

1. Desde el enunciado del problema se tiene que:

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(C) = \frac{1}{6}, \quad P(Z|A) = \frac{1}{10}, \quad P(Z|B) = \frac{1}{15}, \quad P(Z|C) = \frac{1}{12}.$$

a. Por el Teorema de probabilidad total, sigue que:

$$\begin{aligned} P(Z) &= P(Z|A)P(A) + P(Z|B)P(B) + P(Z|C)P(C) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{15} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} = \frac{31}{360} = 0.0861. \end{aligned}$$

b. Por el Teorema de Bayes, obtenemos:

$$P(A|Z) = \frac{P(Z|A)P(A)}{P(Z)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{31}{360}} = \frac{18}{31} = 0.5806.$$

c. Sea Z^c el evento que indica que la persona está sana. De este modo podemos calcular:

$$P(Z^c) = 1 - P(Z) = 1 - \frac{31}{360} = \frac{329}{360} = 0.9139,$$

y, análogamente

$$P(Z^c|A) = 1 - P(Z|A) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = 0.9000.$$

Por tanto la probabilidad deseada es:

$$P(A|Z^c) = \frac{P(Z^c|A)P(A)}{P(Z^c)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{329}{360}} = \frac{162}{329} = 0.4924.$$

2.a. Tenemos que $f(x) = 0$, para $x < 0$ y $x > 3$, mientras que para $0 \leq x \leq 1$,

$$f(x) = \frac{d}{dx} \frac{x^2}{5} = \frac{2}{5x},$$

y para $1 < x \leq 3$, sigue que

$$f(x) = \frac{d}{dx} \frac{(-x^2 + 6x - 4)}{5} = \frac{(-2x + 6)}{5}.$$

De este modo,

$$f(x) = \begin{cases} 2x/5, & 0 \leq x \leq 1, \\ (-2x + 6)/5, & 1 < x \leq 3, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

2.b. Se desea calcular

$$P(X \leq 2) = F(2) = \frac{-x^2 + 6x - 4}{5} \Big|_{x=2} = \frac{4}{5} = 0.80.$$

Además

$$P(1 < X \leq 2) = F(2) - F(1) = \frac{4}{5} - \frac{x^2}{5} \Big|_{x=1} = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5} = 0.60.$$

Finalmente,

$$P(X > \frac{1}{2}) = 1 - P(X \leq \frac{1}{2}) = 1 - F(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{x^2}{5} \Big|_{x=1/2} = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20} = 0.95.$$

2.c. Se desea calcular:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^3 x f(x) dx = \int_0^1 \frac{2x^2}{5} dx + \int_1^3 \frac{x(-2x+6)}{5} dx \\ &= \frac{2}{5} \int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{5} \int_1^3 (-2x^2 + 6x) dx \\ &= \frac{2}{5} \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{1}{5} \left(\frac{2x^3}{3} + 3x^2 \right) \Big|_1^3 = \frac{2}{5} \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \left(9 - \frac{7}{3} \right) \\ &= \frac{22}{15} = 1.4667. \end{aligned}$$

3. Debemos tener que,

$$\sum_{x=1}^{\infty} p_X(x) = 1.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2} \right)^x &= k \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^x = k \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots \right) = \frac{k}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \right) \\ &= \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = k, \end{aligned}$$

esto lleva a notar que $k = 1$.

4. Note que,

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x p_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{6}{\pi^2 x^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x} \rightarrow \infty,$$

pues la serie armónica $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$, diverge. Es decir, $E(X)$ no existe.