

1.a. Note que  $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$ . De este modo,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}.$$

1.b. Como  $A \cap B = \emptyset$ , sigue que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Además,

$$A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup \emptyset = A.$$

De este modo,

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}.$$

2.a. Note que  $X$  es variable aleatoria continua, y deseamos calcular:

$$P(X \geq \frac{3}{2}) = 1 - P(X \leq \frac{3}{2}) = 1 - F_X(\frac{3}{2}) = 1 - 1 = 0,$$

pues  $\frac{3}{2} \in (1, \infty)$ .

Por otro lado, tenemos que

$$P(-2 \leq X \leq \frac{3}{4}) = P(X \leq \frac{3}{4}) - P(X \leq -2) = F_X(\frac{3}{4}) - F_X(-2) = F_X(\frac{3}{4}),$$

pues  $F_X(-2) = 0$ . Ahora,

$$F_X(\frac{3}{4}) = 2(\frac{3}{4}) + (\frac{3}{4})^2 = \frac{3}{2} - \frac{9}{16} = \frac{24}{16} - \frac{9}{16} = \frac{15}{16} = 0.9375.$$

2.b. Note que

$$f_X(x) = F'_X(x) = \frac{d}{dx}(2x - x^2) = 2 - 2x = 2(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

2.c Debemos calcular,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 2(1 - x)x dx = 2 \int_0^1 (x - x^2) dx \\ &= 2 \left[ \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx \right] = 2 \left( \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \right) = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= 2 \left( \frac{3}{6} - \frac{2}{6} \right) = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3. Tenemos que

$$f_X(x) = e^{-x}, \quad x > 0.$$

De este modo,

$$F_X(x) = \int_0^x e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^x = -e^{-x} - (-e^0) = 1 - e^{-x}.$$

De ahí que, para  $0 < x \leq 1$  tenemos  $Y = X$ . Es decir,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq y) = 1 - e^{-y},$$

y

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{d}{dy}(1 - e^{-y}) = e^{-y}.$$

Además, para  $x = 1 \Rightarrow y = 1$ .

Por otro lado, para  $x > 1$ , tenemos  $Y = 1/X$ . De este modo,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(\frac{1}{X} \leq y\right) = P\left(X \geq \frac{1}{y}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{1}{y}\right) \\ &= 1 - F_X(1/y) = 1 - (1 - e^{-1/y}) = e^{-1/y}. \end{aligned}$$

Esto lleva a

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{d}{dy}e^{-1/y} = e^{-1/y} \frac{d}{dy}(-y^{-1}) = \frac{1}{y^2} e^{-1/y}.$$

Además, para  $x \rightarrow 1 \Rightarrow y \rightarrow 1$ . Finalmente, obtenemos:

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \leq 1, \\ \frac{1}{y^2} e^{-1/y}, & y > 1. \end{cases}$$