

MAT-041: Probabilidad y Estadística**Certamen 1. Septiembre 25, 2023****Tiempo: 70 minutos****Nombre:** _____**Profesor:** Felipe Osorio

1. Suponga que clasificamos personas en tres grupos A, B y C con distintas características biológicas. La probabilidad de que una persona tomada al azar pertenezca al grupo A, B o C es, respectivamente $1/2$, $1/3$ y $1/6$. Mientras que, la probabilidad de que una persona del grupo A, B o C contraiga la enfermedad Z es, respectivamente $1/10$, $1/15$ y $1/12$. Calcule las siguientes probabilidades:

- a. (10 pts) Una persona contraiga la enfermedad Z .
- b. (10 pts) Una persona enferma sea del grupo A , y
- c. (10 pts) Una persona sana sea del grupo A .

2. Considere

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2/5, & 0 \leq x \leq 1, \\ (-x^2 + 6x - 4)/5, & 1 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

- a. (10 pts) Determine la función de densidad de X .
- b. (15 pts) Calcule las probabilidades:
 - $P(X \leq 2)$.
 - $P(1 < X \leq 2)$.
 - $P(X > \frac{1}{2})$.
- c. (15 pts) Calcule $E(X)$.

3. (15 pts) Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad,

$$p_X(x) = k \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad x \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Determine el valor de k .

4. (15 pts) Considere X variable aleatoria, tal que

$$p_X(x) = \frac{6}{\pi^2 x^2}, \quad x \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Sabemos que $\sum_{x=1}^{\infty} p_X(x) = 1$. ¿ X tiene esperanza?

Puede ser de utilidad:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)},$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|C_i) P(C_i),$$

$$P(C_i|A) = \frac{P(A|C_i) P(C_i)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(A|C_k) P(C_k)},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ax^k = \frac{a}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) \, du$$

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) \, dx$$