IECD-223: Técnicas de conteo

Felipe Osorio

felipe.osorio@uv.cl

El análisis combinatorio tiene por objetivo contar todas las posibles agrupaciones desde un conjunto finito.

Definición 1 (Conjuntos equivalentes):

Los conjuntos A y B se dicen equivalentes y anotamos $A \sim B$ si y solo si existe una función biyectiva de A a B.

Ejemplo:

El conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es equivalente al conjunto $B = \{1, 2, \ldots, n\}$ con $f(a_k) = k$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$, es una función biyectiva desde A a B.

Definición 2 (Conjunto finito):

Un conjunto A es llamado finito, con n elementos si y solo si es equivalente al conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Observación:

Asumiremos que $\varnothing$ es finito con cero elementos. Además, un conjunto que no es finito de dice infinito.

Definición 3 (Conjunto infinito numerable):

Un conjunto A se denomina infinito numerable si y solo si es equivalente al conjunto de números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Observación:

Un conjunto A es llamado numerable (o contable) si es finito o infinito numerable, en caso contrario se dice no numerable.

Definición 4 (Cardinalidad):

El número de elementos de un conjunto finito A, denotado por $\mathsf{N}(A)$, es llamado cardinal de A.

Resultado 1:

Si A y B son conjuntos finitos y equivalentes, entonces

$$\mathsf{N}(A) = \mathsf{N}(B).$$

Observación:

El cardinal de un conjunto finito A puede ser determinado desde un conjunto finito B, equivalente a A, cuya cardinalidad sea conocida.

Resultado 2:

Si A y B son conjuntos finitos, entonces

$$\mathsf{N}(A \times B) = \mathsf{N}(A)\,\mathsf{N}(B).$$

Observación:

Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son conjuntos finitos, entonces

$$\mathsf{N}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) = \mathsf{N}(A_1)\,\mathsf{N}(A_2) \cdots \mathsf{N}(A_k).$$

Resultado 3 (Principio de multiplicación):

Suponga que el conjunto A_1 contiene n_1 elementos, el conjunto A_2 contiene n_2 elementos, ..., y el conjunto A_k contiene n_k elementos. Entonces el número de maneras de escoger un objeto desde cada uno de los k conjuntos es:

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_k.$$

Resultado 4:

Si A y B son conjuntos finitos y disjuntos, entonces

$$\mathsf{N}(A \cup B) = \mathsf{N}(A) + \mathsf{N}(B).$$

Observación:

Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son conjuntos finitos y mutuamente excluyentes, entonces

$$\mathsf{N}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \mathsf{N}(A_1) + \mathsf{N}(A_2) + \cdots + \mathsf{N}(A_k).$$

Resultado 5 (Principio de adición):

Si un elemento ω_i puede ser seleccionado en n_i maneras diferentes para $i = 1, 2, \ldots, k$ y la selección de ω_i excluye la selección simultánea de ω_j, para $i, j = 1, 2, \ldots, k$, $i \neq j$. Entonces cualquiera de los elementos ω_1 o ω_2 o $\ldots$ o ω_k, puede ser seleccionado en

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k,$$

maneras.

Debemos distinguir entre conjuntos ordenados y desordenados. En un conjunto ordenado, el orden es relevante, mientras que no lo será para un conjunto desordenado.

Ejemplo:

Considere $A = \{1, 2, 3\}$. El listado de todos los subconjuntos ordenados de tamaño 2, es dado por:

$$(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2),$$

mientras que la lista de todos los subconjuntos desordenados de tamaño 2 consiste en:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}.$$

Note que en este caso el conjunto $\{2, 1\}$ es idéntico al conjunto $\{1, 2\}$, de modo que no se incluye en el listado.

Definición 5 (k-permutación de n):

Sea A un conjunto finito con n elementos. Una k-upla ordenada $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ con $a_r \in A$, $r = 1, 2, \ldots, k$, es llamada una k-permutación del conjunto A, o bien una k-permutación de n.

Definición 6:

El número de k-permutaciones de n, denotadas por $P_{n,k}$ o bien $(n)_k$, es dada por

$$P_{n,k} := (n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Para el caso particular en que $k = n$, tenemos que el número de permutaciones de n, es dada por

$$P_{n,n} = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1.$$

Definición 7 (factorial):

El producto de todos los enteros desde 1 a n, es llamado n factorial y se denota como $n!$, es decir

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n = \prod_{j=1}^{n} j.$$

Resultado 6:

El número $n!$, satisface la relación de recurrencia:

$$n! = n(n-1)!, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

con condición inicial $0! = 1$.

Podemos escribir $P_{n,k} = (n)_k$ como:

$$\begin{aligned} P_{n,k} &= n(n-1)\cdots(n-(k-1)) \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))(n-k)(n-(k+1))\cdots 2 \cdot 1}{(n-k)(n-(k+1))\cdots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}, \end{aligned}$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$, y $n = 1, 2, \ldots$.

Suponga las $3! = 6$ permutaciones de las 3 letras ABB, a saber:

ABB, ABB, BAB, BBA, BAB, BBA.

Sin embargo, las dos B's no son distinguibles. En efecto, las únicas permutaciones distinguibles son ABB, BAB y BBA. De este modo, los distintos ordenamientos son

$$\frac{3!}{2!\,1!} = \frac{6}{2} = 3,$$

pues disponemos un total de 3 letras, dos de ellas B y una A.

Resultado 7:

El número de permutaciones de n tipos de elementos con $k_1, k_2, \ldots, k_r$ elementos, respectivamente, es dado por

$$M_{k_1,k_2,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}, \qquad n = k_1 + k_2 + \cdots + k_r.$$

Suponga que se lanza 3 veces una moneda y registramos si el resultado es cara (C) o sello (S). De este modo, obtenemos:

$$(C,C,C),(C,C,S),(C,S,C),(S,C,C),(C,S,S),(S,C,S),(S,S,C),(S,S,S).$$

Es decir, tenemos $2^3 = 8$ permutaciones con repetición.

Resultado 8:

El número de k-permutaciones de n con repetición, denotada como $U_{n,k}$ es dada por:

$$U_{n,k} = n^k.$$

Definición 8 (k-combinación de n):

Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto finito de n elementos. Una colección (desordenada) de k elementos $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ con $a_r \in A$, $r = 1, 2, \ldots, k$ es llamada una k-combinación del conjunto A, o bien una k-combinación de n.

Resultado 9:

El número de k-combinaciones de n, denotada por $C_{n,k}$ o bien $\binom{n}{k}$ es dada por

$$C_{n,k} := \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Observación (Fórmula del binomio de Newton):

Sea a, b dos número reales y n un entero positivo. Entonces

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$