CORRECCIÓN CERTAMEN N°1 MAT 266

1. (a) Tenemos que $\mathbb{1}^T \mu = 1$ y como

$$\Omega \mathbb{1} = (D - \mu\mu^T)\mathbb{1} = D\mathbb{1} - \mu\mu^T\mathbb{1}$$

con

$$D\mathbb{1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & & \\ 0 & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$$

Sigue que $\Omega \mathbb{1} = \mu - \mu = 0$, de ahí que $rg(\Omega) \leq m-1$. En efecto, $\Omega \mathbb{1} = 0\mathbb{1}$ así Ω tiene un valor propio cero.

(b) El estadístico T puede escribirse como

$$T = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n x_i - n\mu_i)^2}{n\mu_i}$$

$$= n(x - \mu)^T D^{-1} (x - \mu)$$

$$= Z^T D^{-1} Z \quad \text{con} \quad Z = \sqrt{n}(x - \mu).$$

Sabemos que

$$\sqrt{n}\,(\hat{\pi} - \pi) \sim N_n(0, \Omega)$$

Sin embargo esta distribución es singular

Ahora,

$$D^{-1}\Omega = D^{-1}(D - \pi\pi^T) = I - D^{-1}\pi\pi^T$$

$$= I - 1\pi^T$$

pues en efecto $D^{-1}\pi = 1$. Como

$$(I - 1\pi^T)^2 = I - 1\pi^T - 1\pi^T + 1\pi^T 1\pi^T$$

$$= I - 1\pi^T$$

es matriz idempotente, luego

$$T \sim \chi^2_{n-1}$$

pues la distribución es singular.

2. Tenemos que

$$Y \sim N(W\mu, \sigma^2 I)$$

(aquí $W = I_a \otimes 1_n \in \mathbb{R}^{na \times a}$)

(a) Note que

$$A_1^2 = (I_a \otimes C_n)(I_a \otimes C_n)$$
$$= I_a \otimes C_n^2 = I_a \otimes C_n$$

es matriz idempotente. Por tanto

$$\frac{q_1}{\sigma^2} = \frac{Y^T A_1 Y}{\sigma^2} \sim \chi^2_{r_1}(\lambda_1)$$

con

$$r_1 = rg(A_1) = rg(I_a)\, rg(C_n)$$
$$= tr(I_a)\, tr(C_n) = a(n-1)$$

pues ambas I_a y C_n son idempotentes, además

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\mu^T W^T A_1 W \mu$$
$$= \frac{1}{2}\mu^T (I_a \otimes 1_n^T)(I_a \otimes C_n)(I_a \otimes 1_n)\mu = 0.$$

pues $C_n \mathbb{1}_n = 0$. Por otro lado

$$A_2^2 = \left(C_a \otimes \frac{1}{n} J_n\right)\left(C_a \otimes \frac{1}{n} J_n\right)$$

$$= \left(C_a^2 \otimes \frac{1}{n^2} J_n^2\right) = C_a \otimes \frac{1}{n^2} \mathbb{1}_n \mathbb{1}_n^T \mathbb{1}_n \mathbb{1}_n^T$$

$$= C_a \otimes \frac{1}{n} J_n$$

Luego

$$\frac{q_2}{\sigma^2} = \frac{y^T A_2 y}{\sigma^2} \sim \chi^2_{r_2}(\lambda_2)$$

ahora

$$rg(A_2) = rg(C_a)\, rg\left(\frac{1}{n} J_n\right) = tr(C_a)\, tr\left(\frac{1}{n} J_n\right)$$

$$= (a-1) \frac{1}{n} tr(J_n) = a-1$$

y

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \mu^T W^T A_2 W \mu$$

$$= \frac{1}{2} \mu^T \left(I_a \otimes \mathbb{1}_n^T\right)\left(C_a \otimes \frac{1}{n} J_n\right)\left(I_a \otimes \mathbb{1}_n\right) \mu$$

$$= \frac{1}{2} \mu^T \left(C_a \otimes \frac{1}{n} \mathbb{1}_n^T J_n \mathbb{1}_n\right) \mu = \frac{n}{2} \mu^T C_a \mu$$

1) Para ver la independencia entre $\mathcal{F}^1$ y $\mathcal{F}^2$ basta considerar

$$A_1 A_2 = \left(\mathbb{I}_a \otimes C_n\right)\left(C_a \otimes \frac{1}{n}\mathbb{J}_n\right)$$

$$= C_a \otimes \frac{1}{n} C_n \mathbb{J}_n = C_a \otimes 0 = 0.$$

Nota: Considere por otro lado

$$A = A_1 + A_2 = \mathbb{I}_a \otimes C_n + C_a \otimes \frac{1}{n}\mathbb{J}_n$$

tenemos que

$$(A+B) \otimes (C+D) = A \otimes C + A \otimes D + B \otimes C + B \otimes D.$$

luego

$$\mathbb{I}_a \otimes \left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n}\mathbb{J}_n\right) = \mathbb{I}_a \otimes \mathbb{I}_n - \mathbb{I}_a \otimes \frac{1}{n}\mathbb{J}_n$$

$$\left(\mathbb{I}_a - \frac{1}{a}\mathbb{J}_a\right) \otimes \frac{1}{n}\mathbb{J}_n = \mathbb{I}_a \otimes \frac{1}{n}\mathbb{J}_n - \frac{1}{a}\mathbb{J}_a \otimes \frac{1}{n}\mathbb{J}_n$$

de este modo

$$A = \mathbb{I}_a \otimes \mathbb{I}_n - \frac{1}{a}\mathbb{J}_a \otimes \frac{1}{n}\mathbb{J}_n$$

Ahora

$$A^2 = \left(I_a \otimes I_n - \tfrac{1}{a} J_a \otimes \tfrac{1}{n} J_n\right)\left(I_a \otimes I_n - \tfrac{1}{a} J_a \otimes \tfrac{1}{n} J_n\right)$$

$$= I_a \otimes I_n - \tfrac{1}{a} J_a \otimes \tfrac{1}{n} J_n - \tfrac{1}{a} J_a \otimes \tfrac{1}{n} J_n + \tfrac{1}{a^2} J_a^2 \otimes \tfrac{1}{n^2} J_n^2 = A$$

así

$$rg(A) = tr(A) = tr(I_a \otimes I_n) - \tfrac{1}{an} tr(J_a \otimes J_n)$$

$$= tr(I_a)\, tr(I_n) - \tfrac{1}{an} tr(J_a)\, tr(J_n)$$

$$= an - 1.$$

como

$$r_1 + r_2 = a(n-1) + a - 1 = an - 1.$$

sigue la independencia mutua entre q_1 y q_2

3. Considere el modelo lineal

$$Y = X\theta + \epsilon, \quad \epsilon \sim N(0, \sigma^2 I).$$

con $X = (1, Z)$ y $\theta = (\eta_0, \beta_{(0)}^T)^T$. Es fácil notar que

$$1^T Z = 0 \ (= Z^T 1)$$

de este modo el estimador para θ asume la forma

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

con

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1^T \\ Z^T \end{pmatrix} (1 \ Z) = \begin{pmatrix} 1^T 1 & 0 \\ 0 & Z^T Z \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$$X^T Y = \begin{pmatrix} 1^T Y \\ Z^T Y \end{pmatrix}, \quad \text{luego}$$

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & (Z^T Z)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\bar{Y} \\ Z^T Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{\beta}_{(0)} \end{pmatrix}$$

con $\hat{\eta} = \bar{Y}$ y $\hat{\beta}_{(0)} = (Z^T Z)^{-1} Z^T Y$. Como

$$\mathrm{Cov}(\hat{\theta}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & (Z^T Z)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Sigue que $\mathrm{Cov}(\hat{\eta}, \hat{\beta}_{(0)}) = 0$ y por normalidad $\hat{\eta} \perp \hat{\beta}_{(0)}$

4. Note que el modelo

$$Y_{ij} = \theta_i x_j + \epsilon_{ij}, \quad i=1,2; \; j=1,\dots,T$$

puede ser escrito en la forma

$$Y = X\beta + \epsilon$$

con

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

con $Y_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{iT})^T$, $x = (x_1, \dots, x_T)^T$ y $\epsilon \sim N_{2T}(0, \sigma^2 I)$. Se desea probar la hipótesis lineal $H_0: G\beta = g$ con $G = (1 \; -1)$ y $g = 0$, aquí $q = 1$.

Note que

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{pmatrix} 1/\|x\|^2 & 0 \\ 0 & 1/\|x\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^T Y_1 \\ x^T Y_2 \end{pmatrix}$$

de ahí que

$$\hat{\theta}_i = \frac{x^T Y_i}{x^T x} = \frac{\sum_j x_j Y_{ij}}{\sum_j x_j^2}, \quad i=1,2.$$

Por otro lado

$$S(\hat\beta) = \| y - x\hat\beta \| = y^T y - y^T x \hat\beta$$

$$= y_1^T y_1 + y_2^T y_2 - (y_1^T x,\ y_2^T x)\begin{pmatrix}\hat\alpha_1\\ \hat\alpha_2\end{pmatrix}$$

$$= y_1^T y_1 - \frac{y_1^T x x^T y_1}{\|x\|^2} + y_2^T y_2 - \frac{y_2^T x x^T y_2}{\|x\|^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{2} y_i^T \left(I - \frac{1}{\|x\|^2} x x^T \right) y_i$$

así

$$s^2 = \frac{1}{2T-2} S(\hat\beta)$$

El estadístico F asume la forma

$$F = \frac{(C\hat\beta - g)^T \{C(X^T X)^{-1} C^T\}^{-1} (C\hat\beta - g)}{s^2}$$

con

$$C(X^T X)^{-1} C^T = \frac{1}{\|x\|^2}(1\ \ -1)\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = \frac{2}{\|x\|^2}$$

De este modo se rechaza $H_0: \alpha_1 = \alpha_2$ si

$$F = \frac{(\hat\alpha_1 - \hat\alpha_2)^2 \|x\|^2}{2 s^2} \geq F_{1,\, 2T-2}(1-\alpha)$$