MAT-041: Calculando probabilidades en modelos discretos y continuos de uso común

Felipe Osorio

fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM

Algunas distribuciones disponibles en R[1]

- beta
- binomial
- binomial negativa
- chi-cuadrado
- exponencial
- F
- gama
- geométrica
- hipergeométrica
- logística
- log-normal
- normal
- Poisson
- t de Student
- uniforme
- Weibull

[1] Hay muchas otras distribuciones disponibles en paquetes específicos.

Comandos en R

- `ddist(x, parametros)` es la función de densidad de `dist` evaluado en $\boldsymbol{x}$.

- `pdist(x, parametros)` calcula la CDF,
$$F_X(x) = P(X \leq x),$$
para X dado por `dist`.

- `qdist(p, parametros)` retorna x satisfaciendo
$$P(X \leq x) = p,$$
el p-ésimo cuantil, con X dado por `dist`.

- `rdist(n, parametros)` genera n dígitos pseudo-aleatorios (RNG) desde la distribución especificada por `dist`.

Definición (Distribución binomial):

Una variable aleatoria X tiene distribución binomial si su función de probabilidad es dada por:

$$p(x; n, \theta) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}, \qquad x \in \{0, 1, \dots, n\},$$

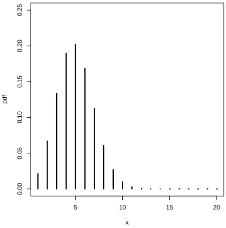
y escribimos $X \sim \mathsf{Bin}(n, \theta)$ con $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in [0, 1]$ y

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}.$$

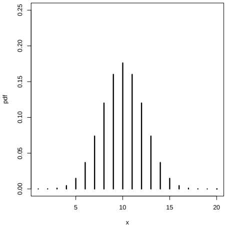
Observación:

Si $n = 1$, entonces $X \sim \mathsf{Ber}(\theta)$.

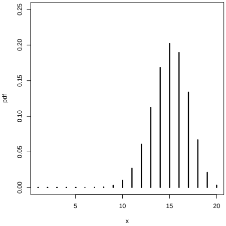
Distribución binomial[2]



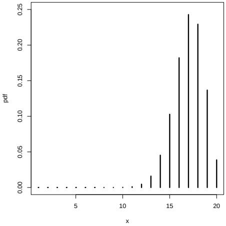
(a) $\theta = 1/4$



(b) $\theta = 1/2$



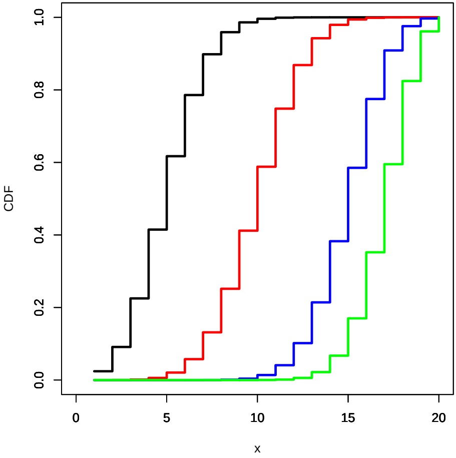
(c) $\theta = 3/4$



(d) $\theta = 0.85$

[2] Densidad: Bin$(n, \theta), n = 20$

Distribución binomial[3]



[3] Bin(n, θ), con $n = 20$, $\theta = \frac{1}{4}$ (negro), $\theta = \frac{1}{2}$ (rojo), $\theta = \frac{3}{4}$ (azul) y $\theta = 0.85$ (verde).

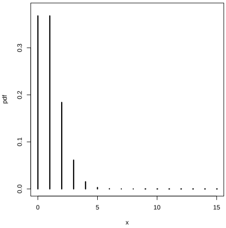
Definición (Distribución Poisson):

Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución Poisson si su función de probabilidad asume la forma:

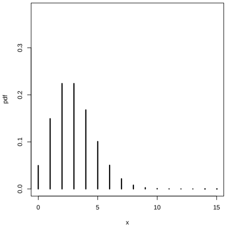
$$p(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x \in \{0, 1, \dots\},$$

en cuyo caso denotamos $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ con $\lambda > 0$.

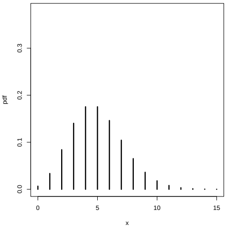
Distribución Poisson[4]



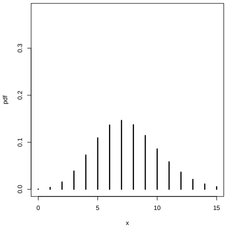
(a) $\lambda = 1$



(b) $\lambda = 3$



(c) $\lambda = 5$



(d) $\lambda = 7.5$

[4]Densidad: Poi(λ), con $\lambda = 1, 3, 5$ y 7.5.

Definición (Distribución uniforme):

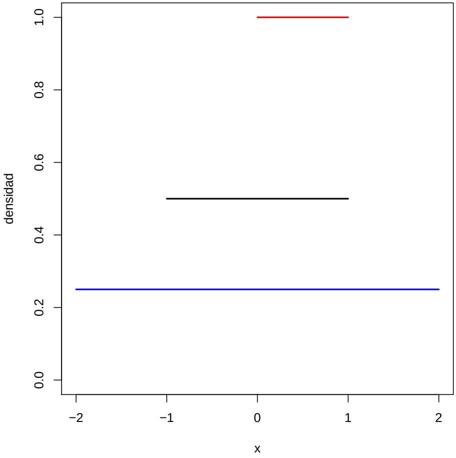
Si la función de densidad de una variable aleatoria X es dada por:

$$f(x; a, b) = \frac{1}{b-a}\, I_{(a,b)}(x),$$

donde a y b satisfacen $-\infty < a < b < \infty$. Entonces escribimos $X \sim \mathsf{U}(a, b)$. Además

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \qquad x \in (a, b).$$

Distribución uniforme[5]



[5] Densidad: U$(-1, 1)$ (negro), U$(0, 1)$ (rojo) y U$(-2, 2)$ (azul).

Definición (Distribución normal):

Se dice que una variable aleatoria X es normalmente distribuida si su densidad es dada por:

$$f(x;\mu,\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)^2\Big\}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$ y anotamos $X \sim \mathsf{N}(\mu,\sigma^2)$.

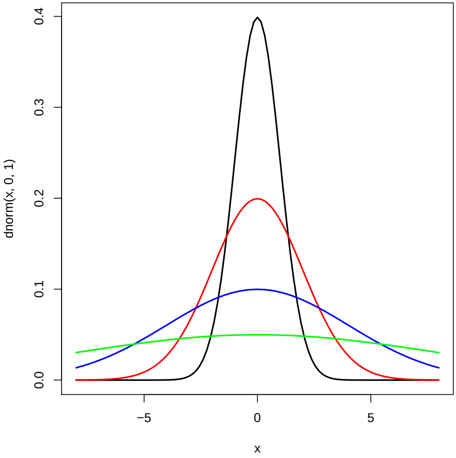
Un caso particular importante corresponde a la distribución normal estándar, esto es $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$ tal que

$$\phi(z) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-\tfrac{1}{2}z^2), \qquad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z}\phi(u)\,\mathsf{d}u.$$

Además, para $X \sim \mathsf{N}(\mu,\sigma^2)$, tenemos

$$\mathsf{P}(a < X < b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big).$$

Distribución normal[6]



[6]Densidad: N(μ, σ^2) con $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ (negro), 2 (rojo), 4 (azul) y 8 (verde)

Definición (Distribución Gama):

Si la variable aleatoria X tiene densidad dada por:

$$f(x; a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\, x^{a-1} \exp(-bx), \qquad x > 0,$$

con $a > 0$ y $b > 0$, entonces X tiene distribución Gama y anotamos $X \sim \text{Gama}(a, b)$. Aquí

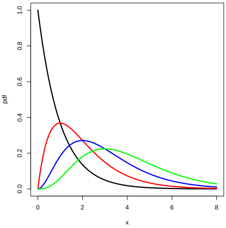
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u}\, \mathrm{d}u,$$

denota la función gama.

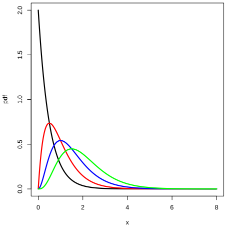
Cuando $a = 1$ obtenemos que $X \sim \text{Exp}(b)$ con función de densidad

$$f(x; b) = b\, e^{-bx}\, I_{(0,\infty)}(x).$$

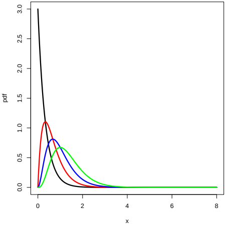
Distribución Gama[7]



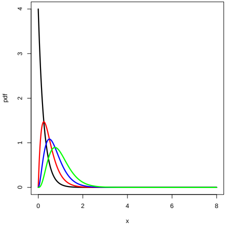
(a) $b = 1$



(b) $b = 2$



(c) $b = 3$



(d) $b = 4$

[7] Densidad: Gama(a, b), con $a = 1$ (negro), $a = 2$ (rojo), $a = 3$ (azul) y $a = 4$ (verde).

Definición (Distribución Beta):

Si una variable aleatoria X tiene densidad dada por

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)}\, x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \qquad x \in (0,1),$$

donde $a > 0$ y $b > 0$, entonces X tiene distribución Beta y anotamos $X \sim \mathsf{Beta}(a,b)$.

Observación:

La función

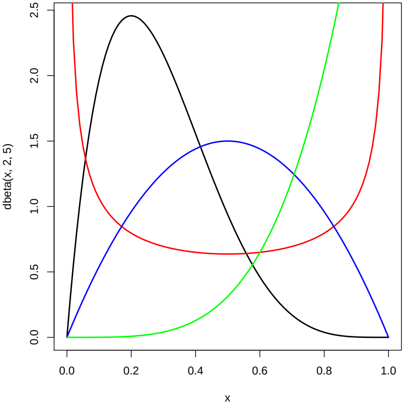
$$B(a,b) = \int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1}\,\mathsf{d}z,$$

es conocida como la función beta. Además,

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Por otro lado, cuando $a = b = 1$, obtenemos la distribución $\mathsf{U}(0,1)$.

Distribución Beta[8]



[8] Beta(a, b) con $(a, b) = (2, 5)$ (negro), $(0.5, 0.5)$ (rojo), $(2, 2)$ (azul) y $(5, 1)$ (verde)