IECD-223: Probabilidades **Nombre:** __________________________

Prueba 2. Noviembre 5, 2025 **Profesor:** Felipe Osorio

Tiempo: 120 minutos

---

1. Considere la variable aleatoria X con densidad

$$f(x;\theta) = \frac{x^2}{2\theta^3}\exp(-x/\theta), \qquad x > 0, \theta > 0.$$

a. (10 pts) Obtener $M_X(t)$.

b. (10 pts) Calcular $\mathsf{E}(X)$ y $\mathsf{var}(X)$.

Sugerencia: Recuerde que

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-bx}\,\mathsf{d}x = \frac{\Gamma(a)}{b^a}, \qquad a > 0, b > 0,$$

mientras que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Además, $\Gamma(k) = (k-1)!$ para k entero positivo.

2. (20 pts) Considere la variable aleatoria X tal que, con probabilidad p sigue una función de densidad $f_1(x)$ mientras que con probabilidad q tiene densidad $f_2(x)$ con $p + q = 1$. Obtenga la función de densidad de X, su esperanza y su varianza.

Sugerencia: Obtenga $F_X(x)$ usando el teorema de probabilidad total. Asuma que

$$\mu_j = \mathsf{E}_j(X) = \int_{-\infty}^\infty x\, f_j(x)\,\mathsf{d}x, \qquad \phi_j = \mathsf{E}_j(X^2) = \int_{-\infty}^\infty x^2 f_j(x)\,\mathsf{d}x,$$

para $j = 1, 2$.

3. (20 pts) Suponga la variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{\exp\{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2\}}{\sqrt{2\pi}\Phi(\theta)}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\Phi(\cdot)$ denota la CDF de la distribución normal estándar. Verifique que $f(x;\theta)$ pertenece a la familia exponencial, determine su función generadora de cumulantes así como la esperanza de X.