VARIABLE ALEATORIA

DEF: Una variable aleatoria es una función desde un espacio muestral Ω en los números reales.

DEF: Una variable aleatoria X en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ es una función real definida en el espacio Ω tal que

$$(X \leq x) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}.$$

es un evento aleatorio para todo $x \in \mathbb{R}$

Es decir,

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

es variable aleatoria si $(X \leq x) \in \mathcal{B}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

OBS: $P(X \in A) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$

y en particular

$$P(X = x) = P(\{\omega_j \in \Omega : X(\omega_j) = x\})$$

con $\Omega = \{\omega_1, .., \omega_n\}$.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

DEF: La función de distribución acumulada o cdf de una variable aleatoria X, denotada por $F_X(x)$, es definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

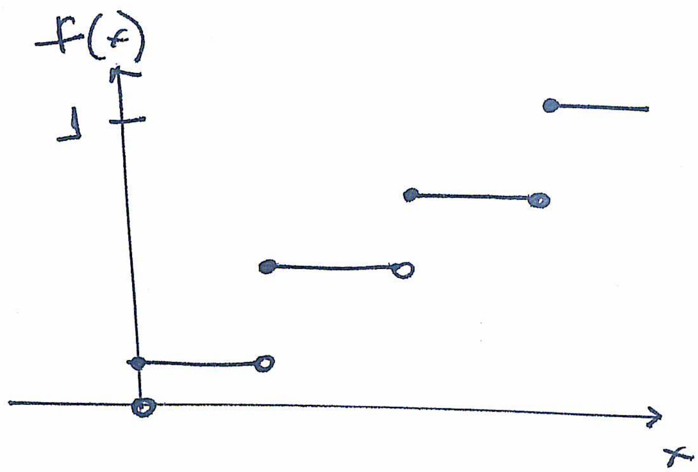
PROPIEDADES: La función $F(x)$ es una cdf sólo si se satisfacen las condiciones

(a) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

(b) $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, i.e. $f(x)$ es función no decreciente

(c) $f(x)$ es continua a la derecha, esto es para todo x_0,

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$



Ej: Suponga que se lanza una moneda hasta que aparece "cara".

Sea p = prob. que aparezca "cara" en un lanzamiento de la moneda.

Defina la variable aleatoria X: número de lanzamientos hasta obtener una cara.

Entonces para $x = 1, 2, \ldots,$

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1}\, p.$$

dado que obtenemos $x-1$ "sellos" antes que aparezca la 1ª "cara". (obs: ensayos indep).

Así

$$P(X \leq x) = \sum_{i=1}^{x} P(X = i)$$

$$= \sum_{i=1}^{x} (1-p)^{i-1}\, p$$

(recuerde que la suma geométrica

$$\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \frac{1-t^n}{1-t}, \quad t \neq 1.)$$

de este modo

$$F(x) = P(X \leq x) = p \sum_{i=1}^{x} (1-p)^{i-1}$$

$$= p \, \frac{1-(1-p)^x}{1-(1-p)}$$

$$= 1-(1-p)^x \, , \quad x = 1, 2, \ldots$$

Es fácil mostrar que $F(x)$ para $p \in (0,1)$ satisface las condiciones.

(a) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0.$

pues $F(x) = 0$ para $x < 0$. y

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} 1-(1-p)^x = 1.$$

(b) para mostrar esta prop. basta verificar que la suma en $F(x)$ contiene más términos positivos conforme x aumenta.

para mostrar (c) basta notar que para cualquier x, $f_x(x+\epsilon) = f_x(x)$ si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño. Así

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} f_x(x+\epsilon) = f_x(x)$$

es continua por la derecha.

OBS: $f(x)$ es la cdf de la distribución geométrica.

Ej: Considere la función

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

satisface las condiciones anteriores. pues.

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

Note que, diferenciando $f(x)$ obtenemos

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0.$$

es decir $f(x)$ es creciente. Además $f(x)$ es continua. Y se conoce como distribución Logística.

OBS: Una variable X es continua si $F(x)$ es continua . X es discreta si $F(x)$ es una función escalón de x.

~~DEF~~: Las variables aleatorias X e Y son idénticamente distribuidas si para todo $A \in \mathcal{B}$.

$$P(X \in A) = P(Y \in A)$$

en cuyo caso notamos $X \stackrel{d}{=} Y$.

RESULTADO Las dos siguientes condiciones son equivalentes.

(a) Las v.a X e Y son idnt. distr.

(b) $F_X(x) = F_Y(x) \quad \forall x$.

(sólo (a) $\Rightarrow$ (b). Como $X \overset{d}{=} Y$ tenemos que para $A \in \mathcal{B}$.

$$P(X \in A) = P(Y \in A).$$

y en particular para para $(-\infty, x] \in \mathcal{B}$.
es decir

$$F_X(x) = P(X \in (-\infty, x])$$

$$= P(Y \in (-\infty, x]) = F_Y(x). \quad).$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD Y CUANTÍA.

~~DEF~~ (a) Una variable aleatoria es discreta si toma un número finito o numerable de valores, es decir, existe $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ tal que $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \ldots\}$ $\forall \omega \in \Omega$.

La función

$$f_X(x) = P(X = x) \quad \forall x.$$

es llamada función de probabilidad o cuantía de X.

(b) Una v.a. X es dicha continua si existe una función $f(x) \geq 0$ tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad , \forall x \in \mathbb{R}.$$

en este caso decimos que $f(x)$ es función de densidad.

OBS: (a) Si X es discreta, entonces.

$$(X \leq x) = \bigcup_{i : x_i \leq x} (X = x_i)$$

luego

$$F_X(x) = \sum_{i : x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{i : x_i \leq x} p(x_i)$$

(b) Si X es continua, entonces $F_X(x)$ es continua (X tiene densidad solo si F es absolutamente continua: En este caso $f(x) = F'(x)$ en casi toda parte).

Una función $f(x) \geq 0$ es densidad de una v.a. X solo si

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

pues $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Ej: Considere la distr. Geométrica

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1} p & , x = 1, 2, \ldots \\ 0 & , \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, para enteros positivos $a \leq b$, tenemos

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{k=a}^{b} f_X(k)$$

$$= \sum_{k=a}^{b} (1-p)^{k-1} p$$

y como un caso especial

$$P(X \leq b) = \sum_{k=1}^{b} (1-p)^{k-1} p .$$

$$= \sum_{k=1}^{b} f_X(k) = F_X(b)$$

OBS: Usualmente anotamos $X \sim F_X(x)$ o bien $X \sim f_X(x)$ para indicar que X tiene distribución F_X (o f_X). Si X e Y tienen la misma distribución escribimos $X \sim Y$.

Para el caso continuo, tenemos que $P(X=x)=0$ (¿por qué?), de este modo

$$P(a<X\leq b)=P(a\leq X\leq b)=P(a\leq X<b)$$
$$=P(a<X<b).$$

Además es fácil notar que

$$P(a<X<b)=F_X(b)-F_X(a)$$
$$=\int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,dx-\int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx$$
$$=\int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Tarea: $P(X>a)=1-F_X(a)$.

OBS: Suponga que $h(x)$ es positiva sobre el conjunto A. (soporte de h) y además

$$\int_{\{x\in A\}} h(x)\,dx = K < \infty .$$

para $K>0$ constante, entonces

$$f_X(x) = \frac{1}{K} h(x)$$

es función de densidad de la v.a. X definida sobre A.

Ej: Considere la densidad

$$f_X(x) = 1 \cdot I_{[0,1]}(x)$$

y sea

$$Y = \min(X, 1/2)$$

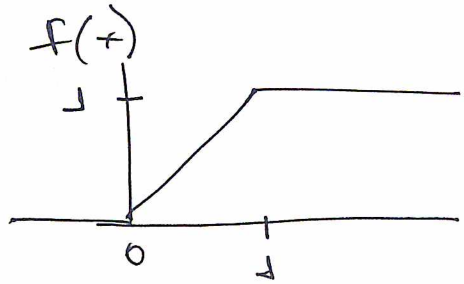
(Y es v.a definida por

$$Y(\omega) = \min(X(\omega), 1/2), \quad \omega \in \Omega)$$

esta v.a. es de tipo mixto.

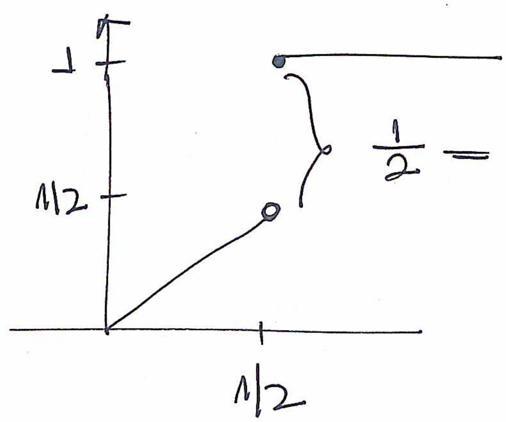
Note que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$



(es función continua).

mientras que



$\frac{1}{2} = P(Y = \frac{1}{2})$

VALOR ESPERADO.

~~DEF~~: El valor esperado o media de una v.a. $g(X)$, denotada por

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx$$

ó

$$E\{g(X)\} = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) f_X(x)$$

$$= \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) P(X=x).$$

Siempre [illegible] serie exista

(OBS: Si $E|g(x)| = \infty$, decimos que $E\{g(x)\}$ no existe)

Ej: Suponga que x tiene densidad

$$f_x(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}, \quad 0 < x < \infty, \quad \lambda > 0.$$

Así

$$E(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} x e^{-x/\lambda} dx$$

$$= -x e^{-x/\lambda} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x/\lambda} dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x/\lambda} dx = \lambda.$$

Ej: Si X tiene densidad

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad \lambda > 0$$

$$x = 0, 1, 2, \ldots$$

Entonces

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x\lambda^x}{x(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda \lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \quad (j = x-1)$$

$$= \lambda.$$

RESULTADO. Sea X una v.a. y a, b y c constantes. Entonces para funciones cualquiera $g_1(X)$ y $g_2(X)$ cuya esperanza existe

(a) $E(ag_1(X) + bg_2(X) + c)$

$$= aE(g_1(X)) + bE(g_2(X)) + c$$

(b) Si $g_1(X) \geq 0 \ \forall x$, entonces $E(g_1(X)) \geq 0$

(c) Si $g_1(X) \geq g_2(X) \ \forall x$, entonces

$$E(g_1(X)) \geq E(g_2(X))$$

(d) Si $a \leq g_1(X) \leq b \ \forall x$, entonces

$$a \leq E(g_1(X)) \leq b.$$

OBS: Note que

$$E(X-b)^2 = E(X - E(X) + E(X) - b)^2$$

$$= E(X - E(X))^2 + (E(X) - b)^2$$

$$+ 2E\{(X - E(X))(E(X) - b)\}.$$

además

$$E\{(X - E(X))(E(X) - b)\}$$

$$= (E(X) - b)E(X - E(X)) = 0.$$

así

$$\min_{b} E(X-b)^2 = E(X - E(X))$$

<u>OBS:</u> Note que no es necesario obtener la densidad de $Y = g(X)$ para calcular $E(g(X))$. como

$$E(g(X)) = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy.$$

Ej: Sea X con densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y sea $g(x) = -\log x$ entonces.

$$E(g(X)) = E(-\log X) = \int_0^1 -\log x \, dx$$

$$= x - x\log x \Big|_0^1 = 1.$$

Sabemos que

$$F_Y(y) = 1 - e^{-y}, \quad \text{así} \quad \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_Y(y)$$

$$= \frac{d}{dy}(1 - e^{-y})$$

$$= e^{-y}, \quad 0 < y < \infty.$$

luego

$$E(Y) = 1. \quad (Y \sim \exp(1)).$$

Def. Para cada entero k el k-ésimo momento de X, denotado por μ'_k es

$$\mu'_k = E(X^k)$$

el k-ésimo momento central de X es

$$\mu_k = E(X-\mu)^k$$

donde $\mu = \mu'_1 = E(X)$.

Def: La varianza de una v.a X es su 2° momento central, i.e $Var(X) = E(X - E(X))^2$.

PROP: Si X es v.a. con varianza finita entonces para constantes a y b.

$$\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$$

dem:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(aX+b) &= E\big((aX+b)-E(aX+b)\big)^2\\ &= E\big(aX - aE(X)\big)^2\\ &= a^2 E\big(X-E(X)\big)^2\\ &= a^2\,\mathrm{Var}(X).\end{aligned}$$

OBS: Usualmente, es conveniente usar

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X).$$

En efecto,

$$Var(X) = E(X - E(X))^2 =$$

$$= E(X^2 - 2XE(X) + E^2(X))$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X).$$

~~DEF~~: Sea X una v.a. con ~~cdf~~ $f_X(x)$ la función generadora de momentos (mgf) de X, denotada por $M_X(t)$ es.

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

siempre que la integral exista para t en alguna vecindad del 0. (es decir $\exists\, h > 0$ tal que $\forall\ -h < t < h$, $E(e^{tX})$ existe).

Más explícitamente la mgf de X puede escribirse como

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx$$

o bien

$$M_X(t) = \sum_{x \in \mathcal{X}} e^{tx} P(X = x).$$

RESULTADO. Si X tiene $M_X(t)$ entonces:

$$E(X^n) = M_X^{(n)}(0)$$

$$= \frac{d^n}{dt^n} M_X(t)\Big|_{t=0}.$$

Es decir el n-ésimo momento es igual a la n-ésima derivada de $M_X(t)$ evaluada en $t=0$.

dem: Suponga que podemos realizar el intercambio de integrales con derivadas. Luego,

$$\frac{d}{dt} M_X(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dt} e^{tx} \right) f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x e^{tx} f_X(x)\, dx$$

$$= E\left(x e^{tx} \right).$$

De este modo

$$\frac{d}{dt} M_X(t) \Big|_{t=0} = E\left(x e^{tx} \right) \Big|_{t=0}$$

$$= E(X).$$

(OBS: Note que para

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)\, b^a} x^{a-1} e^{-x/b}.$$

tenemos que

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = 1$$

así

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x/b} = \Gamma(a)\, b^a \quad)$$

luego

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x/\left(\frac{b}{1-bt}\right)}\,dx = \Gamma(a)\left(\frac{b}{1-bt}\right)^a$$

así

$$u_x(t) = \frac{1}{\Gamma(a)\, b^a} \cdot \Gamma(a)\left(\frac{b}{1-bt}\right)^a$$

$$= \left(\frac{1}{1-bt}\right)^a \quad \text{si} \quad t < \frac{1}{b}.$$

Ahora

$$E(X) = \frac{d}{dt} M_X(t) = \left.\frac{ab}{(1-bt)^{a+1}}\right|_{t=0}$$

$$= ab$$

Ej: Considere X con densidad.

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

Así

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} e^{tx} p^x (1-p)^{n-x}.$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (e^t p)^x (1-p)^{n-x}$$

(usando la formula del binomio.

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^x r^{n-x} = (a+r)^n$$)

Procediendo de manera análoga tenemos que

$$\frac{d^n}{dt^n} M_X(t)\Big|_{t=0} = E(X^n e^{tX})\Big|_{t=0} = E(X^n).$$

Ej: Considere la densidad.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)\, b^a} x^{a-1} e^{-x/b}, \quad x>0, \; a>0, \; b>0$$

donde $\Gamma(a)$ denota la función Gama.

De este modo

$$M_X(t) = \frac{1}{\Gamma(a)\, b^a} \int_0^\infty e^{tx} x^{a-1} e^{-x/b}\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)\, b^a} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-\left(\frac{1}{b}-t\right)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)\, b^a} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x/\left(\frac{b}{1-bt}\right)}\, dx.$$

Tenemos

$$M_X(t) = (pe^t + (1-p))^n$$

OBS: La utilidad de la mgf proviene del hecho que permite caracterizar una distr.

RESULTADO: Sea $F_X(x)$ y $F_Y(y)$ dos cdf tales que todos los momentos existen.

(a) Si X e Y tienen soporte acotado entonces $F_X(u) = F_Y(u)$ $\forall u$ sólo si $E(X^r) = E(Y^r)$, $\forall r = 0, 1, 2, \ldots$

(b) Si la mgf existe y $M_X(t) = M_Y(t)$ para todo $|t| < h$, $h > 0$. Entonces $F_X(u) = F_Y(u)$ $\forall u$ $(X \overset{d}{=} Y)$.

RESULTADO Para constantes a y b, la mgf de la v.a. $aX+b$ es dada por

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at).$$

dem: Por definición

$$M_{aX+b}(t) = E\left(e^{(aX+b)t}\right)$$

$$= E\left(e^{bt} e^{aXt}\right)$$

$$= e^{bt} E\left(e^{X(at)}\right)$$

$$= e^{bt} M_X(at).$$