

IECD-325: Modelos Lineales y Diseños de Experimentos**Prueba 1. Octubre 9, 2025****Tiempo: 90 minutos****Nombre:** _____**Profesor:** Felipe Osorio

1. (15 pts) Considere $Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i$, $i = 1, \dots, n$. Tenemos que

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i, \quad \hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Verifique,

$$\sum_{i=1}^n e_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n e_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n e_i \hat{Y}_i = 0.$$

2. (20 pts) Sea $\mathbf{Y} \sim \mathbf{N}_n(\mu \mathbf{1}_n, \mathbf{\Sigma})$, donde $\mathbf{\Sigma} = (1 - \rho)\mathbf{I}_n + \rho \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top$ con $\rho > -1/(n - 1)$. Muestre que

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2,$$

son independientes.

3. Considere el modelo $Y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \epsilon_i$, $i = 1, \dots, 15$, donde los ϵ_i 's son variables aleatorias independientes cada uno con distribución $\mathbf{N}_1(0, \sigma^2)$.

a. (5 pts) Construya la matriz de diseño, \mathbf{X} .

b. (20 pts) Suponga que se dispone de la siguiente información:

$$\begin{pmatrix} 15.00 & 374.50 \\ 374.50 & 9482.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.03 \\ 158.25 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y} = 3.03.$$

Obtener los estimadores ML de $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)^\top$ y σ^2 .