

**MAT-266: Análisis de Regresión****Certamen 2. Junio 16, 2021****Tiempo: 70 minutos****Nombre:** \_\_\_\_\_**Profesor:** Felipe Osorio

1. (40 pts) Sea  $Y_{ij}$ , para  $i = 1, 2, 3$  y  $j = 1, \dots, m$  variables aleatorias independientes con distribución normal, tales que  $E(Y_{ij}) = \mu_{ij}$ ,  $\text{var}(Y_{ij}) = \sigma^2$ , y

$$\mu_{1j} = \tau, \quad \mu_{2j} = \tau + \theta, \quad \mu_{3j} = \tau - \theta.$$

- a) Determine la matriz de diseño  $\mathbf{X}$ .  
b) Obtener el estimador ML de  $(\tau, \theta)^\top$  y  $\text{var}(\hat{\theta})$ .  
c) Derive el estadístico  $F$  para probar la hipótesis  $H_0 : \theta = 0$ .
2. (60 pts) Considere el modelo de regresión lineal  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$  bajo los Supuestos A1-A4\* y suponga las restricciones lineales

$$\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{g},$$

donde  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{q \times p}$  con  $\text{rg}(\mathbf{G}) = q$  y  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^q$ . Sea

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{G},$$

con

$$\mathbf{B} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{G}^\top (\mathbf{G}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{G}^\top)^{-1}.$$

Muestre que la matriz  $\mathbf{A}$  tiene las siguientes propiedades:

- (i)  $\mathbf{A}$  es idempotente con rango  $\text{rg}(\mathbf{A}) = r$ .  
(ii)  $\mathbf{X}\mathbf{A}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top$  es idempotente y simétrica con rango  $r$ .  
(iii)  $\mathbf{A}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{A}^\top = \mathbf{A}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{A}^\top$ .