

1. Primeramente escribimos el modelo lineal $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$, donde

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_3(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}).$$

Note que la restricción $\beta_1 = \beta_2$ puede ser escrita como $\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{g}$, con

$$\mathbf{G} = (1, -1), \quad \text{y} \quad \mathbf{g} = 0.$$

(en este caso tenemos $q = 1$). Usando el método del modelo reducido, tenemos $\mathbf{G} = (\mathbf{G}_q, \mathbf{G}_r)$, con

$$\mathbf{G}_q = (1), \quad \mathbf{G}_r = (-1).$$

(5 pts)

De este modo el modelo reducido es dado por $\mathbf{Y}_R = \mathbf{X}_R\beta_2 + \boldsymbol{\epsilon}$, donde

$$\mathbf{Y}_R = \mathbf{Y} - \mathbf{X}_q \mathbf{G}_q^{-1} \mathbf{g}, \quad \mathbf{X}_R = \mathbf{X}_r - \mathbf{X}_q \mathbf{G}_q^{-1} \mathbf{G}_r,$$

con

$$\mathbf{X}_q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_r = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, obtenemos:

$$\mathbf{Y}_R = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 0 = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_R = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(5 pts)

Luego, $\tilde{\beta}_2 = (\mathbf{X}_R^\top \mathbf{X}_R)^{-1} \mathbf{X}_R^\top \mathbf{Y}_R$. Además

$$\mathbf{X}_R^\top \mathbf{X}_R = (3, 2, 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 9 + 4 + 4 = 17,$$

mientras que,

$$\mathbf{X}_R^\top \mathbf{Y}_R = (3, 2, 2) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = 3Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3.$$

Así,

$$\tilde{\beta}_2 = \frac{1}{17}(3Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3), \quad \tilde{\beta}_1 = \mathbf{G}_q^{-1}(\mathbf{g} - \mathbf{G}_r \tilde{\beta}_2) = \tilde{\beta}_2.$$

(5 pts)

Finalmente,

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_2 \\ \tilde{\beta}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} (3Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3).$$

(5 pts)

2. El modelo puede ser escrito como

$$\mathbf{Y} = \beta \mathbf{1} + \gamma \mathbf{z} + \boldsymbol{\epsilon},$$

con $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^\top$ y $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$. Es decir, $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\epsilon}$, con

$$\mathbf{X} = (\mathbf{1}, \mathbf{z}), \quad \boldsymbol{\theta} = (\beta, \gamma)^\top.$$

Se desea probar $H_0 : \gamma = 0$ que puede ser escrita como

$$H_0 : \mathbf{G}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{g},$$

con $\mathbf{G} = (0, 1)$, $\mathbf{g} = 0$ y $q = 1$. Ahora,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{z}^\top \end{pmatrix} (\mathbf{1}, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}^\top \mathbf{1} & \mathbf{1}^\top \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^\top \mathbf{1} & \mathbf{z}^\top \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \|\mathbf{z}\|^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{X}^\top \mathbf{Y} &= \begin{pmatrix} \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{z}^\top \end{pmatrix} \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}^\top \mathbf{Y} \\ \mathbf{z}^\top \mathbf{Y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De este modo, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}$, donde

$$\hat{\beta} = \bar{Y}, \quad \hat{\gamma} = \frac{\mathbf{z}^\top \mathbf{Y}}{\|\mathbf{z}\|^2},$$

(5 pts)

mientras que

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-2} (\mathbf{Y}^\top \mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}) = \frac{1}{n-2} \left(\mathbf{Y}^\top \mathbf{Y} - n\bar{Y}^2 - \frac{1}{\|\mathbf{z}\|^2} \mathbf{Y}^\top \mathbf{z} \mathbf{z}^\top \mathbf{Y} \right) \\ &= \frac{1}{n-2} \mathbf{Y}^\top \mathbf{B} \mathbf{Y}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top - \frac{1}{\|\mathbf{z}\|^2} \mathbf{z} \mathbf{z}^\top. \end{aligned}$$

De este modo,

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y} - \hat{\gamma} z_i)^2.$$

(5 pts)

Por otro lado, tenemos que

$$\mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{g} = (0, 1) \begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} \end{pmatrix} = \hat{\gamma},$$

y

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{G}^\top = (0, 1) \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & 1/\|\mathbf{z}\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{z}\|^2}$$

Luego, el estadístico F es dado por

$$F = \frac{\hat{\gamma}^2 \|\mathbf{z}\|^2}{s^2} \sim F(1, n-2),$$

(5 pts)

y rechazamos H_0 si

$$F > F_{1-\alpha}(1, n-2).$$

(5 pts)

3. Para el modelo \mathcal{M}_1 , tenemos

$$\mathbf{Y} = \beta_0 \mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon},$$

con $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_6)^\top$ y $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_6)^\top$. En este caso,

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{Y}}{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i Y_i}{\sum_{i=1}^6 x_i^2} = \frac{280}{91} = 3.07692$$

(5 pts)

Ahora,

$$\begin{aligned} Q(\hat{\beta}_0) &= \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y} - \hat{\beta}_0 \mathbf{x}^\top \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^6 Y_i^2 - \frac{1}{\sum_{i=1}^6 x_i^2} \left(\sum_{i=1}^6 x_i Y_i \right)^2 \\ &= 879 - \frac{280^2}{91} = 17.46154 \end{aligned}$$

Por otro lado, para el modelo \mathcal{M}_2 , tenemos:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon},$$

con

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \\ 10 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \\ 4 & 16 \\ 5 & 25 \\ 6 & 36 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

En este caso,

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \\ 4 & 16 \\ 5 & 25 \\ 6 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91 & 441 \\ 441 & 2275 \end{pmatrix},$$

así

$$(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} = \frac{1}{91 \cdot 2275 - 441^2} \begin{pmatrix} 2275 & -441 \\ -441 & 91 \end{pmatrix} = \frac{1}{12544} \begin{pmatrix} 2275 & -441 \\ -441 & 91 \end{pmatrix}.$$

Ahora

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \\ 10 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280 \\ 1376 \end{pmatrix},$$

luego

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12544} \begin{pmatrix} 2275 & -441 \\ -441 & 91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 280 \\ 1376 \end{pmatrix} = \frac{1}{12544} \begin{pmatrix} 30184 \\ 1736 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.40625 \\ 0.13839 \end{pmatrix}.$$

(5 pts)

De este modo

$$\begin{aligned} Q(\hat{\beta}) &= \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y} - \hat{\beta}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{Y} = 879 - \frac{1}{12544} (30184, 1736) \begin{pmatrix} 280 \\ 1376 \end{pmatrix} = 879 - \frac{10840256}{12544} \\ &= 879 - 864.1786 = 14.82143 \end{aligned}$$

Para el modelo \mathcal{M}_2 , considere la hipótesis,¹ $H_0 : \beta_2 = 0$ (aquí $\mathbf{G} = (0, 1)$, $g = 0$ y $q = 1$), luego el estadístico F es dado por

$$F = \frac{Q(\hat{\beta}_0) - Q(\hat{\beta})}{s^2} = \frac{Q(\hat{\beta}_0) - Q(\hat{\beta})}{Q(\hat{\beta})/(n-p)} = \frac{17.46154 - 14.82143}{14.82143/4} = 0.71251, \quad (5 \text{ pts})$$

que debe ser comparado con un valor cuantil de la distribución $F(1, 4)$. En nuestro caso, el valor- p es dado por

$$p = \mathsf{P}(F > 0.71251) = 0.44614,$$

y por tanto debemos seleccionar el modelo \mathcal{M}_1 . (5 pts)

¹Es decir, si aceptamos H_0 escogemos el modelo \mathcal{M}_1 , en caso contrario seleccionamos \mathcal{M}_2 .