MAT-041: Probabilidad y Estadística **Pauta de Corrección**
Certamen 1. Septiembre 25, 2023 Felipe Osorio

---

1. Desde el enunciado del problema se tiene que:

$$\mathsf{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathsf{P}(B) = \frac{1}{3}, \quad \mathsf{P}(C) = \frac{1}{6}, \quad \mathsf{P}(Z|A) = \frac{1}{10}, \quad \mathsf{P}(Z|B) = \frac{1}{15}, \quad \mathsf{P}(Z|C) = \frac{1}{12}.$$

a. Por el Teorema de probabilidad total, sigue que:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(Z) &= \mathsf{P}(Z|A)\,\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(Z|B)\,\mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(Z|C)\,\mathsf{P}(C) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{15} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12} = \frac{31}{360} = 0.0861.\end{aligned}$$

b. Por el Teorema de Bayes, obtenemos:

$$\mathsf{P}(A|Z) = \frac{\mathsf{P}(Z|A)\,\mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(Z)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{31}{360}} = \frac{18}{31} = 0.5806.$$

c. Sea Z^c el evento que indica que la persona está sana. De este modo podemos calcular:

$$\mathsf{P}(Z^c) = 1 - \mathsf{P}(Z) = 1 - \frac{31}{360} = \frac{329}{360} = 0.9139,$$

y, análogamente

$$\mathsf{P}(Z^c|A) = 1 - \mathsf{P}(Z|A) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = 0.9000.$$

Por tanto la probabilidad deseada es:

$$\mathsf{P}(A|Z^c) = \frac{\mathsf{P}(Z^c|A)\,\mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(Z^c)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10}}{\frac{329}{360}} = \frac{162}{329} = 0.4924.$$

2.a. Tenemos que $f(x) = 0$, para $x < 0$ y $x > 3$, mientras que para $0 \le x \le 1$,

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^2}{5} = \frac{2x}{5},$$

y para $1 < x \le 3$, sigue que

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{(-x^2 + 6x - 4)}{5} = \frac{(-2x + 6)}{5}.$$

De este modo,

$$f(x) = \begin{cases} 2x/5, & 0 \le x \le 1, \\ (-2x+6)/5, & 1 < x \le 3, \\ 0, & \textsf{en otro caso.} \end{cases}$$

2.b. Se desea calcular

$$\mathsf{P}(X \leq 2) = F(2) = \frac{-x^2+6x-4}{5}\Big|_{x=2} = \frac{4}{5} = 0.80.$$

Además

$$\mathsf{P}(1 < X \leq 2) = F(2) - F(1) = \frac{4}{5} - \frac{x^2}{5}\Big|_{x=1} = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5} = 0.60.$$

Finalmente,

$$\mathsf{P}(X > \tfrac{1}{2}) = 1 - \mathsf{P}(X \leq \tfrac{1}{2}) = 1 - F(\tfrac{1}{2}) = 1 - \frac{x^2}{5}\Big|_{x=1/2} = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20} = 0.95.$$

2.c. Se desea calcular:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X) &= \int_0^3 x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2x^2}{5}\,\mathrm{d}x + \int_1^3 \frac{x(-2x+6)}{5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{5}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int_1^3 (-2x^2+6x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{5}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{1}{5}\Big(\frac{2x^3}{3} + 3x^2\Big)\Big|_1^3 = \frac{2}{5}\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\Big(9 - \frac{7}{3}\Big) \\
&= \frac{22}{15} = 1.4667.
\end{aligned}$$

3. Debemos tener que,

$$\sum_{x=1}^{\infty} p_X(x) = 1.$$

De este modo,

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{\infty} k\Big(\frac{1}{2}\Big)^x &= k\sum_{x=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}\Big)^x = k\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\Big) = \frac{k}{2}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\Big) \\
&= \frac{k}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = k,
\end{aligned}$$

esto lleva a notar que $k = 1$.

4. Note que,

$$\mathsf{E}(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x\,p_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x\frac{6}{\pi^2 x^2} = \frac{6}{\pi^2}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x} \longrightarrow \infty,$$

pues la serie armónica $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$, diverge. Es decir, $\mathsf{E}(X)$ no existe.