1. Sean $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top$ y $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{X}_1^\top \boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1^\top$. Así,

$$Q = \frac{1}{\sigma^2}\{\boldsymbol{Y}^\top(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}_1)\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}^\top(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H})\boldsymbol{Y}\} = \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{Y}^\top(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_1)\boldsymbol{Y}.$$

Para mostrar que Q sigue una distribución chi-cuadrado basta notar que $\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_1$ es idempotente. En efecto,

$$(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_1)(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{H}^2 - \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_1^2.$$

Ahora

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{X}_1^\top \boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1^\top = \boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{X}_1^\top \boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1^\top = \boldsymbol{H}_1,$$

y análogamente $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1$. Además, $\boldsymbol{H}^2 = \boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{H}_1^2 = \boldsymbol{H}_1$. De este modo,

$$(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_1)^2 = \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_1.$$

Es decir, $Q \sim \chi^2(r, \lambda)$ con

$$r = \operatorname{rg}(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_1) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_1) = \operatorname{tr}\boldsymbol{H} - \operatorname{tr}\boldsymbol{H}_1 = p - p_1 = p_2,$$

y

$$\lambda = \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1^\top \boldsymbol{X}_1^\top(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_1)\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1^\top \boldsymbol{X}_1^\top(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{X}_1)\boldsymbol{\beta}_1 = 0,$$

pues $\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_1$ y $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_1$.

Además, Q y Q_2/σ^2 son independientes, pues

$$(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_1)(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}^2 + \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{0}.$$

2.a. En nuestro caso,

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & k \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1}_k^\top & \boldsymbol{1}_l^\top & 1 \\ -\boldsymbol{1}_k^\top & \boldsymbol{0} & k \end{pmatrix}^\top.$$

2.b. Tenemos,

$$\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1}_k^\top & \boldsymbol{1}_l^\top & 1 \\ -\boldsymbol{1}_k^\top & \boldsymbol{0} & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{1}_k & -\boldsymbol{1}_k \\ \boldsymbol{1}_l & \boldsymbol{0} \\ 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & -k+k \\ -k+k & k+k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & k(k+1) \end{pmatrix},$$

mientras que

$$\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_k^\top & \mathbf{1}_l^\top & 1 \\ -\mathbf{1}_k^\top & \mathbf{0} & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_1 \\ \boldsymbol{Y}_2 \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_k^\top \boldsymbol{Y}_1 + \mathbf{1}_l^\top \boldsymbol{Y}_2 + Y_n \\ kY_n - \mathbf{1}_k^\top \boldsymbol{Y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\overline{Y} \\ kY_n - \sum_{i=1}^k Y_i \end{pmatrix},$$

donde $\boldsymbol{Y}_1 = (Y_1, \dots, Y_k)^\top$ y $\boldsymbol{Y}_2 = (Y_{k+1}, \dots, Y_{k+l})^\top$. Además,

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}(\mathbf{1}_k^\top \boldsymbol{Y}_1 + \mathbf{1}_l^\top \boldsymbol{Y}_2 + Y_n), \qquad \overline{Y}_1 = \frac{1}{k}\mathbf{1}_k^\top \boldsymbol{Y}_1 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k Y_i.$$

Por otro lado,

$$(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k(k+1)} \end{pmatrix}.$$

De este modo,

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \overline{Y} \\ (Y_n - \overline{Y}_1)/(k+1) \end{pmatrix}.$$

Es decir, $\widehat{\beta}_1 = \overline{Y}$ y $\widehat{\beta}_2 = (Y_n - \overline{Y}_1)/(k+1)$.

2.c. Sabemos que

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} \sim \mathsf{N}_2(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}),$$

como $\mathsf{Cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) = 0$, sigue la independencia entre $\widehat{\beta}_1$ y $\widehat{\beta}_2$.