

NOTAS DE CLASE :

**Análisis de Regresión**

Felipe Osorio

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA



# Índice general

Prefacio	v
Capítulo 1. Preliminares	1
1.1. Vectores Aleatorios	1
1.2. Operadores de esperanza y covarianza	3
1.3. Independencia de vectores aleatorios	8
1.4. Cambios de variable	9
1.5. Distribución normal multivariada	9
1.6. Alternativas a la distribución normal multivariada	16
1.7. Algunas distribuciones no centrales	21
1.8. Distribución de formas cuadráticas	24
Ejercicios	30
Apéndice A. Elementos de Álgebra Matricial	33
A.1. Vectores y matrices	33
A.2. Definiciones básicas y propiedades	33
A.3. Inversa generalizada y sistemas de ecuaciones lineales	43
Apéndice B. Diferenciación matricial	47
B.1. Aproximación de primer orden	47
B.2. Funciones matriciales	48
B.3. Matriz Hessiana	50
B.4. Reglas fundamentales	51
Bibliografía	53



## Prefacio

Estas notas de clase están asociadas a los contenidos de la asignatura *MAT-266: Análisis de Regresión*, dictada en el programa de Ingeniería Civil Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María. Aunque el documento se encuentra en una etapa bastante preliminar, espero ir puliendo el mismo para que se pueda convertir en un apunte que sirva de apoyo para los estudiantes de la asignatura.

Las notas se encuentran divididas en tres partes, con preliminares conteniendo resultados de la distribución normal y su conexión con formas cuadráticas. Luego, se presenta la inferencia en el modelo de regresión lineal y posteriormente hay una serie de resultados que permiten la crítica del proceso de modelación así como procedimientos alternativos en caso de que algunos de los supuestos básicos no sean satisfechos. El objetivo de este texto es proveer de una introducción rigurosa al tópico de regresión presentando también aplicaciones prácticas así como destacar los elementos necesarios para la implementación computacional de tales técnicas.

Agradezco al profesor Manuel Galea por haberme introducido en este tópico así como por su constante apoyo durante toda mi carrera académica. Adicionalmente, debo destacar el apoyo de los estudiantes que han participado de alguna versión de este curso, pues producto de sus comentarios y sugerencias este documento se ha visto notablemente mejorado.

Felipe Osorio  
Valparaíso, Abril 2021.



## Preliminares

### 1.1. Vectores Aleatorios

El propósito de esta sección es introducir algunas propiedades elementales de vectores aleatorios útiles a lo largo de este curso. Se asume que el lector es familiar con el concepto de variable aleatoria unidimensional.

Un vector aleatorio  $n$ -dimensional  $\mathbf{X}$  es una función (medible) desde el espacio de probabilidad  $\Omega$  a  $\mathbb{R}^n$ , esto es

$$\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Por convención asumiremos que el vector aleatorio  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$  es un vector columna.

DEFINICIÓN 1.1 (Función de distribución). Para  $\mathbf{X}$  distribuido en  $\mathbb{R}^n$ , la *función de distribución* de  $\mathbf{X}$  es una función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ , tal que

$$F(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

y denotamos  $\mathbf{X} \sim F$  o  $\mathbf{X} \sim F_X$ .

La función en (1.1) debe ser entendida como

$$F(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n),$$

que corresponde a la probabilidad del evento  $\bigcap_{k=1}^n \{X_k \leq x_k\}$ .

La función de distribución acumulada tiene las siguientes propiedades:

- (a)  $F(\mathbf{x})$  es función monótona creciente y continua a la derecha en cada uno de los componentes de  $\mathbf{X}$ ,
- (b)  $0 \leq F(\mathbf{x}) \leq 1$ ,
- (c)  $F(-\infty, x_2, \dots, x_n) = \dots = F(x_1, \dots, x_{n-1}, -\infty) = 0$ ,
- (d)  $F(+\infty, \dots, +\infty) = 1$ .

Sea  $F$  la función de distribución del vector aleatorio  $\mathbf{X}$ . Entonces, existe una función no-negativa  $f$  tal que

$$F(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{x}} f(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

en este caso decimos que  $\mathbf{X}$  es un vector aleatorio continuo con *función de densidad*  $f$ . Por el teorema fundamental del Cálculo, tenemos que

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^n F(\mathbf{x})}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}.$$

Además, considere  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , para  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  vectores en  $\bar{\mathbb{R}}^n$ , entonces

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \quad \text{esto es,} \quad x_i \leq y_i, i = 1, \dots, n.$$

Esto permite definir un rectángulo  $n$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$  como

$$I = (\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} < \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$$

para todo  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \bar{\mathbb{R}}^n$ . Entonces, también por el teorema fundamental del Cálculo, tenemos que si

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^n F(\mathbf{x})}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}.$$

existe y es continua (casi en toda parte) sobre un rectángulo  $I$ , entonces

$$P(\mathbf{x} \in A) = \int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall A \subset I.$$

Naturalmente la función de densidad debe satisfacer

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1.$$

Considere el vector aleatorio  $n$ -dimensional  $\mathbf{X}$  particionado como  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^\top, \mathbf{X}_2^\top)^\top$  donde  $\mathbf{X}_1$  y  $\mathbf{X}_2$  son vectores  $n_1 \times 1$  y  $n_2 \times 1$ , respectivamente, con  $n = n_1 + n_2$ . Tenemos que  $\mathbf{X}_i \sim F_i$ ,  $i = 1, 2$ , de este modo  $\mathbf{X}$  se denomina la *conjunta* de  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$  mientras que los  $\mathbf{X}_1$  y  $\mathbf{X}_2$  son llamados *marginales* de  $\mathbf{X}$ .

Note que, las funciones de distribución marginal pueden ser recuperadas desde la distribución conjunta mediante

$$F_1(\mathbf{s}) = F(\mathbf{s}, \infty), \quad F_2(\mathbf{t}) = F(\infty, \mathbf{t}), \quad \forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_1}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n_2}.$$

Cuando  $\mathbf{X}$  es absolutamente continua con función de densidad  $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ , entonces la función de densidad de  $\mathbf{X}_i$  también es absolutamente continua y puede ser obtenida como

$$f_1(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(\mathbf{s}, \mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad f_2(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(\mathbf{u}, \mathbf{t}) d\mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_1}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n_2},$$

el resultado anterior es análogo para el caso de distribuciones discretas. Si  $\mathbf{X}$  es absolutamente continuo y  $f_1(\mathbf{x}_1) > 0$ , entonces la *densidad condicional* de  $\mathbf{X}_2$  dado  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1$  es

$$f_{X_2|X_1=\mathbf{x}_1}(\mathbf{u}) = \frac{f_X(\mathbf{x}_1, \mathbf{u})}{f_1(\mathbf{x}_1)},$$

con función de distribución de  $\mathbf{X}_2$  condicional a  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1$  dada por

$$F_{X_2|X_1=\mathbf{x}_1}(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{u}} f_{X_2|X_1=\mathbf{x}_1}(\mathbf{t}) d\mathbf{t},$$

tenemos además que

$$f_{X_2|X_1=\mathbf{x}_1}(\mathbf{u}) = \frac{f_X(\mathbf{x}_1, \mathbf{u})}{\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f_X(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}) d\mathbf{t}}.$$



### 1.2. Operadores de esperanza y covarianza

Considere  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$  vector aleatorio  $n$ -dimensional con función de densidad  $f$ . Entonces la esperanza de cualquier función  $g$  de  $\mathbf{X}$  está dada por

$$\mathbb{E}(g(\mathbf{X})) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t},$$

siempre que la integral ( $n$ -dimensional) exista.

Más generalmente, sea  $\mathbf{Z} = (Z_{ij})$  una función matricial  $m \times n$ , entonces podemos definir el operador de esperanza de una matriz aleatoria como

$$\mathbb{E}(\mathbf{Z}(\mathbf{X})) = (\mathbb{E}(Z_{ij})), \quad Z_{ij} = Z_{ij}(\mathbf{X}). \quad (1.2)$$

De la definición en (1.2) se desprenden una serie de resultados útiles con relación al operador de esperanza. Por ejemplo, sea  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  una matriz de constantes, entonces

$$\mathbb{E}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}.$$

**RESULTADO 1.2.** Sea  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ,  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  y  $\mathbf{C} = (c_{ij})$  matrices de constantes  $l \times m$ ,  $n \times p$  y  $l \times p$ , respectivamente. Entonces

$$\mathbb{E}(\mathbf{AZB} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \mathbb{E}(\mathbf{Z}) \mathbf{B} + \mathbf{C}.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\mathbf{Y} = \mathbf{AZB} + \mathbf{C}$ , entonces

$$Y_{ij} = \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^n a_{ir} Z_{rs} b_{sj} + c_{ij},$$

de este modo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{AZB} + \mathbf{C}) &= (\mathbb{E}(Y_{ij})) = \left( \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^n a_{ir} \mathbb{E}(Z_{rs}) b_{sj} + c_{ij} \right) \\ &= \mathbf{A} \mathbb{E}(\mathbf{Z}) \mathbf{B} + \mathbf{C}. \end{aligned}$$

□

Un caso particular importante corresponde a la esperanza de una transformación lineal. Considere el vector aleatorio  $n$ -dimensional,  $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ , donde  $\mathbf{X}$  es vector aleatorio  $m \times 1$ , entonces  $\mathbb{E}(\mathbf{AX}) = \mathbf{A} \mathbb{E}(\mathbf{X})$ . Esta propiedad puede ser extendida para sumas de vectores aleatorios, como

$$\mathbb{E} \left( \sum_i \mathbf{A}_i \mathbf{X}_i \right) = \sum_i \mathbf{A}_i \mathbb{E}(\mathbf{X}_i),$$

de manera similar tenemos que

$$\mathbb{E} \left( \sum_i \alpha_i \mathbf{Z}_i \right) = \sum_i \alpha_i \mathbb{E}(\mathbf{Z}_i),$$

donde  $\alpha_i$  son constantes y los  $\mathbf{Z}_i$  son matrices aleatorias.

**DEFINICIÓN 1.3** (Matriz de covarianza). Sean  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  vectores aleatorios  $m$  y  $n$ -dimensionales, respectivamente. Se define la *matriz de covarianza* entre  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  como la matriz  $m \times n$ ,

$$\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (\text{Cov}(X_i, Y_j)).$$

Podemos apreciar, a partir de la definición de covarianza que

$$\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbb{E}\{(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{Y} - \mathbb{E}(\mathbf{Y}))^\top\}.$$

En efecto, sean  $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}(\mathbf{X})$  y  $\boldsymbol{\eta} = \mathbb{E}(\mathbf{Y})$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= (\text{Cov}(X_i, Y_j)) = (\mathbb{E}(X_i - \mu_i)(Y_j - \eta_j)) \\ &= \mathbb{E}([(X_i - \mu_i)(Y_j - \eta_j)]) = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\eta})^\top]. \end{aligned}$$

Tenemos además el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \mathbb{E}\{(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{Y} - \mathbb{E}(\mathbf{Y}))^\top\} \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{X}\mathbf{Y}^\top - \mathbb{E}(\mathbf{X})\mathbf{Y}^\top - \mathbf{X}\mathbb{E}^\top(\mathbf{Y}) + \mathbb{E}(\mathbf{X})\mathbb{E}^\top(\mathbf{Y})) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{X}\mathbf{Y}^\top) - \mathbb{E}(\mathbf{X})\mathbb{E}^\top(\mathbf{Y}). \end{aligned}$$

Se define la *matriz de dispersión (varianza)*, como  $\text{Cov}(\mathbf{X}) = \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ . De este modo, tenemos

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) = (\text{Cov}(X_i, X_j)) = \mathbb{E}\{(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))^\top\},$$

y, de la misma manera que para el caso de la matriz de covarianza,

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^\top) - \mathbb{E}(\mathbf{X})\mathbb{E}^\top(\mathbf{X}).$$

EJEMPLO 1.4. Sea  $\mathbf{a}$  vector de constantes  $n \times 1$ , entonces

$$\text{Cov}(\mathbf{X} - \mathbf{a}) = \text{Cov}(\mathbf{X}).$$

En efecto, note que

$$\mathbf{X} - \mathbf{a} - \mathbb{E}(\mathbf{X} - \mathbf{a}) = \mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}),$$

por tanto, tenemos

$$\text{Cov}(\mathbf{X} - \mathbf{a}, \mathbf{X} - \mathbf{a}) = \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$$

RESULTADO 1.5. Si  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  son vectores aleatorios  $m$  y  $n$ -dimensionales, respectivamente y  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l \times m}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , entonces

$$\text{Cov}(\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{B}\mathbf{Y}) = \mathbf{A} \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mathbf{B}^\top.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{X}$  y  $\mathbf{V} = \mathbf{B}\mathbf{Y}$ , entonces

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{B}\mathbf{Y}) &= \text{Cov}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \mathbb{E}\{(\mathbf{U} - \mathbb{E}(\mathbf{U}))(\mathbf{V} - \mathbb{E}(\mathbf{V}))^\top\} \\ &= \mathbb{E}\{(\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbb{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{B}\mathbf{Y} - \mathbf{B}\mathbb{E}(\mathbf{Y}))^\top\} \\ &= \mathbb{E}\{\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{Y} - \mathbb{E}(\mathbf{Y}))^\top \mathbf{B}^\top\} \\ &= \mathbf{A} \mathbb{E}\{(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{Y} - \mathbb{E}(\mathbf{Y}))^\top\} \mathbf{B}^\top \\ &= \mathbf{A} \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mathbf{B}^\top. \end{aligned}$$

□

Tenemos el siguiente caso particular,

$$\text{Cov}(\mathbf{A}\mathbf{X}) = \text{Cov}(\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{A}\mathbf{X}) = \mathbf{A} \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \mathbf{A}^\top = \mathbf{A} \text{Cov}(\mathbf{X}) \mathbf{A}^\top.$$

EJEMPLO 1.6. Considere  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  vectores aleatorios  $n$ -dimensionales y  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  matrices de órdenes apropiados, entonces

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\mathbf{AX} + \mathbf{BY}, \mathbf{CU} + \mathbf{DV}) &= \mathbf{A} \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \mathbf{C}^\top + \mathbf{A} \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{V}) \mathbf{D}^\top \\ &\quad + \mathbf{B} \text{Cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{U}) \mathbf{C}^\top + \mathbf{B} \text{Cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{V}) \mathbf{D}^\top.\end{aligned}$$

tomando  $\mathbf{U} = \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{V} = \mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{A}$  y  $\mathbf{D} = \mathbf{B}$ , tenemos

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\mathbf{AX} + \mathbf{BY}) &= \text{Cov}(\mathbf{AX} + \mathbf{BY}, \mathbf{AX} + \mathbf{BY}) \\ &= \mathbf{A} \text{Cov}(\mathbf{X}) \mathbf{A}^\top + \mathbf{A} \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mathbf{B}^\top \\ &\quad + \mathbf{B} \text{Cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \mathbf{A}^\top + \mathbf{B} \text{Cov}(\mathbf{Y}) \mathbf{B}^\top.\end{aligned}$$

RESULTADO 1.7. *Toda matriz de dispersión es simétrica y semidefinida positiva*

DEMOSTRACIÓN. La simetría de la matriz de dispersión es obvia. Para mostrar que  $\text{Cov}(\mathbf{X})$  es semidefinida positiva, sea  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} - \mathbf{E}(\mathbf{X})$ , y considere la variable aleatoria  $Y = \mathbf{a}^\top \mathbf{Z}$ , para  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  un vector arbitrario. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^\top \text{Cov}(\mathbf{X}) \mathbf{a} &= \mathbf{a}^\top \mathbf{E}(\mathbf{X} - \mathbf{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - \mathbf{E}(\mathbf{X}))^\top \mathbf{a} \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{a}^\top (\mathbf{X} - \mathbf{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - \mathbf{E}(\mathbf{X}))^\top \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{a}^\top \mathbf{Z} \mathbf{Z}^\top \mathbf{a}) = \mathbf{E}(Y^2) \geq 0\end{aligned}$$

y por tanto,  $\text{Cov}(\mathbf{X})$  es semidefinida positiva.

Ahora, suponga que  $\text{Cov}(\mathbf{X})$  es semidefinida positiva de rango  $r$  ( $r \leq n$ ). Luego  $\text{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{B} \mathbf{B}^\top$  donde  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$  de rango  $r$ . Sea  $\mathbf{Y}$  vector aleatorio  $r$ -dimensional con  $\mathbf{E}(\mathbf{Y}) = \mathbf{0}$  y  $\text{Cov}(\mathbf{Y}) = \mathbf{I}$ . Haciendo  $\mathbf{X} = \mathbf{B} \mathbf{Y}$ , sigue que  $\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$  y

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) = \text{Cov}(\mathbf{B} \mathbf{Y}) = \mathbf{B} \text{Cov}(\mathbf{Y}) \mathbf{B}^\top = \mathbf{B} \mathbf{B}^\top.$$

Es decir, corresponde a una matriz de covarianza.  $\square$

RESULTADO 1.8. *Sea  $\mathbf{X}$  vector aleatorio  $n$ -dimensional y considere la transformación lineal  $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{b}$ , donde  $\mathbf{A}$  es una matriz de constantes  $m \times n$  y  $\mathbf{b}$  es vector de constantes  $m \times 1$ . Entonces*

$$\mathbf{E}(\mathbf{Y}) = \mathbf{A} \mathbf{E}(\mathbf{X}) + \mathbf{b}, \quad \text{Cov}(\mathbf{Y}) = \mathbf{A} \text{Cov}(\mathbf{X}) \mathbf{A}^\top.$$

EJEMPLO 1.9. Sea  $\mathbf{X}$  vector aleatorio  $n$ -dimensional con media  $\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}$  y matriz de dispersión  $\text{Cov}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\Sigma}$ . Sea

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U}^\top$$

la descomposición espectral de  $\boldsymbol{\Sigma}$ , donde  $\mathbf{U}$  es matriz ortogonal y  $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\boldsymbol{\lambda})$ , y considere la siguiente transformación

$$\mathbf{Z} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{U}^\top (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$$

de este modo, obtenemos que

$$\mathbf{E}(\mathbf{Z}) = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \text{Cov}(\mathbf{Z}) = \mathbf{I}.$$

En efecto, la transformación  $\mathbf{Z} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$  también satisface que  $\mathbf{E}(\mathbf{Z}) = \mathbf{0}$  y  $\text{Cov}(\mathbf{Z}) = \mathbf{I}$ .

Suponga que  $\mathbf{Z}$  es una matriz aleatoria  $n \times p$  cuyas filas son vectores aleatorios independientes  $p \times 1$ , cada uno con la misma matriz de covarianza  $\mathbf{\Sigma}$ . Considere la partición

$$\mathbf{Z}^\top = (\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_n),$$

donde  $\text{Cov}(\mathbf{Z}_i) = \mathbf{\Sigma}$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Tenemos que

$$\text{vec}(\mathbf{Z}^\top) = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_n \end{pmatrix},$$

y dado que todos los  $\mathbf{Z}_i$  son independientes con la misma matriz de covarianza sigue que

$$\text{Cov}(\text{vec}(\mathbf{Z}^\top)) = \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{\Sigma} \end{pmatrix} = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}.$$

Ahora suponga que llevamos a cabo la transformación lineal  $\mathbf{Y} = \mathbf{AZB}$ , donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$  son matrices de constantes. Entonces  $\mathbf{E}(\mathbf{Y}) = \mathbf{A}\mathbf{E}(\mathbf{Z})\mathbf{B}$ , mientras que

$$\text{vec}(\mathbf{Y}^\top) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^\top) \text{vec}(\mathbf{Z}^\top),$$

de modo que

$$\mathbf{E}(\text{vec}(\mathbf{Y}^\top)) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^\top) \mathbf{E}(\text{vec}(\mathbf{Z}^\top)).$$

Además tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\text{vec}(\mathbf{Y}^\top)) &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^\top) \text{Cov}(\text{vec}(\mathbf{Z}^\top)) (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^\top)^\top \\ &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^\top) (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}) (\mathbf{A}^\top \otimes \mathbf{B}) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{A}^\top \otimes \mathbf{B}^\top \mathbf{\Sigma} \mathbf{B}. \end{aligned}$$

**DEFINICIÓN 1.10** (Matriz de correlación). Sea  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^\top$  vector aleatorio con media  $\boldsymbol{\mu}$  y matriz de covarianza  $\mathbf{\Sigma}$ . Se define la matriz de correlaciones como  $\mathbf{R} = (\rho_{ij})$ , donde

$$\rho_{ij} = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\{\text{var}(X_i) \text{var}(X_j)\}^{1/2}} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii} \sigma_{jj}}}, \quad i, j = 1, \dots, p.$$

Note que, para  $\mathbf{\Sigma}$  matriz de covarianza del vector aleatorio  $\mathbf{X}$  y con  $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{\Sigma}) (= \text{diag}(\sigma_{11}, \dots, \sigma_{pp}))$  podemos escribir

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{\Sigma} \mathbf{D}^{-1/2}.$$

Cada elemento de la diagonal de  $\mathbf{R}$  es igual a 1, mientras que sus elementos fuera de la diagonal están entre -1 y 1. Además se desprende desde la definición que  $\mathbf{R}$  es una matriz semidefinida positiva.

**RESULTADO 1.11.** Sea  $\mathbf{X}$  vector aleatorio  $p$ -dimensional con  $\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}$  y  $\text{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{\Sigma}$ . Sea  $\mathbf{A}$  una matriz  $p \times p$ . Entonces

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}) = \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{\Sigma}) + \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}.$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}) &= \mathbf{E}(\text{tr } \mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}) = \mathbf{E}(\text{tr } \mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{X}^\top) \\ &= \text{tr } \mathbf{E}(\mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{X}^\top) = \text{tr } \mathbf{A} \mathbf{E}(\mathbf{X} \mathbf{X}^\top) \\ &= \text{tr } \mathbf{A}(\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^\top) = \text{tr}(\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}) + \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}.\end{aligned}$$

□

Considere el siguiente caso especial: sea  $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \mathbf{a}$ , entonces  $\text{Cov}(\mathbf{Y}) = \text{Cov}(\mathbf{X})$  y tenemos

$$\mathbf{E}[(\mathbf{X} - \mathbf{a})^\top \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{a})] = \text{tr}(\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}) + (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{a})^\top \mathbf{A}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{a}).$$

EJEMPLO 1.12. Sea  $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)^\top$  vector  $n$ -dimensional cuyos componentes son todos 1. Note que,  $\mathbf{1}_n^\top \mathbf{1}_n = n$ . Considere el vector aleatorio  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ , entonces

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{X} = \sum_{i=1}^n X_i^2, \quad \mathbf{1}^\top \mathbf{X} = \sum_{i=1}^n X_i.$$

De este modo, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 = \mathbf{X}^\top \mathbf{X} - n\left(\frac{1}{n} \mathbf{1}^\top \mathbf{X}\right)^2 \\ &= \mathbf{X}^\top \mathbf{X} - n\left(\frac{1}{n} \mathbf{1}^\top \mathbf{X}\right)\left(\frac{1}{n} \mathbf{1}^\top \mathbf{X}\right) = \mathbf{X}^\top \mathbf{X} - \frac{1}{n} \mathbf{X}^\top \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \mathbf{X} \\ &= \mathbf{X}^\top \left(\mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{J}_n\right) \mathbf{X}, \quad \mathbf{J}_n = \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top\end{aligned}$$

Llamaremos a  $\mathbf{C} = \mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{J}_n$  la *matriz de centrado*. Suponga que  $X_1, \dots, X_n$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , sigue que

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \mu \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}_n,$$

pues  $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$  ( $i \neq j$ ). Por tanto, podemos usar el Resultado (1.11) para calcular la esperanza de la variable aleatoria,

$$Q = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \mathbf{X}^\top \mathbf{C} \mathbf{X},$$

obteniendo

$$\mathbf{E}(Q) = \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{C}) + \mu^2 \mathbf{1}^\top \mathbf{C} \mathbf{1}.$$

EJEMPLO 1.13. Sea  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Considere la forma cuadrática

$$Q = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2.$$

De este modo

$$Q = \mathbf{X}^\top \mathbf{C} \mathbf{X} = \mathbf{X}^\top \left(\mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{J}_n\right) \mathbf{X},$$

como  $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$  ( $i \neq j$ ),  $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}_n$  y  $\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \mu \mathbf{1}_n$ , obtenemos que

$$\mathbf{E}(Q) = \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{C}) + \mu^2 \mathbf{1}^\top \mathbf{C} \mathbf{1} = \sigma^2(n-1).$$

Es fácil verificar que

$$\begin{aligned}\text{tr}(\mathbf{C}) &= \text{tr}\left(\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top\right) = \text{tr}(\mathbf{I}) - \frac{1}{n}\text{tr}(\mathbf{1}\mathbf{1}^\top) = n - \frac{1}{n}\mathbf{1}^\top\mathbf{1} = n - 1, \\ \mathbf{C}\mathbf{1} &= \left(\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top\right)\mathbf{1} = \mathbf{1} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top\mathbf{1} = \mathbf{1} - \mathbf{1} = \mathbf{0},\end{aligned}$$

de donde sigue que  $\mathbb{E}(Q) = \sigma^2(n-1)$ .

**RESULTADO 1.14.** *Si  $\mathbf{X}$  es vector aleatorio  $n \times 1$ . Entonces su distribución está determinada por las distribuciones de las funciones lineales  $\mathbf{a}^\top \mathbf{X}$ , para todo  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** La función característica de  $\mathbf{a}^\top \mathbf{X}$  es

$$\varphi_{\mathbf{a}^\top \mathbf{X}}(t) = \mathbb{E}\{\exp(it\mathbf{a}^\top \mathbf{X})\},$$

de modo que

$$\varphi_{\mathbf{a}^\top \mathbf{X}}(1) = \mathbb{E}\{\exp(i\mathbf{a}^\top \mathbf{X})\} \quad (= \varphi_X(\mathbf{a})).$$

Es considerada como una función de  $\mathbf{a}$ , esto es, la función característica (conjunta) de  $\mathbf{X}$ . El resultado sigue notando que una distribución en  $\mathbb{R}^n$  está completamente determinada por su función característica.  $\square$

La función característica permite un método bastante operativo para el cálculo del  $k$ -ésimo momentos de un vector aleatorio  $\mathbf{X}$ . En efecto,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_k(\mathbf{X}) &= \begin{cases} \mathbb{E}(\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}^\top \otimes \cdots \otimes \mathbf{X}^\top), & k \text{ par}, \\ \mathbb{E}(\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}^\top \otimes \cdots \otimes \mathbf{X}^\top \otimes \mathbf{X}), & k \text{ impar}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} i^{-k} \frac{\partial^k \varphi(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t} \partial \mathbf{t}^\top \cdots \partial \mathbf{t}^\top} \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}, & k \text{ par}, \\ i^{-k} \frac{\partial^k \varphi(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t} \partial \mathbf{t}^\top \cdots \partial \mathbf{t}^\top \partial \mathbf{t}} \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}, & k \text{ impar}. \end{cases}\end{aligned}$$

### 1.3. Independencia de vectores aleatorios

Sea  $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}^\top, \mathbf{Y}^\top)^\top$  con  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  vectores aleatorios  $n$  y  $q$ -dimensionales, respectivamente. Se dicen independientes si y sólo si

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x})H(\mathbf{y}),$$

donde  $F(\mathbf{z})$ ,  $G(\mathbf{x})$  y  $H(\mathbf{y})$  son las funciones de distribución de  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ , respectivamente.

Si  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  tienen densidades  $f(\mathbf{z})$ ,  $g(\mathbf{x})$  y  $h(\mathbf{y})$ , respectivamente. Entonces  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  son independientes si

$$f(\mathbf{z}) = g(\mathbf{x})h(\mathbf{y}),$$

o bien,

$$f(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = g(\mathbf{x}).$$

**RESULTADO 1.15.** *Sean  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  dos vectores aleatorios independientes. Entonces para funciones cualquiera  $\kappa$  y  $\tau$ , tenemos*

$$\mathbb{E}\{\kappa(\mathbf{X})\tau(\mathbf{Y})\} = \mathbb{E}\{\kappa(\mathbf{X})\}\mathbb{E}\{\tau(\mathbf{Y})\},$$

*si las esperanzas existen.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, es fácil notar que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\kappa(\mathbf{X})\tau(\mathbf{Y})\} &= \int \int \kappa(\mathbf{x})\tau(\mathbf{y})g(\mathbf{x})h(\mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} \\ &= \left( \int \kappa(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right) \left( \int \tau(\mathbf{y})h(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right) \\ &= \mathbb{E}\{\kappa(\mathbf{X})\} \mathbb{E}\{\tau(\mathbf{Y})\}. \end{aligned}$$

□

#### 1.4. Cambios de variable

Considere la función  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , el *Jacobiano* se define como el valor absoluto del determinante de  $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$  y es denotado por

$$J(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) = |D\mathbf{f}(\mathbf{x})|_+ = \text{abs}(\det(D\mathbf{f}(\mathbf{x}))),$$

donde  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Note que si  $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$  y  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ , entonces tenemos

$$J(\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x}) = J(\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{y}) \cdot J(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x})$$

$$J(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) = \{J(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y})\}^{-1}$$

El siguiente resultado presenta una de aplicación del Jacobiano de una transformación para obtener la función de densidad de una transformación de un vector aleatorio.

PROPOSICIÓN 1.16 (Transformación de vectores aleatorios continuos). *Sea  $\mathbf{X}$  vector aleatorio  $n$ -dimensional con densidad  $f_X(\mathbf{x})$  y soporte  $S = \{\mathbf{x} : f_X(\mathbf{x}) > 0\}$ . Para  $\mathbf{g} : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciable e invertible, sea  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ . Entonces la densidad de  $\mathbf{Y}$  está dada por*

$$\begin{aligned} f_Y(\mathbf{y}) &= |D\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y})|_+ f_X(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y})) \\ &= \{J(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x})\}^{-1} f_X(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y})). \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.17. Sea  $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ . Entonces

$$d\mathbf{Y} = \mathbf{A}(d\mathbf{X})\mathbf{B},$$

vectorizando obtenemos

$$\text{vec } d\mathbf{Y} = (\mathbf{B}^\top \otimes \mathbf{A}) \text{vec } d\mathbf{X},$$

esto es,  $D\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{B}^\top \otimes \mathbf{A}$ , por tanto

$$J(\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}) = |\mathbf{B}^\top \otimes \mathbf{A}|_+ = |\mathbf{A}|_+^q |\mathbf{B}^\top|_+^n = |\mathbf{A}|_+^q |\mathbf{B}|_+^n$$

#### 1.5. Distribución normal multivariada

La distribución normal multivariada ocupa un rol central en inferencia multivariada así como en modelación estadística. En esta sección introducimos la distribución normal multivariada mediante tres definiciones equivalentes, definiciones que permiten el estudio de las propiedades fundamentales de la distribución normal multivariada.

Una variable aleatoria normal (uni-dimensional)  $Z$  tiene una distribución normal con media cero y varianza uno si su función de densidad es de la forma

$$f(z) = (2\pi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right), \quad z \in \mathbb{R},$$

en cuyo caso escribimos  $Z \sim \mathbf{N}(0, 1)$ . Más generalmente una variable aleatoria  $Y \in \mathbb{R}$  tiene distribución normal con media  $\mu \in \mathbb{R}$  y varianza  $\sigma^2 \geq 0$  si

$$Y \stackrel{d}{=} \mu + \sigma Z, \quad Z \sim \mathbf{N}(0, 1),$$

en cuyo caso escribimos  $Y \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ . Cuando  $\sigma^2 = 0$ , la distribución  $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$  se interpreta como una distribución degenerada en  $\mu$ . Si  $Y \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ , entonces su función característica adopta la forma

$$\varphi(t) = \exp(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sea  $Z_1, \dots, Z_n$  variables aleatorias independientes cada una con distribución  $\mathbf{N}(0, 1)$  y considere el vector aleatorio  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^\top$ . De este modo, la densidad conjunta de  $\mathbf{Z}$  es dada por

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= \prod_{i=1}^n (2\pi)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}z_i^2) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n z_i^2\right) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mathbf{z}\|^2\right), \end{aligned}$$

y anotamos  $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ .

**DEFINICIÓN 1.18.** Un vector aleatorio  $p$ -dimensional,  $\mathbf{X}$  tiene distribución normal con vector de medias  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$  y matriz de covarianza  $\text{Cov}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\Sigma} \geq \mathbf{0}$  sólo si, para todo vector  $\mathbf{t}$  la variable aleatoria (uni-dimensional)  $\mathbf{t}^\top \mathbf{X}$  es normal univariada, en cuyo caso escribimos  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ .

**OBSERVACIÓN 1.19.** Note que en la definición anterior *no* se ha hecho supuestos respecto de la independencia de los componentes de  $\mathbf{X}$ .

**RESULTADO 1.20.** Suponga que  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  y considere la transformación lineal  $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$  donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times p}$  con  $\text{rg}(\mathbf{A}) = m$ . Entonces  $\mathbf{Y} \sim \mathbf{N}_m(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^\top)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$  y simplemente note que

$$\mathbf{t}^\top \mathbf{Y} = \mathbf{t}^\top \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{t}^\top \mathbf{b} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{t})^\top \mathbf{X} + \mathbf{t}^\top \mathbf{b} = \mathbf{h}^\top \mathbf{X} + c,$$

por la Definición 1.18 tenemos que  $\mathbf{h}^\top \mathbf{X}$  es normal y como  $c$  es una constante, sigue que  $\mathbf{t}^\top \mathbf{Y}$  tiene distribución normal multivariada.  $\square$

A partir del resultado anterior sigue que todas las distribuciones marginales de  $\mathbf{X}$  también son normalmente distribuidas. En particular, también permite apreciar que la distribución normal satisface la siguiente propiedad relativa a la simetría multivariada:

$$\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}_p(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_p) \implies \mathbf{Q}\mathbf{Z} \stackrel{d}{=} \mathbf{Z}, \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{O}_p.$$

**RESULTADO 1.21.** Si  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , entonces la función característica de  $\mathbf{X}$  es dada por

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp(it^\top \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}).$$

**DEMOSTRACIÓN.** Sabemos que la función característica de un vector aleatorio, satisface

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}\{\exp(it^\top \mathbf{X})\} = \varphi_{t^\top \mathbf{X}}(1),$$

donde la función característica de la variable aleatoria uni-dimensional  $Y = \mathbf{t}^\top \mathbf{X}$  es evaluada en 1. Como  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  sólo si  $\mathbf{t}^\top \mathbf{X} \sim \mathbf{N}_1(\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu}, \mathbf{t}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t})$ , tenemos

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp(it^\top \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}).$$



En efecto, sea  $\Sigma$  matriz de covarianza  $p \times p$  semidefinida positiva de rango  $r$  y sea  $Z_1, \dots, Z_r$  variables aleatorias IID  $N(0, 1)$ . Entonces el vector  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_r)^\top$  tiene función característica

$$\begin{aligned}\varphi_Z(\mathbf{t}) &= \mathbb{E}\{\exp(i\mathbf{t}^\top \mathbf{Z})\} = \prod_{j=1}^r \mathbb{E}\{\exp(it_j Z_j)\} \\ &= \prod_{j=1}^r \exp\left(-\frac{1}{2}t_j^2\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \mathbf{t}\right).\end{aligned}$$

Considere

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{Z},$$

donde  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times r}$  con  $\text{rg}(\mathbf{B}) = r$ , tal que  $\Sigma = \mathbf{B}\mathbf{B}^\top$  y  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ . Entonces  $\mathbf{X}$  tiene función característica

$$\begin{aligned}\varphi_X(\mathbf{t}) &= \mathbb{E}\{\exp(i\mathbf{t}^\top \mathbf{X})\} = \mathbb{E}\{\exp(i\mathbf{t}^\top (\boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{Z}))\} \\ &= \exp(i\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu}) \mathbb{E}\{\exp(i\mathbf{t}^\top \mathbf{B}\mathbf{Z})\} = \exp(i\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu}) \varphi_Z(\mathbf{h}), \quad \mathbf{h} = \mathbf{B}^\top \mathbf{t} \\ &= \exp(i\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu}) \exp(-\frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \mathbf{B}\mathbf{B}^\top \mathbf{t}) = \exp(i\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \Sigma \mathbf{t}).\end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 1.22. El Resultado 1.20 puede ser demostrado de manera bastante simple usando la función característica (ver Ejercicio 1.3).

RESULTADO 1.23. Si  $\mathbf{Z} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . Entonces

$$\mathbb{E}(\mathbf{Z}) = \mathbf{0}, \quad \text{Cov}(\mathbf{Z}) = \mathbf{I}.$$

DEMOSTRACIÓN. Para mostrar el resultado deseado, podemos calcular el primer y segundo diferencial de la función característica del vector aleatorio  $\mathbf{Z} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . De este modo,

$$d\varphi_Z(\mathbf{t}) = -\varphi_Z(\mathbf{t})\mathbf{t}^\top d\mathbf{t},$$

y

$$\begin{aligned}d^2 \varphi_Z(\mathbf{t}) &= -d\varphi_Z(\mathbf{t})\mathbf{t}^\top d\mathbf{t} - \varphi_Z(\mathbf{t})(d\mathbf{t})^\top d\mathbf{t} \\ &= \varphi_Z(\mathbf{t})(d\mathbf{t})^\top \mathbf{t}\mathbf{t}^\top d\mathbf{t} - \varphi_Z(\mathbf{t})(d\mathbf{t})^\top d\mathbf{t} \\ &= \varphi_Z(\mathbf{t})(d\mathbf{t})^\top (\mathbf{t}\mathbf{t}^\top - \mathbf{I}) d\mathbf{t},\end{aligned}$$

de ahí que

$$\frac{\partial \varphi_Z(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} = -\varphi_Z(\mathbf{t})\mathbf{t}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_Z(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t} \partial \mathbf{t}^\top} = \varphi_Z(\mathbf{t})(\mathbf{t}\mathbf{t}^\top - \mathbf{I}).$$

Ahora, el vector de medias y matriz de covarianzas están dadas por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{Z}) &= i^{-1} \frac{\partial \varphi_Z(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} = \mathbf{0}, \\ \mathbb{E}(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\top) &= i^{-2} \frac{\partial^2 \varphi_Z(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t} \partial \mathbf{t}^\top} \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} = \mathbf{I} = \text{Cov}(\mathbf{Z}).\end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 1.24. Considere

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{Z}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B}\mathbf{B}^\top,$$

con  $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . Usando los Resultados 1.20 y 1.23, sigue que

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{E}(\mathbf{Z}) = \boldsymbol{\mu}, \quad \text{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{B}\text{Cov}(\mathbf{Z})\mathbf{B}^\top = \boldsymbol{\Sigma}.$$

RESULTADO 1.25. Si  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , entonces la distribución marginal de cualquier subconjunto de  $k$  ( $< p$ ) componentes de  $\mathbf{X}$  es normal  $k$ -variada.

DEMOSTRACIÓN. Considere la siguiente partición:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

donde  $\mathbf{X}_1$  y  $\boldsymbol{\mu}_1$  son vectores  $k \times 1$  y  $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$  es  $k \times k$ . Aplicando el Resultado 1.20 con

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I}_k, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^{k \times p} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

sigue inmediatamente que  $\mathbf{X}_1 \sim \mathbf{N}_k(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$ .  $\square$

Una consecuencia de este resultado es que la distribución marginal de *cada* componente de  $\mathbf{X}$  es normal univariada.

OBSERVACIÓN 1.26. La inversa del Resultado 1.25 *no* es verdad en general. Es decir, que cada componente de un vector aleatorio tenga distribución normal no implica que todo el vector siga una distribución normal multivariada.

RESULTADO 1.27. Si  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  y  $\mathbf{X}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\boldsymbol{\Sigma}$  son particionadas como en la Ecuación (1.3). Entonces los vectores  $\mathbf{X}_1$  y  $\mathbf{X}_2$  son independientes sólo si  $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}$ .

DEMOSTRACIÓN. Note que  $\text{Cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \boldsymbol{\Sigma}_{12}$ , así la independencia entre  $\mathbf{X}_1$  y  $\mathbf{X}_2$  implica que  $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}$ . Suponga ahora que  $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}$ . Entonces la función característica

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= \exp(i\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}) \\ &= \exp(it_1^\top \boldsymbol{\mu}_1 + it_2^\top \boldsymbol{\mu}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{t}_1^\top \boldsymbol{\Sigma}_{11} \mathbf{t}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{t}_2^\top \boldsymbol{\Sigma}_{22} \mathbf{t}_2) \\ &= \exp(it_1^\top \boldsymbol{\mu}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{t}_1^\top \boldsymbol{\Sigma}_{11} \mathbf{t}_1) \exp(it_2^\top \boldsymbol{\mu}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{t}_2^\top \boldsymbol{\Sigma}_{22} \mathbf{t}_2) \\ &= \varphi_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{t}_1) \varphi_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{t}_2), \end{aligned}$$

es decir,  $\mathbf{X}_1 \sim \mathbf{N}_k(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$  es independiente de  $\mathbf{X}_2 \sim \mathbf{N}_{p-k}(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22})$ .  $\square$

DEFINICIÓN 1.28. Si  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  y  $\boldsymbol{\Sigma}$  es definida positiva, entonces la densidad de  $\mathbf{X}$  asume la forma

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $Z_1, \dots, Z_p$  variables aleatorias IID  $\mathbf{N}(0, 1)$ . Tenemos que la densidad conjunta de  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_p)^\top$  es

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = (2\pi)^{-p/2} \exp(-\frac{1}{2}\|\mathbf{z}\|^2).$$

Considere  $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{Z}$  con  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$  y  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B}\mathbf{B}^\top$ , con  $\mathbf{B}$  matriz de rango completo. Entonces, tenemos la transformación inversa

$$\mathbf{Z} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}),$$

y  $d\mathbf{Z} = d\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{B}^{-1} d\mathbf{X}$ , con matriz jacobiana  $D\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{B}^{-1}$ , como

$$|D\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{X})|_+ = |\mathbf{B}|^{-1} = |\mathbf{B}\mathbf{B}^\top|^{-1/2},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} f_X(\mathbf{x}) &= |D\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x})|_+ f_Z(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x})) \\ &= (2\pi)^{-p/2} |\mathbf{B}\mathbf{B}^\top|^{-1/2} \exp\left\{\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}, \end{aligned}$$

notando que  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{B}^{-1}$  sigue el resultado deseado.  $\square$

EJEMPLO 1.29. Sea  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$  donde

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \quad -1 < \rho < 1.$$

En cuyo caso, la función de densidad es dada por:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2)\right\}.$$

A continuación se presenta la función de densidad para los casos  $\rho = 0.0, 0.4$  y  $0.8$ .

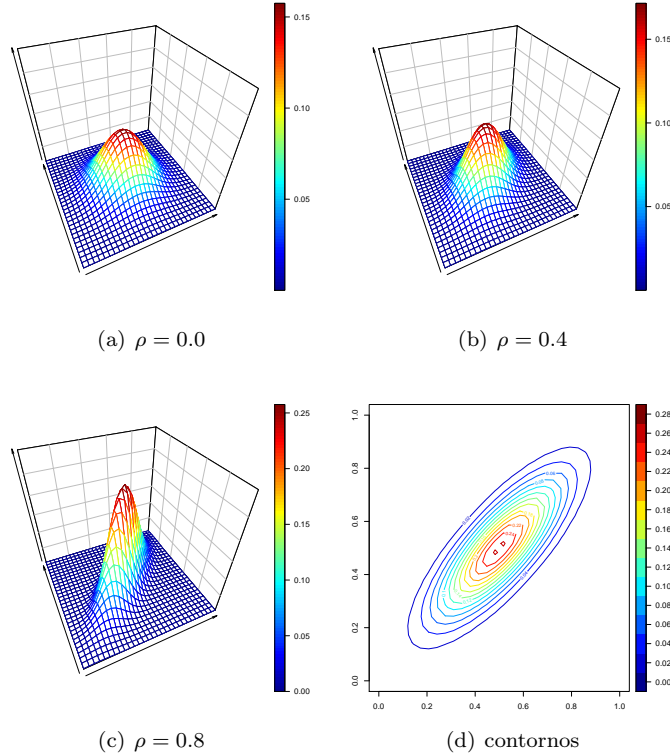


FIGURA 1. Densidad de  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$  para  $\rho = 0.0, 0.4$  y  $0.8$ .

Es fácil apreciar que la función de densidad es constante sobre el elipsoide

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \lambda,$$

en  $\mathbb{R}^p$  para todo  $\lambda > 0$ . Este elipsoide tiene centro  $\boldsymbol{\mu}$ , mientras que  $\boldsymbol{\Sigma}$  determina su forma y orientación. Además, la variable aleatoria

$$(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{Z}^\top \mathbf{Z} = \sum_{i=1}^p Z_i^2, \quad (1.4)$$

sigue una distribución chi-cuadrado con  $p$  grados de libertad y la cantidad  $D = \{(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})\}^{1/2}$  se conoce como *distancia de Mahalanobis* de  $\mathbf{X}$  a  $\boldsymbol{\mu}$ .

OBSERVACIÓN 1.30. Para la existencia de densidad hemos asumido que  $\boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$ . En el caso de que  $\boldsymbol{\Sigma} \geq \mathbf{0}$  decimos que  $\mathbf{X}$  sigue una distribución normal singular.

Para introducir una definición de la función de densidad asociada a una variable con distribución normal singular, note que  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  con  $\sigma^2 = 0 \Leftrightarrow x = \mu$  con probabilidad 1 (pues si  $\sigma^2 = 0$ ,  $P(X = \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X - \mu| < 1/n) = 0$ ,  $\forall n$ ).

Considere  $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  con  $\text{rg}(\boldsymbol{\Sigma}) = r < p$ . Entonces, podemos escribir

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U}^\top = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^\top \\ \mathbf{U}_2^\top \end{pmatrix} = \mathbf{U}_1 \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{U}_1^\top,$$

donde  $\boldsymbol{\Lambda}_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ . De este modo, es claro que

$$\mathbf{U}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{U}_2^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}_2 = \mathbf{0},$$

es decir, tenemos que  $\mathbf{U}_2^\top (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}$  con probabilidad 1. Mientras que

$$\mathbf{U}_1^\top (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}) \sim \mathcal{N}_r(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Lambda}_1).$$

Además  $\boldsymbol{\Sigma}^- = \mathbf{U}_1 \boldsymbol{\Lambda}_1^{-1} \mathbf{U}_1^\top = \mathbf{U}_1 (\mathbf{U}_1^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}_1)^{-1} \mathbf{U}_1^\top$ . Así,  $\mathbf{Y}$  tiene la siguiente densidad normal (singular)

$$\begin{aligned} f_Y(\mathbf{y}) &= |2\pi \mathbf{U}_1^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}_1|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{U}_1^\top (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}))^\top (\mathbf{U}_1^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}_1)^{-1} \mathbf{U}_1^\top (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})\right\} \\ &= (2\pi)^{-r/2} |\boldsymbol{\Lambda}_1|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{U}_1 \boldsymbol{\Lambda}_1^{-1} \mathbf{U}_1^\top (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})\right\}. \end{aligned}$$

El siguiente resultado presenta la distribución condicional de un vector aleatorio con distribución normal multivariada.

RESULTADO 1.31. Sea  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  y particione  $\mathbf{X}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\boldsymbol{\Sigma}$  como:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix},$$

donde  $\mathbf{X}_1$  y  $\boldsymbol{\mu}_1$  son vectores  $k \times 1$ , mientras que  $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$  es matriz  $k \times k$ . Sea  $\boldsymbol{\Sigma}_{22}^-$  una inversa generalizada de  $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ , esto es, una matriz que satisface

$$\boldsymbol{\Sigma}_{22} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^- \boldsymbol{\Sigma}_{22} = \boldsymbol{\Sigma}_{22},$$

y sea  $\boldsymbol{\Sigma}_{11.2} = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^- \boldsymbol{\Sigma}_{21}$ . Entonces

- (a)  $\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^- \mathbf{X}_2 \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^- \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{11.2})$  y es independiente de  $\mathbf{X}_2$ .
- (b) La distribución condicional

$$(\mathbf{X}_1 | \mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2) \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^- (\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2), \boldsymbol{\Sigma}_{11.2}).$$

DEMOSTRACIÓN. Considere la transformación lineal

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & -\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{p-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{X},$$

sigue que  $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{C}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}^\top)$ , donde

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\boldsymbol{\mu} &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & -\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{p-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 - \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}_2 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{C}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}^\top &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & -\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{p-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}^\top & \mathbf{I}_{p-k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_{21} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\mathbf{B}^\top + \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_{22}\mathbf{B}^\top & \boldsymbol{\Sigma}_{12} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_{22} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} - \boldsymbol{\Sigma}_{22}\mathbf{B}^\top & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De este modo, nuestro interés es escoger  $\boldsymbol{\Sigma}_{12} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_{22} = \mathbf{0}$ . Es decir,  $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ . Por otro lado, notando que

$$\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^-\boldsymbol{\Sigma}_{22} = \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_{22}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^-\boldsymbol{\Sigma}_{22} = \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_{22} = \boldsymbol{\Sigma}_{12},$$

sigue que  $\boldsymbol{\Sigma}_{12}\mathbf{B}^\top = \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_{22}\mathbf{B}^\top$  (y análogamente  $\mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_{21} = \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_{22}\mathbf{B}^\top$ ). Esto es, si  $\mathbf{B}$  es escogida como  $\mathbf{B} = \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^-$ , entonces  $\mathbf{Y}_1$  y  $\mathbf{Y}_2$  son independientes con distribución conjunta

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^-\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_p\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^-\boldsymbol{\mu}_2 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11.2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}\right).$$

Esto muestra la parte (a). Para notar la parte (b), note que las densidades de  $\mathbf{Y}_1$  y  $\mathbf{Y}_2$  están dadas por

$$\begin{aligned} g(\mathbf{y}_1; \boldsymbol{\delta}_{1.2}, \boldsymbol{\Sigma}_{11.2}) &= |2\pi\boldsymbol{\Sigma}_{11.2}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\delta}_{1.2})^\top \boldsymbol{\Sigma}_{11.2}^{-1}(\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\delta}_{1.2})\right\} \\ f_2(\mathbf{y}_2; \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22}) &= |2\pi\boldsymbol{\Sigma}_{22}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)^\top \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{y}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)\right\}, \end{aligned}$$

y la densidad conjunta para  $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1^\top, \mathbf{Y}_2^\top)^\top$  adopta la forma

$$f(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = g(\mathbf{y}_1; \boldsymbol{\delta}_{1.2}, \boldsymbol{\Sigma}_{11.2}) f_2(\mathbf{y}_2; \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22}).$$

Como

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = f_{1|2}(\mathbf{x}_1; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}|\mathbf{x}_2) f_2(\mathbf{x}_2; \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22}),$$

entonces, la densidad condicional de  $\mathbf{X}_1$  dado  $\mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2$  debe ser  $g(\mathbf{y}_1; \boldsymbol{\delta}_{1.2}, \boldsymbol{\Sigma}_{11.2})$ . Además, es fácil notar que la forma cuadrática

$$\begin{aligned} q(\mathbf{y}_1; \boldsymbol{\mu}_{1.2}, \boldsymbol{\Sigma}_{11.2}) &= (\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\delta}_{1.2})^\top \boldsymbol{\Sigma}_{11.2}^{-1}(\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\delta}_{1.2}) \\ &= (\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^-\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\delta}_{1.2})^\top \boldsymbol{\Sigma}_{11.2}^{-1}(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^-\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\delta}_{1.2}) \\ &= (\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_{1.2})^\top \boldsymbol{\Sigma}_{11.2}^{-1}(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_{1.2}), \end{aligned}$$

donde

$$\boldsymbol{\mu}_{1.2} = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^-(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2),$$

lo que muestra el resultado.  $\square$

OBSERVACIÓN 1.32. La esperanza de la distribución condicional de  $\mathbf{X}_1$  dado  $\mathbf{X}_2$ , es decir

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2) = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^-(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2),$$

se denomina *función de regresión* de  $\mathbf{X}_1$  sobre  $\mathbf{X}_2$  con coeficientes de regresión  $\mathbf{B} = \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^-$ . Esta es una función lineal de  $\mathbf{X}_2$  y la matriz de covarianza  $\boldsymbol{\Sigma}_{11.2}$  no depende de  $\mathbf{X}_2$ .

RESULTADO 1.33. Sea  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  y considere  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{X}$  dos funciones lineales del vector aleatorio  $\mathbf{X}$ . La covarianza entre  $\mathbf{Y}_1$  y  $\mathbf{Y}_2$  es dada por

$$\text{Cov}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) = \mathbf{A}_1 \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \mathbf{A}_2^\top = \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}_2^\top$$

Este resultado permite obtener una condición para la independencia entre dos formas lineales en variables aleatorias normales, estos es  $\mathbf{Y}_1$  y  $\mathbf{Y}_2$  serán independientes si y sólo si  $\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}_2^\top = \mathbf{0}$ .

EJEMPLO 1.34. Considere  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria desde  $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$  y sea  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^\top$  el vector de datos centrados con  $Z_i = X_i - \bar{X}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , donde  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . Podemos escribir

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \mathbf{1}^\top \mathbf{X}, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{C} \mathbf{X},$$

con  $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top$  la matriz de centrado. Tenemos que  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_n(\mu \mathbf{1}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$  y  $\bar{X}$  con  $\mathbf{Z}$  son independientes pues  $\mathbf{C} \mathbf{1} = \mathbf{0}$ .

EJEMPLO 1.35. Sea  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$  y considere las transformaciones  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{A} \mathbf{X}$  y  $\mathbf{Y}_2 = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^+ \mathbf{A})^\top \mathbf{X}$ . De este modo

$$\text{Cov}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) = \text{Cov}(\mathbf{A} \mathbf{X}, (\mathbf{I} - \mathbf{A}^+ \mathbf{A})^\top \mathbf{X}) = \sigma^2 \mathbf{A} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^+ \mathbf{A}) = \mathbf{0},$$

pues  $\mathbf{A} \mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{A}$  y  $\mathbf{Y}_1$  con  $\mathbf{Y}_2$  son independientes.

### 1.6. Alternativas a la distribución normal multivariada

La distribución normal multivariada es de importancia fundamental en la teoría clásica de modelos lineales así como para análisis multivariado. A pesar de su uso amplio, es bien sabido que la inferencia estadística basada en la distribución normal es vulnerable a la presencia de datos atípicos, esto ha motivado considerar distribuciones alternativas que eviten este tipo de limitaciones. En esta dirección, varios autores han sugerido la clase de distribuciones elípticas (ver, por ejemplo [Fang et al., 1990](#); [Arellano, 1994](#)) particularmente debido al hecho de incluir distribuciones con colas más pesadas que la normal, tales como la  $t$  de Student, exponencial potencia y normal contaminada, entre otras. Una subclase importante de la familia de distribuciones elípticas es la clase de distribuciones de mezcla de escala normal ([Andrews y Mallows, 1974](#)) la que tiene propiedades similares a la distribución normal, es relativamente simple de trabajar y permite proponer procedimientos para estimación robusta. A continuación se presenta la definición y algunos ejemplos de distribuciones en la clase elíptica.

DEFINICIÓN 1.36. Sea  $\mathbf{U}$  vector aleatorio  $p \times 1$  con *distribución uniforme* sobre el conjunto

$$\mathcal{S}_p = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : \|\mathbf{x}\| = 1\}, \quad (1.5)$$

esto es  $\mathcal{S}_p$  denota la *superficie de la esfera unitaria* en  $\mathbb{R}^p$ . En cuyo caso anotamos  $\mathbf{U} \sim \mathbf{U}(\mathcal{S}_p)$ .

PROPIEDAD 1.37. Si  $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ , entonces  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_p)^\top \sim \mathbf{U}(\mathcal{S}_p)$ , donde

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{Z}}{\|\mathbf{Z}\|}.$$

El resultado anterior es muy relevante pues permite definir la densidad de un vector aleatorio  $\mathbf{U} \sim \mathcal{U}(\mathcal{S}_p)$ . Así como, por ejemplo, generar observaciones sobre la esfera unitaria. Considere el siguiente gráfico,

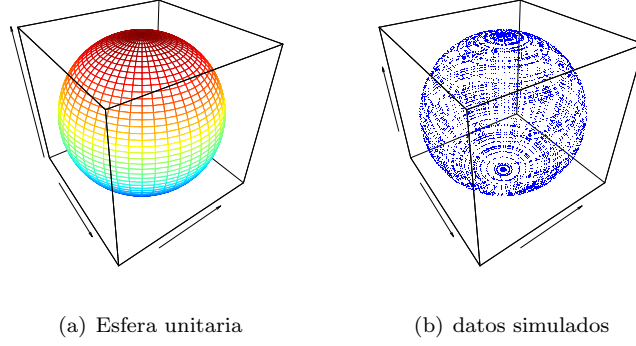


FIGURA 2. Esfera unitaria y datos generados sobre la superficie  $\mathcal{S}_p$ .

DEFINICIÓN 1.38. Un vector aleatorio  $p \times 1$ ,  $\mathbf{X}$  se dice que tiene simetría esférica si para cualquier  $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}_p$ , sigue que

$$\mathbf{Q}\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{X}.$$

EJEMPLO 1.39. Sea  $\mathbf{U} \sim \mathcal{U}(\mathcal{S}_p)$ , entonces es bastante obvio que  $\mathbf{Q}\mathbf{U} \stackrel{d}{=} \mathbf{U}$ .

EJEMPLO 1.40. Suponga  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ . Tenemos que

$$\mathbf{Q}\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}),$$

para  $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}_p$ , es decir  $\mathbf{Q}\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{X}$  tiene simetría esférica.

DEFINICIÓN 1.41. Un vector aleatorio  $p$ -dimensional tiene *distribución esférica* sólo si su función característica satisface

- (a)  $\varphi(\mathbf{Q}^\top \mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{t})$ , para todo  $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}_p$ .
- (b) Existe una función  $\psi(\cdot)$  de una variable escalar tal que  $\varphi(\mathbf{t}) = \psi(\mathbf{t}^\top \mathbf{t})$ .

En este caso escribimos  $\mathbf{X} \sim \mathcal{S}_p(\psi)$ .

EJEMPLO 1.42. Sea  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ , tenemos que

$$\varphi(\mathbf{t}) = \exp\{-\frac{1}{2}(t_1^2 + \cdots + t_p^2)\} = \exp(-\frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \mathbf{t}).$$

RESULTADO 1.43. Sea  $\psi(\mathbf{t}^\top \mathbf{t})$  la función característica del vector aleatorio  $\mathbf{X}$ . Entonces  $\mathbf{X}$  tiene representación estocástica

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{R}\mathbf{U},$$

donde  $\mathbf{U} \sim \mathcal{U}(\mathcal{S}_p)$  y  $\mathbf{R} \sim F(\mathbf{X})$  son independientes.

RESULTADO 1.44. Suponga que  $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{R}\mathbf{U} \sim \mathcal{S}_p(\psi)$  ( $P(\mathbf{X} = \mathbf{0}) = 0$ ), entonces

$$\|\mathbf{X}\| \stackrel{d}{=} \mathbf{R}, \quad \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \stackrel{d}{=} \mathbf{U}.$$

Además  $\|\mathbf{X}\|$  y  $\mathbf{X}/\|\mathbf{X}\|$  son independientes.

RESULTADO 1.45. *El vector de medias y la matriz de covarianza de  $\mathbf{U} \sim \mathbf{U}(\mathcal{S}_p)$  son:*

$$\mathbf{E}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, \quad \text{Cov}(\mathbf{U}) = \frac{1}{p} \mathbf{I}_p,$$

*respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ , tenemos que  $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \|\mathbf{X}\| \mathbf{U}$ , con  $\|\mathbf{X}\|$  independiente de  $\mathbf{U}$ . Sabemos que  $\|\mathbf{X}\|^2 \sim \chi^2(p)$ . Dado que

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E}(\|\mathbf{X}\|) > 0, \quad \text{y} \quad \mathbf{E}(\|\mathbf{X}\|^2) = p, \quad \text{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{I}_p,$$

el resultado sigue.  $\square$

RESULTADO 1.46. *Si  $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} R\mathbf{U} \sim \mathbf{S}_p(g)$  y  $\mathbf{E}(R^2) < \infty$ . Entonces,*

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad \text{Cov}(\mathbf{X}) = \frac{\mathbf{E}(R^2)}{p} \mathbf{I}_p,$$

*respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, como  $R$  y  $\mathbf{U}$  son independientes, sigue que

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \mathbf{E}(R) \mathbf{E}(\mathbf{U}) = \mathbf{0},$$

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{E}(R^2) \mathbf{E}(\mathbf{U}\mathbf{U}^\top) = \mathbf{E}(R^2) \text{Cov}(\mathbf{U}) = \frac{\mathbf{E}(R^2)}{p} \mathbf{I}_p,$$

siempre que  $\mathbf{E}(R) < \infty$  y  $\mathbf{E}(R^2) < \infty$ .  $\square$

DEFINICIÓN 1.47. Un vector aleatorio  $p \times 1$ ,  $\mathbf{X}$  tiene *distribución de contornos elípticos* con parámetros  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$  y  $\boldsymbol{\Sigma} \geq \mathbf{0}$  si

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y} \sim \mathbf{S}_k(\psi),$$

donde  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k \times p}$  es matriz de rango completo tal que,  $\mathbf{B}\mathbf{B}^\top = \boldsymbol{\Sigma}$  con  $\text{rg}(\boldsymbol{\Sigma}) = k$  y escribimos  $\mathbf{X} \sim \text{EC}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; \psi)$ .

OBSERVACIÓN 1.48. La función característica de  $\mathbf{X} \sim \text{EC}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; \psi)$  es de la forma

$$\varphi(\mathbf{t}) = \exp(i\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu}) \psi(\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}).$$

Note además que la representación estocástica de  $\mathbf{X}$  es dada por

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + R\mathbf{B}\mathbf{U},$$

donde  $R \geq 0$  es independiente de  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{B}\mathbf{B}^\top = \boldsymbol{\Sigma}$ .

RESULTADO 1.49. *Suponga que  $\mathbf{X} \sim \text{EC}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; \psi)$  y  $\mathbf{E}(R^2) < \infty$ . Entonces*

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}, \quad \text{Cov}(\mathbf{X}) = \frac{\mathbf{E}(R^2)}{p} \boldsymbol{\Sigma}.$$

DEFINICIÓN 1.50. Se dice que el vector  $\mathbf{X}$  tiene distribución de contornos elípticos si su función de densidad es de la forma

$$f(\mathbf{x}) = |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} g((\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p,$$

donde  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  es función decreciente, llamada *función generadora de densidad*, tal que:

$$\int_0^\infty u^{p/2-1} g(u) \, du < \infty,$$

y escribimos  $\mathbf{X} \sim \text{EC}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; g)$ .



OBSERVACIÓN 1.51. Asuma que  $\mathbf{X} \sim \text{EC}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; \psi)$  con  $\text{rg}(\boldsymbol{\Sigma}) = k$ . Entonces,

$$U = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^- (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \stackrel{d}{=} R^2,$$

donde  $\boldsymbol{\Sigma}^-$  es una inversa generalizada de  $\boldsymbol{\Sigma}$ .

EJEMPLO 1.52. En la siguiente figura se presenta la densidad asociadas a las siguientes funciones  $g$ :

- Normal:  $g(u) = c_1 \exp(-u/2)$ .
- Laplace:  $g(u) = c_2 \exp(-\sqrt{u}/2)$ .
- Cauchy:  $g(u) = c_3(1 + u)^{-(p+1)/2}$ .
- Exponencial potencia (PE):  $g(u) = c_4 \exp(-u^\lambda/2)$ ,  $\lambda = 2$ .

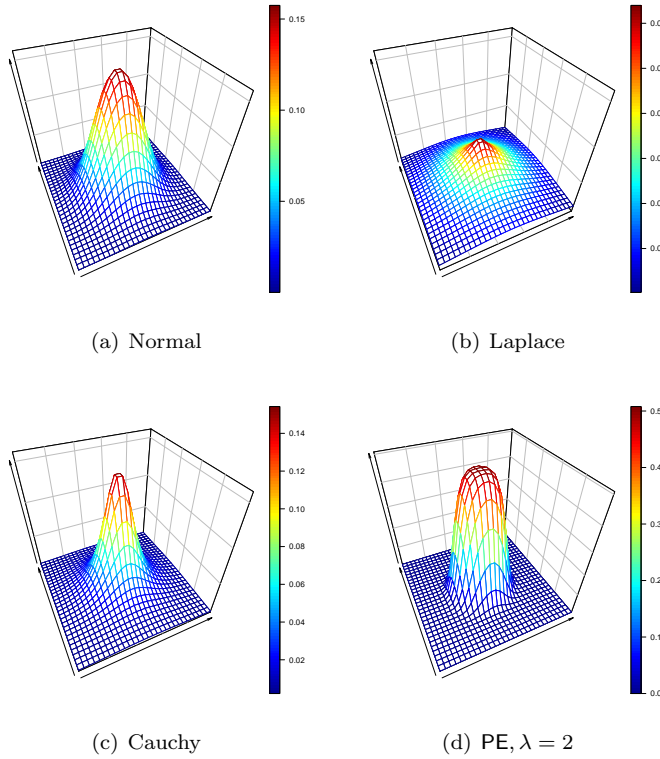


FIGURA 3. Funciones de densidad del vector  $\mathbf{X} \sim \text{EC}_2(\mathbf{0}, \mathbf{I}; g)$  para las distribuciones normal, Laplace, Cauchy y exponencial potencia con  $\lambda = 2$ .

EJEMPLO 1.53 (Distribución  $t$  de Student). La función generadora de densidad de un vector aleatorio con distribución  $t$  de Student asume la forma

$$g(u) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+p}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})(\pi\nu)^{p/2}} \left(1 + \frac{u}{\nu}\right)^{-(\nu+p)/2}, \quad \nu > 0.$$

Para la distribución  $t$  de Student, tenemos que  $R^2/p \sim F_{p,\nu}$ . Además, la función característica de  $\mathbf{X} \sim t_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \nu)$  es dada por

$$\varphi(\mathbf{t}) = \frac{\|\sqrt{\nu}\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\mathbf{t}\|^{\nu/2}}{2^{\nu/2-1}\Gamma(\nu/2)} \exp\{i\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu}\} K_{\nu/2}(\|\sqrt{\nu}\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\mathbf{t}\|), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^p,$$

donde  $K_\nu(x)$  denota la función de Bessel modificada de segundo tipo. Un caso particular importante corresponde a la distribución Cauchy, cuando  $\nu = 1$ , mientras que la distribución normal corresponde al caso límite  $\nu \rightarrow \infty$ .

**EJEMPLO 1.54** (Distribución Exponencial Potencia). Para la distribución Exponencial Potencia (Gómez et al., 1988), la función generadora de densidades es dada por

$$g(u) = \frac{p\Gamma(\frac{p}{2})\pi^{-p/2}}{\Gamma(1 + \frac{p}{2\lambda})2^{1+\frac{p}{2\lambda}}} \exp(-u^\lambda/2), \quad \lambda > 0.$$

y es usual utilizar la notación  $\mathbf{X} \sim \text{PE}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \lambda)$ . En este caso tenemos que la variable aleatoria positiva  $R$  tiene densidad

$$h(r) = \frac{p}{\Gamma(1 + \frac{p}{2\lambda})2^{\frac{p}{2\lambda}}} r^{p-1} \exp(-r^{2\lambda}/2), \quad r > 0.$$

Note también que  $R^{2\lambda} \sim \text{Gama}(\frac{1}{2}, \frac{p}{2\lambda})$ . Debemos destacar que esta clase de distribuciones contiene la distribución normal como un caso particular cuando  $\lambda = 1$ . Mientras que tiene colas más pesadas que la normal si  $\lambda < 1$  y colas más livianas para el caso  $\lambda > 1$ . Otro caso particular de interés es la distribución Laplace, que es recuperada cuando  $\lambda = 1/2$ .

**DEFINICIÓN 1.55.** Sea  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}$  matriz  $p \times p$  definida positiva y  $\mathbf{H}$  función de distribución de la variable aleatoria positiva  $W$ . Entonces, se dice que el vector aleatorio  $\mathbf{X}$  sigue una *distribución de mezcla de escala normal* si su función de densidad asume la forma

$$f(\mathbf{x}) = |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \int_0^\infty w^{p/2} \exp(-wu/2) d\mathbf{H}(w),$$

donde  $u = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$  y anotamos  $\mathbf{X} \sim \text{SMN}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; \mathbf{H})$ .

**EJEMPLO 1.56** (Distribución Slash). Un vector aleatorio  $\mathbf{X}$  tiene distribución Slash si su función de densidad es de la forma:

$$f(\mathbf{x}) = \nu(2\pi)^{-p/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \int_0^1 w^{p/2+\nu-1} \exp(-wu/2) dw.$$

En este caso, tenemos que  $h(w) = \nu w^{\nu-1}$ , para  $w \in (0, 1)$  y  $\nu > 0$ . Es decir  $W \sim \text{Beta}(\nu, 1)$ .

**OBSERVACIÓN 1.57.** Un vector aleatorio  $\mathbf{X} \sim \text{SMN}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; \mathbf{H})$  admite la representación

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + W^{-1/2} \mathbf{Z},$$

donde  $\mathbf{Z} \sim \text{N}_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$  y  $W \sim \mathbf{H}(\nu)$  son independientes. También podemos utilizar la siguiente estructura jerárquica:

$$\mathbf{X}|W \sim \text{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}/W), \quad W \sim \mathbf{H}(\nu).$$

Esta representación permite, por ejemplo

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\mathbf{X}|W)) = \boldsymbol{\mu}$$

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{E}(\text{Cov}(\mathbf{X}|W)) + \text{Cov}(\mathbf{E}(\mathbf{X}|W)) = \mathbf{E}(W^{-1})\boldsymbol{\Sigma},$$

siempre que  $\mathbf{E}(W^{-1}) < \infty$ .

EJEMPLO 1.58 (Distribución  $t$  de Student). Para  $\mathbf{X} \sim t_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \nu)$ , con  $\nu > 0$ , podemos escribir

$$\mathbf{X}|W \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}/W), \quad W \sim \text{Gamma}(\nu/2, \nu/2),$$

es decir, la función de densidad asociado a la variable de mezcla, es dada por

$$h(\omega; \nu) = \frac{(\nu/2)^{\nu/2} \omega^{\nu/2-1}}{\Gamma(\nu/2)} \exp(-\nu\omega/2).$$

EJEMPLO 1.59 (Distribución normal contaminada). Considere  $\mathbf{X} \sim \text{CN}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \epsilon, \gamma)$  [Little \(1988\)](#) donde  $0 \leq \epsilon \leq 1$  denota el *porcentaje de contaminación* y  $0 < \gamma < 1$  corresponde a un *factor de inflación de escala*. En este caso, la variable de mezcla tiene densidad

$$h(\omega; \boldsymbol{\delta}) = \begin{cases} \epsilon, & \omega = \gamma \\ 1 - \epsilon & \omega = 1 \end{cases},$$

con  $\boldsymbol{\delta} = (\epsilon, \gamma)^\top$ . Podemos notar que la función de densidad adopta la forma:

$$f(\mathbf{x}) = (1 - \epsilon)|2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp(-u/2) + \epsilon\gamma^{p/2}|2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp(-\lambda u/2).$$

### 1.7. Algunas distribuciones no centrales

Las distribuciones chi-cuadrado,  $F$ ,  $t$  de Student no central son derivadas desde la distribución normal multivariada y son útiles para desarrollar la inferencia en modelo de regresión lineal.

RESULTADO 1.60. Sea  $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  y sea  $U = \mathbf{Z}^\top \mathbf{Z}$ . Entonces  $U \sim \chi_p^2$ , con función de densidad

$$f(u) = \frac{1}{2^{p/2}\Gamma(p/2)} u^{p/2-1} \exp(-u/2), \quad u > 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Como  $U$  es una función de variables aleatorias normales, entonces su función característica asume la forma

$$\begin{aligned} \varphi_U(t) &= \mathbf{E}\{\exp(itU)\} = \int_{\mathbb{R}^p} \exp(itu)(2\pi)^{-p/2} \exp(-\tfrac{1}{2}\mathbf{z}^\top \mathbf{z}) \mathbf{d}\mathbf{z} \\ &= (2\pi)^{-p/2} \int_{\mathbb{R}^p} \exp(-\tfrac{1}{2}(1 - 2it)\mathbf{z}^\top \mathbf{z}) \mathbf{d}\mathbf{z} = (1 - 2it)^{-p/2}, \end{aligned}$$

que corresponde a la función característica de una variable aleatoria chi-cuadrado con  $p$  grados de libertad.  $\square$

DEFINICIÓN 1.61 (Distribución chi-cuadrado no central). Si  $\mathbf{Y} \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$ , entonces  $U = \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y}$  tiene *distribución chi-cuadrado no central* con  $p$  grados de libertad y parámetro de no centralidad  $\lambda = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\mu}/2$ , en cuyo caso anotamos  $U \sim \chi_p^2(\lambda)$ .

RESULTADO 1.62. Sea  $\mathbf{Y} \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$  donde  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p) \neq \mathbf{0}$  y sea  $U = \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y}$ . Entonces la función característica de  $U$  es dada por

$$\varphi_U(t) = (1 - 2it)^{-p/2} \exp\left(\frac{2it\lambda}{1 - 2it}\right),$$

con  $\lambda = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\mu}/2$ .

DEMOSTRACIÓN. Como  $Y_1, \dots, Y_p$  son variables aleatorias independientes, tenemos

$$\varphi_U(t) = \prod_{j=1}^p \varphi_{Y_j^2}(t).$$

Ahora, la función característica asociada a la variable aleatoria  $Y_j^2$  es dada por

$$\begin{aligned} \varphi_{Y_j^2}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i t y_j^2) (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y_j - \mu_j)^2\right\} dy_j \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(1 - 2it)}{2} \left(y_j - \frac{\mu_j}{1 - 2it}\right)^2\right\} dy_j \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{\mu_j^2}{2} \left(\frac{1}{1 - 2it}\right) - \frac{\mu_j^2}{2}\right\}, \end{aligned}$$

de este modo,

$$\varphi_{Y_j^2}(t) = (1 - 2it)^{-1/2} \exp\left\{\frac{\mu_j^2}{2} \left(\frac{2it}{1 - 2it}\right)\right\},$$

y por tanto la función característica de la variable  $U = \sum_{j=1}^p Y_j^2$ , asume la forma

$$\varphi_U(t) = (1 - 2it)^{-p/2} \exp\left(\frac{2it\lambda}{1 - 2it}\right), \quad \lambda = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\mu}/2.$$

□

OBSERVACIÓN 1.63. Es interesante notar que la función característica de la variable  $U = \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y}$ , puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \varphi_U(t) &= (1 - 2it)^{-p/2} \exp\left(\frac{\lambda}{1 - 2it} - \lambda\right) \\ &= (1 - 2it)^{-p/2} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{\lambda/(1 - 2it)\}^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} (1 - 2it)^{-(p+2k)/2}. \end{aligned}$$

Es decir, la función característica de  $U$  es un *promedio ponderado con pesos Poisson* de funciones características de variables aleatorias chi-cuadrado con  $p + 2k$  grados de libertad.

Usando la relación entre funciones características y sus correspondientes funciones de densidad, sigue que la chi-cuadrado no central tiene la siguiente representación de mezcla

$$U|Z \sim \chi_{p+2z}^2, \quad Z \sim \text{Poisson}(\lambda), \quad (1.6)$$

con densidad

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \frac{1}{2^{p/2+k} \Gamma(\frac{p}{2} + k)} u^{p/2+k-1} \exp(-u/2), \quad u > 0.$$

La representación en (1.6) es muy útil para obtener los momentos de una variable aleatoria con distribución chi-cuadrado no central. En efecto, el valor esperado de  $U \sim \chi_p^2(\lambda)$  es dado por

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}\{\mathbb{E}(U|Z)\} = \mathbb{E}\{p + 2Z\} = p + 2\mathbb{E}(Z) = p + 2\lambda,$$

mientras que la varianza de  $U$  puede ser calculada como

$$\begin{aligned} \text{var}(U) &= \mathbb{E}\{\text{var}(U|Z)\} + \text{var}\{\mathbb{E}(U|Z)\} \\ &= \mathbb{E}\{2(p + 2Z)\} + \text{var}(p + 2Z) \\ &= 2p + 4\lambda + 4\lambda = 2p + 8\lambda. \end{aligned}$$

RESULTADO 1.64. Si  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  donde  $\boldsymbol{\Sigma}$  es matriz no singular. Entonces

- (a)  $(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_p^2$ .
- (b)  $\mathbf{X}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X} \sim \chi_p^2(\lambda)$ , donde  $\lambda = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$ .

DEMOSTRACIÓN. La idea de la demostración se basa en transformar los componentes de  $\mathbf{X}$  en variables aleatorias normales independientes. Considere  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B}\mathbf{B}^\top$  con  $\mathbf{B}$  no singular. Para probar (a), tome

$$\mathbf{Z} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}),$$

luego  $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  y de este modo

$$(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{Z}^\top \mathbf{Z} \sim \chi_p^2(0).$$

Para probar (b), sea  $\mathbf{Y} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{X}$ , luego

$$\mathbf{Y} \sim \mathbf{N}_p(\mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}),$$

y

$$\mathbf{X}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{B}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y},$$

que por definición tiene una distribución chi-cuadrado no central, con parámetro de no centralidad

$$\lambda = \frac{1}{2} (\mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\mu})^\top (\mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}.$$

□

DEFINICIÓN 1.65 (Distribución  $F$  no central). Sea  $X_1 \sim \chi_{\nu_1}^2(\lambda)$  y  $X_2 \sim \chi_{\nu_2}^2$  variables aleatorias independientes. Entonces,

$$F = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2} \sim F(\nu_1, \nu_2, \lambda),$$

es decir  $F$  sigue una *distribución  $F$  no central* con  $\nu_1$  y  $\nu_2$  grados de libertad y parámetro de no centralidad  $\lambda$ .

DEFINICIÓN 1.66 (Distribución Beta no central). Considere  $U_1 \sim \chi_{\nu_1}^2(\lambda)$ ,  $U_2 \sim \chi_{\nu_2}^2$  tal que  $U_1$  y  $U_2$  son variables aleatorias independientes. Entonces,

$$G = \frac{U_1}{U_1 + U_2} \sim \text{Beta}(\nu_1, \nu_2, \lambda),$$

esto es,  $G$  sigue una *distribución Beta no central* con parámetros de forma y escala  $\nu_1$  y  $\nu_2$ , respectivamente y parámetro de no centralidad  $\lambda$ .

DEFINICIÓN 1.67 (Distribución  $t$  de Student no central). Si  $Y \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$  y  $U/\sigma^2 \sim \chi_\nu^2$  son independientes, entonces

$$T = \frac{Y}{\sqrt{U/\nu}} \sim t_\nu(\lambda), \quad \lambda = \mu/\sigma,$$

es llamada una variable aleatoria con *distribución  $t$  de Student no central* con  $\nu$  grados de libertad y parámetro de no centralidad  $\lambda$ .

Note también que si  $Z \sim \mathbf{N}(0, 1)$ ,  $U \sim \chi_\nu^2$ ,  $\delta$  es una constante, y  $Z$  es independiente de  $U$ , entonces

$$T = \frac{Z + \delta}{\sqrt{U/\nu}} \sim t_\nu(\delta).$$

Además el cuadrado de una variable aleatoria  $t$  no central se distribuye como una variable aleatoria  $F$  no central con parámetro de no centralidad  $\delta = \lambda^2/2$ . De este modo,

$$t_\nu^2(\lambda) \stackrel{d}{=} F(1, \nu, \lambda^2/2).$$

### 1.8. Distribución de formas cuadráticas

Para motivar ideas, sabemos que si  $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ , entonces  $U = \mathbf{Z}^\top \mathbf{Z} \sim \chi_p^2$  pues corresponde a la suma de variables aleatorias IID  $\mathbf{N}(0, 1)$ . El objetivo de esta sección es proveer condiciones bajo las cuales variables aleatorias de la forma  $U = \mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}$  con  $\mathbf{Y} \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  siguen una distribución chi-cuadrado no central así como estudiar sus principales propiedades.

RESULTADO 1.68. Si  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$  y  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  es matriz simétrica. Entonces  $\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} \sim \chi_k^2(\theta)$  sólo si  $\mathbf{A}$  es idempotente, en cuyo caso los grados de libertad y el parámetro de no centralidad están dados por

$$k = \text{rg}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}), \quad y \quad \theta = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\mu},$$

respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. Suponga que  $\mathbf{A}$  es idempotente de rango  $k$ . Entonces existe una matriz ortogonal  $\mathbf{P}$  tal que

$$\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Sea  $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^\top \mathbf{X}$ , entonces  $\mathbf{Y} \sim \mathbf{N}_p(\mathbf{P}^\top \boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$ , y

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{Y}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^k Y_i^2,$$

que sigue una distribución chi-cuadrado con  $k$  grados de libertad. Para el parámetro de no centralidad  $\theta$ , note que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\chi_k^2(\theta)\} &= k + 2\theta = \mathbb{E}(\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}) = \text{tr}(\mathbb{E}(\mathbf{X} \mathbf{X}^\top) \mathbf{A}) \\ &= \text{tr}((\mathbf{I} + \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^\top) \mathbf{A}) = k + \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}, \end{aligned}$$

y de ahí que  $\theta = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}$ .

Ahora, suponga que  $\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} \sim \chi_k^2(\theta)$ . Si  $\mathbf{A}$  tiene rango  $r$ , entonces para  $\mathbf{P}$  matriz ortogonal  $p \times p$ ,

$$\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

con  $\mathbf{\Lambda}_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ , donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  son los valores propios no nulos de  $\mathbf{A}$ . Sea  $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^\top \mathbf{X}$ , entonces

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{Y} = \sum_{j=1}^r \lambda_j Y_j^2 = U.$$

Tenemos que  $\mathbf{Y} \sim \mathbb{N}_p(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{I})$  con  $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{P}^\top \boldsymbol{\mu}$ , de modo que  $Y_j^2 \sim \chi_1^2(\delta_j^2/2)$  con función característica

$$\varphi_{Y_j^2}(t) = (1 - 2it)^{-1/2} \exp\left(\frac{it\delta_j^2}{1 - 2it}\right),$$

por la independencia de  $Y_1, \dots, Y_r$  sigue que

$$\begin{aligned} \varphi_U(t) &= \prod_{j=1}^r (1 - 2it\lambda_j)^{-1/2} \exp\left(\frac{it\lambda_j\delta_j^2}{1 - 2it\lambda_j}\right) \\ &= \exp\left(it \sum_{j=1}^r \frac{\lambda_j\delta_j^2}{1 - 2it\lambda_j}\right) \prod_{j=1}^r (1 - 2it\lambda_j)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Como  $\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} \sim \chi_k^2(\theta)$  tiene función característica

$$\varphi_{\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}}(t) = (1 - 2it)^{-k/2} \exp\left(\frac{2it\theta}{1 - 2it}\right),$$

entonces desde las dos expresiones anteriores debemos tener  $r = k$ ,  $\lambda_j = 1$ ,  $\forall j$  y  $\theta = \sum_j \delta_j^2/2$ . Consecuentemente  $\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}$  tiene la forma

$$\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

que es idempotente. Luego

$$\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P} = (\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P})(\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}) = \mathbf{P}^\top \mathbf{A}^2 \mathbf{P} \implies \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}.$$

□

RESULTADO 1.69. Si  $\mathbf{X} \sim \mathbb{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  donde  $\boldsymbol{\Sigma}$  es no singular y  $\mathbf{X}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\boldsymbol{\Sigma}$  son particionados como

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix},$$

donde  $\mathbf{X}_1$ ,  $\boldsymbol{\mu}_1$  son  $k \times 1$  y  $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$  es  $k \times k$ . Entonces

$$U = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)^\top \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} (\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1) \sim \chi_{p-k}^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Considere  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B} \mathbf{B}^\top$ , donde  $\mathbf{B}$  es no singular y particione  $\mathbf{B}$  como

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{k \times p}.$$

Luego,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B} \mathbf{B}^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^\top & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2^\top \\ \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^\top & \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^\top \end{pmatrix},$$

de donde sigue que  $\Sigma_{11} = B_1 B_1^\top$ . Ahora, sea  $Z = B^{-1}(X - \mu) \sim N_p(0, I)$ . De este modo,

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} U &= Z^\top Z - Z^\top B_1^\top (B_1 B_1^\top)^{-1} B_1 Z = Z^\top (I - B_1^\top (B_1 B_1^\top)^{-1} B_1) Z \\ &= Z^\top (I - H_1) Z, \quad \text{con } H_1 = B_1^\top (B_1 B_1^\top)^{-1} B_1. \end{aligned}$$

Note que  $H_1$  es simétrica e idempotente y por tanto también lo es  $C = I - H_1$ . De donde sigue que  $U \sim \chi_\nu^2$ , con  $\nu = \text{rg}(C) = p - k$ .  $\square$

El Resultado 1.68 se puede generalizar al caso que  $X$  tiene una matriz de covarianza arbitraria. Suponga que  $X \sim N_p(0, \Sigma)$ . Una condición para que  $X^\top A X$  tenga una distribución chi-cuadrado es

$$\Sigma A \Sigma A = \Sigma A,$$

en cuyo caso los grados de libertad son  $k = \text{rg}(A \Sigma)$ . Si  $\Sigma$  es no singular, la condición resulta  $A \Sigma A = A$ .

RESULTADO 1.70. Si  $X \sim N_p(0, \Sigma)$  donde  $\Sigma$  tiene rango  $k$  ( $\leq p$ ) y si  $A$  es una inversa generalizada de  $\Sigma$  ( $\Sigma A \Sigma = \Sigma$ ), entonces  $X^\top A X \sim \chi_k^2$ .

DEMOSTRACIÓN. Considere  $Y = B X$  donde  $B$  es una matriz no singular  $p \times p$  tal que

$$B \Sigma B^\top = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Particionando  $Y = (Y_1^\top, Y_2^\top)^\top$  donde  $Y_1$  es un vector  $k \times 1$  sigue que  $Y_1 \sim N_k(0, I)$  y  $Y_2 = 0$  con probabilidad 1. Es decir, tenemos que

$$Y = (Y_1^\top, 0)^\top, \quad \text{con probabilidad 1.}$$

Ahora, note que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= B \Sigma B^\top = B \Sigma A \Sigma B^\top \\ &= B \Sigma B^\top B^{-\top} A B^{-1} B \Sigma B^\top \\ &= \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-\top} A B^{-1} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, con probabilidad uno,

$$\begin{aligned} X^\top A X &= Y^\top B^{-\top} A B^{-1} Y = (Y_1^\top, 0) B^{-\top} A B^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (Y_1^\top, 0) \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-\top} A B^{-1} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (Y_1^\top, 0) \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = Y_1^\top Y_1 \sim \chi_k^2. \end{aligned}$$

$\square$

RESULTADO 1.71. Si  $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ , donde  $\Sigma$  es no singular, y  $A$  es una matriz simétrica  $p \times p$ . Entonces  $X^\top A X \sim \chi_k^2(\lambda)$ , donde  $k = \text{rg}(A)$ ,  $\lambda = \mu^\top A \mu / 2$  si y sólo si  $A \Sigma$  es matriz idempotente.



DEMOSTRACIÓN. Considere  $\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{X}$ , donde  $\mathbf{B}$  es una matriz no singular  $p \times p$  tal que  $\mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}^\top = \mathbf{I}_p$ . Entonces

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{Y},$$

donde  $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$ . Desde el Resultado 1.68 sigue que  $\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}$  tiene distribución chi-cuadrado sólo si  $\mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}$  es idempotente. Esto es equivalente a mostrar que  $\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}$  es idempotente.

Si  $\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}$  es idempotente, tenemos

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}^{-\top}\mathbf{A}, \quad (\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}^{-\top})$$

así, pre- y post-multiplicando por  $\mathbf{B}^{-\top}$  y  $\mathbf{B}^{-1}$ , obtenemos

$$\mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1})(\mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}),$$

y por tanto es idempotente.

Por otro lado, si  $\mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}$  es idempotente, entonces

$$\mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1})(\mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}) = \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1},$$

es decir  $\mathbf{A} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}$  y de ahí que  $\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}$  es idempotente.  $\square$

EJEMPLO 1.72. Sea  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias IID  $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ , en este caso podemos definir  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$  tal que  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_n(\theta \mathbf{1}_n, \sigma^2 \mathbf{I})$ . Considere la forma cuadrática

$$Q = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}^\top \mathbf{C} \mathbf{X} = \mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X},$$

con  $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top$  y  $\mathbf{A} = \mathbf{C}/\sigma^2$ . De esta manera

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top,$$

que es idempotente. Además

$$\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{tr}\left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top\right) = n - 1,$$

y

$$\lambda = \frac{\theta^2}{2} \mathbf{1}^\top \mathbf{A} \mathbf{1} = \frac{\theta^2}{2\sigma^2} \mathbf{1}^\top \left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top\right) \mathbf{1} = 0.$$

Finalmente,

$$Q = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi_{n-1}^2.$$

RESULTADO 1.73. Sea  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $Q_1 = \mathbf{X}^\top \mathbf{A}_1 \mathbf{X}$  y  $Q_2 = \mathbf{X}^\top \mathbf{A}_2 \mathbf{X}$ . Entonces  $Q_1$  y  $Q_2$  son independientes si y sólo si  $\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$ .

DEMOSTRACIÓN. (Sólo suficiencia) Sea  $\mathbf{Y} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{X}$  donde  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B} \mathbf{B}^\top$ , entonces

$$Q_i = \mathbf{X}^\top \mathbf{A}_i \mathbf{X} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A}_i \mathbf{B}^{-1} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{G}_i \mathbf{Y}, \quad i = 1, 2.$$

De este modo,  $\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$  implica que  $\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 = \mathbf{0}$ . Tenemos que, existe una matriz ortogonal  $\mathbf{P}$ , tal que

$$\mathbf{P}^\top \mathbf{G}_i \mathbf{P} = \mathbf{M}_i, \quad i = 1, 2,$$

es diagonal. Además,

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 = \mathbf{P}^\top \mathbf{G}_1 \mathbf{P} \mathbf{P}^\top \mathbf{G}_2 \mathbf{P} = \mathbf{P}^\top \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{P} = \mathbf{0},$$

como  $\mathbf{P}$  es matriz ortogonal, sigue que los elementos diagonales de  $\mathbf{G}_1$  y  $\mathbf{G}_2$  deben ocurrir en posiciones diferentes. Esto es, podemos escribir

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 \end{pmatrix},$$

con  $\mathbf{D}_1$  matriz diagonal cuya dimensión es dada por el rango de  $\mathbf{A}_1$ , digamos  $r_1 = \text{rg}(\mathbf{A}_1)$ . Sea  $\mathbf{Z} = \mathbf{P}^\top \mathbf{Y}$ , luego

$$Q_i = \mathbf{Y}^\top \mathbf{G}_i \mathbf{Y} = \mathbf{Z}^\top \mathbf{P}^\top \mathbf{G}_i \mathbf{P} \mathbf{Z} = \mathbf{Z}^\top \mathbf{M}_i \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_i^\top \mathbf{D}_i \mathbf{Z}_i,$$

donde  $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1^\top, \mathbf{Z}_2^\top)^\top$  ha sido particionado de acuerdo con  $\mathbf{D}_1$  y  $\mathbf{D}_2$ .

Como

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}^\top \mathbf{Y} \sim \mathbf{N}_p(\mathbf{P}^\top \mathbf{B} \boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}),$$

tenemos que la independencia de  $Q_1$  y  $Q_2$  sigue desde la independencia entre  $\mathbf{Z}_1$  y  $\mathbf{Z}_2$ .  $\square$

RESULTADO 1.74. Sea  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $Q = \mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}$  y  $\mathbf{U} = \mathbf{B} \mathbf{X}$ . Entonces  $Q$  y  $\mathbf{U}$  son independientes si y sólo si  $\mathbf{B} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A} = \mathbf{0}$ .

RESULTADO 1.75 (Teorema de Cochran). Sea  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  y  $\mathbf{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  matrices simétricas con  $\text{rg}(\mathbf{A}_i) = r_i$  y considere

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^k \mathbf{A}_i,$$

con  $\text{rg}(\mathbf{A}) = r$ . Si  $\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}$  es idempotente y  $r = \sum_{i=1}^k r_i$ , entonces las formas cuadráticas  $Q_i = \mathbf{X}^\top \mathbf{A}_i \mathbf{X}$  son variables aleatorias mutuamente independientes con distribución chi-cuadrado no central, es decir

$$Q_i \sim \chi_{r_i}^2(\lambda_i),$$

donde  $\lambda_i = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{A}_i \boldsymbol{\mu} / 2$ , para  $i = 1, \dots, k$ .

DEMOSTRACIÓN. Suponga que  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}$  y asuma  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ . Además, considere  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$  (sino, defina  $\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$  con  $\text{rg}(\mathbf{A}_{k+1}) = r_{k+1} = p - r$ , y la condición sobre el rango es satisfecha). Sea  $\mathbf{P}_1$  matriz ortogonal que diagonaliza  $\mathbf{A}_1$ , de este modo

$$\mathbf{P}_1^\top \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_1 = \mathbf{D}_1,$$

por conveniencia asuma que los elementos diagonales de  $\mathbf{D}_1$  se encuentran en las primeras  $r_1$  posiciones. Por tanto,

$$\mathbf{P}_1^\top (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1) \mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{D}_1 = \sum_{i=2}^k \mathbf{P}_1^\top \mathbf{A}_i \mathbf{P}_1,$$

las últimos  $p - r_1$  elementos diagonales de  $\mathbf{I} - \mathbf{D}_1$  son 1 y por tanto el rango de  $\mathbf{I} - \mathbf{A}_1$  es al menos  $p - r_1$ .

Por otro lado, el rango de la suma de matrices  $\sum_{i=2}^k \mathbf{P}_1^\top \mathbf{A}_i \mathbf{P}_1$  no puede ser mayor que la suma de los rangos de las matrices individuales, que por suposición es  $p - r_1$ . Por tanto  $\text{rg}(\mathbf{I} - \mathbf{A}_1) = p - r_1$ . Esto implica que  $\mathbf{P}_1^\top \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_1$  tiene unos en las primeras  $r_1$  posiciones (existen  $r_1$  vectores linealmente independientes tal que  $(\mathbf{I} - \mathbf{A}_1) \mathbf{m}_i = \mathbf{0}$ ,  $i = 1, \dots, r_1$ , esto es  $\mathbf{A}_1 \mathbf{m}_i = \mathbf{m}_i$ ). Es decir, los valores propios no nulos de  $\mathbf{A}_1$  son uno y de ahí que  $\mathbf{A}_1$  es idempotente. Por este mismo razonamiento  $\mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k$  son idempotentes.

Es posible notar que las primeras  $r_1$  filas y columnas de cada una de las matrices  $\mathbf{P}_1^\top \mathbf{A}_i \mathbf{P}_1$  deben ser cero, pues estas matrices son simétricas y semidefinidas positivas, además si una matriz idempotente tiene un elemento diagonal cero toda la fila o columna asociada debe ser cero. De esto sigue que

$$\mathbf{I} - \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-r_1} \end{pmatrix} = \sum_{i=2}^k \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_i \end{pmatrix}.$$

Sea  $\mathbf{P}_2$  matriz que diagonaliza la matriz idempotente  $\mathbf{B}_2$  tal que  $\mathbf{P}_2^\top \mathbf{B}_2 \mathbf{P}_2$  tiene elementos diagonales 1 en las primeras  $r_2$  posiciones. Luego  $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$  diagonaliza  $\mathbf{A}_1$  y  $\mathbf{A}_2$  tal que la matriz

$$\mathbf{P}_2^\top \mathbf{P}_1^\top (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2,$$

tiene unos en las primeras  $r_1 + r_2$  posiciones y ceros en las posiciones restantes. Continuando con esta construcción se obtiene una matriz ortogonal  $\mathbf{P}$  que diagonaliza  $\mathbf{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . En este caso  $\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j = \mathbf{0}$  para todo  $i \neq j = 1, \dots, k$  que establece la independencia de las variables  $Q_i$ .

Se ha asumido que  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . Cuya función característica

$$\varphi(\mathbf{t}) = \mathbb{E}\{\exp(i \sum_{j=1}^k t_j q_j)\},$$

tiene exponente en la integral dado por

$$\sum_{j=1}^k it_j q_j - \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = \sum_{j=1}^k it_j \mathbf{x}^\top \mathbf{A}_j \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{x}.$$

Considere la transformación  $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{Z}$  con  $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1^\top, \mathbf{Z}_2^\top, \dots, \mathbf{Z}_k^\top)^\top$  donde cada  $\mathbf{Z}_i$  tiene largo  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . De este modo el exponente resulta

$$-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (1 - 2it_j) \mathbf{z}_j^\top \mathbf{z}_j,$$

como  $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  sigue que

$$\varphi(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^k (1 - 2it_j)^{-r_j},$$

que corresponde a la función característica de  $k$  variables aleatorias independientes chi-cuadrado con  $r_j$  grados de libertad.  $\square$

### Ejercicios

- 1.1 Sean  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  vectores aleatorios independientes con  $\mathbf{X}_i \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Obtenga la distribución de

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{X}_i,$$

con  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  constantes fijas.

- 1.2 Si  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  son independientes cada uno con  $\mathbf{X}_i \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ . Muestre que la distribución del vector de medias

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i,$$

es  $\mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n} \boldsymbol{\Sigma})$ .

- 1.3 Demuestre el Resultado 1.20, usando la función característica de un vector aleatorio normal.
- 1.4 Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas  $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$  y defina

$$Q = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2,$$

¿Es  $Q$  un estimador insesgado de  $\sigma^2$ ?

- 1.5 Sea  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  y  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$ . Considere  $\mathbf{T}$  una matriz ortogonal y  $\boldsymbol{\Lambda}$  una matriz diagonal tal que

$$\mathbf{T}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{T} = \boldsymbol{\Lambda},$$

y defina

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}), \quad \mathbf{u} = \mathbf{T}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}.$$

Obtenga la distribución de  $\mathbf{Y}$  y calcule  $\text{var}(\mathbf{u}^\top \mathbf{Y})$ .

- 1.6 Considere  $\mathbf{Z}$  matriz aleatoria  $n \times p$  con función característica

$$\varphi_Z(\mathbf{T}) = \mathbf{E}\{\exp(i \text{tr}(\mathbf{T}^\top \mathbf{Z}))\} = \exp\{-\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{T}^\top \mathbf{T})\}.$$

con  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Obtenga la función característica de

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{Z} \boldsymbol{\Theta}^{1/2} + \boldsymbol{\mu},$$

donde  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  y  $\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Theta}$  son matrices semidefinidas positivas  $n \times n$  y  $p \times p$ , respectivamente.

- 1.7 Sea  $\mathbf{Z} = \mathbf{U} \mathbf{D} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\epsilon}$  con  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  tal que  $\mathbf{U}^\top \mathbf{U} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{D}$  es matriz diagonal  $p \times p$  y  $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathbf{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ . Considere

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\mathbf{D}^2 + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{D} \mathbf{U}^\top \mathbf{Z}.$$

donde  $\lambda$  es un escalar positivo.

- (a) Obtenga la distribución de  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ ,  
 (b) Muestre que

$$\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{E}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \lambda (\mathbf{D}^2 + \lambda \mathbf{I})^{-1} \boldsymbol{\alpha}.$$

- 1.8 Sea  $\mathbf{Y} \sim \mathbf{N}_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I})$  y considere  $\mathbf{b} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{u} = (\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{Z}^\top \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^\top (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b})$ , donde  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n \times q}$  y  $\mathbf{D}$  es matriz no singular  $q \times q$ .

- (a) Halle la distribución de  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{u}$ ,  
 (b) ¿Son  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{u}$  independientes?

- 1.9 Considere

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \sim \mathbf{N}_{n+q} \left( \begin{pmatrix} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{Z}\mathbf{D}\mathbf{Z}^\top + \mathbf{R} & \mathbf{Z}\mathbf{D} \\ \mathbf{D}\mathbf{Z}^\top & \mathbf{D} \end{pmatrix} \right),$$

donde  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n \times q}$  y  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{D}$  son matrices no singulares  $n \times n$  y  $q \times q$ , respectivamente. Determine la distribución de  $\mathbf{b}|\mathbf{Y}$ .

- 1.10 Sea  $U_i \sim \chi_{n_i}(\lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, K$  variables aleatorias independientes. Muestre que

$$U = \sum_{i=1}^K U_i \sim \chi_n^2(\lambda),$$

donde  $n = \sum_{i=1}^K n_i$  y  $\lambda = \sum_{i=1}^K \lambda_i$ .

- 1.11 Sea  $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}$ , donde  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  con  $\text{rg}(\mathbf{X}) = p$  y  $\mathbf{Y} \sim \mathbf{N}_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ . Defina

$$Q = \frac{(\mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{g})^\top [\mathbf{G}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{G}^\top]^{-1} (\mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{g})}{\sigma^2},$$

donde  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times p}$  con  $\text{rg}(\mathbf{G}) = m$  y  $\mathbf{g}$  es vector  $m$ -dimensional. Determine la distribución de  $Q$ .

- 1.12 Sea  $\mathbf{Y} \sim \mathbf{N}_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$  y considere las formas cuadráticas

$$Q_1 = \frac{\hat{\boldsymbol{\beta}}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}}{\sigma^2}, \quad Q_2 = \frac{(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^\top (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})}{\sigma^2},$$

donde  $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}$  con  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  y  $\text{rg}(\mathbf{X}) = p$ .

- (a) Halle la distribución de  $Q_i$ ,  $i = 1, 2$ .  
 (b) Sea  $Q = Q_1 + Q_2$ , mostrar la independencia conjunta de  $Q_1$  y  $Q_2$ .

- 1.13 Sea  $\mathbf{Y} \sim \mathbf{N}_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I})$  con  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  y  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$ . Muestre que

$$Q = \frac{\mathbf{Y}^\top (\mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{J}) \mathbf{Y}}{\sigma^2}, \quad Q_1 = \frac{\mathbf{Y}^\top (\mathbf{I} - \mathbf{H}) \mathbf{Y}}{\sigma^2}, \quad Q_2 = \frac{\mathbf{Y}^\top (\mathbf{H} - \frac{1}{n} \mathbf{J}) \mathbf{Y}}{\sigma^2},$$

con  $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top$ , tienen distribuciones chi-cuadrado independientes.

- 1.14 Considere

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{1}_n) \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\epsilon},$$

donde  $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1^\top, \mathbf{Y}_2^\top, \dots, \mathbf{Y}_p^\top)^\top$  con  $\mathbf{Y}_i$  vector  $n$ -dimensional, para  $i = 1, \dots, p$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^\top$  y  $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}_{np}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_{np})$ . Sean

$$Q_1 = \frac{\mathbf{Y}^\top (\mathbf{I}_p \otimes \frac{1}{n} \mathbf{J}_n) \mathbf{Y}}{\sigma^2}, \quad \text{y} \quad Q_2 = \frac{\mathbf{Y}^\top (\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{C}) \mathbf{Y}}{\sigma^2},$$

donde  $\mathbf{J}_n = \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top$  y  $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{J}_n$ .

- (a) Halle la distribución de  $Q_k$ ,  $k = 1, 2$ .  
 (b) ¿Son  $Q_1$  y  $Q_2$  independientes?



## Apéndice A

# Elementos de Álgebra Matricial

En este Apéndice se introduce la notación, definiciones y resultados básicos de álgebra lineal y matricial, esenciales para el estudio de modelos estadísticos multivariados y de regresión lineal. El material presentado a continuación puede ser hallado en textos como [Graybill \(1983\)](#), [Ravishanker y Dey \(2002\)](#) y [Magnus y Neudecker \(2007\)](#).

### A.1. Vectores y matrices

Sea  $\mathbb{R}^n$  el espacio Euclidiano  $n$ -dimensional, de este modo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  representa la  $n$ -upla

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

de números reales. Note que  $\mathbf{x}$  está *orientado* como un vector “columna”, y por tanto la transpuesta de  $\mathbf{x}$  es un vector fila,

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top.$$

Una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es un arreglo de números reales

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

y escribimos  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ . Los números reales  $a_{ij}$  son llamados elementos de  $\mathbf{A}$ .

### A.2. Definiciones básicas y propiedades

La suma de dos matrices del mismo orden es definida como

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}),$$

el producto de una matriz por un escalar  $\lambda$  es

$$\lambda \mathbf{A} = \mathbf{A} \lambda = (\lambda a_{ij})$$

**RESULTADO A.1** (Propiedades de la suma matricial). *Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  matrices del mismo orden y  $\lambda, \mu$  escalares. Entonces:*

- (a)  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ ,
- (b)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ ,
- (c)  $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$ ,
- (d)  $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$ ,
- (e)  $\lambda\mu\mathbf{A} = (\lambda\mu)\mathbf{A}$ .

Una matriz cuyos elementos son todos cero se denomina *matriz nula* y se denota por  $\mathbf{0}$ . Tenemos que

$$\mathbf{A} + (-1)\mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son matrices  $m \times n$  y  $n \times p$ , respectivamente, se define el producto de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  como

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}, \quad \text{donde,} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj},$$

para  $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, p$ .

RESULTADO A.2 (Propiedades del producto de matrices). Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  matrices de órdenes apropiados. Entonces:

- (a)  $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ ,
- (b)  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ ,
- (c)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ .

Note que la existencia de  $\mathbf{AB}$  no implica la existencia de  $\mathbf{BA}$  y cuando ambos productos existen, en general no son iguales.

La transpuesta de una matriz  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz  $n \times m$ ,  $\mathbf{A}^\top$  cuyo elemento  $ij$  está dado por  $a_{ji}$ , esto es

$$\mathbf{A}^\top = (a_{ji}).$$

RESULTADO A.3 (Propiedades de la transpuesta). Tenemos

- (a)  $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$ ,
- (b)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top$ ,
- (c)  $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$ .

Definimos el *producto interno* entre dos vectores  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  como

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

asociado al producto interno tenemos la norma Euclidian (o largo) de un vector  $\mathbf{x}$  definida como

$$\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2},$$

finalmente, la distancia Euclidian entre dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  se define como

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|.$$

RESULTADO A.4 (Propiedades del producto interno). Sean  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  vectores  $n$ -dimensionales y  $\lambda$  un escalar, entonces

- (a)  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$ ,
- (b)  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$ ,
- (c)  $\lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle$ ,
- (d)  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0$  con la igualdad sólo si  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ,
- (e)  $\|\mathbf{a} \pm \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 \pm 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ ,
- (f)  $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ .

PROPOSICIÓN A.5 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).  $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ ,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  con la igualdad sólo si  $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ , para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ .



DEMOSTRACIÓN. Si  $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ , el resultado es inmediato. Sino, note que

$$0 < \|\mathbf{x} - \lambda \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \lambda^2 \|\mathbf{y}\|^2 - 2\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

de este modo el discriminante del polinomio cuadrático debe satisfacer  $4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - 4\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 < 0$ .  $\square$

El ángulo  $\theta$  entre dos vectores no nulos  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  se define en términos de su producto interno como

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} = \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}} \sqrt{\mathbf{y}^\top \mathbf{y}}},$$

dos vectores se dicen *ortogonales* sólo si  $\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = 0$ .

El *producto externo* entre dos vectores  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  es la matriz  $m \times n$

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{x} \mathbf{y}^\top = (x_i y_j).$$

Una matriz se dice cuadrada si tiene el mismo número de filas que de columnas, una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  es triangular inferior (superior) si  $a_{ij} = 0$  para  $i < j$  (si  $a_{ij} = 0$  para  $i > j$ ). Una matriz cuadrada  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  se dice *simétrica* si  $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$  y *sesgo-simétrica* si  $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$ . Para cualquier matriz cuadrada  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  se define  $\text{diag}(\mathbf{A})$  como

$$\text{diag}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

Si  $\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{A})$ , decimos que  $\mathbf{A}$  es *matriz diagonal*. Un tipo particular de matriz diagonal es la identidad

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}),$$

donde  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  y  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  ( $\delta_{ij}$  se denomina *delta de Kronecker*). Tenemos que para  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\mathbf{I}_m \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{I}_n = \mathbf{A}.$$

Una matriz cuadrada se dice *ortogonal* si

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

y sus columnas son ortonormales. Note que, si

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \quad \text{con } \mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n,$$

entonces  $\mathbf{A}$  tiene columnas *ortonormales* si

$$\mathbf{a}_i^\top \mathbf{a}_j = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Una matriz rectangular  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  puede tener la propiedad  $\mathbf{A} \mathbf{A}^\top = \mathbf{I}_m$  ó  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$  pero no ambas, en cuyo caso tal matriz se denomina *semi-ortogonal*.

Una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , se dice *idempotente* si  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ . Decimos que  $\mathbf{A}$  es *matriz de proyección* si es simétrica e idempotente, esto es,  $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ .

Cualquier matriz  $B$  satisfaciendo

$$B^2 = A$$

se dice *raíz cuadrada* de  $A$  y se denota como  $A^{1/2}$  tal matriz *no* necesita ser única.

**A.2.1. Formas lineales y cuadráticas.** Sea  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . La expresión  $a^\top x$  se dice una *forma lineal* en  $x$  y  $x^\top Ax$  una *forma cuadrática*, mientras que  $x^\top By$  es una forma bilineal.

Sin pérdida de generalidad se asumirá que la matriz asociada a la forma cuadrática  $x^\top Ax$  es simétrica. Note que siempre es posible

$$x^\top Bx = \frac{1}{2}x^\top (A^\top + A)x,$$

en cuyo caso tenemos que  $B$  es matriz simétrica.

Decimos que una matriz simétrica  $A$  es definida positiva (negativa) si  $x^\top Ax > 0$  ( $x^\top Ax < 0$ ) para todo  $x \neq 0$ . Cuando  $x^\top Ax \geq 0$  ( $x^\top Ax \leq 0$ )  $\forall x$  decimos que  $A$  es semidefinida positiva (negativa).

Note que las matrices  $B^\top B$  y  $BB^\top$  son semidefinidas positivas y que  $A$  es (semi)definida negativa sólo si  $-A$  es (semi)definida positiva.

**RESULTADO A.6.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  y  $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$  y  $x$  vector  $n$ -dimensional. Entonces

- (a)  $Ax = 0 \Leftrightarrow A^\top Ax = 0$ ,
- (b)  $AB = 0 \Leftrightarrow A^\top AB = 0$ ,
- (c)  $A^\top AB = A^\top AC \Leftrightarrow AB = AC$ .

**DEMOSTRACIÓN.** (a) Claramente  $Ax = 0 \Rightarrow A^\top Ax = 0$ . Por otro lado, si  $A^\top Ax = 0$ , entonces  $x^\top A^\top Ax = (Ax)^\top Ax = 0$  y de ahí que  $Ax = 0$ . (b) sigue desde (a). Finalmente, (c) sigue desde (b) mediante substituir  $B - C$  por  $B$  en (c).  $\square$

**RESULTADO A.7.** Sean  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $B, C$  matrices  $n \times n$  con  $B$  simétrica. Entonces

- (a)  $Ax = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$  sólo si  $A = 0$ ,
- (b)  $x^\top Bx = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$  sólo si  $B = 0$ ,
- (c)  $x^\top Cx = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$  sólo si  $C^\top = -C$ .

**A.2.2. Rango de una matriz.** Un conjunto de vectores  $x_1, \dots, x_n$  se dice *linealmente independiente* si  $\sum_i \alpha_i x_i = 0$  implica que todos los  $\alpha_i = 0$ . Si  $x_1, \dots, x_n$  no son linealmente independientes, ellos se dicen *linealmente dependientes*.

Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , el *rango* columna (fila) de  $A$  es el número de columnas (filas) linealmente independientes. Denotamos el rango de  $A$  como

$$\text{rg}(A),$$

note que

$$\text{rg}(A) \leq \min(m, n).$$

Si  $\text{rg}(A) = n$  decimos que  $A$  tiene rango columna completo. Si  $\text{rg}(A) = 0$ , entonces  $A$  es la matriz nula. Por otro lado, si  $A = 0$ , entonces  $\text{rg}(A) = 0$ .

**RESULTADO A.8** (Propiedades del rango). Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $B, C$  matrices de órdenes apropiados, entonces

- (a)  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\top) = \text{rg}(A^\top A) = \text{rg}(AA^\top)$ ,

- (b)  $\text{rg}(\mathbf{AB}) \leq \min\{\text{rg}(\mathbf{A}), \text{rg}(\mathbf{B})\}$ ,
- (c)  $\text{rg}(\mathbf{BAC}) = \text{rg}(\mathbf{A})$  si  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  son matrices de rango completo,
- (d)  $\text{rg}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \text{rg}(\mathbf{A}) + \text{rg}(\mathbf{B})$ ,
- (e) si  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  para algún  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , entonces  $\text{rg}(\mathbf{A}) \leq n - 1$ .

El *espacio columna* de  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , denotado por  $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ , es el conjunto de vectores

$$\mathcal{M}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{Ax} \text{ para algún } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

De este modo,  $\mathcal{M}(\mathbf{A})$  es el espacio vectorial generado por las columnas de  $\mathbf{A}$ . La dimensión de este espacio es  $\text{rg}(\mathbf{A})$ . Se tiene que

$$\mathcal{M}(\mathbf{A}) = \mathcal{M}(\mathbf{AA}^\top)$$

para cualquier matriz  $\mathbf{A}$ .

El *espacio nulo*,  $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ , de una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  consiste de todos los vectores  $n$ -dimensionales  $\mathbf{x}$ , tal que  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ , esto es,

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}.$$

Note que, el espacio nulo es el conjunto de todas las soluciones de el sistema lineal homogéneo  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ .  $\mathcal{N}(\mathbf{A})$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^n$  y su dimensión se denomina *nulidad* de  $\mathbf{A}$ . Además  $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathcal{M}(\mathbf{A})\}^\perp$ . Finalmente, considere la siguiente proposición

**RESULTADO A.9.** Para cualquier matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , entonces  $n = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) + \text{rg}(\mathbf{A})$ .

**A.2.3. Matriz inversa.** Sea  $\mathbf{A}$  una matriz cuadrada de orden  $n \times n$ . Decimos que  $\mathbf{A}$  es *no singular* si  $\text{rg}(\mathbf{A}) = n$ , y que  $\mathbf{A}$  es *singular* si  $\text{rg}(\mathbf{A}) < n$ . De este modo, si  $\mathbf{A}$  es no singular, entonces existe una matriz no singular  $\mathbf{B}$  tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n.$$

La matriz  $\mathbf{B}$ , denotada  $\mathbf{A}^{-1}$  es única y se denomina *inversa* de  $\mathbf{A}$ .

**RESULTADO A.10** (Propiedades de la inversa). Siempre que todas las matrices inversas involucradas existan, tenemos que

- (a)  $(\mathbf{A}^{-1})^\top = (\mathbf{A}^\top)^{-1}$ ,
- (b)  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ ,
- (c)  $(\lambda\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}$ ,
- (d)  $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^\top$ , si  $\mathbf{P}$  es matriz ortogonal,
- (e) si  $\mathbf{A} > 0$ , entonces  $\mathbf{A}^{-1} > 0$ ,
- (f)  $(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{DA}^{-1}$ , donde  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  son matrices  $m \times m$ ,  $m \times n$ ,  $n \times n$  y  $n \times m$ , respectivamente (Teorema de Sherman-Morrison-Woodbury),
- (g) si  $1 \pm \mathbf{v}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \neq 0$ , entonces

$$(\mathbf{A} \pm \mathbf{uv}^\top)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mp \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{uv}^\top \mathbf{A}^{-1}}{1 \pm \mathbf{v}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}},$$

- (h)  $(\mathbf{I} + \lambda\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \lambda^i \mathbf{A}^i$ .

**A.2.4. Determinante de una matriz.** El determinante de una matriz corresponde a la función  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ , denotada comúnmente como  $|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A})$  y definida como

$$|\mathbf{A}| = \sum (-1)^{\sigma(j_1, \dots, j_n)} \prod_{i=1}^n a_{ij_i}$$

donde la sumatoria es tomada sobre todas las permutaciones  $(j_1, \dots, j_n)$  del conjunto de enteros  $(1, \dots, n)$ , y  $\sigma(j_1, \dots, j_n)$  es el número de transposiciones necesarias para cambiar  $(1, \dots, n)$  en  $(j_1, \dots, j_n)$  (una transposición consiste en intercambiar dos números).

Una *submatriz* de  $\mathbf{A}$  es un arreglo rectangular obtenido mediante eliminar filas y columnas de  $\mathbf{A}$ . Un *menor* es el determinante de una submatriz cuadrada de  $\mathbf{A}$ . El menor asociado al elemento  $a_{ij}$  es el determinante de la submatriz de  $\mathbf{A}$  obtenida por eliminar su  $i$ -ésima fila y  $j$ -ésima columna. El *cofactor* de  $a_{ij}$ , digamos  $c_{ij}$  es  $(-1)^{i+j}$  veces el menor de  $a_{ij}$ . La matriz  $\mathbf{C} = (c_{ij})$  se denomina matriz cofactor de  $\mathbf{A}$ . La transpuesta de  $\mathbf{C}$  es llamada *adjunta* de  $\mathbf{A}$  y se denota  $\mathbf{A}^\#$ . Tenemos que

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{jk} c_{jk}, \quad \text{para } i, k = 1, \dots, n.$$

RESULTADO A.11 (Propiedades del determinante). Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\lambda$  un escalar. Entonces

- (a)  $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^\top|$ ,
- (b)  $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$ ,
- (c)  $|\lambda \mathbf{A}| = \lambda^n |\mathbf{A}|$ ,
- (d)  $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$ , si  $\mathbf{A}$  es no singular,
- (e) si  $\mathbf{A}$  es matriz triangular, entonces  $|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^n a_{ii}$ ,
- (f) el resultado en (e) también es válido para  $\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{A})$ , note también que  $|\mathbf{I}_n| = 1$ ,
- (g) si  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , entonces  $|\mathbf{I}_m + \mathbf{AB}| = |\mathbf{I}_n + \mathbf{BA}|$ .

**A.2.5. La traza de una matriz.** La *traza* de una matriz cuadrada  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , denotada por  $\text{tr}(\mathbf{A})$ , es la suma de sus elementos diagonales:

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

RESULTADO A.12 (Propiedades de la traza). Siempre que las operaciones matriciales están definidas

- (a)  $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B})$ ,
- (b)  $\text{tr}(\lambda \mathbf{A}) = \lambda \text{tr}(\mathbf{A})$  si  $\lambda$  es un escalar,
- (c)  $\text{tr}(\mathbf{A}^\top) = \text{tr}(\mathbf{A})$ ,
- (d)  $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$  (propiedad cíclica de la traza),
- (e)  $\text{tr}(\mathbf{A}) = 0$  si  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ .

Note en (d) que aunque ambas  $\mathbf{AB}$  y  $\mathbf{BA}$  son cuadradas, no necesitan ser del mismo orden.

Además, es directo que la normal vectorial (Euclidiana), satisface

$$\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^\top \mathbf{x})^{1/2} = (\text{tr } \mathbf{x} \mathbf{x}^\top)^{1/2},$$

de este modo, podemos definir una normal matricial (Euclidiana) como

$$\|\mathbf{A}\| = (\text{tr } \mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{1/2}.$$

En efecto, se tiene que  $\text{tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) \geq 0$  con la igualdad sólo si  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ .

**A.2.6. Valores y vectores propios.** Si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son matrices reales del mismo orden, una matriz compleja  $\mathbf{Z}$  puede ser definida como

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A} + i\mathbf{B},$$

donde  $i$  denota la unidad imaginaria que satisface  $i^2 = -1$ . El conjugado complejo de  $\mathbf{Z}$ , denotado por  $\mathbf{Z}^H$ , se define como

$$\mathbf{Z}^H = \mathbf{A}^\top - i\mathbf{B}^\top.$$

Una matriz  $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  se dice *Hermitiana* si  $\mathbf{Z}^H = \mathbf{Z}$  (equivalente complejo de una matriz simétrica) y *unitaria* si  $\mathbf{Z}^H \mathbf{Z} = \mathbf{I}$  (equivalente complejo de una matriz ortogonal).

Sea  $\mathbf{A}$  una matriz cuadrada  $n \times n$ . Los *valores propios* de  $\mathbf{A}$  son definidos como las raíces de la *ecuación característica*

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0,$$

la ecuación anterior tiene  $n$  raíces, en general complejas y posiblemente con algunas repeticiones (multiplicidad). Sea  $\lambda$  un valor propio de  $\mathbf{A}$ , entonces existe un vector  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$  tal que  $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , esto es,

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

el vector  $\mathbf{v}$  se denomina *vector propio* asociado al valor propio  $\lambda$ . Note que, si  $\mathbf{v}$  es un vector propio, también lo es  $\alpha\mathbf{v}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ , y en particular  $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$  es un vector propio normalizado.

**RESULTADO A.13.** Si  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es matriz Hermitiana, entonces todos sus valores propios son reales

**RESULTADO A.14.** Si  $\mathbf{A}$  es matriz cuadrada  $n \times n$  y  $\mathbf{G}$  es matriz no singular  $n \times n$ , entonces  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{G}$  tienen el mismo conjunto de valores propios (con las mismas multiplicidades)

**DEMOSTRACIÓN.** Note que

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{G}| = |\lambda \mathbf{G}^{-1}\mathbf{G} - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{G}| = |\mathbf{G}^{-1}||\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}||\mathbf{G}| = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}|$$

□

**RESULTADO A.15.** Una matriz singular tiene al menos un valor propio cero

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $\mathbf{A}$  es matriz singular, entonces  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$  para algún  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , luego desde  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ , tenemos que  $\lambda = 0$ . □

**RESULTADO A.16.** Una matriz simétrica es definida positiva (semidefinida positiva) sólo si todos sus valores propios son positivos (no-negativos).

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $\mathbf{A}$  es definida positiva y  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ , entonces  $\mathbf{v}^\top \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}^\top \mathbf{v}$ . Ahora, como  $\mathbf{v}^\top \mathbf{A}\mathbf{v} > 0$  y  $\mathbf{v}^\top \mathbf{v} > 0$  implica  $\lambda > 0$ . La converso no será probada aquí. □

RESULTADO A.17. *Una matriz idempotente sólo tiene valores propios 0 ó 1. Todos los valores propios de una matriz unitaria tienen modulo 1*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\mathbf{A}$  matriz idempotente, esto es,  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ . De este modo, si  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ , entonces

$$\lambda\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}^2\mathbf{v} = \lambda\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$$

y de ahí que  $\lambda = \lambda^2$ , esto implica que  $\lambda = 0$  ó  $\lambda = 1$ .

Por otro lado, si  $\mathbf{A}$  es unitaria, entonces  $\mathbf{a}^H\mathbf{A} = \mathbf{I}$ . De este modo, si  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ , entonces

$$\mathbf{v}^H\mathbf{A}^H = \bar{\lambda}\mathbf{v}^H,$$

luego

$$\mathbf{v}^H\mathbf{v} = \mathbf{v}^H\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{v} = \bar{\lambda}\lambda\mathbf{v}^H\mathbf{v}.$$

Como  $\mathbf{v}^H\mathbf{v} \neq 0$ , obtenemos que  $\bar{\lambda}\lambda = 1$  y de ahí que  $|\lambda| = 1$ .  $\square$

RESULTADO A.18 (Propiedades de la matrices idempotentes). *Sea  $\mathbf{A}$  matriz  $n \times n$ , entonces*

- (a)  $\mathbf{A}^\top$  y  $\mathbf{I} - \mathbf{A}$  son idempotentes sólo si  $\mathbf{A}$  es idempotente,
- (b) si  $\mathbf{A}$  es idempotente, entonces  $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}) = r$ . Si  $\text{rg}(\mathbf{A}) = n$ , entonces  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ .

RESULTADO A.19. *Si  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es matriz Hermitiana y  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  son vectores propios asociados a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , respectivamente, donde  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Entonces  $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$ .*

El resultado anterior muestra que si todos los valores propios de una matriz Hermitiana  $\mathbf{A}$  son distintos, entonces existe una base ortonormal de vectores propios tal que  $\mathbf{A}$  es diagonalizable.

PROPOSICIÓN A.20 (Descomposición de Schur). *Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Entonces existe una matriz unitaria  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y una matriz triangular  $\mathbf{M}$  cuyos elementos diagonales son los valores propios de  $\mathbf{A}$ , tal que*

$$\mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{M}.$$

PROPOSICIÓN A.21 (Descomposición espectral). *Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  matriz Hermitiana. Entonces existe una matriz unitaria  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tal que*

$$\mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda},$$

donde  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\boldsymbol{\lambda})$  es matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los valores propios de  $\mathbf{A}$ .

Para aplicaciones en Estadística siempre haremos uso de la Proposición A.21 considerando  $\mathbf{A}$  matriz simétrica, en cuyo caso todos sus valores propios serán reales y  $\mathbf{U}$  será una matriz ortogonal. Para  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matriz ortogonal, denotamos el grupo de matrices ortogonales como

$$\mathcal{O}_n = \{\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n} : \mathbf{Q}^\top\mathbf{Q} = \mathbf{I}\}$$

Note que si  $\mathbf{A}$  es matriz simétrica y definida positiva, entonces

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\top = (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{1/2})(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{1/2})^\top = (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{U}^\top)^2$$

donde  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\boldsymbol{\lambda})$  y  $\mathbf{\Lambda}^{1/2} = \text{diag}(\boldsymbol{\lambda}^{1/2})$ . Por tanto,

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{M}^\top, \quad \text{con} \quad \mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{1/2},$$

o bien,

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^2, \quad \text{con} \quad \mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{U}^\top,$$

esto es,  $\mathbf{B}$  es una matriz raíz cuadrada de  $\mathbf{A}$ .

RESULTADO A.22. Sea  $\mathbf{A}$  matriz simétrica  $n \times n$ , con valores propios  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Entonces

- (a)  $\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ ,
- (b)  $|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ .

DEMOSTRACIÓN. Usando que  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\top$ . Tenemos

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\top) = \text{tr}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\top\mathbf{U}) = \text{tr}(\mathbf{\Lambda}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

y

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\top| = |\mathbf{U}||\mathbf{\Lambda}||\mathbf{U}^\top| = |\mathbf{\Lambda}| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

□

RESULTADO A.23. Si  $\mathbf{A}$  es una matriz simétrica con  $r$  valores propios distintos de cero, entonces  $\text{rg}(\mathbf{A}) = r$ .

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que  $\mathbf{U}^\top\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}$  y de ahí que

$$\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\top) = \text{rg}(\mathbf{\Lambda}) = r$$

□

### A.2.7. Matrices (semi)definidas positivas.

PROPOSICIÓN A.24. Sea  $\mathbf{A}$  matriz definida positiva y  $\mathbf{B}$  semidefinida positiva. Entonces

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \geq |\mathbf{A}|,$$

con la igualdad sólo si  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ .

DEMOSTRACIÓN. Tenemos  $\mathbf{U}^\top\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}$ , con  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\boldsymbol{\lambda})$  y  $\mathbf{U}^\top\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^\top = \mathbf{I}$ . Luego,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\top + \mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{1/2}(\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{U}^\top\mathbf{B}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1/2})\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{U}^\top,$$

de este modo

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} + \mathbf{B}| &= |\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{1/2}||\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{U}^\top\mathbf{B}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}||\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{U}^\top| \\ &= |\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{U}^\top||\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{U}^\top\mathbf{B}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}| \\ &= |\mathbf{A}||\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{U}^\top\mathbf{B}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}|. \end{aligned}$$

Si  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ , tenemos  $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$ . Por otro lado, si  $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ . Entonces la matriz  $\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{U}^\top\mathbf{B}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}$  tendrá al menos un valor propio no nulo y por tanto,  $|\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{U}^\top\mathbf{B}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}| > 1$ , esto es  $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| > |\mathbf{A}|$ . □

Para dos matrices simétricas  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , escribimos  $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$  si  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  es semidefinida positiva. Análogamente, escribimos  $\mathbf{A} > \mathbf{B}$  si  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  es definida positiva.

RESULTADO A.25. Sean  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  matrices definidas positivas  $n \times n$ . Entonces  $\mathbf{A} > \mathbf{B}$  sólo si  $\mathbf{B}^{-1} > \mathbf{A}^{-1}$ .

PROPOSICIÓN A.26. Sean  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  matrices definidas positivas y  $\mathbf{A} - \mathbf{B} \geq 0$ . Entonces  $|\mathbf{A}| \geq |\mathbf{B}|$  con la igualdad sólo si  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ . Como  $\mathbf{B}$  es definida positiva y  $\mathbf{C}$  es semidefinida positiva, tenemos por la Proposición A.24 que  $|\mathbf{B} + \mathbf{C}| \geq |\mathbf{B}|$ , con la igualdad sólo si  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ .  $\square$

### A.2.8. Descomposiciones matriciales.

PROPOSICIÓN A.27 (Descomposición LDL). Si  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es matriz simétrica y no singular, entonces existe  $\mathbf{L}$  matriz triangular inferior y  $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ , tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^\top.$$

PROPOSICIÓN A.28 (Descomposición Cholesky). Si  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es simétrica y definida positiva, entonces existe una única matriz triangular inferior  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (factor Cholesky) con elementos diagonales positivos, tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{G}^\top.$$

PROPOSICIÓN A.29 (Descomposición ortogonal-triangular). Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , entonces existe  $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}_m$  y  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R},$$

donde

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

con  $\mathbf{R}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matriz triangular superior, aquí suponemos que  $m \geq n$ . Si  $\text{rg}(\mathbf{A}) = r$ , entonces las primeras  $n$  columnas de  $\mathbf{Q}$  forman una base ortonormal para  $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ .

Note que, si  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$  entonces

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{R}^\top \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} \mathbf{R} = \mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{R}_1^\top \mathbf{R}_1,$$

y  $\mathbf{R}_1$  corresponde al factor Cholesky de  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ .

PROPOSICIÓN A.30 (Descomposición valor singular). Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  con  $\text{rg}(\mathbf{A}) = r$ , entonces existen matrices  $\mathbf{U} \in \mathcal{O}_m$ ,  $\mathbf{V} \in \mathcal{O}_n$ , tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{V}^\top,$$

donde  $\mathbf{D}_r = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_r)$  con  $\delta_i > 0$  para  $i = 1, \dots, r$ , llamados **valores singulares** de  $\mathbf{A}$ .

**A.2.9. Matrices particionadas.** Sea  $\mathbf{A}$  una matriz  $m \times n$ . Considere particionar  $\mathbf{A}$  como sigue

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\mathbf{A}_{11} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$ ,  $\mathbf{A}_{12} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$ ,  $\mathbf{A}_{21} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$ ,  $\mathbf{A}_{22} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$ , y  $m_1 + m_2 = m$ ,  $n_1 + n_2 = n$ .

Sea  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  particionada de manera análoga a  $\mathbf{A}$ , entonces

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} + \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22} + \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}.$$



Ahora, considere  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  particionada en submatrices  $\mathbf{C}_{ij}$ , para  $i, j = 1, 2$  con dimensiones adecuadas, entonces

$$\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{C}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{C}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{C}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{C}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{C}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{C}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{C}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{C}_{22} \end{pmatrix}.$$

La transpuesta de  $\mathbf{A}$  está dada por

$$\mathbf{A}^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^\top & \mathbf{A}_{21}^\top \\ \mathbf{A}_{12}^\top & \mathbf{A}_{22}^\top \end{pmatrix}.$$

Si  $\mathbf{A}_{12}$  y  $\mathbf{A}_{21}$  son matrices nulas y si ambas  $\mathbf{A}_{11}$  y  $\mathbf{A}_{22}$  son matrices no singulares, entonces la inversa de  $\mathbf{A}$  es

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

En general, si  $\mathbf{A}$  es matriz no singular particionada como en (A.1) y  $\mathbf{D} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$  también es no singular, entonces

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, si  $\mathbf{A}$  es no singular y  $\mathbf{E} = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}$  es no singular, entonces

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{-1} & -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{E}^{-1} & \mathbf{A}_{22}^{-1} + \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Considere el determinante

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}_{11}||\mathbf{A}_{22}| = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix},$$

si  $\mathbf{A}_{11}$  y  $\mathbf{A}_{22}$  son matrices cuadradas.

Ahora, para una matriz particionada como en (A.1) con  $m_1 = n_1$  y  $m_2 = n_2$ , tenemos

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_{11}||\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}| = |\mathbf{A}_{22}||\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}|,$$

si  $\mathbf{A}_{11}$  y  $\mathbf{A}_{22}$  son matrices no singulares.

### A.3. Inversa generalizada y sistemas de ecuaciones lineales

En esta sección se generaliza el concepto de invertibilidad para matrices singulares así como para matrices rectangulares. En particular, introducimos la inversa Moore-Penrose (MP), generalización que permite resolver de forma explícita un sistema de ecuaciones lineales.

**A.3.1. Inversa Moore-Penrose.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , la inversa Moore-Penrose,  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  debe satisfacer las siguientes condiciones

$$\mathbf{AGA} = \mathbf{A}, \tag{A.2}$$

$$\mathbf{GAG} = \mathbf{G}, \tag{A.3}$$

$$(\mathbf{AG})^\top = \mathbf{AG}, \tag{A.4}$$

$$(\mathbf{GA})^\top = \mathbf{GA}. \tag{A.5}$$

La inversa MP de  $\mathbf{A}$  se denota comunmente como  $\mathbf{A}^+$ . Si  $\mathbf{G}$  satisface sólo la condición en (A.2) entonces decimos que  $\mathbf{G}$  es una inversa generalizada y la denotamos por  $\mathbf{A}^-$ .

PROPOSICIÓN A.31 (Unicidad de la inversa MP). *Para cada  $\mathbf{A}$ , existe una única  $\mathbf{A}^+$ .*

RESULTADO A.32 (Propiedades de la inversa MP).

- (a)  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$  para  $\mathbf{A}$  matriz no singular,
- (b)  $(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}$ ,
- (c)  $(\mathbf{A}^\top)^+ = (\mathbf{A}^+)^\top$ ,
- (d)  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}$  si  $\mathbf{A}$  es simétrica e idempotente,
- (e)  $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$  y  $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$  son idempotentes,
- (f)  $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{A}^+) = \text{rg}(\mathbf{A}\mathbf{A}^+) = \text{rg}(\mathbf{A}^+\mathbf{A})$ ,
- (g)  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A} = \mathbf{A}^+ \mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ ,
- (h)  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}^{+\top} \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+ \mathbf{A}^{+\top} \mathbf{A}^\top$ ,
- (i)  $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^\top (\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)^+$ ,
- (j)  $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top$ , si  $\mathbf{A}$  tiene rango columna completo,
- (k)  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^\top (\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)^{-1}$ , si  $\mathbf{A}$  tiene rango fila completo.

**A.3.2. Solución de sistemas de ecuaciones lineales.** La solución general de un sistema de ecuaciones homogéneo  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^+ \mathbf{A})\mathbf{q},$$

con  $\mathbf{q}$  un vector arbitrario. La solución de  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es única sólo si  $\mathbf{A}$  tiene rango columna completo, esto es,  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$  es no singular. El sistema homogéneo  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  siempre tiene al menos una solución, digamos  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

El sistema no homogéneo

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

tendrá al menos una solución si es *consistente*.

PROPOSICIÓN A.33. *Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{b}$  vector  $m \times 1$ . Entonces son equivalentes:*

- (a) la ecuación  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene una solución para  $\mathbf{x}$ ,
- (b)  $\mathbf{b} \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ ,
- (c)  $\text{rg}(\mathbf{A} : \mathbf{b}) = \text{rg}(\mathbf{A})$ ,
- (d)  $\mathbf{A}\mathbf{A}^+ \mathbf{b} = \mathbf{b}$ .

PROPOSICIÓN A.34. *Una condición necesaria y suficiente para que la ecuación  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tenga una solución es que*

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+ \mathbf{b} = \mathbf{b},$$

en cuyo caso la solución general está dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^+ \mathbf{A})\mathbf{q},$$

donde  $\mathbf{q}$  es un vector arbitrario.

Si el sistema  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es consistente, entonces tendrá *solución única* sólo si  $\mathbf{A}$  es de rango completo, en cuyo caso la solución está dada por  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$ .

PROPOSICIÓN A.35. *Una condición necesaria y suficiente para que la ecuación matricial  $\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{C}$  tenga una solución es que*

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+ \mathbf{C} \mathbf{B}^+ \mathbf{B} = \mathbf{C},$$

en cuyo caso la solución general es

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^+ \mathbf{C} \mathbf{B}^+ + \mathbf{Q} - \mathbf{A}^+ \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{B}^+,$$

donde  $Q$  es una matriz arbitraria de órdenes apropiados.



## Apéndice B

### Diferenciación matricial

En esta sección haremos uso de la siguiente notación.  $\phi$ ,  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{F}$  representan funciones escalar, vectorial y matricial, respectivamente mientras que  $\zeta$ ,  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{X}$  argumentos escalar, vectorial y matricial, respectivamente.

A partir de esta convención es directo que podemos escribir los siguientes casos particulares:

$$\begin{aligned}\phi(\zeta) &= \zeta^2, & \phi(\mathbf{x}) &= \mathbf{a}^\top \mathbf{x}, & \phi(\mathbf{X}) &= \text{tr}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X}), \\ \mathbf{f}(\zeta) &= (\zeta, \zeta^2)^\top, & \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \mathbf{A}\mathbf{x}, & \mathbf{f}(\mathbf{X}) &= \mathbf{X}\mathbf{a}, \\ \mathbf{F}(\zeta) &= \zeta^2 \mathbf{I}_n, & \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}\mathbf{x}^\top, & \mathbf{F}(\mathbf{X}) &= \mathbf{X}^\top.\end{aligned}$$

Existen varias definiciones para la derivada de una función matricial  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  con relación a su argumento (matricial)  $\mathbf{X}$ . En este apéndice nos enfocamos en el cálculo diferencial propuesto por [Magnus y Neudecker \(1985\)](#).

Considere  $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$  con  $S \subset \mathbb{R}^n$ , se define la derivada de  $\phi$  con relación a  $\mathbf{x} \in S$  como

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right)^\top = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \in \mathbb{R}^n$$

de este modo, introducimos la notación

$$\mathbf{D}\phi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^\top} \in \mathbb{R}^{1 \times n}.$$

Ahora, si  $\mathbf{f} : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces la matriz  $m \times n$ ,

$$\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{D}f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathbf{D}f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^\top},$$

es la *derivada* o *matriz Jacobiana* de  $\mathbf{f}$ . La transpuesta de la matriz Jacobiana  $\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{x})$  se denomina *gradiente* de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

#### B.1. Aproximación de primer orden

Considere la fórmula de Taylor de primer orden,

$$\phi(c + u) = \phi(c) + u\phi'(c) + r_c(u),$$

donde el *resto*

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{r_c(u)}{u} = 0.$$

es de orden más pequeño que  $u$  conforme  $u \rightarrow 0$ . Note también que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\phi(c + u) - \phi(c)}{u} = \phi'(c).$$

De este modo, se define

$$\mathbf{d}\phi(c; u) = u\phi'(c),$$

como el (*primer*) *diferencial* de  $\phi$  en  $c$  con incremento  $u$ . Esto motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN B.1 (Diferencial de una función vectorial). Sea  $\mathbf{f} : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $S \subset \mathbb{R}^n$ , si existe una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tal que

$$\mathbf{f}(\mathbf{c} + \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{c}) + \mathbf{A}(\mathbf{c})\mathbf{u} + \mathbf{r}_c(\mathbf{u}),$$

para todo  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  con  $\|\mathbf{u}\| < \delta$ , y

$$\lim_{\mathbf{u} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_c(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} = \mathbf{0},$$

entonces la función  $\mathbf{f}$  se dice diferenciable en  $\mathbf{c}$ . El vector  $m \times 1$

$$\mathbf{d}\mathbf{f}(\mathbf{c}; \mathbf{u}) = \mathbf{A}(\mathbf{c})\mathbf{u},$$

se denomina primer diferencial de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{c}$  con incremento  $\mathbf{u}$ .

Magnus y Neudecker (1985) mostraron la existencia y unicidad del diferencial  $\mathbf{d}\mathbf{f}(\mathbf{c}; \mathbf{u})$  de una función  $\mathbf{f} : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $S \subset \mathbb{R}^n$  ( $\mathbf{c} \in S$ ), dado por

$$\mathbf{d}\mathbf{f}(\mathbf{c}; \mathbf{u}) = \mathbf{A}(\mathbf{c})\mathbf{u}$$

también mostraron la regla de la cadena e invarianza de Cauchy para el diferencial y enunciaron su primer teorema de identificación.

TEOREMA B.2 (Primer teorema de identificación). Sea  $\mathbf{f} : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $S \subset \mathbb{R}^n$  función diferenciable,  $\mathbf{c} \in S$  y  $\mathbf{u}$  un vector  $n$ -dimensional. Entonces

$$\mathbf{d}\mathbf{f}(\mathbf{c}; \mathbf{u}) = (\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{c}))\mathbf{u}.$$

La matriz  $\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{c}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  se denomina matriz Jacobiana. Tenemos también que

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{c}) = (\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{c}))^\top$$

es la matriz gradiente de  $\mathbf{f}$ .

Sea  $\mathbf{f} : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $S \subset \mathbb{R}^n$  y  $f_i : S \rightarrow \mathbb{R}$  el  $i$ -ésimo componente de  $\mathbf{f}$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Sea  $\mathbf{e}_j$  un vector  $n$ -dimensional cuyo  $j$ -ésimo elemento es uno y los restantes son cero, y considere

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(\mathbf{c} + t\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{c})}{t}$$

si el límite existe, se denomina la  $j$ -ésima *derivada parcial* de  $f_i$  en  $\mathbf{c}$  y es denotada por  $D_j f_i(\mathbf{c})$ . Note que el elemento  $ij$  de  $\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{c})$  es  $D_j f_i(\mathbf{c})$ .

## B.2. Funciones matriciales

Considere algunos ejemplos de funciones matriciales

$$\mathbf{F}(\zeta) = \begin{pmatrix} \cos(\zeta) & \sin(\zeta) \\ -\sin(\zeta) & \cos(\zeta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{x}^\top, \quad \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^\top, \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times q}.$$

Antes de considerar el diferencial de una función matricial  $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $S \subset \mathbb{R}^{n \times q}$  introducimos dos conceptos preliminares: la vectorización de una matriz y el producto Kronecker.

DEFINICIÓN B.3 (Operador de vectorización). Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times q}$  particionada como

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_q),$$

donde  $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$  es la  $k$ -ésima columna de  $\mathbf{A}$ . Entonces

$$\text{vec}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_q \end{pmatrix}.$$

DEFINICIÓN B.4 (Producto Kronecker). Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ , entonces el producto Kronecker entre  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  denotado por  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  es la matriz  $mp \times nq$  definida como

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

RESULTADO B.5. Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  matrices de órdenes apropiados y  $\lambda$  escalar. Entonces

- (a)  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}),$
- (b)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{D},$
- (c)  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD},$
- (d)  $\lambda \otimes \mathbf{A} = \lambda \mathbf{A} = \mathbf{A} \otimes \lambda,$
- (e)  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top \otimes \mathbf{B}^\top,$
- (f)  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1},$
- (g)  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^- = \mathbf{A}^- \otimes \mathbf{B}^-.$

RESULTADO B.6. Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ . Entonces

- (a)  $\text{tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) \text{tr}(\mathbf{B}),$
- (b)  $|\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}| = |\mathbf{A}|^p |\mathbf{B}|^n,$
- (c)  $\text{rg}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{rg}(\mathbf{A}) \text{rg}(\mathbf{B}).$

Observe que, si  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ , entonces

$$\mathbf{ab}^\top = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}^\top = \mathbf{b}^\top \otimes \mathbf{a},$$

por otro lado, tenemos que

$$\text{vec}(\mathbf{ab}^\top) = \text{vec}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}^\top) = \text{vec}(\mathbf{b}^\top \otimes \mathbf{a}) = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}.$$

Estos resultados sugieren una conexión entre el operador de vectorización, el producto Kronecker y la traza. Considere el siguiente resultado

RESULTADO B.7.

- (a) Si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son ambas matrices de orden  $m \times n$ , entonces

$$\text{tr} \mathbf{A}^\top \mathbf{B} = \text{vec}^\top \mathbf{A} \text{vec} \mathbf{B},$$

- (b) Si  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  son de órdenes adecuados, entonces

$$\text{vec} \mathbf{ABC} = (\mathbf{C}^\top \otimes \mathbf{A}) \text{vec} \mathbf{B},$$

donde  $\text{vec}^\top \mathbf{A} = (\text{vec} \mathbf{A})^\top$ .

Finalmente, tenemos el siguiente resultado

RESULTADO B.8. Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  matrices, tal que, el producto  $\mathbf{ABCD}$  está definido y es cuadrado, entonces

$$\text{tr } \mathbf{ABCD} = \text{vec}^\top \mathbf{D}^\top (\mathbf{C}^\top \otimes \mathbf{A}) \text{vec } \mathbf{B} = \text{vec}^\top \mathbf{D} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}^\top) \text{vec } \mathbf{B}^\top.$$

En los ejemplos introducidos al inicio de esta sección, tenemos

$$\text{vec } \mathbf{F}(\zeta) = (\cos(\zeta), -\sin(\zeta), \sin(\zeta), \cos(\zeta))^\top,$$

$$\text{vec } \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \text{vec}(\mathbf{x}\mathbf{x}^\top) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{x},$$

$$\text{vec } \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \text{vec } \mathbf{X}^\top = (\mathbf{X} \otimes \mathbf{I}_q) \text{vec } \mathbf{I}_q.$$

Sea  $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $S \subset \mathbb{R}^{n \times q}$  una función matricial, podemos notar que

$$\text{vec } \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}(\text{vec } \mathbf{X})$$

esto permite obtener el diferencial de una función matricial considerando la relación

$$\text{vec } d\mathbf{F}(\mathbf{C}; \mathbf{U}) = d\mathbf{f}(\text{vec } \mathbf{C}; \text{vec } \mathbf{U})$$

en cuyo caso  $\mathbf{F}$  tiene matriz Jacobiana

$$D\mathbf{F}(\mathbf{C}) = D\mathbf{f}(\text{vec } \mathbf{C})$$

Las consideraciones anteriores motivan el primer teorema de indentificación para funciones matriciales [Magnus y Neudecker \(1985\)](#)

TEOREMA B.9 (Primer teorema de indentificación para funciones matriciales). Sea  $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $S \subset \mathbb{R}^{n \times q}$  función diferenciable,  $\mathbf{C} \in S$  y  $\mathbf{U}$  matriz  $n \times q$ . Entonces

$$\text{vec } d\mathbf{F}(\mathbf{C}; \mathbf{U}) = (D\mathbf{F}(\mathbf{C})) \text{vec } \mathbf{U}.$$

con  $(D\mathbf{F}(\mathbf{C}))^\top$  la matriz gradiente de  $\mathbf{F}$ .

### B.3. Matriz Hessiana

Considere  $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$  con  $S \subset \mathbb{R}^n$ , entonces se define la *matriz Hessiana* como la matriz de segundas derivadas, dada por

$$\mathbf{H}\phi(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^\top} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\top} \left( \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top = D(D\phi(\mathbf{x}))^\top.$$

Es posible definir el diferencial de funciones vectoriales y matriciales de manera análoga a la delineada anteriormente. Sin embargo, en este apéndice nos enfocaremos solamente en el cálculo de diferenciales de funciones escalares. El segundo diferencial de una función escalar está dado por

$$d^2 \phi = d(d\phi).$$

[Magnus y Neudecker \(1985\)](#) enunciaron el siguiente teorema de indentificación para matrices Hessianas de funciones escalares

TEOREMA B.10 (Segundo teorema de indentificación). Sea  $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $S \subset \mathbb{R}^n$  dos veces diferenciable,  $\mathbf{c} \in S$  y  $\mathbf{u}$  vector  $n$ -dimensional. Entonces

$$d^2 \phi(\mathbf{c}; \mathbf{u}) = \mathbf{u}^\top (\mathbf{H}\phi(\mathbf{c})) \mathbf{u}.$$

donde  $\mathbf{H}\phi(\mathbf{c}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz Hessiana de  $\phi$ .

Algunas ventajas (prácticas) importantes del cálculo de diferenciales son:



- Sea  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  función vectorial  $m \times 1$  con argumento  $\mathbf{x}$ , vector  $n$ -dimensional, entonces

$$\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{sin embargo,} \quad \mathbf{d}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$$

- Para funciones matriciales,  $\mathbf{d}\mathbf{F}(\mathbf{X})$  tiene la *misma* dimensión que  $\mathbf{F}$  sin importar la dimensión de  $\mathbf{X}$ .

#### B.4. Reglas fundamentales

A continuación se presentan algunas reglas fundamentales para el cálculo de diferenciales

Considere  $u$  y  $v$  funciones escalares y  $\alpha$  una constante, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\alpha &= 0, & \mathbf{d}(\alpha u) &= \alpha \mathbf{d}u, & \mathbf{d}(u + v) &= \mathbf{d}u + \mathbf{d}v, \\ \mathbf{d}(uv) &= (\mathbf{d}u)v + u(\mathbf{d}v) & \mathbf{d}(u/v) &= \frac{(\mathbf{d}u)v - u(\mathbf{d}v)}{v^2}, (v \neq 0), \\ \mathbf{d}u^\alpha &= \alpha u^{\alpha-1} \mathbf{d}u, & \mathbf{d}e^u &= e^u \mathbf{d}u, \\ \mathbf{d}\log u &= u^{-1} \mathbf{d}u, (u > 0) & \mathbf{d}\alpha^u &= \alpha^u \log \alpha \mathbf{d}u, (\alpha > 0), \end{aligned}$$

aquí por ejemplo,

$$\phi(x) = u(x) + v(x).$$

Análogamente para  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  funciones matriciales,  $\alpha$  un escalar (constante) y  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  constante, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\mathbf{A} &= \mathbf{0}, & \mathbf{d}(\alpha \mathbf{U}) &= \alpha \mathbf{d}\mathbf{U}, \\ \mathbf{d}(\mathbf{U} + \mathbf{V}) &= \mathbf{d}\mathbf{U} + \mathbf{d}\mathbf{V}, & \mathbf{d}(\mathbf{U}\mathbf{V}) &= (\mathbf{d}\mathbf{U})\mathbf{V} + \mathbf{U}\mathbf{d}\mathbf{V}, \\ \mathbf{d}(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}) &= \mathbf{d}\mathbf{U} \otimes \mathbf{d}\mathbf{V}, & \mathbf{d}(\mathbf{U} \odot \mathbf{V}) &= \mathbf{d}\mathbf{U} \odot \mathbf{d}\mathbf{V}, \\ \mathbf{d}\mathbf{U}^\top &= (\mathbf{d}\mathbf{U})^\top, & \mathbf{d}\text{vec } \mathbf{U} &= \text{vec } \mathbf{d}\mathbf{U}, & \mathbf{d}\text{tr } \mathbf{U} &= \text{tr } \mathbf{d}\mathbf{U}. \end{aligned}$$

Otros diferenciales de uso frecuente en Estadística son:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}|\mathbf{F}| &= |\mathbf{F}| \text{tr } \mathbf{F}^{-1} \mathbf{d}\mathbf{F}, & \mathbf{d}\log |\mathbf{F}| &= \text{tr } \mathbf{F}^{-1} \mathbf{d}\mathbf{F}, \\ \mathbf{d}\mathbf{F}^{-1} &= -\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{d}\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1}. \end{aligned}$$



## Bibliografía

- Andrews, D.F., Mallows, C.L. (1974). Scale mixtures of normal distributions. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* **36**, 99-102.
- Arellano, R. (1994). *Distribuições Elípticas: Propriedades, Inferência e Aplicações a Modelos de Regressão*. (Unpublished doctoral dissertation). Department of Statistics, University of São Paulo, Brazil.
- Belsley, D.A., Kuh, E., Welsh, R.E. (1980). *Regression Diagnostics: Identifying Influential Data and Sources of Collinearity*. Wiley, New York.
- Chatterjee, S., Hadi, A.S. (1988). *Sensitivity Analysis in Linear Regression*. Wiley, New York.
- Christensen, R. (2011). *Plane Answers to Complex Questions: The Theory of Linear Models*, 4th Ed. Springer, New York.
- Cook, R.D., Weisberg, S. (1982). *Residuals and Influence in Regression*. Chapman & Hall, New York.
- Díaz-García, J.A., Gutiérrez-Jáimez, R. (1999). *Cálculo Diferencial Matricial y Momentos de Matrices Aleatorias Elípticas*. Universidad de Granada.
- Dobson, A.J. (2002). *An Introduction to Generalized Linear Models*, 2nd Ed. Chapman & Hall, Boca Raton.
- Fahrmeir, L., Kneib, T., Lang, S., Marx, B. (2013). *Regression: Models, Methods and Applications*. Springer, Berlin.
- Fang, K.T., Kotz, S., Ng, K.W. (1990). *Symmetric Multivariate and Related Distributions*. Chapman & Hall, London.
- Galea, M. (1990). Técnicas de diagnóstico en regresión lineal. *Revista de la Sociedad Chilena de Estadística* **7**, 23-44.
- Gentle, J.E. (2007). *Matrix Algebra: Theory, Computation and Applications in Statistics*. Springer, New York.
- Gómez, E., Gómez-Villegas, M.A., Marín, J.M. (1988). A multivariate generalization of the power exponential family of distributions. *Communications in Statistics - Theory and Methods* **27**, 589-600.
- Graybill, F.A. (1961). *An Introduction to Linear Statistical Models*. McGraw-Hill, New York.
- Graybill, F.A. (1976). *Theory and Application of the Linear Model*. Wadsworth & Brooks, Pacific Grove, CA.
- Graybill, F.A. (1983). *Matrices with Applications in Statistics*, 2nd Ed. Wadsworth, Belmont, CA.
- Groß, J. (2003). *Linear Regression*. Springer, Berlin.
- Gruber, M.H.J. (1998). *Improving Efficiency by Shrinkage*. Marcel Dekker, New York.
- Harville, D.A. (1997). *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*. Springer, New York.

- Hocking, R. (1996). *Methods and Applications of Linear Models*. Wiley, New York.
- Kariya, T., Kurata, H. (2004). *Generalized Least Squares*. Wiley, Chichester.
- Lange, K. (1999). *Numerical Analysis for Statisticians*. Springer, New York.
- Lange, K., Sinsheimer, J.S. (1993). Normal/independent distributions and their applications in robust regression. *Journal of Computational and Graphical Statistics* **2**, 175-198.
- Little, R.J.A. (1988). Robust estimation of the mean and covariance matrix from data with missing values. *Applied Statistics* **37**, 23-38.
- Magnus, J.R., Neudecker, H. (1985). Matrix differential calculus with applications to simple, Hadamard and Kronecker products. *Journal of Mathematical Psychology* **29**, 474-492.
- Magnus, J.R., Neudecker, H. (2007). *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, 3rd Ed. Wiley, New York.
- Magnus, J.R. (2010). On the concept of matrix derivative. *Journal of Multivariate Analysis* **101**, 2200-2206.
- Paula, G.A. (2013). *Modelos de Regressão, com Apoio Computacional*. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil.
- Rao, C.R., Toutenburg, H., Shalabh, Heumann, C. (2008). *Linear Models and Generalizations: Least Squares and Alternatives*. Springer, New York.
- Ravishanker, N., Dey, D.K. (2002). *A First Course in Linear Model Theory*. Chapman & Hall, London.
- Ruppert, D., Wand, M.P., Carroll, R.J. (2003). *Semiparametric Regression*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Searle, S.R. (1971). *Linear Models*. Wiley, New York.
- Searle, S.R. (1982). *Matrix Algebra Useful for Statistics*. Wiley, New York.
- Seber, G.A.F., Lee, A.J. (2003). *Linear Regression Analysis*, 2nd Ed. Wiley, New York.
- Sen, A., Srivastava, M. (1990). *Regression Analysis: Theory, Methods and Applications*. Springer, New York.
- Tong, Y.L. (1990). *The Multivariate Normal Distribution*. Springer, New York.
- Weisberg, S. (2005). *Applied Linear Regression*, 3rd Ed. Wiley, New York