

MAT-266: Distribuciones de contornos elípticos

Felipe Osorio

fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM



Definición 1:

Sea U vector aleatorio $p \times 1$ con **distribución uniforme** sobre el conjunto

$$\mathcal{S}_p = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : \|\mathbf{x}\| = 1\}, \quad (1)$$

esto es \mathcal{S}_p denota la **superficie de la esfera unitaria** en \mathbb{R}^p . En cuyo caso anotamos $U \sim U(\mathcal{S}_p)$.

Resultado 1:

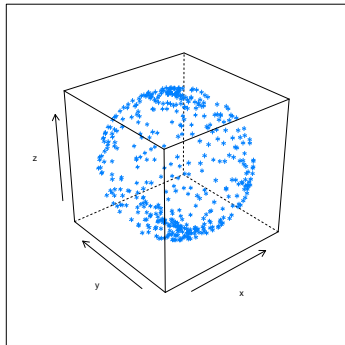
Si Z_1, \dots, Z_p son variables aleatorias IID con distribución $N(0, 1)$, entonces $U = (U_1, \dots, U_p)^\top$, definido como:

$$U = \frac{Z}{\|Z\|},$$

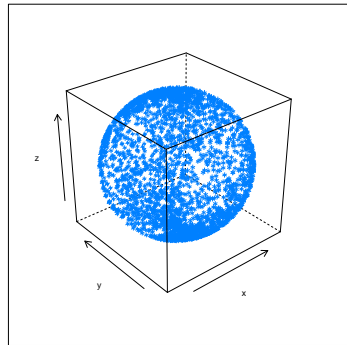
tiene **distribución uniforme sobre la esfera unitaria**.



Distribuciones de contornos elípticos



(a) $n = 750$



(b) $n = 3000$

Definición 2:

Un vector aleatorio $p \times 1$, \mathbf{X} se dice que tiene **simetría esférica** si para cualquier $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}_p$, sigue que

$$\mathbf{Q}\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{X}.$$

Ejemplo:

Sea $\mathbf{U} \sim \mathcal{U}(\mathcal{S}_p)$, entonces es directo que $\mathbf{Q}\mathbf{U} \stackrel{d}{=} \mathbf{U}$.



Definición 3:

Un vector aleatorio p -dimensional tiene **distribución esférica** sólo si su función característica satisface

(a) $\varphi(\mathbf{Q}^\top \mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{t})$, para todo $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}_p$.

(b) Existe una función $\psi(\cdot)$ de una variable escalar tal que $\varphi(\mathbf{t}) = \psi(\mathbf{t}^\top \mathbf{t})$.

En este caso escribimos $\mathbf{X} \sim S_p(\psi)$.

Ejemplo:

Sea $\mathbf{X} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, tenemos que

$$\varphi(\mathbf{t}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(t_1^2 + \cdots + t_p^2)\right\} = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \mathbf{t}\right).$$



Resultado 2:

Suponga que $\mathbf{X} \sim S_p(g)$. Entonces \mathbf{X} tiene **presentación estocástica**

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} R\mathbf{U}, \quad (2)$$

donde $\mathbf{u} \sim U(S_p)$ y $R \geq 0$ con distribución G , son independientes.

Resultado 3:

Suponga que $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} R\mathbf{U} \sim S_p(g)$ ($P(\mathbf{X} = \mathbf{0}) = 0$), entonces

$$\|\mathbf{X}\| \stackrel{d}{=} R, \quad \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \stackrel{d}{=} \mathbf{U}.$$

Además $\|\mathbf{X}\|$ y $\mathbf{X}/\|\mathbf{X}\|$ son independientes.



Resultado 4:

El vector de medias y la matriz de covarianza de $U \sim U(\mathcal{S}_p)$ son:

$$E(U) = \mathbf{0}, \quad \text{Cov}(U) = \frac{1}{p} I_p,$$

respectivamente.

Demostración:

Sea $X \sim N_p(\mathbf{0}, I)$, tenemos que $X \stackrel{d}{=} \|X\|U$, con $\|X\|$ independiente de U . Sabemos que $\|X\|^2 \sim \chi^2(p)$. Dado que

$$E(X) = \mathbf{0}, \quad E(\|X\|) > 0, \quad \text{y} \quad E(\|X\|^2) = p, \quad \text{Cov}(X) = I_p,$$

es resultado sigue.



Resultado 5:

Si $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} R\mathbf{U} \sim S_p(g)$ y $E(R^2) < \infty$. Entonces,

$$E(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad \text{Cov}(\mathbf{X}) = \frac{E(R^2)}{p} \mathbf{I}_p,$$

respectivamente.

Demostración:

En efecto, como R y \mathbf{U} son independientes, sigue que

$$E(\mathbf{X}) = E(R) E(\mathbf{U}) = \mathbf{0},$$

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) = E(R^2) E(\mathbf{U}\mathbf{U}^\top) = E(R^2) \text{Cov}(\mathbf{U}) = \frac{E(R^2)}{p} \mathbf{I}_p,$$

siempre que $E(R) < \infty$ y $E(R^2) < \infty$.



Definición 4:

Un vector aleatorio $p \times 1$, \mathbf{X} tiene **distribución de contornos elípticos** con parámetros $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ y $\boldsymbol{\Sigma} \geq \mathbf{0}$ si

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y} \sim S_k(\psi),$$

donde $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k \times p}$ es matriz de rango completo tal que, $\mathbf{B}\mathbf{B}^\top = \boldsymbol{\Sigma}$ con $\text{rg}(\boldsymbol{\Sigma}) = k$ y escribimos $\mathbf{X} \sim \text{EC}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; \psi)$.

Observación:

La función característica de $\mathbf{X} \sim \text{EC}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; \psi)$ es de la forma

$$\varphi(\mathbf{t}) = \exp(i\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu})\psi(\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}).$$



Resultado 6:

$\mathbf{X} \sim \text{EC}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; g)$, $\boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$, si y sólo si

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + R \mathbf{B} \mathbf{U},$$

donde $R \geq 0$ es independiente de \mathbf{U} y \mathbf{B} es matriz tal que $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B} \mathbf{B}^\top$.

Resultado 7:

Suponga que $\mathbf{X} \sim \text{EC}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; g)$ y $E(R^2) < \infty$. Entonces

$$E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}, \quad \text{Cov}(\mathbf{X}) = \frac{E(R^2)}{p} \boldsymbol{\Sigma}.$$



Definición 5:

Un vector aleatorio $\mathbf{X} \sim \text{EC}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; g)^1$ con $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ y $\boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$ tiene función de densidad

$$f(\mathbf{x}) = |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} g[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})], \quad (3)$$

si y sólo si $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ es tal que

$$\int_0^\infty u^{p/2-1} g(u) \, du < \infty,$$

y decimos que $g(\cdot)$ es la **generadora de densidad**.

Observación:

Asuma que $\mathbf{X} \sim \text{EC}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; \psi)$ con $\text{rg}(\boldsymbol{\Sigma}) = k$. Entonces,

$$U = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^- (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \stackrel{d}{=} R^2,$$

donde $\boldsymbol{\Sigma}^-$ es una inversa generalizada de $\boldsymbol{\Sigma}$.

¹Cuando $\mathbf{X} \sim \text{EC}_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}; g)$ es usual escribir $\mathbf{X} \sim S_p(g)$.

Distribuciones de contornos elípticos

- **Normal:** $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, con

$$g(u) = c_1 \exp(-u/2).$$

- **t-Student:** $\mathbf{X} \sim t_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \nu)$, donde

$$g(u) = c_2(1 + u/\nu)^{-(\nu+p)/2}, \quad \nu > 0.$$

- **Normal contaminada:** $\mathbf{X} \sim CN_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \epsilon, \gamma)$, con $\epsilon \in [0, 1]$ y $\gamma > 0$,

$$g(u) = c_1 \{(1 - \epsilon) \exp(-u/2) + \epsilon \gamma^{-p/2} \exp(-u/(2\gamma))\}.$$

- **Cauchy:** $\mathbf{X} \sim \text{Cauchy}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, con

$$g(u) = c_3(1 + u)^{-(p+1)/2}.$$

- **Logística:** $\mathbf{X} \sim L_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, con

$$g(u) = c_4 \exp(-u) / \{1 + \exp(-u)\}^2.$$

- **Exponencial Potencia:** $\mathbf{X} \sim PE_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \lambda)$, donde

$$g(u) = c_5 \exp(-u^\lambda/2), \quad \lambda > 0.$$



Definición 6:

Sea $\mu \in \mathbb{R}^p$, Σ matriz $p \times p$ definida positiva y H función de distribución de una variable aleatoria positiva, W . Entonces, se dice que el vector aleatorio X sigue una **distribución de mezcla de escala normal** si su función de densidad asume la forma:

$$f(x) = |2\pi\Sigma|^{-1/2} \int_0^\infty \omega^{p/2} \exp(-\omega u/2) dH(\omega),$$

donde $u = (x - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x - \mu)$ y anotamos $X \sim \text{SMN}_p(\mu, \Sigma; H)$.

Observación:

Un vector aleatorio $X \sim \text{SMN}_p(\mu, \Sigma; H)$ admite la **representación**:

$$X \stackrel{d}{=} \mu + W^{-1/2} Z, \tag{4}$$

donde $Z \sim N_p(0, \Sigma)$ y $W \sim H(\delta)$ son **independientes**.



Ejemplo (distribución Slash):

Un vector aleatorio \mathbf{X} tiene distribución **Slash** si su función de densidad es de la forma:

$$f(\mathbf{x}) = \nu |2\pi \Sigma|^{-1/2} \int_0^1 \omega^{p/2+\nu-1} \exp(-\omega u/2) d\omega.$$

Tenemos que $h(\omega) = \nu \omega^{\nu-1}$, para $\omega \in (0, 1)$ y $\nu > 0$. Es decir, $W \sim \text{Beta}(\nu, 1)$.

Ejemplo (distribución Exponencial-Potencia):

Se dice que un vector aleatorio \mathbf{X} tiene distribución **Exponencial-Potencia** (Gómez, Gómez-Villegas y Marín, 1988)², si su función de densidad es dada por:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{p \Gamma(\frac{p}{2}) \pi^{-p/2}}{\Gamma(1 + \frac{p}{2\lambda}) 2^{1 + \frac{p}{2\lambda}}} |\Sigma|^{-1/2} \exp(-u^\lambda/2), \quad \lambda > 0.$$

en cuyo caso anotamos $\mathbf{X} \sim \text{PE}_p(\mu, \Sigma, \lambda)$. Debemos destacar que la distribución de la **variable mezcladora** W tiene una **representación en series** y es de poco interés práctico.

²Esta familia pertenece a la clase SMN cuando $\lambda \in (0, 1]$.



Observación:

La representación estocástica en (4), puede ser escrita de forma equivalente, como:

$$\mathbf{X}|W \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}/\omega), \quad W \sim H(\boldsymbol{\delta}). \quad (5)$$

Esta representación permite, por ejemplo

$$\begin{aligned} E(\mathbf{X}) &= E(E(\mathbf{X}|W)) = \boldsymbol{\mu} \\ \text{Cov}(\mathbf{X}) &= E(\text{Cov}(\mathbf{X}|W)) + \text{Cov}(E(\mathbf{X}|W)) = E(W^{-1})\boldsymbol{\Sigma}. \end{aligned}$$

Además, la **formulación condicional** en (5) es muy útil para:

- Generación de dígitos pseudo-aleatorios.
- Estimación ML usando el algoritmo EM.



Ejemplo (distribución t multivariada):

Para $\mathbf{X} \sim t_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \nu)$, con $\nu > 0$, podemos escribir

$$\mathbf{X}|W \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}/\omega), \quad W \sim \text{Gamma}(\nu/2, \nu/2),$$

es decir,

$$h(\omega; \nu) = \frac{(\nu/2)^{\nu/2} \omega^{\nu/2-1}}{\Gamma(\nu/2)} \exp(-\nu\omega/2).$$

Ejemplo (distribución normal contaminada):

Considere $\mathbf{X} \sim \text{CN}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \epsilon, \gamma)$ (Little, 1988) donde $0 \leq \epsilon \leq 1$ denota el **porcentaje de contaminación** y $0 < \gamma < 1$ corresponde a un **factor de inflación de escala**. En este caso,

$$h(\omega; \boldsymbol{\delta}) = \begin{cases} \epsilon, & \omega = \gamma \\ 1 - \epsilon & \omega = 1 \end{cases},$$

con $\boldsymbol{\delta} = (\epsilon, \gamma)^\top$.



Referencias bibliográficas



Andrews, D.F., Mallows, C.L. (1974).
Scale mixtures of normal distributions
Journal of the Royal Statistical Society, Series B 36, 99-102.



Fang, K.T., Kotz, S., Ng, K.W. (1990).
Symmetric Multivariate and Related Distributions.
Chapman & Hall, London.



Gómez, E., Gómez-Villegas, M.A., Marín, J.M. (1988).
A multivariate generalization of the power exponential family of distributions.
Communication in Statistics: Theory and Methods 27, 589-600.



Lange, K., Sinsheimer, J.S. (1993).
Normal/independent distributions and their applications in robust regression.
Journal of Computational and Graphical Statistics 2, 175-198.



Little, R.J.A. (1988).
Robust estimation of the mean and covariance matrix from data with missing values.
Applied Statistics 37, 23-38.

