

MAT-041: Probabilidad y Estadística**Certamen 3. Septiembre 6, 2019****Tiempo: 90 minutos****Nombre:** _____**Profesor:** Felipe Osorio

1. (25 pts) Considere X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria desde $\mathcal{N}(\theta, 1)$ y defina

$$Y_i = \begin{cases} 1, & X_i > 0, \\ 0, & X_i \leq 0. \end{cases}$$

Sea $\psi = P(Y_1 = 1)$. Obtenga el MLE de ψ .

Recuerde que: $\Phi(p) = P(Z \leq p)$ para $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

2. (25 pts) Suponga que X_1, \dots, X_n representa una muestra aleatoria desde $U(a, b)$ donde a y b son parámetros desconocidos con $a < b$. Obtenga los estimadores de momentos de a y b .

Recuerde que: Si $X \sim U(a, b)$. Entonces,

$$f(x; a, b) = \frac{1}{b - a}, \quad x \in [a, b].$$

Además puede ser útil que: $b^3 - a^3 = (b - a)(a^2 + ab + b^2)$.

3. (25 pts) Sea X_1, \dots, X_n muestra aleatoria de tamaño n desde una distribución $\text{Poi}(\lambda)$ con función de densidad

$$f(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x \in \{0, 1, \dots\}, \lambda > 0.$$

Considere el conjunto de datos

$$\mathbf{x} = \{2, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 2\}.$$

Obtenga un intervalo de confianza asintótico del $100(1 - \alpha)\%$ para λ con $\alpha = 0.05$.

Puede ser útil: considerar alguno de los siguientes valores cuantiles,

$$Z_{0.975} = 1.96, \quad t_{0.975}(9) = 2.26, \quad \text{Poi}_{0.975}(1) = 3.00.$$

4. (25 pts) Sea X_1, \dots, X_n una m.a.(n) desde una distribución $\text{Ber}(\theta_1)$ y Y_1, \dots, Y_n una m.a.(n) de la variable aleatoria $\text{Ber}(\theta_2)$. Suponga también que ambas muestras son independientes. Obtenga el test de Wald de tamaño α para probar $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ versus $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$.

Recuerde que: Si $U \sim \text{Ber}(\theta)$, entonces

$$f(u; \theta) = \theta^u (1 - \theta)^{1-u}, \quad u \in \{0, 1\}, \quad 0 < \theta < 1.$$