MAT-041: Probabilidad y Estadística **Pauta de Corrección**

Certamen 2. Agosto 19, 2019

Tiempo: 90 Minutos Felipe Osorio

1.a. Tenemos que $f(x) = 0$, para $x < 0$ y $x > 3$, mientras que para $0 \leq x \leq 1$,

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\frac{x^2}{5} = \frac{2x}{5},$$

y para $1 < x \leq 3$, sigue que

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\frac{(-x^2 + 6x - 4)}{5} = \frac{(-2x + 6)}{5}.$$

De este modo,

$$f(x) = \begin{cases} 2x/5, & 0 \leq x \leq 1, \\ (-2x + 6)/5, & 1 < x \leq 3, \\ 0, & \textsf{en otro caso.} \end{cases}$$

1.b. Se desea calcular:

$$\mathrm{P}(X \leq 2) = F(2) = \frac{-x^2 + 6x - 4}{5}\Big|_{x=2} = \frac{4}{5}.$$

Además,

$$\mathrm{P}(1 < X \leq 2) = F(2) - F(1) = \frac{4}{5} - \frac{x^2}{5}\Big|_{x=1} = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Finalmente,

$$\mathrm{P}(X > \tfrac{1}{2}) = 1 - \mathrm{P}(X \leq \tfrac{1}{2}) = 1 - F(\tfrac{1}{2}) = 1 - \frac{x^2}{5}\Big|_{x=1/2} = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}.$$

1.c. Se desea calcular:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \int_0^3 x f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \frac{2x^2}{5}\,\mathrm{d}\,x + \int_1^3 \frac{x(-2x+6)}{5}\,\mathrm{d}\,x = \frac{2}{5}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{5}\int_1^3 (-2x^2 + 6x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{2}{5}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{1}{5}\Big(\frac{-2x^3}{3} + 3x^2\Big)\Big|_1^3 = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\Big(9 - \frac{7}{3}\Big) = \frac{22}{15}.\end{aligned}$$

2. Como X e Y son variables aleatorias independientes $\mathsf{Exp}(1)$, sigue que su distribución conjunta es dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = e^{-x}e^{-y} = e^{-(x+y)}.$$

Tenemos la transformación

$$U = \frac{X}{X + Y}, \qquad V = X + Y.$$

De este modo,

$$U = \frac{X}{V} \quad \Rightarrow \quad X = U\,V,$$

y substituyendo en la ecuación para V, sigue que

$$V = UV + Y \quad \Rightarrow \quad Y = V - UV = (1-U)V.$$

Es decir,

$$x = g_1^{-1}(u,v) = uv, \qquad y = g_2^{-1}(u,v) = (1-u)v.$$

Ahora, la matriz Jacobiana asociada a la transformación, asume la forma:

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{pmatrix}.$$

Por tanto, tenemos que su determinante es dado por

$$|\boldsymbol{J}| = (1-u)v + uv = v - uv + uv = v$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= |\boldsymbol{J}|_+ \, f_{X,Y}(g_1^{-1}(u,v), g_2^{-1}(u,v)) \\ &= v\, e^{-uv} e^{-(1-u)v} = v\, e^{-uv-v+uv} \\ &= ve^{-v}, \qquad v > 0. \end{aligned}$$

3. Se pide calcular $\psi_Y(t) = \mathrm{E}(e^{ty})$, es decir

$$\psi_Y(t) = \frac{1}{e^\lambda - 1} \sum_{y=1}^\infty e^{ty} \, \frac{\lambda^y}{y!} = \frac{1}{e^\lambda - 1} \sum_{y=1}^\infty \frac{(\lambda e^t)^y}{y!},$$

sabemos que $\sum_{k=1}^\infty z^k/k! = e^z - 1$, por tanto

$$\psi_Y(t) = \frac{1}{e^\lambda - 1}\{\exp(\lambda e^t) - 1\}.$$

De este modo,

$$E(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\psi_Y(t)\big|_{t=0} = \frac{\lambda}{e^\lambda - 1} \exp(\lambda e^t) e^t \Big|_{t=0} = \frac{\lambda e^\lambda}{e^\lambda - 1}.$$

4. Como $X_1, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes, sigue que

$$\psi_Y(t) = \prod_{i=1}^n \psi_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n \exp(\lambda_i(e^t - 1)) = \exp\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i(e^t - 1)\Big),$$

es decir, $Y \sim \mathsf{Poi}(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$.