MAT-266, 2° Semestre 2014	**Nombre:** ______________
Certamen 2. Noviembre 21, 2014	**Rol:** ______________
Tiempo: 90 Minutos	Profesor: Felipe Osorio.

1. Sea $\overline{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_{ij}$ y $z_{ij} = x_{ij} - \overline{x}_j$, para todo $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, k$ y considere $\boldsymbol{Z} = (z_{ij})$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)^\top$. En cuyo caso, tenemos el *modelo centrado*:

$$\boldsymbol{Y} = \alpha\mathbf{1} + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{1}, \boldsymbol{Z})\begin{pmatrix}\alpha \\ \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix} + \boldsymbol{\epsilon},$$

donde $\mathrm{E}(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{0}$ y $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2\boldsymbol{I}_n$. Muestre que los BLUE de α y $\boldsymbol{\beta}$ son independientes.

2. Considere las regresiones de Y sobre x para los datos a continuación, especificadas por:

$$\mathcal{M}_1 : \mathrm{E}(Y) = \beta_0 x \qquad \text{y} \qquad \mathcal{M}_2 : \mathrm{E}(Y) = \beta_1 x + \beta_2 x^2.$$

Obtenga $\widehat{\beta}_0$, $\widehat{\beta}_1$ y $\widehat{\beta}_2$. ¿Cuál de esos modelos es preferido?

Y	5	7	7	10	16	20
x	1	2	3	4	5	6

3. Considere las rectas de regresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &: Y_{1i} = \alpha_1 + \beta_1 x_{1i} + \epsilon_{1i} \qquad \text{y} \\ \mathcal{R}_2 &: Y_{2i} = \alpha_2 + \beta_2 x_{2i} + \epsilon_{2i}, \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, n$, donde los errores $\{\epsilon_{1i}\}$ y $\{\epsilon_{2i}\}$ son variables aleatorias iid con media cero y varianza común σ^2. Obtenga el estadístico F para probar la hipótesis de que las rectas de regresión $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son paralelas.

4. Sea Y_{ij}, $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, \dots, n$ variables aleatorias independientes normalmente distribuídas con $\mathrm{E}(Y_{ij}) = \mu_{ij}$ y $\mathrm{var}(Y_{ij}) = \sigma^2$, tales que

$$\mu_{1j} = \alpha, \qquad \mu_{2j} = \alpha + \Delta, \qquad \mu_{3j} = \alpha - \Delta.$$

a. Determine la matriz de diseño $\boldsymbol{X}$.

b. Obtenga el estimador mínimos cuadrados de $(\alpha, \Delta)^\top$ y $\mathrm{var}(\widehat{\Delta})$.

c. Derive el estadístico F para probar la hipótesis $H_0 : \Delta = 0$.