MAT-041: Probabilidad y Estadística **Nombre:** ______________________

Certamen 2. Agosto 19, 2019

Tiempo: 90 minutos **Profesor:** Felipe Osorio

---

1. (25 pts) Considere

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2/5, & 0 \leq x \leq 1, \\ (-x^2 + 6x - 4)/5, & 1 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

a. Determine la función de densidad de X.

b. Calcule las probabilidades:

- $\mathrm{P}(X \leq 2)$.
- $\mathrm{P}(1 < X \leq 2)$.
- $\mathrm{P}(X > \frac{1}{2})$.

c. Calcule $\mathrm{E}(X)$.

2. (25 pts) Sean X, Y variables aleatorias independientes, cada una con distribución $\mathsf{Exp}(1)$[1]. Se define las variables aleatorias U y V como:

$$U = \frac{X}{X+Y}, \qquad V = X + Y.$$

Encuentre la densidad conjunta de (U, V).

3. (25 pts) Suponga que la variable aleatoria Y tiene función de probabilidad:

$$f_Y(y; \lambda) = \mathrm{P}(Y = y) = \frac{1}{e^{\lambda} - 1} \frac{\lambda^y}{y!}, \qquad y = 1, 2, \dots,$$

donde $\lambda > 0$. Obtenga la función generadora de momentos de Y y calcule $\mathrm{E}(Y)$.

4. (25 pts) Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes tal que $X_i \sim \mathsf{Poi}(\lambda_i)$, para $i = 1, \dots, n$. Usando la función generadora de momentos determine la distribución de $Y = \sum_{i=1}^n X_i$.

Sugerencia: Recuerde que,

$$\psi_{X_i}(t) = \exp(\lambda_i(e^t - 1)), \qquad i = 1, \dots, n.$$

---

[1]Si $X \sim \mathsf{Exp}(1)$, entonces $f_X(x) = e^{-x}$, para $x \in (0, +\infty)$