CORRECCIÓN CERTAMEN N°2 MAT 266

1\. Tenemos el modelo

$$Y = X\beta + \epsilon, \quad \epsilon \sim N(0, \sigma^2 \Omega)$$

donde $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$, $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ y

$\Omega = \operatorname{diag}(x_1^2, \dots, x_n^2)$. De este modo

$$\tilde{\beta} = (X^T \Omega^{-1} X)^{-1} X^T \Omega^{-1} Y$$

note que

$$X^T \Omega^{-1} X = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} x_1^{-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2^{-2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & x_n^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= n$$

$$X^T \Omega^{-1} Y = (1/x_1, \dots, 1/x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i}$$

así

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i}$$

con varianza $\operatorname{Var}(\tilde{\beta}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

2. El modelo puede ser escrito como

$$Y = X\theta + \varepsilon \quad , \quad \varepsilon \sim N_n(0, \sigma^2 I_n)$$

con

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & z_n \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

donde $z_i = x_i - \bar{x}$, $i = 1, \dots, n$. Sabemos que

$$h_i = x_i^T (X^T X)^{-1} x_i \quad ,$$

con x_i^T la i-ésima fila de la matriz de diseño. En nuestro caso

$$X^T X = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & z^T z \end{pmatrix}, \quad x_i = (1, z_i)^T, \quad y$$

$z = (z_1, \dots, z_n)^T$ de este modo

$$h_i = (1, z_i) \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & 1/\|z\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z_i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{z_i^2}{\|z\|^2}$$

como $z_i = x_i - \bar{x}$ y $\|z\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ sigue el resultado.

3. Considere $Y = X\beta + \varepsilon$, $\varepsilon \sim N_n(0, \sigma^2 I)$

Sabemos que

$$\hat\beta_{(i)} = \hat\beta - \frac{e_i}{1-h_i}(X^T X)^{-1} x_i.$$

(a) $$\hat y_i = x_i^T \hat\beta$$

$$= x_i^T \left\{ \hat\beta_{(i)} + \frac{e_i}{1-h_i}(X^T X)^{-1} x_i \right\}$$

$$= x_i^T \hat\beta_{(i)} + \frac{e_i}{1-h_i} x_i^T (X^T X)^{-1} x_i$$

$$= \frac{1}{1-h_i}\left\{ (1-h_i)\, x_i^T \hat\beta_{(i)} + h_i (y_i - \hat y_i) \right\}$$

es decir,

$$(1-h_i)\hat y_i = (1-h_i)\, x_i^T \hat\beta_{(i)} + h_i (y_i - \hat y_i)$$

de donde sigue el resultado.

(b) Note ge

$$(A_{(i)}^T A_{(i)})^{-1} = (A^T A - a_i a_i^T)^{-1}$$

$$= \{ I - (A^T A)^{-1} a_i a_i^T \} (A^T A)^{-1}$$

$$= \left\{ I + \frac{(A^T A)^{-1} a_i a_i^T}{1 - h_i} \right\} (A^T A)^{-1}$$

ah

$$a_i^T (A_{(i)}^T A_{(i)})^{-1} a_i = a_i^T \left\{ I + \frac{1}{1-h_i} (A^T A)^{-1} a_i a_i^T \right\} (A^T A)^{-1} a_i$$

$$= h_i + \frac{1}{1-h_i} h_i^2$$

Wego

$$1 + a_i^T (A_{(i)}^T A_{(i)})^{-1} a_i = 1 + h_i + \frac{1}{1-h_i} h_i^2$$

$$= \frac{1}{1-h_i} \{ 1 - h_i + (1-h_i) h_i + h_i^2 \}$$

$$= \frac{1}{1-h_i}$$

(c)

como $$x_i^T \hat{\beta}_{(i)} = x_i^T \hat{\beta} - \frac{e_i}{1-h_i} x_i^T (X^T X)^{-1} x_i$$

$$= \hat{y}_i - \frac{e_i h_i}{1-h_i}$$

luego

$$y_i - x_i^T \hat{\beta}_{(i)} = e_i - \frac{e_i h_i}{1-h_i}$$

$$= \frac{1}{1-h_i} \{ (1-h_i) e_i - e_i h_i \} = \frac{e_i}{1-h_i}$$

usando el resultado en (a) tenemos que

$$\frac{y_i - x_i^T \hat{\beta}_{(i)}}{\sqrt{1 + x_i^T (X_{(i)}^T X_{(i)})^{-1} x_i}} = \frac{e_i / (1-h_i)}{\sqrt{1 / (1-h_i)}} = \frac{e_i}{\sqrt{1-h_i}}$$

4. Para el modelo $Y_i = \beta_0 x_i + \epsilon_i$, $i=1,\dots,6$.
tenemos.

$$\hat{\beta}_0 = \frac{x^T Y}{\|x\|^2} = \frac{280}{91} = 3.0769.$$

Además $\hat{s}^2 = 3.492308$, $\bar{R}^2 = 0.9762$ y
$AIC = 27.43671$.

Por otro lado para $Y_i = \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \epsilon_i$, $i=1,\dots,6$
tenemos

$$X^T X = \begin{pmatrix} 91 & 441 \\ 441 & 2275 \end{pmatrix}, \quad X^T Y = \begin{pmatrix} 280 \\ 1376 \end{pmatrix}$$

Así

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.40625 \\ 0.13839 \end{pmatrix}$$

Además $\hat{s}^2 = 3.705357$, $\bar{R}^2 = 0.9747$ y
$AIC = 28.45315$.

Sin embargo, si realizamos la hipótesis
$H_0 : \beta_2 = 0$ tenemos que su valor-p es
$p = Pr(|t| > 0.844) = 0.4461$ es decir β_2 <u>no</u>
es significativo. Luego el modelo $E(Y) = \beta_0 x$ es <u>MEJO</u>

5. (a) Como $t_5 = 6.8 > 3$ sigue que ésta observación puede ser considerada un outlier.

(b) Se obtuvo $D_5 = 2.1567$ por tanto la observación 5 es influyente aunque no es leverage.

En efecto al eliminar la observación 5 obtenemos $\hat{\beta} = (0.3, 0.2)^T$ es decir la estimación de $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ sufre un cambio de un 128 % y 69%, respectivamente.