MAT-266: Análisis de Regresión

Certamen 1. Mayo 5, 2021 **Nombre:** ____________________

Tiempo: 70 minutos **Profesor:** Felipe Osorio

---

1. (20 pts) Considere $\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \dots, \boldsymbol{Y}_n$ vectores aleatorios independientes cada uno con distribución $\mathsf{N}_k(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$, para $i = 1, \dots, N$. Muestre que

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \boldsymbol{Y}_i \sim \mathsf{N}_k\Big(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \boldsymbol{\mu}_i, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 \boldsymbol{\Sigma}_i\Big),$$

para $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ constantes conocidas, y de ahí que para $\boldsymbol{Y}_1, \dots, \boldsymbol{Y}_n$ muestra aleatoria desde $\mathsf{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

$$\sqrt{N}(\overline{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{Y}_i - \boldsymbol{\mu}) \sim \mathsf{N}_k(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}).$$

2. (25 pts) Suponga $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_4(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ con $\boldsymbol{\mu} = (1, -1, 1, -1)^\top$ y $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{I}_4 + \boldsymbol{1}_4 \boldsymbol{1}_4^\top$, y sea

$$Q_1 = \tfrac{1}{2}(X_1 - X_2)^2 + \tfrac{1}{2}(X_3 - X_4)^2, \qquad Q_2 = \tfrac{1}{2}(X_1 + X_2)^2 + \tfrac{1}{2}(X_3 + X_4)^2.$$

a) Determine la distribución de cada una de las formas cuadráticas, Q_1 y Q_2.

b) ¿Q_1 y Q_2 son independientes?

3. (30 pts) Considere el modelo lineal

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon},$$

con $\mathsf{E}(\boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{0}$ y $\mathsf{Cov}(\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2 \boldsymbol{I}$.

a) Muestre que

$$\|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\|^2 = \|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\|^2 + (\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^\top \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X} (\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}),$$

y deduzca que $Q(\boldsymbol{\beta}) = \|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\|^2$ es minimizado para $\boldsymbol{\beta} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}$ con $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{Y}$.

b) Verifique que $\boldsymbol{e}^\top \widehat{\boldsymbol{Y}} = 0$ donde $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{Y} - \widehat{\boldsymbol{Y}}$ con $\widehat{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$.

c) Suponga que $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathsf{N}_n(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n)$, determine la distribución de $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{Y}$ con $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}$, tal que

$$\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^\top,$$

obtenga el estimador ML de σ^2 basado en la distribución de $\boldsymbol{Z}$. ¿Este estimador es insesgado?

4. (25 pts) Sean $Y_1, \dots, Y_n$ variables aleatorias independientes con $Y_i \sim \mathsf{N}(\alpha + \theta z_i, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$, donde $\{z_i\}$ son constantes conocidas, tales que $\sum_{i=1}^n z_i = 0$. Obtenga el estimador ML de $\boldsymbol{\beta} = (\alpha, \theta)^\top$ y determine su matriz de covarianza. ¿Son $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\theta}$ independientes?