MAT-266: Análisis de Regresión **Nombre:** __________________________
Certamen 1. Abril 10, 2023 **Profesor:** Felipe Osorio

---

1. (25 pts) Sea

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix} \sim \mathsf{N}_{p+q}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

y considere $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Determine $\mathsf{E}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y})$.

Sugerencia: Particione apropiadamente $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$.

2. (25 pts) Sea $(X_1, Y_1)^\top, \dots, (X_n, Y_n)^\top$ una muestra aleatoria desde $\mathsf{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, con

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

a) Obtenga la distribución de $U_i = X_i - Y_i$.

b) Determine,

$$\mathsf{P}(|X_i - Y_i| \leq c), \qquad c > 0.$$

Puede ser útil: Considere $\Phi(z)$ la función de distribución acumulada de una distribución normal estándar, es decir,

$$\Phi(z) = \mathsf{P}(Z \leq z), \qquad Z \sim N(0,1).$$

c) Muestre que

$$\rho_c = 1 - \frac{\mathsf{E}(U_i^2)}{\mathsf{E}(U_i^2|\sigma_{12} = 0)} = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} + \sigma_{22} + (\mu_1 - \mu_2)^2}.$$

d) Escriba $\rho_c = \rho_{12}\, C$, con

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}.$$

Determine C.

3. (50 pts) Sea $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Muestre que

$$\mathsf{Cov}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}) = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\mu},$$

con $\boldsymbol{B}$ matriz simétrica $p \times p$.

Sugerencia: Para $\boldsymbol{Z} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, tenemos que $\mathsf{E}(Z_i Z_j Z_k) = 0$.