**MAT-041: Probabilidad y Estadística** **Pauta de Corrección**
**Certamen 3. Septiembre 6, 2019**
**Tiempo: 90 Minutos** Felipe Osorio

---

**1.** Primeramente, note que

$$\begin{aligned}\psi &= \mathrm{P}(Y_1 = 1) = \mathrm{P}(X_1 > 0) = 1 - \mathrm{P}(X_1 \leq 0) = 1 - \mathrm{P}(X_1 - \theta \leq 0 - \theta)\\ &= 1 - \mathrm{P}(Z \leq -\theta) = 1 - \Phi(-\theta).\end{aligned}$$

Por otro lado, el MLE de $\theta$ para una muestra aleatoria desde una distribución $\mathcal{N}(\theta, 1)$ es dado por $\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}} = \overline{x}$. Por la invarianza de los MLEs, sigue que

$$\widehat{\psi}_{\mathsf{ML}} = 1 - \Phi(-\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}}) = 1 - \Phi(-\overline{x}).$$

**2.** Para la distribución Uniforme en el intervalo $(a, b)$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\Big(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\Big) = \frac{a+b}{2},\\ \mathrm{E}(X^2) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\Big(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\Big) = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2).\end{aligned}$$

De este modo debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\mu_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad \mu_2 = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2).$$

Es decir, $a + b = 2\mu_1 \Rightarrow a = 2\mu_1 - b$. Substituyendo en la segunda ecuación, obtenemos

$$(2\mu_1 - b)^2 + (2\mu_1 - b)b + b^2 = 3\mu_2.$$

Es decir, $\widehat{b}_{\mathsf{MM}}$ debe ser solución de la ecuación de segundo grado

$$b^2 - 2\mu_1 b + (4\mu_1^2 - 3\mu_2) = 0,$$

cuyas raíces pueden ser escritas como

$$\widehat{b}_{\mathsf{MM}} = m_1 \pm \sqrt{3(m_2 - m_1^2)}.$$

Notando que se debe satisfacer $\widehat{a}_{\mathsf{MM}} < \widehat{b}_{\mathsf{MM}}$, sigue que

$$\widehat{a}_{\mathsf{MM}} = 2m_1 - \widehat{b}_{\mathsf{MM}} = m_1 - \sqrt{3(m_2 - m_1^2)}, \qquad \widehat{b}_{\mathsf{MM}} = m_1 + \sqrt{3(m_2 - m_1^2)},$$

como $m_2 - m_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$, obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned}\widehat{a}_{\mathsf{MM}} &= \overline{x} - \Big\{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2\Big\}^{1/2}\\ \widehat{b}_{\mathsf{MM}} &= \overline{x} + \Big\{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2\Big\}^{1/2}\end{aligned}$$

**3.** Es sabido que el MLE de $\lambda$ es dado por

$$\widehat{\lambda} = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{1}$$

Ahora,

$$\log f(x;\lambda) = -\lambda + x\log\lambda - \log x!$$

de este modo,

$$U(x;\lambda) = -1 + \frac{x}{\lambda}, \qquad U'(x;\lambda) = -\frac{x}{\lambda^2}.$$

Así, la información de Fisher (para una única observación) es dada por

$$\mathcal{F}_1(\lambda) = \mathrm{E}\{-U'(X;\lambda)\} = \mathrm{E}\left(\frac{X}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{\lambda},$$

por tanto,

$$\widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{F}_n(\widehat{\lambda})}} = \frac{1}{\sqrt{n\mathcal{F}_1(\widehat{\lambda})}} = \sqrt{\widehat{\lambda}/n}. \tag{2}$$

De este modo, un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ para $\lambda$ es dado por:

$$\begin{aligned} IC_n(\lambda) &= \left[\widehat{\lambda} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{\lambda}/n}, \widehat{\lambda} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{\lambda}/n}\right] \\ &= \left[\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\overline{x}/n}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\overline{x}/n}\right]. \end{aligned}$$

Para el conjunto de datos $\boldsymbol{x} = \{2,0,1,0,1,1,0,1,0,2\}$, se obtuvo $\overline{x} = 8/10 = 0.8$. Así, usando $\alpha = 0.05$, tenemos:

$$\begin{aligned} IC_n(\lambda) &= [0.8 - Z_{0.975}\sqrt{0.8/10}, 0.8 + Z_{0.975}\sqrt{0.8/10}] \\ &= [0.2456, 1.3544], \end{aligned}$$

donde $Z_{0.975} = 1.96$ representa el valor cuantil 0.975 de la distribución $\mathsf{N}(0,1)$.

**4.** En este caso, tenemos

$$\begin{aligned} \Theta_0 &= \{(\theta_1,\theta_2) : \theta_1 = \theta_2 = \theta, 0 < \theta < 1\}, \\ \Theta &= \{(\theta_1,\theta_2) : 0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1\}. \end{aligned}$$

Sea $\boldsymbol{Z} = (X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n)^\top$, bajo $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$ (es decir, en $\Theta$) tenemos

$$\begin{aligned} \ell(\theta_1,\theta_2;\boldsymbol{Z}) = {} & \sum_{i=1}^{n} x_i \log\theta_1 + \Big(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\log(1-\theta_1) \\ & + \sum_{i=1}^{n} y_i \log\theta_1 + \Big(n - \sum_{i=1}^{n} y_i\Big)\log(1-\theta_2), \end{aligned}$$

desde donde sigue que

$$\widehat{\theta}_1 = \overline{X}, \qquad \widehat{\theta}_2 = \overline{Y}.$$

Haciendo $\delta = \theta_1 - \theta_2$, podemos escribir $H_0 : \delta = 0$. Ahora, por la independencia entre $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$, sigue que

$$\mathcal{F}_n(\delta) = \mathcal{F}_n(\theta_1) + \mathcal{F}_n(\theta_2).$$

Como $\mathcal{F}_n(\theta_j) = \mathrm{E}\{-U'(\theta_j)\}$, para $j = 1, 2$, tenemos que

$$U(\theta_j) = \frac{1}{\theta_j}\sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{1-\theta_j}\Big(n - \sum_{i=1}^n x_i\Big),$$

así

$$U'(\theta_j) = \frac{1}{\theta_j^2}\sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{(1-\theta_j)^2}\Big(n - \sum_{i=1}^n x_i\Big).$$

Sabemos que $\mathrm{E}(X_i) = \theta_j$, $\forall\, i$. De este modo,

$$\mathcal{F}_n(\theta_j) = \frac{n}{\theta_j} + \frac{n}{1-\theta_j} = \frac{n}{\theta_j(1-\theta_j)}.$$

Finalmente, el test de Wald de tamaño $\alpha$ se reduce a: Rechazar $H_0 : \delta = 0$, si

$$|W| > Z_{1-\alpha/2},$$

con

$$\begin{aligned} W &= \frac{\widehat{\delta} - 0}{\widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\delta})} = \frac{\widehat{\delta}}{\sqrt{1/\mathcal{F}_n(\widehat{\delta})}} = \widehat{\delta}\sqrt{\mathcal{F}_n(\widehat{\delta})} \\ &= (\widehat{\theta}_1 - \widehat{\theta}_2)\sqrt{\frac{n}{\widehat{\theta}_1(1-\widehat{\theta}_1)} + \frac{n}{\widehat{\theta}_2(1-\widehat{\theta}_2)}}. \end{aligned}$$