MAT-031: Fundamentos de probabilidad

Felipe Osorio

felipe.osorio@uv.cl

Nuestro objetivo es caracterizar el concepto de medir un conjunto, y usando elementos de teoría de conjuntos, describiremos el resultado de un experimento aleatorio.

Definición 1 (Espacio muestral):

El conjunto Ω, de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio es llamado espacio muestral.

Ejemplos:

Considere los siguientes experimentos aleatorios.

(a) Lanzar una moneda, en cuyo caso $\Omega = \{C, S\}$.

(b) Lanzar un dado. De este modo, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(c) Jugar al "cachipún" (piedra/papel/tijeras), así $\Omega = \{\text{papel}, \text{piedra}, \text{tijeras}\}$.

(d) Duración de un artículo eléctrico. En este caso $\Omega = [0, \infty)$.

Definición 2 (Evento):

Un evento (o suceso) es cualquier colección de resultados posibles de un experimento aleatorio, es decir, cualquier subconjunto de Ω[1]

Sea $A \subseteq \Omega$, diremos que A ocurre si $\omega \in A$ con $\omega \in \Omega$ un resultado asociado a un experimento aleatorio.

Definiremos una familia de conjuntos, tal que todo evento $A \subseteq \Omega$, pertenezca al espacio de eventos, denotado por $\mathcal{F}$. Es decir, $\mathcal{F}$ es conjunto de todos los subconjuntos posibles de Ω.

Objetivo:

Es decir, para todo evento $A \in \mathcal{F}$ deseamos asociar un número entre cero y uno llamado probabilidad de A.

[1] Incluyendo al propio Ω.

Definición 3 (σ-álgebra):

Una colección de subconjuntos de Ω es llamado σ-álgebra y es denotada por $\mathcal{F}$ si satisface las propiedades:

(a) $\varnothing \in \mathcal{F}$.

(b) Si $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$.

(c) Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Note que $\varnothing \subset \Omega$ y $\Omega = \varnothing^c$, así por la Propiedad (a) y (b) sigue que $\Omega \in \mathcal{F}$.

Además, si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ entonces $A_1^c, A_2^c, \dots \in \mathcal{F}$ y de este modo, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{F}$. Por las leyes de De Morgan, tenemos

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Es decir, tenemos que $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Observación:

Asociado a un espacio muestral Ω puede haber muchas σ-álgebras. Por ejemplo, la colección $\{\varnothing, \Omega\}$ es σ-álgebra (minimal).

Ejemplo:

Considere $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Los siguientes subconjuntos de Ω, ¿son σ-álgebras?

$$\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}\},$$
$$\mathcal{F}_2 = \{\varnothing, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$$

Claramente se verifica que $\mathcal{F}_1$ es una σ-álgebra, mientras que $\mathcal{F}_2$ no.

Definición 4 (Probabilidad):

Dado un espacio muestral Ω y un σ-álgebra asociada $\mathcal{F}$, una función de probabilidad $\mathsf{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, satisface:

(a) $\mathsf{P}(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{F}$.

(b) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

(c) Si $A_1, A_2, \dots$ son mutuamente excluyentes, entonces

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i).$$

Observación:

Considere P una medida de probabilidad definida en $\mathcal{F}$. Entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ se denomina espacio de probabilidad.

Resultado 1:

Si P es una función de probabilidad y A es cualquier conjunto en $\mathcal{F}$, entonces

(a) $\mathsf{P}(\varnothing) = 0$.

(b) $\mathsf{P}(A) \leq 1$.

(c) $\mathsf{P}(A^c) = 1 - \mathsf{P}(A)$.

Resultado 2:

Si P es una función de probabilidad y $A, B \in \mathcal{F}$. Entonces,

(a) $\mathsf{P}(B \cap A^c) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$.

(b) $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$.

(c) Si $A \subseteq B \Rightarrow \mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$.

Ejemplo:

En una cierta zona urbana, el 60% de los propietarios están suscritos a Netflix y el 80% está suscrito a Prime Video, mientras que el 50% está suscrito a ambos servicios.

Si un propietario es seleccionado al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que esté suscrito al menos a uno de estos servicios?

Defina el evento A : un propietario está suscrito a Netflix, y B : un propietario está suscrito a Prime Video. Se desea calcular la probabilidad

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B) = 0.6 + 0.8 - 0.5 = 0.9.$$

Además, ¿cuál es la probabilidad de que esté suscrito sólo a uno de los dos servicios?

$$\begin{aligned} \mathsf{P}[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] &= \mathsf{P}(A \cap B^c) + \mathsf{P}(A^c \cap B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - 2\,\mathsf{P}(A \cap B) \\ &= 0.6 + 0.8 - 2 \cdot 0.5 = 0.4. \end{aligned}$$

Considere

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\},$$

un espacio muestral finito.

Para caracterizar $\mathsf{P}(A)$ supondremos eventos elementales, $A = \{\omega_i\}$ y defina $p_i = \mathsf{P}(\{\omega_i\})$ la probabilidad de $\{\omega_i\}$ tal que,

(a) $p_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, n$.

(b) $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Suponga además que cada $\{\omega_i\}$ es igualmente probable. Es decir, $p_i = \mathsf{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$. Luego, para un evento $A = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_r}\}$ sigue que

$$\mathsf{P}(A) = \frac{r}{n},$$

o bien,

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\mathsf{N}(A)}{\mathsf{N}(\Omega)},$$

con $\mathsf{N}(A)$ la cardinalidad del conjunto A.

Ejemplo:

Se lanza un dados dos veces. Considere los siguientes eventos:

A : la suma de los resultados es menor o igual a 3.

B : el resultado del primer lanzamiento es impar.

Primeramente, describiremos el espacio muestral asociado al experimento, es decir:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Luego,

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\mathsf{N}(A)}{\mathsf{N}(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, \qquad \mathsf{P}(B) = \frac{\mathsf{N}(B)}{\mathsf{N}(\Omega)} = \frac{1}{2}.$$

Además,

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B) = \frac{1}{12} + \frac{18}{36} - \frac{2}{36} = \frac{19}{36}.$$

$$\mathsf{P}(A^c) = 1 - \mathsf{P}(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

Ejemplo:

En un lote de 50 ampolletas hay 2 defectuosas. Se extraen 5 de ellas al azar sin reemplazo. Hallar la probabilidad de que al menos una sea defectuosa.

Considere el evento A : existe al menos una ampolleta defectuosa en las 5 extracciones.

De ahí que A^c corresponde al evento: ninguna ampolleta es defectuosa. Entonces,

$$\mathsf{P}(A^c) = \frac{48}{50}\,\frac{47}{49}\,\frac{46}{48}\,\frac{45}{47}\,\frac{44}{46} = 0.9600 \cdot 0.9592 \cdot 0.9583 \cdot 0.9574 \cdot 0.9565$$

$$= 0.8082.$$

Así, $\mathsf{P}(A) \approx 0.2$. Note que una manera alternativa de calcular esta probabilidad es usando combinatorios. En efecto,

$$\mathsf{P}(A^c) = \frac{\binom{48}{5}\binom{2}{0}}{\binom{50}{5}} = \frac{1\,712\,304}{2\,118\,760} = 0.8082.$$

Ejemplo (Problema del cumpleaños):

Suponga que existe 50 personas en una sala y que deseamos determinar la probabilidad de que al menos un par de personas tengan la misma fecha de cumpleaños.[2]

Para abordar el problema, sea A el evento de que 2 personas tengan cumpleaños en días diferentes, entonces:

$$\mathsf{P}(A) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365}.$$

Considere ahora que escogemos una tercera persona, es decir, para el evento B : que 3 personas tengan cumpleaños en días diferentes, es dado por

$$\mathsf{P}(A) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}.$$

[2] No consideraremos el 29 de febrero para este problema.

Problema del cumpleaños (continuación):

Suponga un grupo de k personas y considere que se desea calcular la probabilidad de que al menos 2 personas cumplan años el mismo día.

Defina el evento A_k : k personas tienen sus cumpleaños en fechas diferentes. Como el año tiene 365 días, el número de cumpleaños posibles es 365^k. Así,

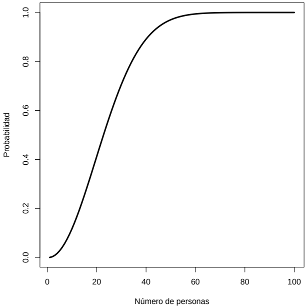
$$\mathsf{P}(A_k) = \frac{(365)_k}{365^k} = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365-k+1)}{365^k} = \frac{365!}{(365-k)!}\,\frac{1}{365^k},$$

y por la regla del complemento,

$$\mathsf{P}(A_k^c) = 1 - \frac{(365)_k}{365^k}.$$

Es decir, por ejemplo

k	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$\mathsf{P}(A_k^c)$	0.117	0.253	0.411	0.569	0.706	0.814	0.891	0.941	0.970



Ejemplo:

Considere un lote con 80 artículos sin defectos y 20 defectuosos y suponga que se selecciona 2 artículos (a) con substitución, y (b) sin substitución.

Defina los eventos:

$$A = \{\text{el 1er artículo es defectuoso}\},$$
$$B = \{\text{el 2do artículo es defectuoso}\}.$$

Cuando escogemos **con** substitución, tenemos:

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}.$$

Cuando escogemos **sin** substitución, tenemos que:

$$\mathsf{P}(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5},$$

pero, ¿cambia $\mathsf{P}(B)$?

Definición 5 (Probabilidad condicional):

Si A y B son dos eventos en Ω y $\mathsf{P}(B) > 0$, entonces la probabilidad condicional de A dado B, escrito $\mathsf{P}(A|B)$ es

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Note que $\mathsf{P}(B|B) = 1$, es decir, B "actua" como Ω. En efecto, como $A = A \cap \Omega$, tenemos

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A|\Omega) = \frac{\mathsf{P}(A \cap \Omega)}{\mathsf{P}(\Omega)}.$$

La ocurrencia de A es calibrada con relación a B.

Fundamentos de probabilidad

Ejemplo (continuación):

En el ejemplo anterior, se desea calcular $\mathsf{P}(B|A) = 19/99$, pues si A ya ha ocurrido sólo quedan 19 defectuosos entre los 99 artículos.

Reexpresando la probabilidad condicional, tenemos

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B),$$

o bien

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(B|A)\,\mathsf{P}(A).$$

Las expresiones anteriores permiten "contornar" cálculos complicados, usando[3]

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(B|A)\,\mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(B)}.$$

[3] Esto es un caso particular del Teorema de Bayes.

Observación:

El espacio de probabilidad definido por $\mathcal{F} \cap B$ permite notar que $\mathsf{P}(A|B)$ es una función de probabilidad, es decir satisface:

(a) $\mathsf{P}(A|B) \geq 0$.

(b) $\mathsf{P}(\Omega|B) = 1$.

(c) Para $\{A_n\}_{n\geq 1}$ sucesión disjunta

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n | B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n|B).$$

Resultado 3:

Si P es una función de probabilidad. Entonces,

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A \cap C_i),$$

para cualquier partición $C_1, C_2, \ldots$.

Resultado 4 (Probabilidad total):

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ un espacio de probabilidad y sea $C_1, C_2, \ldots$, una partición contable de Ω tal que $\mathsf{P}(C_i) \geq 0$, $\forall i$. Entonces, para todo $A \in \mathcal{F}$,

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i | C_i)\, \mathsf{P}(C_i).$$

Resultado 5 (Teorema de Bayes):

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ espacio de probabilidad y sea $\{C_i\}_{i \geq 1}$ partición contable de Ω con $\mathsf{P}(C_i) \geq 0$, $\forall i$. Entonces, para todo $A \in \mathcal{F}$, tenemos que

$$\mathsf{P}(C_i|A) = \frac{\mathsf{P}(A|C_i)\,\mathsf{P}(C_i)}{\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A|C_k)\,\mathsf{P}(C_k)},$$

siempre que $\mathsf{P}(A) > 0$.

Ejemplo:

Considere un lote de 20 artículos defectuosos y 80 sin defectos, desde los que se escoge 2 artículos sin reemplazo. Sea

$$A = \{\text{el 1er artículo es defectuoso}\},$$
$$B = \{\text{el 2do artículo es defectuoso}\}.$$

Para calcular $\mathsf{P}(B)$ podemos hacer

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(B) &= \mathsf{P}(B|A)\,\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B|A^c)\,\mathsf{P}(A^c) = \frac{19}{99}\frac{1}{5} + \frac{20}{99}\frac{4}{5} \\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{99}(19 + 20 \cdot 4) = \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Definición 6 (Independencia):

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ un espacio de probabilidad y sean $A, B \in \mathcal{F}$. Se dice que A y B son independientes si y sólo si

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B).$$

Interpretación:

Podemos entender la independencia como: "la ocurrencia de un evento B no tiene efecto en la probabilidad de otro evento A". Es decir,

$$\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A).$$

Además,

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(B)} = \mathsf{P}(B),$$

es decir, la ocurrencia de A **no** tiene efecto en B.

Ejemplo:

Se tienen tres urnas, la primera con 2 bolas blancas y dos bolas negras, la segunda con dos bolas blancas y una negra y la tercera con tres bolas negras y una blanca.

Suponga que se extrae una bola de cada urna, ¿cuál es la probabilidad de que las tres bolas sean blancas?

Defina el evento B_i : extraer una bola blanca de la i-ésima urna, $i = 1, 2, 3$. De este modo, asumiendo independencia[4] obtenemos

$$\mathsf{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathsf{P}(B_1)\,\mathsf{P}(B_2)\,\mathsf{P}(B_3) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

[4] ¿Es un supuesto razonable?

Ejemplo (continuación):

Suponga que se extrae una bola de una urna al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca? Defina los eventos,

U_i : la bola extraída proviene de la i-ésima urna, $i = 1, 2, 3.$

B : extraer una bola blanca.

Luego,

$$\mathsf{P}(B) = \sum_{i=1}^{3} \mathsf{P}(B|U_i)\,\mathsf{P}(U_i) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{3} = \frac{17}{36}.$$

Si se sabe que la bola extraída es de color blanco, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraída de la urna 1? En efecto,

$$\mathsf{P}(U_1|B) = \frac{\mathsf{P}(U_1 \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{\mathsf{P}(B|U_1)\,\mathsf{P}(U_1)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}}{\frac{17}{36}} = \frac{6}{17}.$$

Resultado 6:

Si A y B son independientes, entonces los siguientes pares también son independientes

(a) A y B^c.

(b) A^c y B.

(c) A^c y B^c.

Definición 7:

Una colección de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es mutuamente independiente si para cualquier subcolección $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$, tenemos

$$\mathsf{P}\left(\prod_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} \mathsf{P}(A_{i_j}).$$

Ejemplo:

Se lanzan 3 dados de distinto color: blanco, rojo y negro ¿Cuál es la probabilidad de que el dado blanco salga 3 y los otros dos no? Considere A, B y C los eventos

$$\begin{aligned} A &: \text{resultado del dado blanco es 3,} \\ B &: \text{resultado del dado rojo es 3,} \\ C &: \text{resultado del dado negro es 3,} \end{aligned}$$

tenemos $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(C) = 1/6$ y se pide calcular

$$\mathsf{P}(A \cap B^c \cap C^c) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B^c)\,\mathsf{P}(C^c) = \frac{1}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6} = \frac{25}{216}.$$