

MAT-266: Métodos para selección de modelos

Felipe Osorio

fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM



Objetivo:

Se desea obtener medidas de la calidad o bondad de ajuste del modelo.
Consideraremos los siguientes procedimientos:

- ▶ Métodos de bondad de ajuste: R^2 , s^2 y C_p .
- ▶ Criterios de información.
- ▶ Validación cruzada.
- ▶ Métodos automáticos de selección de variables.

Observación:

Las medidas anteriores para el caso de regresión son funciones de los residuos. En efecto, si el modelo está bien ajustado, los residuos tenderán a ser pequeños.



Bondad de ajuste y selección de modelos

Una medida de bondad de ajuste ampliamente usada es el **coeficiente de determinación** R^2 , que es definido como:

$$R^2 = \{\text{corr}(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{Y}})\}^2.$$

En caso de modelos de regresión **con intercepto**, tenemos

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(\hat{Y}_i - \bar{Y})}{\left\{ \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \right\}^{1/2}}.$$

Sabemos que

$$\sum_{i=1}^n e_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n e_i \hat{Y}_i = 0.$$

Además,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i.$$



Tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(\hat{Y}_i - \bar{Y}) &= \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i + \hat{Y}_i - \bar{Y})(\hat{Y}_i - \bar{Y}) \\&= \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)(\hat{Y}_i - \bar{Y}) + \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \\&= \sum_{i=1}^n e_i \hat{Y}_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^n e_i + \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \\&= \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2.\end{aligned}$$

De ahí que

$$R = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \right\}^{1/2}$$



Sea

$$SYY = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2,$$

y recordando que

$$SYY = \text{RSS} + SS_{\text{Regr}}$$

con $\text{RSS} = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ y $SS_{\text{Regr}} = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$. Sigue que

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{SS_{\text{Regr}}}{SYY} = 1 - \frac{\text{RSS}}{SYY}.$$

$\sqrt{R^2}$ corresponde al coeficiente de correlación múltiple entre \mathbf{Y} y $\hat{\mathbf{Y}}$, de este modo

$$0 \leq R^2 \leq 1,$$

y un modelo será bien ajustado cuando R^2 sea **cercano a 1**.



Bondad de ajuste y selección de modelos

Lamentablemente, R^2 no toma en cuenta la cantidad de parámetros en el modelo. Considere un modelo con k regresores, entonces podemos usar:

$$s_k^2 = \frac{\text{RSS}_k}{n - k}.$$

Otro criterio es el R^2 -ajustado, dado por

$$R_{\text{adj}}^2 = 1 - (1 - R_k^2) \left(\frac{n - 1}{n - p} \right)$$

Asumiendo un modelo con intercepto, tenemos $R_k^2 = 1 - \text{RSS}_k / \text{SYY}$ y de ahí que

$$R_{\text{adj}}^2 = 1 - \frac{\text{RSS}_k}{\text{SYY}} \left(\frac{n - 1}{n - p} \right) = 1 - \frac{s_k^2}{\text{SYY} / (n - 1)}.$$

De este modo, modelos con **máximo** R_{adj}^2 corresponden a modelos con **mínimo** s_k^2 .



Bondad de ajuste y selección de modelos

Considere $\epsilon = Y - \mu$ y suponga un modelo con k regresores. Luego, $\hat{\mu} = X\hat{\beta} = HY$ y sea

$$\text{ME} = \|\mu - X\hat{\beta}\|^2,$$

el **error de modelo**. De este modo,

$$\begin{aligned}\text{ME} &= \|\mu - HY\|^2 = \|\mu - H(\epsilon + \mu)\|^2 = \|(I - H)\mu - H\epsilon\|^2 \\ &= \|(I - H)\mu\|^2 + \|H\epsilon\|^2 = \mu^\top (I - H)\mu + \epsilon^\top H\epsilon.\end{aligned}$$

Esto nos permite obtener

$$\begin{aligned}\text{E}(\text{ME}) &= \mu^\top (I - H)\mu + \text{E}(\epsilon^\top H\epsilon) = \mu^\top (I - H)\mu + \sigma^2 \text{tr } H \\ &= \mu^\top (I - H)\mu + \sigma^2 k\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\text{E}(\text{RSS}_k) &= \text{E}\{Y^\top (I - H)Y\} = \mu^\top (I - H)\mu + (n - k)\sigma^2 \\ &= \text{E}(\text{ME}) + (n - 2k)\sigma^2.\end{aligned}$$



Bondad de ajuste y selección de modelos

De este modo,

$$\frac{E(\text{ME})}{\sigma^2} = \frac{E(\text{RSS}_k)}{\sigma^2} + 2k - n.$$

Si consideramos estimar σ^2 por s_p^2 , entonces podemos usar el **criterio C_p de Mallows**, dado por

$$C_p = \frac{\text{RSS}_k}{s_p^2} + 2k - n,$$

como una estimación de $E(\text{ME})/\sigma^2$.

Si el modelo está bien ajustado, entonces $\|(I - H)\mu\|^2 = \mu^\top (I - H)\mu$ será pequeño. Así,

$$\begin{aligned} E(C_p) &\approx \frac{E(\text{RSS}_k)}{\sigma^2} + 2k - n = \frac{\mu^\top (I - H)\mu}{\sigma^2} + n - k + 2k - n \\ &\approx k. \end{aligned}$$

Es decir, escogemos aquél modelo cuyo **C_p sea más cercano a k** .



La **discrepancia de Kullback-Leibler (KL)** entre las funciones de densidad $g(x)$ y $f(x)$ es dada por:

$$D_{\text{KL}}(g : f) = \int \log \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) g(x) \, dx = \mathbb{E}_G \left[\log \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) \right].$$

La discrepancia KL (o información) tiene las propiedades:

- (a) $D_{\text{KL}}(g : f) \geq 0$.
- (b) $D_{\text{KL}}(g : f) = 0 \Leftrightarrow g(x) = f(x)$ (casi en toda parte).



Bondad de ajuste y selección de modelos

Suponga Y_1, \dots, Y_n variables aleatorias siguiendo el **modelo verdadero** g y denote por θ_0 el valor verdadero de θ . Considere que se ajusta el **modelo candidato** $f(\mathbf{y}; \theta)$ maximizando

$$\ell(\theta) = \sum_{j=1}^n \log f(y_j; \theta)$$

Esto sugiere escoger aquél modelo que minimice la discrepancia $D_{\text{KL}}(g : f_\theta)$.

Considere la expansión en series,

$$\begin{aligned} \log f(\mathbf{y}; \hat{\theta}) &\approx \log f(\mathbf{y}; \theta_0) + (\hat{\theta} - \theta_0)^\top \frac{\partial \log f(\mathbf{y}; \theta_0)}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\hat{\theta} - \theta_0)^\top \frac{\partial^2 \log f(\mathbf{y}; \theta_0)}{\partial \theta \partial \theta^\top} (\hat{\theta} - \theta_0). \end{aligned}$$

Notando que θ_0 minimiza $D_{\text{KL}}(g : f_\theta)$, tenemos

$$\int \frac{\partial \log f(\mathbf{y}; \theta_0)}{\partial \theta} g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \mathbf{0}$$



De ahí que

$$\begin{aligned} nD_{\text{KL}}(g : f_{\hat{\theta}}) &= n \int \log \left(\frac{g(\mathbf{y})}{f(\mathbf{y}; \hat{\theta})} \right) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &\approx nD_{\text{KL}}(g : f_{\theta_0}) + \frac{1}{2} \text{tr}\{(\hat{\theta} - \theta_0)(\hat{\theta} - \theta_0)^\top \mathcal{F}_g(\theta_0)\}, \end{aligned}$$

con

$$\mathcal{F}_g(\theta) = -n \int \frac{\partial^2 \log f(\mathbf{y}; \theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top} g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = n \mathbb{E}_g \left\{ - \frac{\partial^2 \log f(\mathbf{y}; \theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top} \right\}.$$

Sea

$$\mathcal{K}_g(\theta) = n \int \frac{\partial \log f(\mathbf{y}; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \log f(\mathbf{y}; \theta)}{\partial \theta^\top} g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = n \text{Cov}_g(\mathbf{U}(\theta)).$$

Observación:

Si $g(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}; \theta)$, entonces $\mathcal{F}_g(\theta) = \mathcal{K}_g(\theta) = \mathcal{F}(\theta)$.



Cuando el modelo es **mal especificado**, tenemos

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{D} N_p(\mathbf{0}, \mathcal{F}_g^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathcal{K}_g(\boldsymbol{\theta}_0) \mathcal{F}_g^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)).$$

De ahí que

$$n E_g \{D_{\text{KL}}(g : f_{\hat{\boldsymbol{\theta}}})\} \approx n D_{\text{KL}}(g : f_{\boldsymbol{\theta}_0}) + \frac{1}{2} \text{tr}\{\mathcal{F}_g^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathcal{K}_g(\boldsymbol{\theta}_0)\}. \quad (1)$$

Mientras que, cuando el modelo es correcto y regular, tenemos $\mathcal{F}_g(\boldsymbol{\theta}_0) = \mathcal{K}_g(\boldsymbol{\theta}_0)$ de modo que

$$\text{tr}\{\mathcal{F}_g^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathcal{K}_g(\boldsymbol{\theta}_0)\} = p$$

Para estimar (1), considere

$$\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \ell(\boldsymbol{\theta}_0) + \{\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \ell(\boldsymbol{\theta}_0)\}.$$



De este modo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_g\{-\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}})\} &= -\mathbb{E}\{\ell(\boldsymbol{\theta}_0) + \tfrac{1}{2}LR(\boldsymbol{\theta})\} \\ &\approx nD_{\text{KL}}(g : f_{\boldsymbol{\theta}_0}) - \tfrac{1}{2}\text{tr}\{\mathcal{F}_g^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\mathcal{K}}_g(\boldsymbol{\theta}_0)\} - n \int g(\mathbf{y}) \log g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

con $LR(\boldsymbol{\theta}_0) = 2\{\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \ell(\boldsymbol{\theta}_0)\}$ el **estadístico de razón de verosimilitudes**.

Un estimador de (1) es $-\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + c$ donde c estima $\text{tr}\{\mathcal{F}_g^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\mathcal{K}}_g(\boldsymbol{\theta}_0)\}$. Dos posibles elecciones de c son p y $\text{tr}(\hat{\mathcal{J}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mathcal{K}}})$ con

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{J}} &= -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \log f(y_j; \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top}, \\ \hat{\boldsymbol{\mathcal{K}}} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \log f(y_j; \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial \log f(y_j; \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top}. \end{aligned}$$



Lo anterior lleva a los **criterios de información de Akaike y de red**:

$$AIC = -2\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + 2p,$$

$$NIC = -2\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + 2 \operatorname{tr}(\hat{\mathcal{J}}^{-1} \hat{\mathcal{K}}),$$

otra posibilidad es el **criterio de información de Schwarz**, dado por

$$SIC = -2\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + p \log n.$$



Suponga en modelo de regresión lineal con k regresores, es decir $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \sigma^2)^\top$ es vector $(k+1)$ -dimensional. Tenemos

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{2} \log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\|^2.$$

Además, $\text{RSS} = \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\|^2$, $\hat{\sigma}^2 = \text{RSS} / n$. De este modo,

$$\begin{aligned} AIC &= n \log 2\pi + n \log \hat{\sigma}^2 + \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\|^2 + 2(k+1) \\ &= n \log 2\pi + n \log(\text{RSS} / n) + \frac{n}{\text{RSS}} \text{RSS} + 2(k+1) \\ &= n \log(\text{RSS} / n) + 2(k+1) + n(\log 2\pi + 1) \end{aligned}$$



Suponga $(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{Y}_1), \dots, (\tilde{\mathbf{x}}_n, \tilde{Y}_n)$ un conjunto de datos nuevos que siguen el mismo modelo que los datos de entrenamiento $(\mathbf{x}_1, Y_1), \dots, (\mathbf{x}_n, Y_n)$. Podemos considerar el error de predicción

$$\text{PE} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\tilde{Y}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i^\top \hat{\boldsymbol{\beta}})^2,$$

donde $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ es calculado usando los datos de entrenamiento.

Objetivo:

Podemos subdividir el conjunto de entrenamiento en dos conjuntos disjuntos uno para obtener $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ y otro para medir el error.



Considere seleccionar un subconjunto D con d observaciones, donde usamos las $n - d$ observaciones restantes para calcular $PE(D)$.

Una alternativa es repetir el proceso, seleccionando D_1, D_2, \dots , y promediar $PE(D_1), PE(D_2), \dots$. Este método es llamado validación cruzada.

Existen diversos procedimientos para elegir tales subconjuntos:

- ▶ Métodos exhaustivos: [leave-p-out](#), [leave-one-out](#).
- ▶ Métodos no exhaustivos: [k-fold](#), [Monte Carlo CV](#).



La versión más simple de validación cruzada es eliminar una observación a la vez¹ y obtener $\hat{\beta}_{(i)}$, $i = 1, \dots, n$. Esto lleva al **error de predicción leave-one-out** o CV

$$\text{CV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\beta}_{(i)})^2$$

Observación:

La estadística

$$\text{PRESS} = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_{i(i)})^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\beta}_{(i)})^2$$

es conocida como **suma de cuadrados (residual) de predicción**.

¹Seleccionar conjuntos D con $d > 1$ es computacionalmente intenso.

Es fácil mostrar que

$$\begin{aligned}Y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)} &= Y_i - \mathbf{x}_i^\top \left[\hat{\boldsymbol{\beta}} - \frac{e_i}{1 - h_{ii}} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i \right] \\&= Y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\beta}} + \frac{e_i h_{ii}}{1 - h_{ii}} = \frac{e_i}{1 - h_{ii}}.\end{aligned}$$

De ahí que

$$CV = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{Y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}}{1 - h_{ii}} \right)^2.$$

Observación:

Anteriormente usamos el [criterio de validación cruzada generalizada](#) para seleccionar el parámetro de sesgo k en regresión ridge

$$V(k) = \frac{1}{n} \frac{\|\mathbf{Y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_k\|^2}{\{\text{tr}(\mathbf{I} - \mathbf{H}(k))/n\}^2}.$$



Ejemplo:

Considere datos de ventas en 15 regiones con 3 regresores X_1 , X_2 y X_3 , donde se obtuvo

p	Variables	RSS_p
1	—	428 144.64
2	X_1	88 473.00
	X_2	44 683.00
	X_3	32 483.00
3	X_1, X_2	43 968.00
	X_1, X_3	32 086.00
	X_2, X_3	535.00
4	X_1, X_2, X_3	273.00



Bondad de ajuste y selección de modelos

Tenemos que

$$SYY = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = 428144.64, \quad s^2 = \frac{RSS}{n-p} = \frac{273.00}{15-4} = 24.818$$

De este modo, los criterios de selección de modelos resultan:

Variables	R_p^2	s_p^2	R_{adj}^2	C_p	AIC	SIC
—	0.000	30581.760	0.000	17238.249	157.887	159.304
X_1	0.793	6805.615	0.777	3553.846	136.236	138.360
X_2	0.896	3437.154	0.888	1789.414	125.989	128.114
X_3	0.924	2498.692	0.918	1297.839	121.206	123.330
X_1, X_2	0.897	3664.000	0.880	1762.604	127.748	130.580
X_1, X_3	0.925	2673.833	0.913	1283.842	123.022	125.854
X_2, X_3	0.999	44.583	0.999	12.557	61.613	64.445
X_1, X_2, X_3	0.999	24.818	0.999	4.000	53.521	57.062

