MAT-266: Independencia entre formas cuadráticas

Felipe Osorio

fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM

Recordatorio 1:

Suponga $\boldsymbol{A}$ matriz $m \times m$, simétrica e idempotente. Entonces,

(a) $a_{ii} \geq 0$, $i = 1, \dots, n$.

(b) $a_{ii} \leq 1$, $i = 1, \dots, n$.

(c) $a_{ij} = a_{ji} = 0$, para todo $j \neq i$, si $a_{ii} = 0$ o $a_{ii} = 1$.

Demostración:

Como $\boldsymbol{A}$ es simétrica e idempotente, tenemos

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A},$$

de ahí que

$$a_{ii} = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}^2,$$

que claramente es no negativo.

Además, podemos escribir

$$a_{ii} = a_{ii}^2 + \sum_{j \neq i} a_{ji}^2.$$

Por tanto, $a_{ii} \geq a_{ii}^2$ y de este modo (b) es satisfecha.

Si $a_{ii} = 0$ o $a_{ii} = 1$, entonces $a_{ii} = a_{ii}^2$ y debemos tener

$$\sum_{j \neq i} a_{ji}^2 = 0,$$

lo que junto con la simetría de $\boldsymbol{A}$, establece (c).

Lema 1:

Sean $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_k$ matrices $m \times m$ simétricas e idempotentes y suponga que

$$\boldsymbol{A}_1 + \cdots + \boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{I}_k.$$

Entonces $\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{0}$ para todo $i \neq j$.

Demostración:

Considere cualquiera de esas matrices, digamos $\boldsymbol{A}_h$ y denote su rango por r. Como $\boldsymbol{A}_h$ es simétrica e idempotente, existe una matriz ortogonal $\boldsymbol{P}$ tal que

$$\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A}_h \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

Para $j \neq h$, defina $\boldsymbol{B}_j = \boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{P}$, y note que

$$\boldsymbol{I}_m = \boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^\top \Big(\sum_{j=1}^k \boldsymbol{A}_j \Big) \boldsymbol{P} = \sum_{j=1}^k \boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \sum_{j \neq h} \boldsymbol{B}_j.$$

O equivalentemente,

$$\sum_{j\neq h} \boldsymbol{B}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_{m-r}. \end{pmatrix}$$

Claramente, dado que $\boldsymbol{A}_j$ es simétrica e idempotente, sigue que $\boldsymbol{B}_j$ también lo es. Por Recordatorio 1, sus elementos diagonales son no negativos. Además, $(\boldsymbol{B}_j)_{ll} = 0$ para $l = 1, \dots, r$. Así, por la parte (c) del Recordatorio 1 sigue que $\boldsymbol{B}_j$ debe ser de la forma

$$\boldsymbol{B}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{C}_j \end{pmatrix},$$

donde $\boldsymbol{C}_j$ es matriz $(m-r)\times(m-r)$, simétrica e idempotente. Ahora, para cualquier $j \neq h$.

$$\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A}_h \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{P} = (\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A}_h \boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{P}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{C}_j \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

lo que es verdad, sólo si $\boldsymbol{A}_h \boldsymbol{A}_j = \mathbf{0}$, pues $\boldsymbol{P}$ es no singular. Notando que h es arbitrareo, la prueba es completa.

Lema 2:

Sean $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_k$ matrices simétricas de orden $m \times m$ y defina

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \cdots + \boldsymbol{A}_k.$$

Considere las siguientes afirmaciones,

(a) $\boldsymbol{A}_i$ es idempotente, para $i = 1, \dots, k$.

(b) $\boldsymbol{A}$ es idempotente.

(c) $\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{0}$, para todo $i \neq j$.

Entonces si dos condiciones son satisfechas, la tercera condición debe ser verdadera.

Demostración:

Primero mostraremos que (a) y (b) implica (c). Como $\boldsymbol{A}$ es simétrica e idempotente, existe una matriz ortogonal $\boldsymbol{P}$ tal que

$$\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^\top (\boldsymbol{A}_1 + \cdots + \boldsymbol{A}_k) \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

donde $r = \operatorname{rg}(\boldsymbol{A})$.

Sea $\boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{P}$, para $i = 1, \dots, k$. y note que $\boldsymbol{B}_i$ es simétrica e idempotente. Por el Recordatorio 1, tenemos que $\boldsymbol{B}_i$ debe ser de la forma

$$\boldsymbol{B}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_i & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

donde la matriz $r \times r$, $\boldsymbol{C}_i$ debe ser simétrica e idempotente. Por (1), tenemos

$$\boldsymbol{C}_1 + \cdots + \boldsymbol{C}_k = \boldsymbol{I}_r$$

Por el Lema 1, sigue que $\boldsymbol{C}_i \boldsymbol{C}_j = \boldsymbol{0}$ para $i \neq j$, de donde obtenemos $\boldsymbol{B}_i \boldsymbol{B}_j = \boldsymbol{0}$ y de ahí que $\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{0}$, para $i \neq j$.

(a) y (c) implican (c) sigue de notar

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^2 &= \Big(\sum_{i=1}^k \boldsymbol{A}_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{A}_j = \sum_{i=1}^k \boldsymbol{A}_i^2 + \sum\sum_{i \neq j} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{A}_j \\
&= \sum_{i=1}^k \boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

Finalmente, para probar que (b) y (c) implican (a). Suponga que (c) es verdad, entonces $\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{A}_i$ para todo $i \neq j$ y las matrices $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_k$ pueden ser diagonalizadas simultáneamente. Esto es, existe una matriz ortogonal $\boldsymbol{Q}$ tal que

$$\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{D}_i, \qquad i = 1, \dots, k,$$

donde cada una de las matrices $\boldsymbol{D}_1, \dots, \boldsymbol{D}_k$ es diagonal.

Además,

$$\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{D}_j = \boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}, \qquad i \neq j. \tag{2}$$

Como $\boldsymbol{A}$ es simétrica e idempotente, también lo es la matriz diagonal

$$\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{D}_1 + \cdots + \boldsymbol{D}_k,$$

y cada elemento diagonal de $\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ debe ser 0 o 1. y por (2), lo mismo es válido para para los elementos diagonales de $\boldsymbol{D}_1, \dots, \boldsymbol{D}_k$.

De este modo, $\boldsymbol{D}_i$ es simétrica e idempotente y de ahí que tambiél lo es

$$\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{Q}^\top, \qquad i = 1, \dots, k,$$

lo que termina la prueba.

Observación:

Suponga que las condiciones del Lema 2 son satisfechas. Entonces (a), implica que $\operatorname{rg}(\boldsymbol{A}_i) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}_i)$, y desde (b), sigue que

$$\operatorname{rg}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr}\Big(\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{A}_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}_i) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rg}(\boldsymbol{A}_i).$$

EX UMBRA IN SOLEM

Resultado 1:

Sea $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, donde $\boldsymbol{\Sigma} > \boldsymbol{0}$ y suponga $Q_1 = \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, $Q_2 = \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$ con $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ matrices simétricas $p \times p$. Entonces Q_1 y Q_2 son independientes si $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$.

Demostración:

Tenemos $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^\top$, y defina $\boldsymbol{G}_1 = \boldsymbol{T}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{G}_2 = \boldsymbol{T}^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{T}$. Note que si $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$, entonces

$$\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2 = (\boldsymbol{T}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{T}^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{T}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{0}$$

Debido a la simetría de $\boldsymbol{G}_1$ y $\boldsymbol{G}_2$, sigue que

$$\boldsymbol{0} = (\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2)^\top = \boldsymbol{G}_2^\top \boldsymbol{G}_1^\top = \boldsymbol{G}_2\boldsymbol{G}_1.$$

Como $\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2 = \boldsymbol{G}_2\boldsymbol{G}_1$ existe una matriz ortogonal $\boldsymbol{P}$ que simultáneamente diagonaliza $\boldsymbol{G}_1$ y $\boldsymbol{G}_2$, esto es

$$\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{T}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}_1,$$
$$\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{G}_2\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{T}^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{T}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}_2.$$

De este modo,

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{P}^\top = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{P}^\top,$$

lo que es verdad, si $\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2 = \mathbf{0}$. Como $\boldsymbol{D}_1$ y $\boldsymbol{D}_2$ son diagonales, sus elementos diagonales deben ocurrir en posiciones diferentes. Es decir, podemos escribir

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{M}_2 \end{pmatrix}.$$

Sea $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{X}$, entonces

$$\begin{aligned} Q_1 &= \boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{T}^{-\top}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{T}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}^\top\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{Y} \\ Q_1 &= \boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{B}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{T}^{-\top}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{T}^\top\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}^\top\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{Y}. \end{aligned}$$

Además,

$$\mathsf{Cov}(\boldsymbol{Y}) = \mathsf{Cov}(\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{T}^{-1}\,\mathsf{Cov}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{T}^{-\top}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$$

En efecto, $\boldsymbol{Y} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{I})$. Ahora, particionando adecuadamente $\boldsymbol{Y}$ sigue que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{D}_1 \boldsymbol{Y} &= (\boldsymbol{Y}_1^\top, \boldsymbol{Y}_2^\top) \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_1 \\ \boldsymbol{Y}_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Y}_1^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{Y}_1 \\
\boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{D}_2 \boldsymbol{Y} &= (\boldsymbol{Y}_1^\top, \boldsymbol{Y}_2^\top) \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_1 \\ \boldsymbol{Y}_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Y}_2^\top \boldsymbol{M}_2 \boldsymbol{Y}_2,
\end{aligned}$$

y la independencia entre Q_1 y Q_2 sigue desde la independencia entre $\boldsymbol{Y}_1$ y $\boldsymbol{Y}_2$.

Resultado 2:

Sea $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $Q = \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$. Entonces Q y $\boldsymbol{U}$ son independientes si y sólo si $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

Ejemplo:

Considere $X_1, \dots, X_n$ muestra aleatoria desde $\mathsf{N}(\theta, \sigma^2)$, así

$$\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top \sim \mathsf{N}_n(\theta\boldsymbol{1}, \sigma^2\boldsymbol{I}_n).$$

Tenemos

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n}\boldsymbol{1}^\top\boldsymbol{X}, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}.$$

Como $\boldsymbol{C}\boldsymbol{1} = \boldsymbol{0}$ sigue la independencia entre $\overline{X}$ y S^2.

Resultado 3 (Teorema de Cochran):

Sea $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, con $\boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$. Suponga que $\boldsymbol{A}_i$ es una matriz simétrica de orden $p \times p$ con rango r_i, para $i = 1, \dots, k$, y

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \cdots + \boldsymbol{A}_k,$$

es de rango r. Considere las condiciones

(a) $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{\Sigma}$ es idempotente para $i = 1, \dots, k$.

(b) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}$ es idempotente.

(c) $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}_j = \mathbf{0}$ para $i \neq j$.

(d) $r = \sum_{i=1}^k r_i$.

si dos de (a), (b) y (c) se satisfacen, o si (b) (d) son satisfechas, entonces

(i) $\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{X} \sim \chi^2(r_i, \lambda_i)$, con $\lambda_i = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu}/2$, $i = 1, \dots, k$.

(ii) $\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{X} \sim \chi^2(r, \lambda)$, con $\lambda = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu}/2$.

(iii) $\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{X}, \dots, \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{X}$ son mutuamente independientes.

Demostración:

Tenemos que $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^\top$ y las condiciones (a)-(d), pueden ser expresadas como:

(a) $\boldsymbol{T}^\top \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{T}$ es idempotente para $i = 1, \dots, k$.

(b) $\boldsymbol{T}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{T}$ es idempotente.

(c) $(\boldsymbol{T}^\top \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{T})(\boldsymbol{T}^\top \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{T}) = \boldsymbol{0}$ para $i \neq j$.

(d) $\operatorname{rg}(\boldsymbol{T}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{T}) = \sum_{i=1}^k \operatorname{rg}(\boldsymbol{T}^\top \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{T})$.

Como $\boldsymbol{T}^\top \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}^\top \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{T}, \dots, \boldsymbol{T}^\top \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{T}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{T}$ satisfacen las condiciones del Lema 2.[1] Entonces, las condiciones (a)-(d) se satisfacen.

Sabemos que (a) implica (i) y (b) implica (ii). Mientras que, Resultado 1 con (c), garantiza (iii), lo que completa la prueba.

[1] y Observación en slide 10.