MAT-266: Algunas distribuciones no centrales

Felipe Osorio

fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM

Resultado 1:

Sea $\boldsymbol{Z} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$ y sea $U = \boldsymbol{Z}^\top \boldsymbol{Z}$. Entonces $U \sim \chi^2(p)$, con función de densidad

$$f(u) = \frac{1}{2^{p/2}\Gamma(p/2)}\, u^{p/2-1} \exp(-u/2), \qquad u > 0.$$

Demostración:

Como U es una función de variables aleatorias normales, entonces su función característica asume la forma

$$\begin{aligned}\varphi_U(t) = \mathsf{E}\{\exp(itU)\} &= \int_{\mathbb{R}^p} \exp(itu)(2\pi)^{-p/2} \exp(-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{z})\, \mathrm{d}\boldsymbol{z} \\ &= (2\pi)^{-p/2} \int_{\mathbb{R}^p} \exp(-\tfrac{1}{2}(1-2it)\boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{z})\, \mathrm{d}\boldsymbol{z} = (1-2it)^{-p/2},\end{aligned}$$

que corresponde a la función característica de una variable aleatoria chi-cuadrado con p grados de libertad.

Definición 1 (Distribución chi-cuadrado no central):

Si $\boldsymbol{Y} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{I})$, entonces $U = \boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{Y}$ tiene distribución chi-cuadrado no central con p grados de libertad y parámetro de no centralidad $\lambda = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\mu}/2$, en cuyo caso anotamos $U \sim \chi^2(p; \lambda)$.

Resultado 2:

Sea $\boldsymbol{Y} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{I})$ donde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p) \neq \boldsymbol{0}$ y sea $U = \boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{Y}$. Entonces la función característica de U es dada por

$$\varphi_U(t) = (1 - 2it)^{-p/2} \exp\Big(\frac{2it\lambda}{1 - 2it}\Big),$$

con $\lambda = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\mu}/2$.

Demostración:

Como $Y_1, \dots, Y_p$ son variables aleatorias independientes, tenemos

$$\varphi_U(t) = \prod_{j=1}^{p} \varphi_{Y_j^2}(t).$$

Ahora, la función característica asociada a la variable aleatoria Y_j^2 es dada por

$$\begin{aligned}\varphi_{Y_j^2}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ity_j^2)(2\pi)^{-1/2} \exp\{-\tfrac{1}{2}(y_j - \mu_j)^2\} \, \mathrm{d}y_j \\ &= \exp\Big\{\frac{\mu_j^2}{2}\Big(\frac{1}{1-2it}\Big) - \frac{\mu_j^2}{2}\Big\} \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} \exp\Big\{-\frac{(1-2it)}{2}\Big(y_j - \frac{\mu_j}{1-2it}\Big)^2\Big\} \, \mathrm{d}y_j\end{aligned}$$

de este modo,

$$\varphi_{Y_j^2}(t) = (1-2it)^{-1/2} \exp\Big\{\frac{\mu_j^2}{2}\Big(\frac{2it}{1-2it}\Big)\Big\},$$

y por tanto la función característica de la variable $U = \sum_{j=1}^{p} Y_j^2$, asume la forma

$$\varphi_U(t) = (1-2it)^{-p/2} \exp\Big(\frac{2it\lambda}{1-2it}\Big), \qquad \lambda = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\mu}/2.$$

Observación:

La función característica de la variable $U = \boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{Y}$, puede ser escrita como

$$\begin{aligned}
\varphi_U(t) &= (1-2it)^{-p/2} \exp\left(\frac{\lambda}{1-2it} - \lambda\right) \\
&= (1-2it)^{-p/2} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{\lambda/(1-2it)\}^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} (1-2it)^{-(p+2k)/2}.
\end{aligned}$$

Es decir, la función característica de U es un promedio ponderado con pesos Poisson de funciones características de variables aleatorias chi-cuadrado con $p+2k$ grados de libertad.

Chi-cuadrado no central

Usando la relación entre funciones características y sus correspondientes funciones de densidad, sigue que la chi-cuadrado no central tiene la siguiente representación:

$$U|Z \sim \chi^2(p+2z), \qquad Z \sim \textsf{Poisson}(\lambda), \tag{1}$$

con densidad

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \, \frac{1}{2^{p/2+k}\Gamma(\frac{p}{2}+k)} \, u^{p/2+k-1} \exp(-u/2), \quad u > 0.$$

La representación en (1) es muy útil para obtener los momentos de una variable aleatoria con distribución chi-cuadrado no central.

Chi-cuadrado no central

El valor esperado de $U \sim \chi^2(p;\lambda)$ es dado por

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(U) &= \mathsf{E}\{\mathsf{E}(U|Z)\} = \mathsf{E}(p + 2Z) \\ &= p + 2\,\mathsf{E}(Z) = p + 2\lambda, \end{aligned}$$

mientras que la varianza de U puede ser calculada como

$$\begin{aligned} \mathsf{var}(U) &= \mathsf{E}\{\mathsf{var}(U|Z)\} + \mathsf{var}\{\mathsf{E}(U|Z)\} \\ &= \mathsf{E}\{2(p + 2Z)\} + \mathsf{var}(p + 2Z) \\ &= 2p + 4\lambda + 4\lambda = 2p + 8\lambda. \end{aligned}$$

Resultado 3:

Si $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ donde $\boldsymbol{\Sigma}$ es matriz no singular. Entonces

(a) $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2(p)$.

(b) $\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{X} \sim \chi^2(p; \lambda)$, donde $\lambda = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$.

Demostración:

Considere $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top$ con $\boldsymbol{B}$ no singular. Para probar (a), tome

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}),$$

luego $\boldsymbol{Z} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$ y de este modo

$$(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{Z}^\top \boldsymbol{Z} \sim \chi^2(p; 0).$$

Para probar (b), sea $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{X}$, luego

$$\boldsymbol{Y} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{I}),$$

y

$$\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{Y},$$

que por definición tiene una distribución chi-cuadrado no central, con parámetro de no centralidad

$$\lambda = \frac{1}{2}(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\mu})^\top (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}.$$

Definición 2 (Distribución F no central):

Sea $X_1 \sim \chi^2(\nu_1; \lambda)$ y $X_2 \sim \chi^2(\nu_2)$ variables aleatorias independientes. Entonces,

$$F = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2} \sim \mathsf{F}(\nu_1, \nu_2, \lambda),$$

es decir F sigue una distribución F no central con ν_1 y ν_2 grados de libertad y parámetro de no centralidad λ.

Definición 3 (Distribución Beta no central):

Considere $U_1 \sim \chi^2(\nu_1; \lambda)$, $U_2 \sim \chi^2(\nu_2)$ tal que U_1 y U_2 son variables aleatorias independientes. Entonces,

$$G = \frac{U_1}{U_1 + U_2} \sim \mathsf{Beta}(\nu_1, \nu_2, \lambda),$$

esto es, G sigue una distribución Beta no central con parámetros de forma y escala ν_1 y ν_2, respectivamente y parámetro de no centralidad λ.

Definición 4 (Distribución t de Student no central):

Si $Y \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ y $U/\sigma^2 \sim \chi^2(\nu)$ son independientes, entonces

$$T = \frac{Y}{\sqrt{U/\nu}} \sim t(\nu; \lambda), \quad \lambda = \mu/\sigma,$$

es llamada una variable aleatoria con distribución t de Student no central con ν grados de libertad y parámetro de no centralidad λ.

Observación:

Si $Z \sim \mathsf{N}(0, 1)$, $U \sim \chi^2(\nu)$, δ es una constante, y Z es independiente de U, entonces

$$T = \frac{Z + \delta}{\sqrt{U/\nu}} \sim t(\nu; \delta).$$

Además,

$$t^2(\nu; \lambda) \stackrel{\mathsf{d}}{=} \mathsf{F}(1, \nu, \lambda^2/2).$$

Resultado 4:

Si $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{I})$ y $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ es matriz simétrica. Entonces $\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \sim \chi^2(k;\theta)$ sólo si $\boldsymbol{A}$ es idempotente, en cuyo caso los grados de libertad y el parámetro de no centralidad están dados por

$$k = \mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}), \qquad \text{y} \qquad \theta = \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu},$$

respectivamente.

Demostración:

Suponga que $\boldsymbol{A}$ es idempotente de rango k. Entonces existe una matriz ortogonal $\boldsymbol{P}$ tal que

$$\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

Sea $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{X}$, entonces $\boldsymbol{Y} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{I})$, y

$$\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}^\top \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^{k} Y_i^2,$$

que sigue una distribución chi-cuadrado con k grados de libertad.

Para el parámetro de no centralidad θ, note que

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\{\chi^2(k;\theta)\} = k + 2\theta = \mathsf{E}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}) &= \operatorname{tr}(\mathsf{E}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top)\boldsymbol{A}) \\ &= \operatorname{tr}((\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^\top)\boldsymbol{A}) = k + \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu},\end{aligned}$$

y de ahí que $\theta = \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu}$.

Ahora, suponga que $\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \sim \chi^2(k;\theta)$. Si $\boldsymbol{A}$ tiene rango r, entonces para $\boldsymbol{P}$ matriz ortogonal $p \times p$,

$$\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

con $\boldsymbol{\Lambda}_1 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, donde $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son los valores propios no nulos de $\boldsymbol{A}$. Sea $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{X}$, entonces

$$\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j Y_j^2 = U.$$

Tenemos que $\boldsymbol{Y} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{I})$ con $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{\mu}$, de modo que $Y_j^2 \sim \chi^2(1, \delta_j^2/2)$ con función característica

$$\varphi_{Y_j^2}(t) = (1 - 2it)^{-1/2} \exp\Big(\frac{it\delta_j^2}{1 - 2it}\Big),$$

por la independencia de $Y_1, \dots, Y_r$ sigue que

$$\begin{aligned}
\varphi_U(t) &= \prod_{j=1}^r (1 - 2it\lambda_j)^{-1/2} \exp\Big(\frac{it\lambda_j\delta_j^2}{1 - 2it\lambda_j}\Big) \\
&= \exp\Big(it \sum_{j=1}^r \frac{\lambda_j\delta_j^2}{1 - 2it\lambda_j}\Big) \prod_{j=1}^r (1 - 2it\lambda_j)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \sim \chi^2(k;\theta)$ tiene función característica

$$\varphi_{X^\top AX}(t) = (1-2it)^{-k/2} \exp\left(\frac{2it\theta}{1-2it}\right),$$

entonces desde las dos expresiones anteriores debemos tener $r = k$, $\lambda_j = 1$, $\forall j$ y $\theta = \sum_j \delta_j^2/2$. Consecuentemente $\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ tiene la forma

$$\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

que es idempotente. Luego

$$\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}.$$

Resultado 5:

Si $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ donde $\boldsymbol{\Sigma}$ es no singular y $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ son particionados como

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix},$$

donde $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{\mu}_1$ son $k \times 1$ y $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$ es $k \times k$. Entonces

$$U = (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) - (\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)^\top \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} (\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1) \sim \chi^2(p - k).$$

Demostración:

Considere $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top$, donde $\boldsymbol{B}$ es no singular y particione $\boldsymbol{B}$ como

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}_1 \in \mathbb{R}^{k\times p}.$$

Luego,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^\top & \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2^\top \\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_1^\top & \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_2^\top \end{pmatrix},$$

de donde sigue que $\boldsymbol{\Sigma}_{11} = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^\top$. Ahora, sea $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$. De este modo,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} U &= \boldsymbol{Z}^\top \boldsymbol{Z} - \boldsymbol{Z}^\top \boldsymbol{B}_1^\top (\boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{B}_1^\top)^{-1} \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{Z} \\ &= \boldsymbol{Z}^\top (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_1^\top (\boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{B}_1^\top)^{-1} \boldsymbol{B}_1) \boldsymbol{Z} \\ &= \boldsymbol{Z}^\top (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}_1) \boldsymbol{Z}, \end{aligned}$$

con $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{B}_1^\top (\boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{B}_1^\top)^{-1} \boldsymbol{B}_1$.

Note que $\boldsymbol{H}_1$ es simétrica e idempotente y por tanto también lo es $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}_1$. De donde sigue que $U \sim \chi^2(\nu)$, con $\nu = \operatorname{rg}(\boldsymbol{C}) = p - k$.

Suponga que $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$. Una condición para que $\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ tenga una distribución chi-cuadrado es:[1]

$$\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A},$$

en cuyo caso los grados de libertad son $k = \operatorname{rg}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma})$. Si $\boldsymbol{\Sigma}$ es no singular, la condición resulta $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

Resultado 6:

Si $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ donde $\boldsymbol{\Sigma}$ tiene rango k $(\leq p)$ y si $\boldsymbol{A}$ es una inversa generalizada de $\boldsymbol{\Sigma}$ $(\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma})$, entonces $\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \sim \chi^2(k)$.

[1] Esto representa una generalización del Resultado 4.

Demostración:

Considere $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$ donde $\boldsymbol{B}$ es una matriz no singular $p \times p$ tal que

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B}^\top = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

Particionando $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{Y}_1^\top, \boldsymbol{Y}_2^\top)^\top$ donde $\boldsymbol{Y}_1$ es un vector $k \times 1$ sigue que $\boldsymbol{Y}_1 \sim \mathsf{N}_k(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$ y $\boldsymbol{Y}_2 = \boldsymbol{0}$ con probabilidad 1.

Ahora, note que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B}^\top = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B}^\top \\ &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{B}^{-\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B}^\top \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, con probabilidad uno,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} &= \boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{B}^{-\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{Y}_1^\top, \boldsymbol{0})\boldsymbol{B}^{-\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{Y}_1^\top, \boldsymbol{0})\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{Y}_1^\top, \boldsymbol{0})\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix} = \boldsymbol{Y}_1^\top \boldsymbol{Y}_1 \sim \chi^2(k).
\end{aligned}
$$