MAT-041: Probabilidad y Estadística **Pauta de Corrección**
Certamen 2. Noviembre 29, 2023 Felipe Osorio

---

1. Como $X \sim \mathsf{Exp}(1)$, tenemos que

$$F_X(x) = \int_0^x e^{-u}\,\mathrm{d}u = e^{-u}\Big|_x^0 = 1 - e^{-x},$$

y $\mathcal{X} = (0, +\infty)$.

a) De este modo, para $Y = 1/X$ debemos calcular

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y \leq y) = \mathsf{P}(1/X \leq y) = \mathsf{P}(X \geq 1/y) = 1 - \mathsf{P}(X < 1/y) \\ &= 1 - (1 - e^{-1/y}) = e^{-1/y}. \end{aligned}$$

Cuando $x \to 0$ tenemos $y \to +\infty$, mientras que para $x \to +\infty$ sigue que $y \to 0$, por tanto $\mathcal{Y} = (0, +\infty)$, y

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\, e^{-1/y} = \frac{1}{y^2} e^{-1/y},$$

para $y \in (0, +\infty)$.

b) Considerando $Z = X/(1 + X)$, tenemos

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathsf{P}(Z \leq z) = \mathsf{P}\left(\frac{X}{1+X} \leq z\right) = \mathsf{P}(X \leq z + Xz) = \mathsf{P}(X(1-z) \leq z) \\ &= \mathsf{P}\left(X \leq \frac{z}{1-z}\right) = 1 - e^{-z/(1-z)}. \end{aligned}$$

Ahora, para $x \to 0$ tenemos $z \to 0$, mientras que si $x \to +\infty \Rightarrow z \to 1$. Es decir, $\mathcal{Z} = [0, 1)$. De ahí que

$$\begin{aligned} f_Z(z) = F_Z'(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(1 - e^{-z/(1-z)}) = e^{-z/(1-z)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{z}{(1-z)} \\ &= e^{-z/(1-z)} \frac{1}{(1-z)^2}\left\{1 - z - z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(1-z)\right\} = e^{-z/(1-z)} \frac{1}{(1-z)^2}(1 - z + z) \\ &= e^{-z/(1-z)} \frac{1}{(1-z)^2}, \qquad z \in [0, 1). \end{aligned}$$

2. El estimador para θ vía el método de los momentos debe ser obtenido mediante resolver la ecuación:

$$\mathsf{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i,$$

Para obtener $\mathsf{E}(X)$, Note que

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x/s}\,\mathrm{d}x = s^a \Gamma(a).$$

De este modo,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X) &= \int_0^\infty x f(x;\theta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\theta(\theta+1)}\int_0^\infty x(x+1)e^{-x/\theta}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\theta(\theta+1)}\Big[\int_0^\infty x^2 e^{-x/\theta}\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty x e^{-x/\theta}\,\mathrm{d}x\Big] \\
&= \frac{1}{\theta(\theta+1)}[\theta^3\Gamma(3) + \theta^2\Gamma(2)] = \frac{\theta(2\theta+1)}{\theta+1}.
\end{aligned}$$

Es decir, el estimador de momentos, $\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}}$ corresponde a una solución de la ecuación:

$$\frac{\theta(2\theta+1)}{\theta+1} = \overline{x},$$

o equivalentemente,

$$2\theta^2 - (\overline{x}-1)\theta - \overline{x} = 0.$$

3. Sea $\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{X}^\top, \boldsymbol{Y}^\top)^\top$, con $\boldsymbol{X} = (X_1,\dots,X_n)^\top$ y $\boldsymbol{Y} = (Y_1,\dots,Y_n)^\top$. De este modo, la función de verosimilitud es dada por

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{z}) &= \prod_{i=1}^n (2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\Big\}\prod_{j=1}^n (2\pi\lambda\sigma^2)^{-1/2}\exp\Big\{-\frac{1}{2\lambda\sigma^2}(y_j-\mu)^2\Big\} \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2\Big\}(2\pi\lambda\sigma^2)^{-n/2}\exp\Big\{-\frac{1}{2\lambda\sigma^2}\sum_{j=1}^n (y_j-\mu)^2\Big\},
\end{aligned}$$

esto lleva a la función de log-verosimilitud

$$\ell(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{z}) = -n\log\sigma^2 - \frac{n}{2}\log\lambda - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 - \frac{1}{2\lambda\sigma^2}\sum_{j=1}^n (y_j-\mu)^2 + k,$$

donde $\boldsymbol{\theta} = (\sigma^2,\lambda)^\top$ y k siendo una constante. Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{z})}{\partial\sigma^2} &= -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 + \frac{1}{2\lambda\sigma^4}\sum_{j=1}^n (y_j-\mu)^2, \\
\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{z})}{\partial\lambda} &= -\frac{n}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2\sigma^2}\sum_{j=1}^n (y_j-\mu)^2.
\end{aligned}$$

Esto lleva a las ecuaciones de estimación,

$$2n\sigma^2 - \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 - \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^n (y_j-\mu)^2 = 0, \tag{1}$$

$$n\lambda\sigma^2 - \sum_{j=1}^n (y_j-\mu)^2 = 0. \tag{2}$$

Así, desde (2), tenemos

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{n\widehat{\sigma}^2}\sum_{j=1}^n (y_j-\mu)^2. \tag{3}$$

Substituyendo en (1), sigue que

$$2n\widehat{\sigma}^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 - n\widehat{\sigma}^2 = 0,$$

es decir,

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2.$$

Finalmente, reemplazando este estimador en (3), obtenemos:

$$\widehat{\lambda} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(y_j - \mu)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}.$$