FAMILIA DE DISTRIBUCIONES ESPECIALES

1. DISTR. DISCRETAS

DEF. Distr. Uniforme discreta. Considere X con densidad

$$f(x;N) = \frac{1}{N}, \quad x = 1, 2, \ldots, N.$$

donde $N \in \mathbb{N}$. En cuyo caso escribimos $X \sim U\{1, \ldots, N\}$.

RESULTADO. Si $X \sim U\{1, \ldots, N\}$. Entonces

$$E(X) = \frac{N+1}{2}, \quad Var(X) = \frac{N^2-1}{2}$$

En efecto,

$$E(X) = \sum_{k=1}^{N} k \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} k = \frac{1}{N} \frac{N(N+1)}{2}$$

Mientras que

$$\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{k=1}^{N} k^2 \frac{1}{N} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{N}\,\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2$$

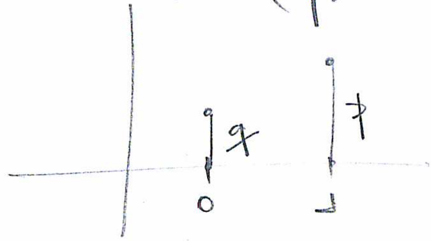
$$= \frac{N+1}{2}\left(\frac{2N+1}{3} - \frac{N+1}{2}\right)$$

$$= \frac{(N+1)(N-1)}{12} = \frac{N^2-1}{12}$$

~~DEF~~ DISTR BERNOULLI Una v.a. X dice tener densidad Bernoulli si su pdf es dada por

$$f(x;p) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1,$$

y $p \in [0,1]$ $(q = 1-p)$ en cuyo caso escribimos $X \sim Ber(p)$.



RESULTADO. Si $X \sim Ber(p)$ entonces.

$$E(X) = p, \quad Var(X) = pq, \quad \varphi_X(t) = pe^t + q.$$

dem: Tenemos.

$$E(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$
$$= 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = pq.$$

$$\varphi_X(t) = E(e^{tX}) = e^{t \cdot 0} \cdot q + e^{t \cdot 1} p.$$
$$= q + e^t p.$$

DEF. Una v.a. X es definida tener una distr. binomial si X es dada por

$$f(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad , \; x = 0, 1, .., n.$$

para $p \in (0,1)$ y escribimos $X \sim Bin(n, p)$

RESULTADO. Si $X \sim Bin(n, p)$. Entonces.

$E(X) = np$, $var(X) = npq$ y

$\varphi_X(t) = (q + pe^t)^n$

dem:

$$\varphi_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}.$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x q^{n-x}.$$

$$= (pe^t + q)^n.$$

Ahora

$$\varphi_X'(t) = n(pe^t + q)^{n-1} \frac{d}{dt}(pe^t + q)$$

$$= npe^t (pe^t + q)^{n-1}$$

Así

$$\varphi_X'(0) = npe^0 (pe^0 + q)^{n-1} = np.$$

Asimismo.

$$\varphi''_X(t) = n(n-1)(pe^t)^2(pe^t+q)^{n-2} + npe^t(pe^t+q)^{n-1}$$

luego.

$$\operatorname{var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \varphi''_X(0) - \{\varphi'_X(0)\}^2$$

$$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p).$$

DEF Se dice que una v.a X tiene distribución Poisson si la densidad de X es dada por

$$f(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

y $\lambda > 0$. En cuyo caso anotamos $X \sim Poi(\lambda)$.

RESULTADO Si $X \sim Poi(\lambda)$ entonces.

$$E(X) = \lambda, \quad \operatorname{var}(X) = \lambda, \quad \varphi_X(t) = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$$

En efecto,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx} e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} (\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}.$$

De ahí que

$$M_X'(t) = \lambda e^t e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}.$$

$$M_X''(t) = \lambda e^{-\lambda} e^t e^{\lambda e^t} (\lambda e^t + 1).$$

y por tanto.

$$M_X'(0) = \lambda e^0 e^{-\lambda} e^{\lambda e^0} = \lambda.$$

$$M_X''(0) = \lambda e^{-\lambda} e^0 e^{\lambda e^0} (\lambda e^0 + 1) = \lambda(\lambda + 1).$$

De este modo

$$E(X) = M_X'(0) = \lambda.$$

$$\operatorname{var}(X) = M_X''(0) - \{M'(0)\}^2 = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda.$$

DISTRIBUCIONES CONTINUAS.

~~DEF~~. Si la función de densidad de una v.a. X es dada por

$$f(x;a,b) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{[a,b]}(x).$$

con $-\infty < a < b < \infty$. Entonces escribimos $X \sim U(a,b)$.

~~RESULTADO~~. Si $X \sim U(a,b)$. Entonces.

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}.$$

dem:

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b.$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}$$

$$= \frac{1}{12}\left(4(b^2 + ab + a^2) - 3(a^2 + 2ab + b^2)\right)$$

$$= \frac{1}{12}(a^2 - 2ab + b^2) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

J

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a} dx$$

$$= \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$$

DEF. Una v. a. X es definida ser normalmente distribuida si su función de densidad es dada por

$$f_X(x;\mu,\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}.$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$. En cuyo caso anotamos $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

OBS: Cuando $Z \sim N(0,1)$. es usual considerar la notación

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(u)\,du.$$

Para notar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x;\mu,\sigma^2)\,dx = 1.$$

Podemos considerar

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dx.$$

y hacer la substitución $y = (x-\mu)/\sigma$. de este modo

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2/2)\, dy.$$

Ahora, mostrar que $A = 1$ es equivalente a mostrar que $A^2 = 1$ (recuerde que $f_X(x; \mu, \sigma^2) \geq 0$). Así

$$A^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2/2)\, dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2/2)\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y^2+z^2)\right\} dy\, dz.$$

Considere transformar en coordenadas polares como

$$y = r \operatorname{sen} \theta \quad y \quad z = r \cos\theta.$$

$(y^2 + z^2 = r^2)$

Así

$$A^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} r\, e^{-r^2/2}\, d\theta\, dr.$$

$$= \int_0^\infty r\, e^{-r^2/2}\, dr = 1.$$

RESULTADO. Si. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Entonces

$$E(X) = \mu, \quad var(X) = \sigma^2, \quad M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$$

dem: Considere $Z \sim N(0,1)$.

$$M_Z(t) = E(e^{tZ}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \cdot e^{-z^2/2}\, dz.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2tz)}\, dz.$$

completando cuadrados en el paréntesis.

$$z^2 - 2tz = z^2 - 2tz + t^2 - t^2$$

$$= (z-t)^2 - t^2$$

tenemos.

$$M_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(z-t)^2 - t^2\right]\right\} dz.$$

$$= e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2} dz$$

Note que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z-t)^2\right\} dz = 1.$$

pues corresponde a la integral de una v.a. $Z \sim N(t, 1)$. Así

$$M_Z(t) = e^{t^2/2}$$

Además, como $X = \mu + \sigma Z$ sigue que

$$M_X(t) = M_{\mu+\sigma Z}(t) = e^{t\mu} M_Z(\sigma t)$$

$$= e^{t\mu} e^{\sigma^2 t^2/2} = \exp\{t\mu + \frac{1}{2} t^2 \sigma^2\}.$$

Ahora

$$M_X'(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2} t^2 \sigma^2} \cdot (\mu + t\sigma^2)$$

así

$$M_X'(t)\Big|_{t=0} = e^0 (\mu + 0 \cdot \sigma^2) = \mu$$

Mientras que

$$M_X''(t) = e^{t\mu + t^2\sigma^2/2} (\mu + t\sigma^2)^2 + \sigma^2 e^{t\mu + t^2\sigma^2/2}$$

$$= e^{t\mu + t^2\sigma^2/2} \{(\mu + t\sigma^2)^2 + \sigma^2\}.$$

Así

$$M_X''(t)\Big|_{t=0} = \mu^2 + \sigma^2$$

De este modo

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \varphi''_X(0) - \{\varphi'_X(0)\}^2$$
$$= \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2.$$

RESULTADO: Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces.

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

En efecto,

$$P(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dx$$

(haciendo la sustitución $z = (x-\mu)/\sigma \Rightarrow$
$dz = \frac{1}{\sigma} dx.$)

$$= \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz.$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Obs: $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.

Def: Si una v.a X tiene una densidad definida como

$$f_X(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

donde $\lambda > 0$. Entonces X tiene distribución exponencial y escribimos $X \sim Exp(\lambda)$.

Def: Si la v.a. X tiene densidad dada por

$$f_X(x;a,b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}, \quad x \geq 0.$$

donde $a > 0$ y $b > 0$. Entonces X tiene distribución Gamma y anotamos $X \sim Gaa(a,b)$.

OBS: Si $a=1$ entonces la distr. Gama se reduce a la distr. exponencial.

RESULTADO: Si $X \sim \text{Gama}(a,b)$ entonces

$$E(X)=\frac{a}{b}, \quad Var(X)=\frac{a}{b^2} \quad y$$

$$M_X(t)=\left(\frac{b}{b-t}\right)^a, \quad t<b.$$

DEM: Considere

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\int_0^\infty \frac{b^a}{\Gamma(a)} e^{tx} x^{a-1} e^{-bx}\, dx.$$

$$=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\int_0^\infty x^{a-1} e^{-(b-t)x}\, dx.$$

$$=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(a)}{(b-t)^a}=\left(\frac{b}{b-t}\right)^a,$$

Por otro lado,

$$M_X'(t) = b^a \frac{d}{dt} (b-t)^{-a}$$

$$= a b^a (b-t)^{-a-1}$$

y

$$M_X''(t) = a(a+1) b^a (b-t)^{-a-2}$$

de ahí que

$$M_X'(0) = a b^a b^{-a-1} = \frac{a}{b} = E(X).$$

$$M_X''(0) = a(a+1) b^a b^{-a-2} = \frac{a(a+1)}{b^2}$$

$$= E(X^2).$$

Así

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{a(a+1)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b^2}$$

OBS: haciendo $a = 1$ obtenemos que para $X \sim Exp(b)$ tenemos.

$$E(X) = \frac{1}{b}, \quad Var(X) = \frac{1}{b^2} \quad y$$

$$M_X(t) = \frac{b}{b-t}, \quad t < b.$$

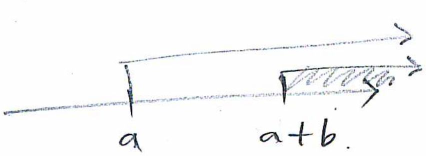
OBS: Considere $X \sim Exp(\lambda)$. Entonces:

$$P(X > a+b \mid X > a) = P(X > b).$$

para $a > 0$, $b > 0$.

En efecto.

$$P(X > a+b \mid X > a) = \frac{P(\{X > a+b\} \cap \{X > a\})}{P(X > a)}.$$



$$= \frac{P(X > a+b)}{P(X > a)}.$$

Ahora

$$\frac{P(X > a+b)}{P(X > a)} = \frac{e^{-\lambda(a+b)}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda b}.$$

$$= P(X > b).$$

~~DEF~~: Sea X una v.a. con densidad

$$f_X(x; a, b) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, \quad x \in (0,1).$$

donde $a > 0$ y $b > 0$, entonces se dice que X tiene distribución Beta y anotamos $X \sim \text{Beta}(a,b)$.

OBS: La función

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx.$$

es conocida como la función beta. Además

La función Beta satisface la propiedad.

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

OBS: La distribución Beta reduce a la uniforme en $(0,1)$ cuando $a = b = 1$.

OBS: La FGM de la distribución Beta no tiene una forma simple. (función hipergeométrica confluente de 1r tipo). Sin embargo los momentos tienen una forma simple.

RESULTADO: Si $X \sim \text{Beta}(a,b)$. Entonces.

$$E(X) = \frac{a}{a+b}, \quad Var(X) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}.$$

~~EM~~ : Considere

$$E(x^k) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x^k \cdot x^{a-1} (1-x)^{b-1} \, dx$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x^{(a+k)-1} (1-x)^{b-1} \, dx$$

$$= \frac{B(a+k,b)}{B(a,b)} = \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+k)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

$$= \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+k)}$$

Luego

$$E(x) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+1)} = \frac{a\,\Gamma(a)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{(a+b)\Gamma(a+b)}$$

$$= \frac{a}{a+b}$$

mientras que

$$E(x^2) = \frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+2)}$$

$$= \frac{a(a+1)\Gamma(a)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{(a+b)(a+b+1)\Gamma(a+b)}$$

$$= \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$$

Así

$$\operatorname{var}(x) = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2$$

$$= \left(\frac{a}{a+b}\right)\left\{\frac{a+1}{a+b+1} - \frac{a}{a+b}\right\}$$

$$= \left(\frac{a}{a+b}\right)\left\{\frac{(a+1)(a+b) - a(a+b+1)}{(a+b+1)(a+b)}\right\}$$

$$= \left(\frac{a}{a+b}\right)\left\{\frac{a^2 + ab + a + b - a^2 - ab - a}{(a+b+1)(a+b)}\right\}$$

$$= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$