MAT-041: Estadísticas de resumen

Felipe Osorio

fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM

Datos del SIMCE

Desde 1988 el SIMCE evalua los resultados de aprendizaje de los estudiantes del sistema de educación chileno.

Objetivos:

- Describir el comportamiento del aprendizaje de los estudiantes.
- Determinar si existe diferencias significativas entre el tipo de dependencia (municipal, subvencionado, particular).

Características del problema:

- Mediciones de un mismo individuo (estudiante) a través del tiempo (4º y 8º básico, 2º medio).[1]
- Datos disponibles para los años 2007, 2011 y 2013, pruebas de Lenguaje y Matemáticas.
- Aproximadamente 133K estudiantes para ser analizados (base de datos de mediano porte).

[1] Conocido como: datos con estructura longitudinal.

Datos del SIMCE[2]

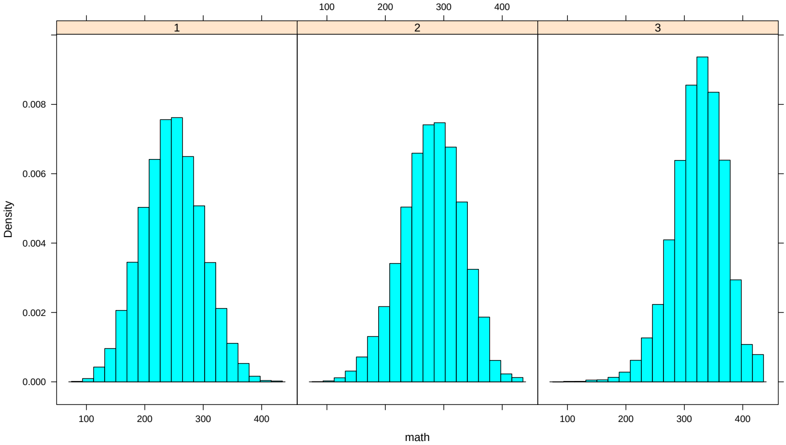


Figura: histograma puntajes matemática.

[2] colegios, 1: municipales, 2: subvencionados y 3: particules.

Datos del SIMCE

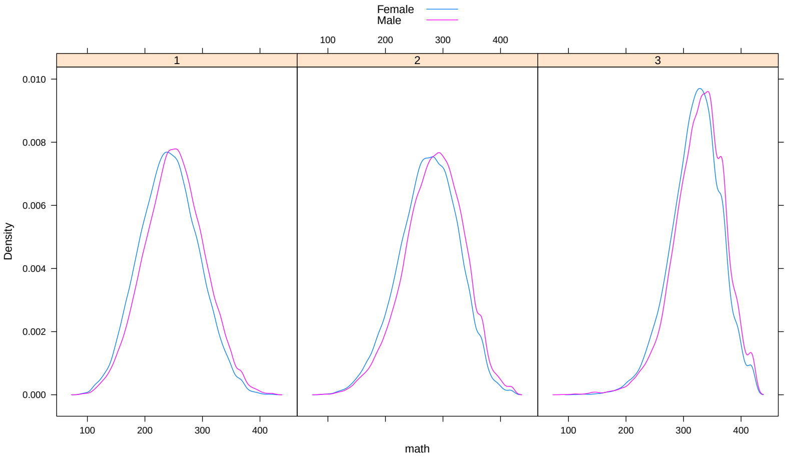


Figura: densidad puntajes matemática, organizados por Sexo.

Datos del SIMCE

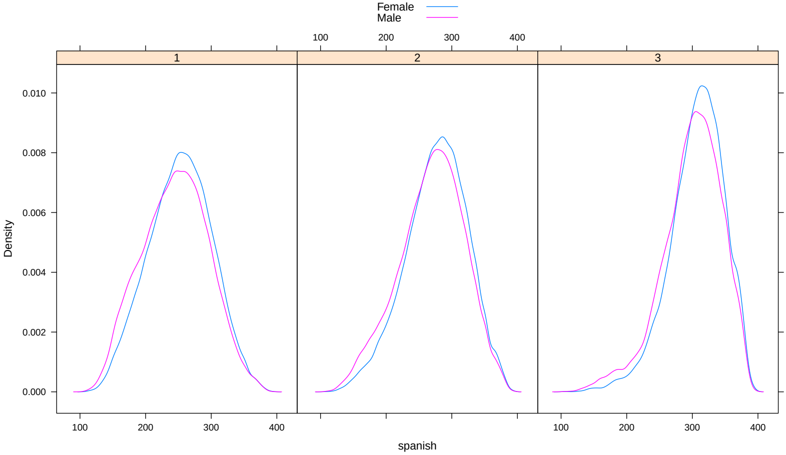


Figura: densidad puntajes lenguaje, organizados por Sexo.

Datos del SIMCE

```
## Base de datos con aproximadamente 133K individuos
> SIMCE
          Sex type math04 math08 math10  spa04  spa08  spa10
1        Male    1 338.86 303.94 372.51 342.74 327.92 317.38
2      Female    2 301.98 256.04 324.65 298.30 263.12 322.40
3      Female    1 258.45 263.44 225.95 192.59 206.72 216.66
4        Male    2 233.13 323.76 288.60 268.91 274.84 251.44
5        Male    1 284.17 276.37 293.11 236.55 261.67 283.78
6        Male    1 248.64 259.76 210.17 254.34 252.15 280.53

...

132947 Female    2 211.78 254.21 246.78 244.97 286.21 269.24
132948 Female    3 285.18 315.25 354.90 303.95 341.67 315.81
132949   Male    1 259.05 232.65 224.18 305.65 195.92 217.71
```

Para pensar:

- ¿Cómo resumir la información del total de 133K datos para cada una de las 8 variables?[3]
- ¿Podemos usar, digamos unas pocas cantidades para describir esta información?

[3] Es decir un poco más de 1 millón de registros.

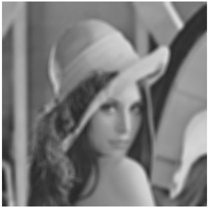
Lenna y algunas distorsiones de Lenna

(a) Original image

(b) Mean shift

(c) Salt-pepper noise

(d) Speckle noise



(e) Blurring

(f) Compression

Similaridad entre imágenes

- Existen diversos enfoques para estudiar la similaridad entre dos señales, imágenes o (en general) procesos.

- El objetivo de la evaluación de la calidad de una imagen busca representar la percepción de la calidad del ojo humano.

- Se ha diseñado índices para estudiar el desempeño de algoritmos para problemas como: compresión o restauración de imágenes, entre otros. Algoritmos de referencia completa requieren de imágenes distorcionadas **y** de referencia.

- Se desea un coeficiente apropiado que combine la luminosidad, contraste y estructura (correlación) entre las imágenes. Este tipo de coeficientes son llamados índice de similaridad estructural (SSIM).

Structural Similarity Index (SSIM)

Definición (Wang et al., 2004):[4]

Sean $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ dos imágenes. El índice SSIM es definido como

$$\mathrm{SSIM}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^{\alpha} \cdot c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^{\beta} \cdot s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^{\gamma},$$

donde α, β y γ son parámetros no negativos,

$$l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{2\,\overline{x}\,\overline{y} + c_1}{\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + c_1}, \qquad c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{2\,s_x\,s_y + c_2}{s_x^2 + s_y^2 + c_2},$$

$$s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{s_{xy} + c_3}{s_x\,s_y + c_3},$$

$\overline{x}$, $\overline{y}$, s_x^2, s_y^2 y s_{xy} representan los promedios muestrales, varianzas y covarianza de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$.

Las constantes c_1, c_2 y c_3 garantizan la estabilidad cuando denominadores son cercanos a cero.

[4] IEEE Transactions on Image Processing **13**, 600-612.

¿Cómo lucen los datos de Lenna?[5]

Lenna (original):

$$\begin{pmatrix} 153 & 153 & 153 & 152 & 153 & \dots \\ 153 & 153 & 153 & 152 & 153 & \dots \\ 153 & 153 & 153 & 152 & 153 & \dots \\ 153 & 153 & 153 & 152 & 153 & \dots \\ 153 & 153 & 153 & 152 & 153 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Lenna (sal y pimienta 10% contaminación):

$$\begin{pmatrix} 153 & 153 & 153 & 152 & 153 & \dots \\ 153 & 153 & 30 & 152 & 153 & \dots \\ 153 & 153 & 153 & 152 & 153 & \dots \\ 153 & 153 & 62 & 152 & 153 & \dots \\ 66 & 153 & 153 & 152 & 153 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

[5] Imágenes $512 \times 512 = 262\,144$ observaciones.

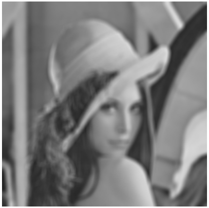
Lenna y algunas distorsiones de Lenna[6]

(a) Original image

(b) Mean shift

(c) Salt-pepper noise

(d) Speckle noise



(e) Blurring

(f) Compression

[6] SSIM: (a) 1.000, (b) 0.989, (c) 0.649, (d) 0.441, (e) 0.346 y (f) 0.288.

Ingredientes:

Conjunto de n observaciones $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ conocidas como muestra.

En general, nuestro interés recaerá en resúmenes de la información a través de una **estadística**, digamos $T = T(x_1, \dots, x_n)$.

En esta clase consideraremos 3 tipos de estadísticas de resumen[7] para una muestra $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$,

- medidas de posición.
- medidas de dispersión.
- medidas de forma (asimetría y curtosis).

[7] En ocasiones escribiremos $T = T(\boldsymbol{x})$.

Definición 3 (Media muestral o promedio):

Sea $x_1, \dots, x_n$ valores muestrales. Se define el promedio o media muestral como:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Suponga que la observación i-ésima, digamos x_i, se repite n_i veces. Entonces tenemos

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i,$$

donde $f_i = n_i/n$ es la frecuencia relativa. En general, considere "pesos" $\omega_1, \dots, \omega_n$ asociados a las observaciones $x_1, \dots, x_n$. En este caso,

$$\overline{x} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \omega_j}\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i.$$

Ejemplo:

Considere el conjunto de datos $\boldsymbol{x} = \{1,2,2,2,3,3,8\}$. Tenemos $n = 7$, y

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{7} x_i &= 1+2+2+2+3+3+8 \\ &= 1+2\cdot 3+2\cdot 3+8 = 21,\end{aligned}$$

así $\overline{x} = 21/7 = 3$. Note también que el gráfico de tallo y hoja, adopta la forma:

1	*		
2	*	*	*
3	*	*	
4			
5			
6			
7			
8	*		

Ejemplo (datos de accidentes):

Suponga el siguiente conjunto de datos:

Número de accidentes (x_i)	Frecuencia (n_i)	$n_i x_i$
0	55	0
1	14	14
2	5	10
3	2	6
4	0	0
Total	76	30

De este modo, $\overline{x} = 30/76 = 0.3947$ es el número promedio de accidentes.

Definición 4 (Estadísticos de orden):

Sea $x_1, \dots, x_n$ una muestra. Entonces los valores ordenados

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)},$$

se denominan estadísticos de orden. Algunas estadísticas de orden son: el mínimo muestral $x_{(1)}$, el máximo muestral $x_{(n)}$.

Definición 5 (Mediana):

Sea $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ observaciones ordenadas. La mediana es definida como:

$$\mathrm{me}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} x_{(n+1)/2}, & n \text{ es impar}, \\ \big(x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}\big)/2, & n \text{ es par}. \end{cases}$$

Observación:

Sea $f(x)$ cualquier función de números reales.[8] Entonces podemos definir

$$\overline{f} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{n}\big(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\big).$$

Caso particular (media geométrica):

Suponga $x_1, \ldots, x_n$ números positivos y $f(x) = \log(x)$. Entonces la media geométrica G es dada por:

$$\log G = \frac{1}{n}\big(\log x_1 + \cdots + \log x_n\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log x_i.$$

Es decir,

$$G = (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)^{1/n} = \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^{1/n}.$$

[8] Por ejemplo, $f(x) = x^2$ lleva a la media cuadrática, mientras que $f(x) = 1/x$ es la media armónica.

Datos del SIMCE: Puntajes de matemáticas

```
## sólo puntajes de matemáticas
> MATH
math04 math08 math10
1 338.86 303.94 372.51
2 301.98 256.04 324.65
3 258.45 263.44 225.95
4 233.13 323.76 288.60
5 284.17 276.37 293.11
6 248.64 259.76 210.17
...

> x <- MATH$math04 # análogamente x <- MATH[,1]
> mean(x)     # promedio
[1] 261.5766
> median(x)   # mediana
[1] 263.96
> library(fastmatrix) # https://faosorios.github.io/fastmatrix
> geomean(x) # media geométrica
[1] 256.0357
# alternativamente: exp(mean(log(x)))

> apply(MATH, 2, mean) # para todas la variables
  math04   math08   math10
261.5766 269.6779 276.6267
```

Medidas de dispersión

Considere los siguientes conjuntos de datos:

$$D_1 = \{10, 20, 30\}, \qquad D_2 = \{5, 5, 20, 35, 35\}, \qquad D_3 = \{20, 20, 20\},$$

Tenemos los gráficos de tallo-y-hoja:

Datos D_1:

5	
10	*
15	
20	*
25	
30	*
35	

Datos D_2:

5	* *
10	
15	
20	*
25	
30	
35	* *

Datos D_3:

5	
10	
15	
20	* * *
25	
30	
35	

Sea $\overline{x}_j$ y me_j el promedio y la mediana asociada al conjunto de datos D_j $(j = 1, 2, 3)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\overline{x}_1 &= \frac{1}{3}(10 + 20 + 30) = \frac{60}{3} = 20, \\
\overline{x}_2 &= \frac{1}{5}(2 \cdot 5 + 20 + 2 \cdot 35) = \frac{100}{5} = 20, \\
\overline{x}_3 &= \frac{3 \cdot 20}{3} = 20.
\end{aligned}$$

Además, $\mathrm{me}_j = 20$ para todo j.

Observación:

Es decir, tenemos tres configuraciones de datos con valores centrales idénticos.

Sean Q_1 y Q_3 las medianas de la mitad inferior y superior de los datos, conocidos como el 1er y 3er cuartiles, respectivamente. Esto permite definir:

$$IQR = Q_3 - Q_1,$$

que es conocido como rango intercuartílico.

También podemos considerar el rango de la muestra como:

$$R = \max\{x_i\}_{i=1}^{n} - \min\{x_i\}_{i=1}^{n} = x_{(n)} - x_{(1)}.$$

Algunos software estadísticos (R/S-Plus, Stata, entre otros) reportan:

$$x_{(1)}, Q_1, \mathrm{me}, Q_3, x_{(n)}.$$

Considere subdividir los datos ordenados $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$ en secciones de 100%, llamados percentiles. Entonces el percentil de orden j $(1 \leq j \leq 100)$ está dado por:

$$P_j = x_{(j(n+1)/100)}.$$

Note que $Q_1 = P_{25}$, la mediana (o 2º cuartil, Q_2) es $\mathrm{me} = P_{50}$ y $Q_3 = P_{75}$.

Ejemplo:

Considere el conjunto de datos $\boldsymbol{x} = \{4, 7, 18, 1, 7, 13, 2\}$ y suponga que deseamos calcular el rango intercuartílico IQR.

Primeramente es necesario ordenar el conjunto de datos:

$$\{x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}, x_{(4)}, x_{(5)}, x_{(6)}, x_{(7)}\} = \{1, 2, 4, 7, 7, 13, 18\}.$$

Disponemos de $n = 7$ datos, luego para obtener el 1er y 3er cuartiles podemos usar

$$Q_1 = P_{25} = x_{(25\cdot(7+1)/100)} = x_{(1\cdot 8/4)} = x_{(2)} = 2,$$
$$Q_3 = P_{75} = x_{(75\cdot(7+1)/100)} = x_{(3\cdot 8/4)} = x_{(6)} = 13.$$

De este modo, $IQR = Q_3 - Q_1 = 13 - 2 = 11$.

Considere subdividir los datos ordenados $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$ en secciones de 100%, llamados percentiles. Entonces el percentil de orden j $(1 \leq j \leq 100)$ está dado por:

$$P_j = x_{(j(n+1)/100)}.$$

Note que $Q_1 = P_{25}$, la mediana (o 2º cuartil, Q_2) es $\mathrm{me} = P_{50}$ y $Q_3 = P_{75}$.

Ejemplo:

Considere el conjunto de datos $\boldsymbol{x} = \{4, 7, 18, 1, 7, 13, 2\}$ y suponga que deseamos calcular el rango intercuartílico IQR.

Primeramente es necesario ordenar el conjunto de datos:

$$\{x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}, x_{(4)}, x_{(5)}, x_{(6)}, x_{(7)}\} = \{1, 2, 4, 7, 7, 13, 18\}.$$

Disponemos de $n = 7$ datos, luego para obtener el 1er y 3er cuartiles podemos usar

$$\begin{aligned} Q_1 &= P_{25} = x_{(25\cdot(7+1)/100)} = x_{(1\cdot 8/4)} = x_{(2)} = 2, \\ Q_3 &= P_{75} = x_{(75\cdot(7+1)/100)} = x_{(3\cdot 8/4)} = x_{(6)} = 13. \end{aligned}$$

De este modo, $IQR = Q_3 - Q_1 = 13 - 2 = 11$.

Definición 6 (Varianza muestral):

Considere $x_1, \ldots, x_n$ valores observados, se define su varianza muestral como:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2.$$

Observación:

$s = \sqrt{s^2}$ se denomina desviación estándar.

Observación:

Otras medidas de dispersión:

- Desviación absoluta en torno de la media:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \overline{x}|.$$

- Desviación absoluta en torno de la mediana:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \mathrm{me}(\boldsymbol{x})|.$$

- r-ésimo momento centrado en torno de a:[9]

$$m_r(a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^r.$$

[9] Para $r = 2$ y $a = \overline{x}$ obtenemos la varianza.

Propiedades:

(a)

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0.$$

(b)

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2$$

(c) $\overline{x}$ es el valor que minimiza la función:

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2.$$

(d) Sea $x_1, \ldots, x_n$ y considere la transformación:

$$y_i = a\,x_i + b, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Entonces $\overline{y} = a\,\overline{x} + b$ y $s_y^2 = a^2 s_x^2$.

(a) En efecto,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\overline{x} = n\overline{x} - n\overline{x} = 0.$$

(b) (Fórmula de Köning)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\overline{x}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2\end{aligned}$$

(c) $\overline{x}$ es el valor que minimiza la función $S(a) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$. En efecto, note que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} S(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(x_i - a)^2 = -2\sum_{i=1}^{n}(x_i - a),$$

resolviendo la condición de primer orden, tenemos

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{a}) = 0,$$

desde donde sigue que $\widehat{a} = \overline{x}$. Además

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2} S(a) = -2\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(x_i - a) = 2n,$$

y como la segunda derivada es positiva (para cualquier valor de n), obtenemos que $\overline{x}$ es máximo global.

(d) Sea $x_1, \dots, x_n$ y considere la transformación, $y_i = ax_i + b$, para $i = 1, \dots, n$. Entonces

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b) = \frac{1}{n}\Big(a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\Big)$$
$$= a\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) + b = a\overline{x} + b.$$

Mientras que

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2,$$

como $y_i - \overline{y} = ax_i + b - (a\overline{x} + b) = a(x_i - \overline{x})$, sigue que

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\{a(x_i - \overline{x})\}^2$$
$$= a^2\,\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = a^2 s_x^2.$$

Observación:

Un caso particular de importancia es la estandarización del conjunto de datos $x_1, \ldots, x_n$, definida como:

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{s}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Entonces,[10]

$$\overline{z} = 0 \qquad \text{y} \qquad s_z^2 = 1.$$

[10] Basta hacer $a = 1/s$ y $b = \overline{x}/s$ en la Propiedad (d).

Definición 7 (Coeficiente de variación):

Este coeficiente es una medida que compara la desviación estándar con el promedio de una muestra y es definido como

$$\mathrm{CV} = s/\overline{x}, \qquad \overline{x} \neq 0.$$

El coeficiente es particularmente útil para comparar dos o más muestras (o grupos).

Observación:

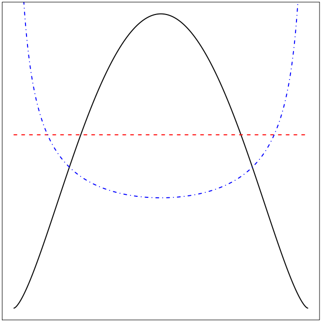
Un valor pequeño para el CV está asociado a una muestra homogénea.

Observación:

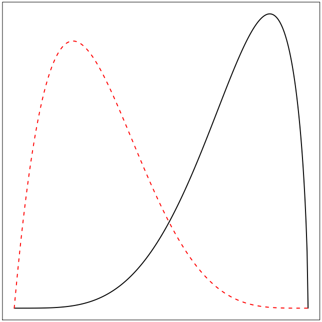
En Econometría $1/\,\mathrm{CV}$ es conocido como la razón de Sharpe.

EX UMBRA IN SOLEM

Medidas de forma



(a) distribuciones simétricas



(b) asimetría negativa (–), positiva (- -)

Definición 8 (Coeficiente de asimetría):

Considere m_3 el tercer momento muestral, entonces se define el coeficiente de asimetría (o sesgo) como:

$$b_1 = \frac{m_3}{s^3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \overline{x}}{s}\right)^3.$$

Observación:

- Si $b_1 = 0$ la distribución es simétrica con relación a $\overline{x}$.
- Si $b_1 > 0$ la distribución tiene sesgo positivo. En caso contrario, decimos que tiene sesgo negativo.

Observación:

Se han definido diversos índices de simetría, por ejemplo la medida de sesgo de Galton:

$$b_{\mathsf{G}} = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1}.$$

Definición 8 (Coeficiente de asimetría):

Considere m_3 el tercer momento muestral, entonces se define el coeficiente de asimetría (o sesgo) como:

$$b_1 = \frac{m_3}{s^3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \overline{x}}{s}\right)^3.$$

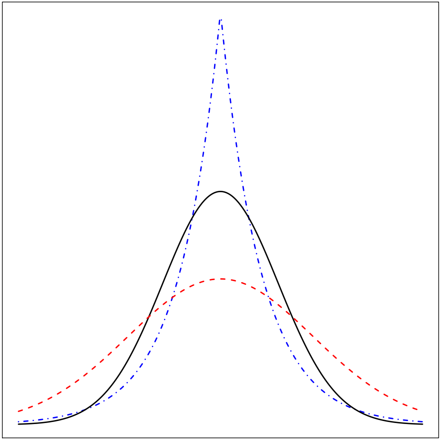
Observación:

- Si $b_1 = 0$ la distribución es simétrica con relación a $\overline{x}$.
- Si $b_1 > 0$ la distribución tiene sesgo positivo. En caso contrario, decimos que tiene sesgo negativo.

Observación:

Se han definido diversos índices de simetría, por ejemplo la medida de sesgo de Galton:

$$b_{\mathsf{G}} = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1}.$$



(a) Distribución leptocúrtica (− · −), mesocúrtica (—) y platicúrtica (− −)

Definición 9 (Coeficiente de curtosis):

Considere m_4 el cuarto momento muestral, entonces se define el coeficiente de curtosis[11] como:

$$b_2 = \frac{m_4}{s^4} - 3 = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \overline{x}}{s} \right)^4 \right\} - 3.$$

Observación:

El término -3 hace que $b_2 = 0$ cuando los datos siguen una distribución normal.

[11] también conocido como exceso de curtosis

Datos del SIMCE: Puntajes de matemáticas[12]

```
> z <- quantile(x)
> z
    0%    25%    50%    75%   100%
 87.74 226.32 263.96 299.29 369.55

> sd(x)  # desviación estándar
[1] 51.79042
> var(x) # varianza
[1] 2682.247

> library(fastmatrix) # https://faosorios.github.io/fastmatrix
> moments(x)
$second
[1] 2682.227
$third
[1] -30409.6
$fourth
[1] 18784749
$skewness
[1] -0.2189084
$kurtosis
[1] -0.3889947
```

[12] $n = 132\,793$ observaciones, así que $(n-1)/n = 0.9999925$.

Gráfico de cajón con bigotes (boxplot)