**1.** Considere la descomposición espectral de $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^\top$. De este modo,

$$\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{P\Lambda P}^\top \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i^2,$$

con $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_n(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$. De ahí que $Y_1^2, \dots, Y_n^2$ son variables $\mathsf{IID}$ con distribución chi-cuadrado con 1 grado de libertad y por tanto $\mathsf{var}(Y_i^2) = 2$. Esto permite escribir,

$$\mathsf{var}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}) = \mathsf{var}\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i^2\Big) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \,\mathsf{var}(Y_i^2) = 2\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Lambda}^2) = 2\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^2).$$

**2.** Tenemos

$$\log f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu}) = -\tfrac{1}{2}\log|\boldsymbol{\Sigma}| + \log g(u),$$

con $u = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$. De este modo,

$$\mathsf{d}_\mu \log f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu}) = \frac{g'(u)}{g(u)}\,\mathsf{d}_\mu u = -2\frac{g'(u)}{g(u)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\,\mathsf{d}\,\boldsymbol{\mu}.$$

Sea $W_g(u) = -2g'(u)/g(u)$, podemos escribir la derivada de $\log f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu})$ con relación a $\boldsymbol{\mu}$ como:

$$\dot{\ell}(\boldsymbol{\mu}) = \frac{\partial \log f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} = W_g(u)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}).$$

Usando la representación estocástica de un vector aleatorio elíptico, podemos escribir:

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu} \overset{\mathsf{d}}{=} R\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}, \qquad \text{y} \qquad W_g(u) \overset{\mathsf{d}}{=} W_g(R^2),$$

donde $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top$, $R$ es variable aleatoria positiva y $\boldsymbol{U} \sim \mathsf{U}(\mathcal{S}_p)$. Es decir,

$$\dot{\ell}(\boldsymbol{\mu}) = W_g(R^2)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}R\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}.$$

Es fácil notar que $\mathsf{E}\{\dot{\ell}(\boldsymbol{\mu})\} = \boldsymbol{0}$. Así, la matriz de covarianza que se desea calcular puede ser obtenidad mediante,

$$\mathsf{Cov}(\dot{\ell}(\boldsymbol{\mu})) = \mathsf{E}\{\dot{\ell}(\boldsymbol{\mu})\dot{\ell}^\top(\boldsymbol{\mu})\} = \mathsf{E}\{W_g^2(R^2)R^2\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\},$$

por la independencia entre $R$ y $\boldsymbol{U}$, lleva a escribir

$$\mathsf{Cov}(\dot{\ell}(\boldsymbol{\mu})) = \mathsf{E}\{W_g^2(R^2)R^2\}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{B}\,\mathsf{E}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top)\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}.$$

Sabemos que $\mathsf{Cov}(\boldsymbol{U}) = \frac{1}{p}\boldsymbol{I}_p$, luego

$$\mathsf{Cov}(\dot{\ell}(\boldsymbol{\mu})) = \frac{1}{p}\,\mathsf{E}\{W_g^2(R^2)R^2\}\boldsymbol{\Sigma}^{-1},$$

pues $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top = \boldsymbol{\Sigma}$.

**3.a.** Podemos notar que

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{g} \sim \mathsf{N}_q(\boldsymbol{G}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{g}, \sigma^2 \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{G}^\top).$$

Como $\sigma^{-2}[\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{G}^\top]^{-1} \,\mathsf{Cov}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{I}_q$, sigue que $Q_1 \sim \chi^2(q, \lambda_1)$, donde

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{g})^\top [\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{G}^\top]^{-1}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{g}).$$

Por otro lado,

$$Q_2 = \frac{\boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{e}}{\sigma^2} = \frac{\boldsymbol{\epsilon}^\top \boldsymbol{M}\boldsymbol{\epsilon}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-p),$$

pues $\boldsymbol{M}$ es matriz idempotente y el parámetro de no centralidad es 0.

**3.b.** Tenemos,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{g} &= \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{g} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}) - \boldsymbol{g} \\
&= \boldsymbol{G}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{g},
\end{aligned}$$

como $\boldsymbol{G}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{g}$, el resultado sigue.

**3.c.** Usando el resultado en **3.b.**, podemos escribir $Q_1$ como:

$$Q_1 = \frac{\boldsymbol{\epsilon}^\top \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{G}^\top [\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{G}^\top]^{-1}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\epsilon}}{\sigma^2}.$$

En este caso $Q_1$ y $Q_2 = \boldsymbol{\epsilon}^\top \boldsymbol{M}\boldsymbol{\epsilon}/\sigma^2$ son independientes pues $\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$.