados a X e Y, respectivamente. Suponga que $f_X(x)$ es continua en $\mathcal{X}$ y que $g^{-1}(y)$ tiene derivada continua en $\mathcal{Y}$. Entonces la densidad de Y es dada por

$$f_Y(y) = \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| f_X(g^{-1}(y)) \quad , \quad y \in \mathcal{Y}.$$

(dem: Usando la regla de la cadena

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

$$= \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y) & , \text{ si } g \text{ es creciente} \\ -f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y) & , \text{ si } g \text{ es decreciente.} \end{cases} \Bigg)$$

Ejemplo: Sea $X \sim \text{Gamma}(a, b)$ con densidad

$$f_X(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}, \quad x > 0.$$

Suponga que deseamos hallar la distribución de $Y = g(X) = 1/X$. Note que ambos $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ son el intervalo $(0, +\infty)$. De este modo

$$y = g(x) = 1/x \Rightarrow g^{-1}(y) = 1/y = x.$$

y

$$\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{d}{dy} 1/y = -\frac{1}{y^2}.$$

De este modo, obtenemos.

$$f_Y(y) = \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| f_X(g^{-1}(y))$$

$$= \frac{1}{y^2} \frac{b^a}{\Gamma(a)} (1/y)^{a-1} e^{-b/y}$$

$$= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{1}{y}\right)^{a+1} e^{-b/y}$$

que es conocida como la distribución gama inversa.

Ejercicio*: Suponga $X \sim Beta(a, b)$ y

considere $Y \doteq -\log X$

(Note que $\mathcal{X} = \{x : f(x) \geq 0\}$
$= \{x : 0 < x < 1\}$)

de este modo $y = g(x) = -\log x$ es una transformación 1 a 1 de $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y} = \{y : y > 0\}$.

Además

$$x = g^{-1}(y) = e^{-y}. \quad \text{luego}.$$

$$\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = -e^{-y}.$$

De este modo

$$f_Y(y) = \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| f_X(g^{-1}(y)) \, \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}(y).$$

$$f_Y(y) = e^{-y} \frac{1}{B(a,b)} (e^{-y})^{a-1} (1-e^{-y})^{b-1} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} e^{-ay} (1-e^{-y})^{b-1} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y).$$

OBS: Note que si $b=1$ entonces $B(a,b) = 1/a$ y de este modo

$$f_Y(y) = a e^{-ay} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y).$$

RESULTADO: Sea $X \sim F_X(x)$ y defina la v.a. Y como $Y = F_X(X)$. Entonces $Y \sim U(0,1)$.

(OBS: Si F_X es estrictamente creciente. Entonces $F_X^{-1}(y) = x \Leftrightarrow F_X(x) = y$. Si F_X es constante en algún intervalo entonces.

$$F_X^{\leftarrow}(y) = \inf\{x : F_X(x) \geq y\}.$$)

dem: Para $Y = F_X(X)$ tenemos que $(0 < y < 1)$.

$$P(Y \leq y) = P(F_X(X) \leq y)$$

$$= P(F_X^{-1}(F_X(X)) \leq F_X^{-1}(y))$$

$$= P(X \leq F_X^{-1}(y))$$

$$= F_X(F_X^{-1}(y))$$

$$= y$$

Es decir

$$P(Y \leq y) = y \quad , \quad 0 < y < 1$$

$$\left(\Rightarrow f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{d}{dy} y = 1 \right)$$

$$Y \sim U(0,1)$$

Obs: Este resultado permite generar v.a. mediante el computador usando el método de transformación inversa.

- Generar $U \sim U(0,1)$.
- Hacer $x = F^{-1}(u)$.
- Entonces $X \sim F$.

Ej: (Generación de v.a. Exponenciales)

Si $X \sim Exp(1)$ tenemos $F(x) = 1 - e^{-x}$. De este modo resolviendo para x $u = 1 - e^{-x}$ tenemos

$$x = -\log(1-u).$$

Note además que $U \stackrel{d}{=} (1-U)$ (ambas son $U(0,1)$) de este modo podemos hacer

$$x = -\log u.$$

RESULTADO Sea X_1, X_2 v.a. con densidad $f_X(x_1, x_2)$. con $\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) : f_X(x_1, x_2) > 0\}$.

Asuma que

a). $y_1 = g_1(x_1, x_2)$, $y_2 = g_2(x_1, x_2)$ es una transformación 1 a 1 de $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$.

b) Las primeras derivadas parciales de $x_1 = g_1^{-1}(y_1, y_2)$, $x_2 = g_2^{-1}(y_1, y_2)$ son continuas en $\mathcal{Y}$.

c) El Jacobiano de la transformación es no nulo para $(y_1, y_2) \in \mathcal{Y}$.

Entonces la densidad conjunta de $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$ y $Y_2 = g_2(X_1, X_2)$. es dada por

$$f_Y(y) = |J(y \to x)|_+ f_X(g_1^{-1}(y_1, y_2), g_2^{-1}(y_1, y_2)).$$

donde

$$J(y \to x) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

Ej: Sea x_1 y x_2 v.a. indep. $N(0,1)$. Sea $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_1/x_2$. Entonces.

Note que desde $y_2 = x_1/x_2$ ($x_2 \neq 0$ pr. 1)

$\Rightarrow x_2 y_2 = x_1$ así substituyendo en $y_1 = x_1 + x_2$ tenemos.

$$y_1 = x_2 y_2 + x_2 = x_2(y_2+1)$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{y_1}{y_2+1}$$

luego desde $x_1 = y_1 - x_2 = y_1 - \dfrac{y_1}{y_2+1}$

$$= y_1\left(\frac{y_2+1}{y_2+1}\right) - y_1\left(\frac{1}{y_2+1}\right) = \frac{1}{y_2+1}\left(y_1 y_2 + y_1 - y_1\right)$$

Ah'

$$x_1 = g_1^{-1}(y_1, y_2) = \frac{y_1 y_2}{y_2+1}$$

$$x_2 = g_2^{-1}(y_1, y_2) = \frac{y_1}{y_2+1}$$

$$J(y \to x) = \begin{vmatrix} \frac{y_2}{y_2+1} & \frac{y_1}{(y_2+1)^2} \\ \frac{1}{y_2+1} & -\frac{y_1}{(y_2+1)^2} \end{vmatrix}$$

$$= -\left(\frac{y_2}{y_2+1}\right)\frac{y_1}{(y_2+1)^2} - \left(\frac{1}{y_2+1}\right)\frac{y_1}{(y_2+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{(y_2+1)^3}\left(y_2 y_1 + y_1\right) = -\frac{y_1(y_2+1)}{(y_2+1)^3}$$

$$= -\frac{y_1}{(y_2+1)^2}$$

Como

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right\}$$

De este modo

$$f_Y(y_1, y_2) = \frac{|y_1|}{(y_2+1)^2} \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2 y_2^2}{(y_2+1)^2} + \frac{y_1^2}{(y_2+1)^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{|y_1|}{(y_2+1)^2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{y_1^2 (y_2^2+1)}{(y_2+1)^2}\right\}$$

TAREA: OBTENER LA MARGINAL DE Y_2.