# IECD-223: Elementos de teoría de conjuntos

**Felipe Osorio**

felipe.osorio@uv.cl

Un conjunto es una colección bastante general de objetos o números, los que son llamados elementos.

Decimos que $a$ es un elemento del conjunto $A$, o bien, que $a$ pertenece a $A$ y escribimos $a \in A$, en caso contrario escribimos $a \notin A$.

Para los objetos contenidos en $A$ usaremos la notación:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$

*Ejemplos:*

$$A = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}, \quad C = \{x : 0 < x < 1\},$$
$$D = \{f : f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}\},$$

donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de todos los números reales.

Un conjunto también puede representar una colección de conjuntos. Sea $A$ y $B$ dos conjuntos, entonces $\mathcal{C} = \{A, B\}$ es un conjunto de conjuntos.

*Ejemplo:*

Sea $A = \{0, 1\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces,

$$\mathcal{C} = \{A, B\} = \{\{0, 1\}, \{1, 2, \ldots, n\}\},$$

es decir $\mathcal{C}$ contiene dos elementos. El conjunto $\{0, 1\}$ y el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

### Definición 1 (Universo y vacio):

El conjunto universal, es aquél conjunto que contiene todos los objetos bajo consideración, y será denotado por $\Omega$. Mientras que el conjunto vacio o nulo, denotado por $\varnothing$ corresponde al conjunto que no contiene elementos.

*Ejemplo:*

Considere $\Omega = \mathbb{R}$ y sea,

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 2 = 0\}.$$

De este modo, $A = \varnothing$, pues la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 2 = 0$ no tiene raíces reales.

## Definición 2 (Subconjunto):

Un conjunto $B$ es llamado subconjunto de $A$ si y sólo si para todo $x \in B$, entonces $x \in A$. en cuyo caso anotamos $B \subseteq A$.

Si $B \subseteq A$ y existe $x \in A$ tal que $x \notin B$, entonces se dice que $B$ es un subconjunto propio de $A$ y anotamos $B \subset A$.

## Definición 3 (Igualdad de conjuntos):

Cuando $B \subseteq A$ y $A \subseteq B$ entonces $A = B$.

*Ejemplos:*

- Suponga que $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 3, 5\}$, en este caso $B \subset A$.
- Si $A = \{0, 1\}$ y $B = \{0, 1\}$, entonces $A = B$.
- Considere $A = \{x : x \geq 0\}$ y $B = \{x : x > 1\}$, luego $B \subset A$.

*Observación:*

Tenemos que $\varnothing \subseteq A$ para todo $A$, mientras que $A \subseteq \Omega$. Más aún $\varnothing \subset \Omega$ y $\Omega \subseteq \Omega$.

Un par de elementos $a$ y $b$ (no necesariamente diferentes) donde $a$ es el primer elemento mientras que $b$ es el segundo es llamado par ordenado y escribimos $(a, b)$.

En general una $n$-upla ordenada es $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y es usual llamar a $a_i$ la $i$-ésima coordanada de la $n$-upla.

### Definición 4 (Producto cartesiano):

El producto cartesiano de los conjuntos $A$ y $B$ denotado por $A \times B$ es definido como

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

*Observación:*

Esta definición puede ser extendida a $n$ conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ como

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

En particular, si $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, entonces el producto cartesiano es denotado por $A^n$.

## Definición 5 (Unión):

La unión de dos conjuntos $A$ y $B$ consiste de todos los elementos en $A$ o en $B$, es decir

$$A \cup B = \{x : x \in A, \text{ o } x \in B\}.$$

La definición anterior se extiende a $n$ conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ como

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \in \Omega : x \in A_k \text{ para al menos un } k \in \{1, 2, \ldots, n\}\},$$

y más generalmente para una familia de conjuntos $\{A_i, i \in I\}$, con $I$ un conjunto de índices,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in \Omega : x \in A_i \text{ para al menos un subíndice } i \in I\}.$$

*Ejemplo:*

Sea $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 5\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 5\}$. Ahora, si $A = (0, 1]$ y $B = (\frac{1}{2}, \infty)$, entonces $A \cup B = (0, \infty)$.

### Definición 6 (Intersección):

La intersección de dos conjuntos $A$ y $B$ es el conjunto que incluye los elementos comunes a ambos conjuntos y es denotado por $A \cap B$, esto es

$$A \cap B = \{x : x \in A, \text{ y } x \in B\}.$$

Esta definición puede ser extendida a $n$ conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ como

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \in \Omega : x \in A_k \text{ para todos los subíndices } k \in \{1, 2, \ldots, n\}\},$$

y más generalmente para una familia de conjuntos $\{A_i, i \in I\}$, como:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in \Omega : x \in A_i \text{ para todos los subíndices } i \in I\}.$$

*Ejemplo:*

Para $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 5\}$, entonces $A \cap B = \{1\}$. Mientras que, si $A = (0, 1]$ y $B = (\frac{1}{2}, \infty)$, entonces $A \cap B = (\frac{1}{2}, 1]$.

**Definición 7 (Complemento):**

El complemento (con respecto a $\Omega$) de un conjunto $A$ es definido como:

$$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}.$$

Es fácil notar que

$$(A^c)^c = A, \qquad \Omega^c = \varnothing, \qquad \varnothing^c = \Omega.$$

*Ejemplos:*

- Suponga $\Omega = [0,1]$ y $A = [0, \frac{1}{2})$, luego $A^c = [\frac{1}{2}, 1]$.
- Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y $A = \mathbb{R}$, entonces $A^c = \varnothing$.

### Definición 8 (Diferencia entre conjuntos):

La diferencia del conjunto $B$ con el conjunto $A$ es definida como el conjunto de los elementos de $A$ que no pertenecen a $B$, esto es,

$$A - B = \{x \in \Omega : x \in A, x \notin B\}.$$

Podemos apreciar que,

$$A - B = A \cap B^c, \qquad A^c = \Omega - A.$$

**Definición 9 (Conjuntos disjuntos):**

Dos conjuntos $A$ y $B$ se dicen disjuntos si ellos no tienen elementos en común, y escribimos $A \cap B = \varnothing$.

Más generalmente, los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ se dicen disjuntos por pares (o mutuamente excluyentes) si

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \qquad i \neq j,$$

con $\{i, j\}$ desde el conjunto de índices $\{1, 2, \ldots, n\}$.

*Ejemplo:*

Sea $A = \{x : x > 1\}$ y $B = \{x : x < 0\}$. Entonces $A$ y $B$ son disjuntos.

## Propiedades:

- Asociatividad:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

- Conmutatividad:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

- Distributividad:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

- Sobre el vacio y conjunto universo.

$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A, \qquad A \cap \Omega = \Omega \cap A = A.$$

- Sobre el complemento

$$A \cap A^c = \varnothing, \qquad A \cup A^c = \Omega.$$

- Leyes de De Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Las fórmulas de De Morgan pueden ser extendidas para $n$ conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, como:

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c,$$
$$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c,$$

y para una familia de conjuntos $\{A_i, i \in I\}$, como:

$$\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c, \qquad \Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

**Definición 10 (Partición):**

Una colección de conjuntos $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es una partición del conjunto $A$, si satisface las condiciones:

(a) $\{A_1, \ldots, A_n\}$ son disjuntos por pares.

(b) $\cup_{i=1}^{n} A_i = A$.

*Ejemplo:*

$A$ y $A^c$ son una partición de $\Omega$, pues

$$A \cap A^c = \varnothing, \qquad A \cup A^c = \Omega.$$

*Ejemplo:*

La familia de conjuntos $A_i = [i, i+1)$, para $i = 0, 1, 2, \ldots$ forman una partición de $[0, \infty)$.