

1. (25 pts) Considere el modelo,

$$V_i = \alpha K_i^{\beta_1} L_i^{\beta_2} \eta_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

donde V_i es el valor agregado, K_i denota el capital, L_i representa el trabajo y $\epsilon = \log \eta$ es un término de error con $E(\epsilon_i) = 0$ y $\text{var}(\epsilon) = \sigma^2$. Asumiendo errores independientes y linealizando el modelo en (1), obtenga estimadores de β_1 y β_2 bajo la restricción $\beta_1 + \beta_2 = 1$.

2. (25 pts) Considere el modelo,

$$Y_i = \alpha + \theta z_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

donde $z_i = x_i - \bar{x}$, con $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$. Considere el siguiente estimador para θ :

$$b^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \left(\frac{Y_i - Y_{i-1}}{\Delta x_i} \right),$$

con $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. ¿Es b^* BLUE?

3. (25 pts) Considere la inclusión de una nueva variable regresora como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \phi \mathbf{Z} + \boldsymbol{\epsilon},$$

con $\boldsymbol{\epsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$. Obtenga un estimador para ϕ y su varianza.

4. (25 pts) Suponga una secuencia de observaciones $(Y_1, \mathbf{x}_1^\top)^\top, (Y_2, \mathbf{x}_2^\top)^\top, \dots, (Y_n, \mathbf{x}_n^\top)^\top$ y suponga el modelo,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k: \quad Y_i &= \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}_1 + \epsilon_i, & i &= 1, \dots, k, \\ Y_i &= \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}_2 + \epsilon_i, & i &= k+1, \dots, n, \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\beta}_1 = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$, y $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$. Defina $\mathbf{Y}_1 = (Y_1, \dots, Y_k)^\top$, $\mathbf{Y}_2 = (Y_{k+1}, \dots, Y_n)^\top$, y

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^\top \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k+1}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^\top \end{pmatrix}.$$

- a) Escriba el modelo lineal y determine los estimadores ML de $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}_1^\top, \boldsymbol{\beta}_2^\top, \sigma^2)^\top$.
b) Obtenga el criterio de información de Schwarz asociado al modelo \mathcal{M}_k .