MAT-266: Análisis de Regresión

Felipe Osorio

fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM

Información

Horario:

Clases: Lunes y Miércoles, bloque 1-2 (08:15-09:25 hrs.) via Zoom.

Contacto:

E-mail: felipe.osorios@usm.cl.
Web: http://fosorios.mat.utfsm.cl/teaching.html y **AULA**

Evaluación:

Se realizará **3 Certámenes**, **Controles** y **Tareas**.

Ponderaciones:

Sea $\overline{C}$, $\overline{Q}$ y $\overline{T}$ el promedio de certámenes, controles, y tareas, respectivamente. De este modo, la nota de presentación (NP) es dada por:

$$NP = 0.8\,\overline{C} + 0.1\,\overline{Q} + 0.1\,\overline{T}.$$

Criterio de aprobación

Criterio de aprobación:

Aquellos estudiantes que obtengan NP mayor o igual a 55 y **todos** los certámenes sobre 40, aprobarán la asignatura con nota final, $NF = NP$.

Criterio para rendir global:

En caso contrario, y siempre que $NP \geq 45$, los estudiantes podrán rendir el certamen global (CG), en cuyo caso la nota final es calculada como sigue:

$$NF = 0.6 \cdot NP + 0.4 \cdot CG.$$

Reglas adicionales

- Se llevará un control de asistencia.
- Se puede realizar preguntas sobre la materia en cualquier momento.
- Los alumnos deben apagar/silenciar sus teléfonos celulares durante clases.
- Conversaciones sobre asuntos ajenos a la clase no serán tolerados. Otros estudiantes tiene derecho a asistir clases en silencio.
- Al enviar algún e-mail al profesor, identificar el código de la asignatura en el asunto (MAT266).
- E-mail será el canal de comunicación oficial entre el profesor y los estudiantes.

Reglas: sobre los certámenes

- Es derecho del estudiante conocer la pauta de corrección la que será publicada en la página web del curso.
- Pedidos de recorrección deben ser argumentados por escrito.
- En modalidad online, Certámenes, Controles y Tareas deben ser enviados en formato **PDF**.[1]
- Cualquier tipo de fraude en prueba (copia, WhatsApp, suplantación, etc.) implicará la reprobación de los involucrados.[2]

[1] En un único archivo, orientado en una dirección legible.

[2] Puede implicar la apertura de un proceso disciplinario.

Orientaciones de estudio

- Mantener la frecuencia de estudio de inicio a final del semestre. El ideal es estudiar el contenido luego de **cada** clase.
- Estudiar primeramente el contenido dado en clases, buscando apoyo en las referencias bibliográficas.
- Las referencias son fuentes de ejemplos y ejercicios. Resuelva una buena cantidad de ejercicios. No deje esto para la víspera de la prueba.
- Buscar las referencias bibliográficas al inicio del semestre, dando preferencia a las principales y complementarias.

Programa del curso

1. Preliminares.
2. Inferencia en el modelo de regresión lineal.
3. Análisis de los supuestos del modelo.
4. Identificación del mejor conjunto de regresores.
5. Alternativas a mínimos cuadrados.
6. Tópicos adicionales.

Bibliografía

Hocking, R. (2013).

Methods and Applications of Linear Models: Regression and the analysis of variance, 3rd Edition.

Wiley, New York.

Seber, G.A.F., Lee, A.J. (2007).

Linear Regression Analysis, 2nd Edition.

Wiley, New York.

Weisberg, S. (2013).

Applied Linear Regression, 4th Edition.

Wiley, New York.

Ideas subyacentes

"Todos los modelos son errados, pero algunos son útiles."

– George Box.

"Aunque puede parecer una paradoja, toda la ciencia exacta está dominada por la idea de aproximación."

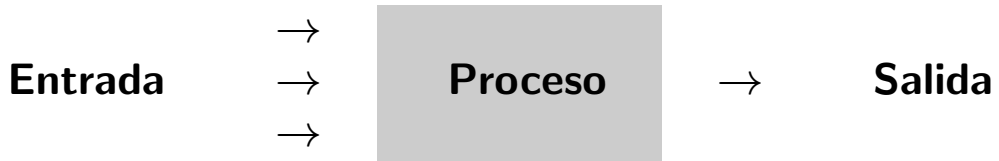
– Bertrand Russell.

Principio KISS: "Keep It Simple, Stupid."

– Clarence "Kelly" Johnson.

Objetivo del análisis de regresión

Estudiar una variable de respuesta, y [asuminda continua] como función de algunas variables explicativas o regresores, $x_1, x_2, \ldots$ [pueden ser discretas y/o continuas].



En ocasiones la relación funcional es conocida salvo algunos coeficientes (parámetros).

Es decir, la relación es gobernada por un proceso físico o por leyes bien aceptadas

$$Y \approx f(x_1, \ldots, x_p; \boldsymbol{\theta}),$$

en cuyo caso, el interés recae en estimar el vector de parámetros $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_p)^\top$.

Modelamiento estadístico

Asumiremos una muestra aleatoria $Y_1, \ldots, Y_n$, tal que

$$Y_i = \mu_i + \epsilon_i, \qquad \mathsf{E}(\epsilon_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

esto es,

$$\text{respuesta} = \text{parte sistemática} + \text{error aleatorio}$$

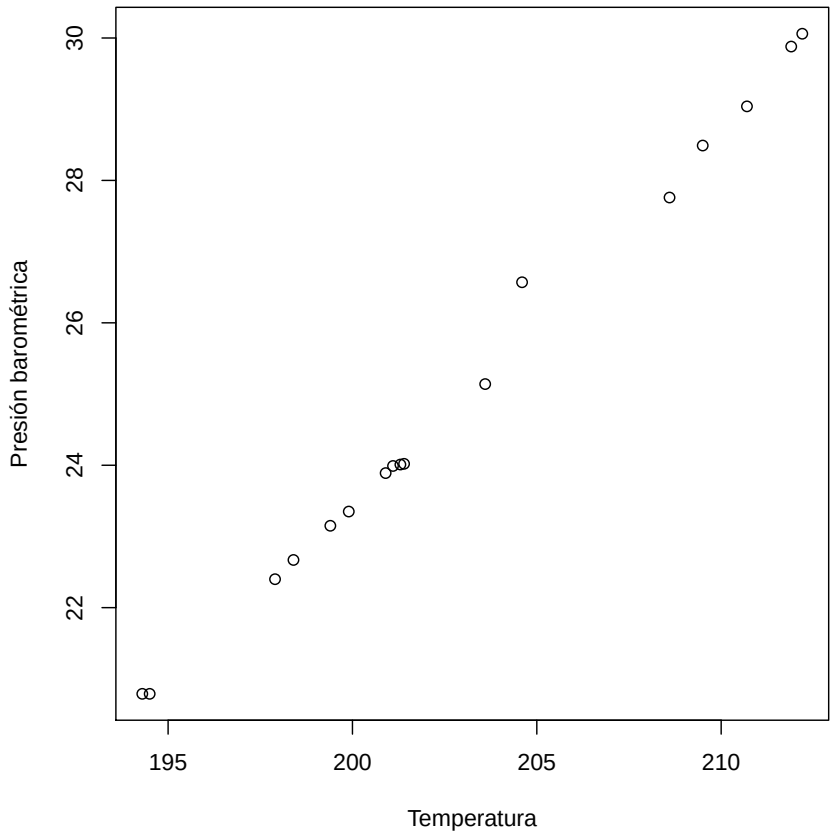
Idea del modelamiento:

"estructurar" la media como $\mu_i = \mu_i(\boldsymbol{\beta})$,

para $i = 1, \ldots, n$.

Datos de Forbes (1857)[3]

Presión barométrica en pulgadas de mercurio y temperatura de ebullición del agua en grados Fahrenheit para 17 diferentes altitudes.



[3] Transactions of the Royal Society of Edinburgh **21**, 235-243.

Datos de Forbes

Para describir la relación entre la temperatura y la media de la presión barométrica, podemos considerar

$$\mu = \beta_0 + \beta_1 x,$$

note que

$$\mu = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\beta}, \qquad \boldsymbol{x} = (1, x)^\top, \qquad \boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1)^\top,$$

y $\mu = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\beta}$ se denomina predictor lineal.

El conjunto de datos consiste del vector de respuestas.

$$\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^\top,$$

y una matriz de diseño $n \times 2$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n^\top \end{pmatrix}.$$

Convención:

Todos los vectores siempre serán columna.

Modelo lineal general

Se dice que un vector aleatorio $\boldsymbol{Y}$ sigue un modelo lineal general si,

$$\mathsf{E}(\boldsymbol{Y}) = \sum_{j=1}^{p} \beta_j \boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta},$$

$$\mathsf{Cov}(\boldsymbol{Y}) = \sum_{t=1}^{k} \phi_t \boldsymbol{V}_t = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\phi}),$$

y decimos que el modelo es lineal simple si $\mathsf{Cov}(\boldsymbol{Y}) = \sigma^2 \boldsymbol{I}$.

Observación:

Es usual hacer la suposición distribucional:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}, \qquad \boldsymbol{\epsilon} \sim \mathsf{N}_n(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\phi})).$$

Modelo lineal simple

Para los datos de Forbes podemos considerar un modelo lineal (simple) definido como

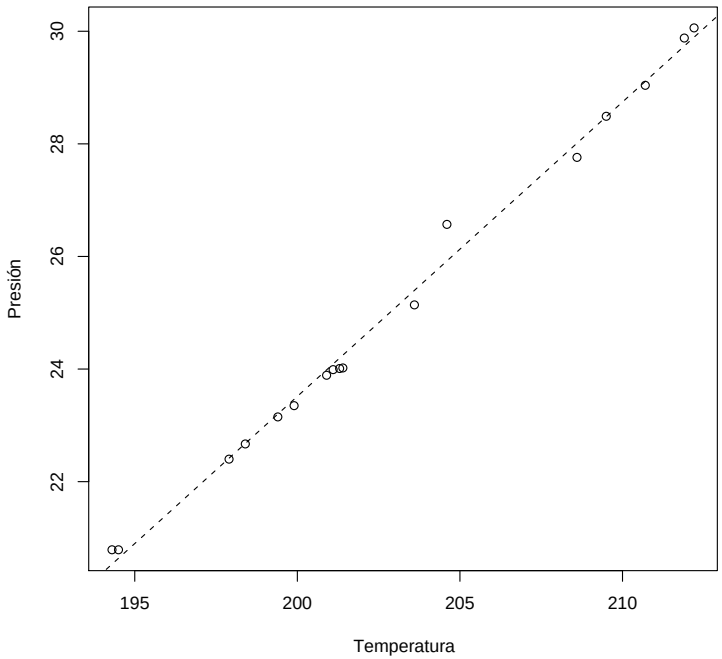
$$\boldsymbol{Y} \sim \mathsf{N}_n(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n),$$

donde

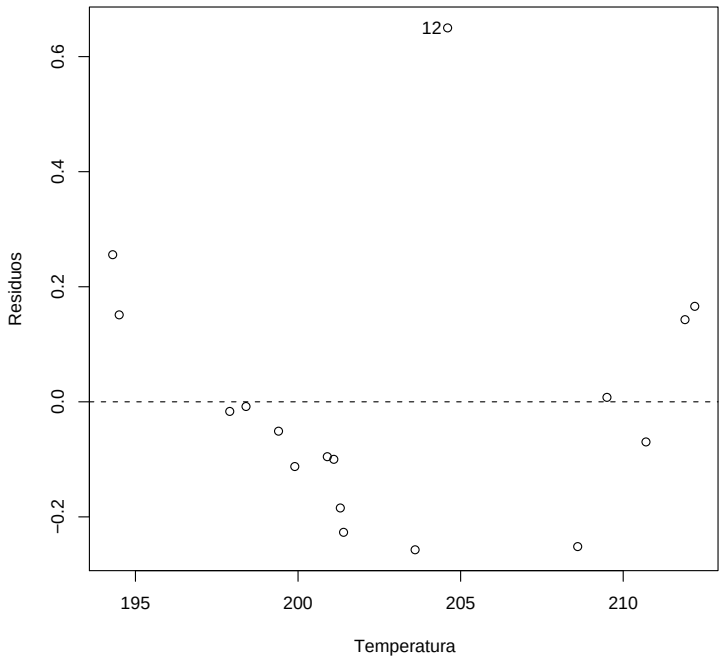
$$\mathsf{E}(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i, \quad \mathsf{var}(Y_i) = \sigma^2, \quad \mathsf{Cov}(Y_i, Y_j) = 0,$$

para $i, j = 1, \ldots, n$.

Datos de Forbes



(a) recta ajustada



(b) residuos vs. ajuste

Datos de Forbes

Ahora consideramos el modelo

$$100 \times \log_{10}(\text{Presión}_i) = \alpha + \beta\, \text{Temperatura}_i + \epsilon_i,$$

para $i = 1, \ldots, n$.

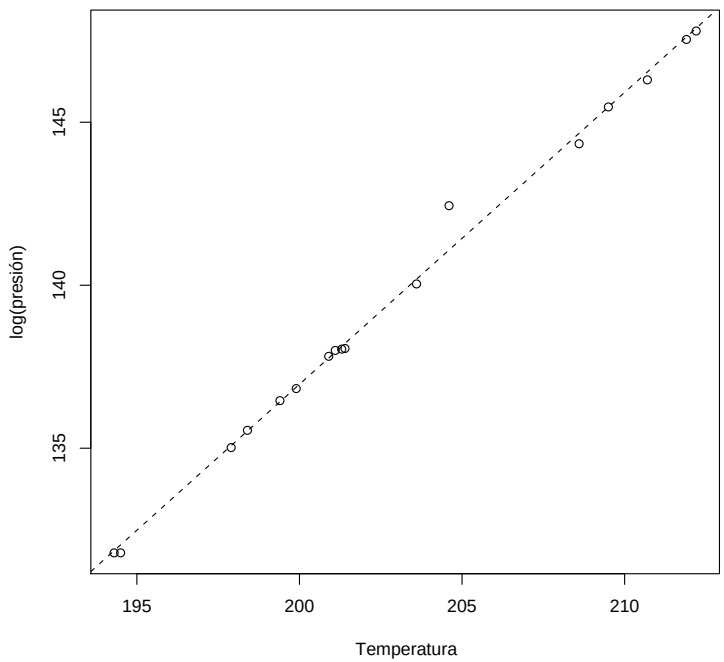
Se obtuvo (usando función `lm` de **R**)

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (-42.1378, 0.8955)^\top \quad \text{y} \quad s^2 = 0.1438$$

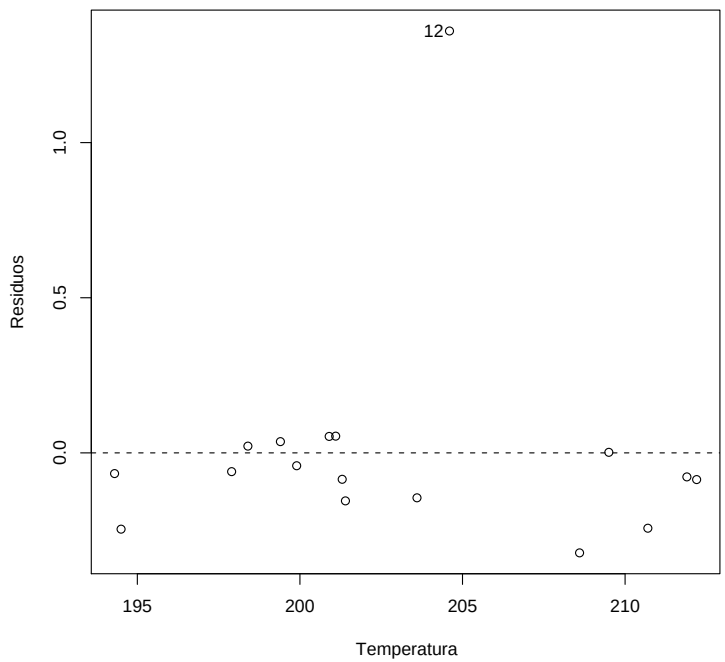
Además, $R^2 = 0.9950$.

Datos de Forbes

Recta de regresión y gráfico de residuos para los datos de Forbes[4].



(a) recta ajustada



(b) residuos vs. ajuste

[4] datos transformados

Datos de Huber (1981)[5]

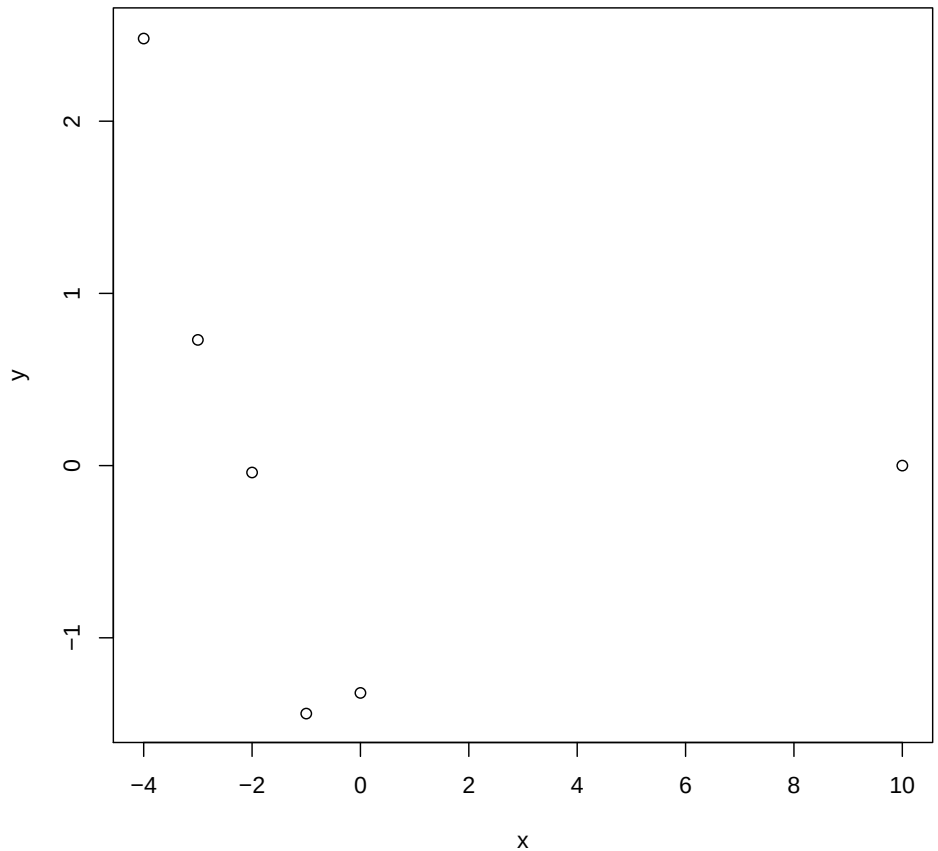
Considere el conjunto de datos hipotéticos de Huber.

Y	2.48	0.73	-0.04	-1.44	-1.32	0.00
x	-4	-3	-2	-1	0	10

[5] *Robust Statistics*. Wiley, New York

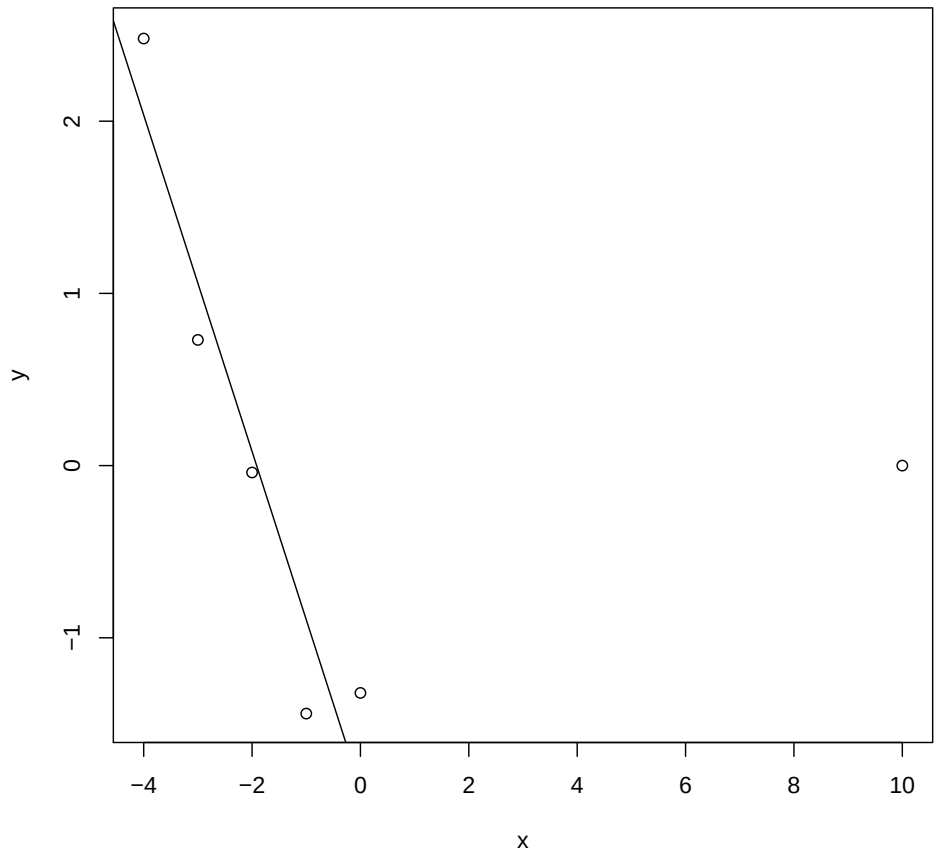
Datos de Huber

Diagrama de dispersión para los datos de Huber.



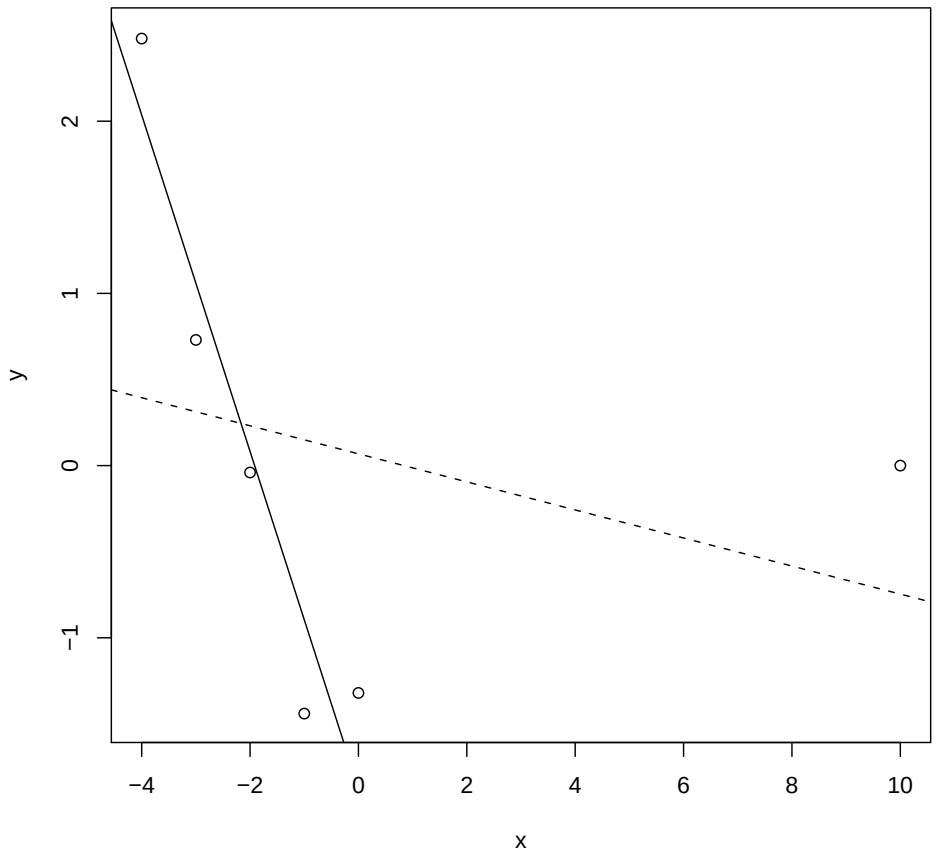
Datos de Huber

¿Qué opina de la recta de regresión?



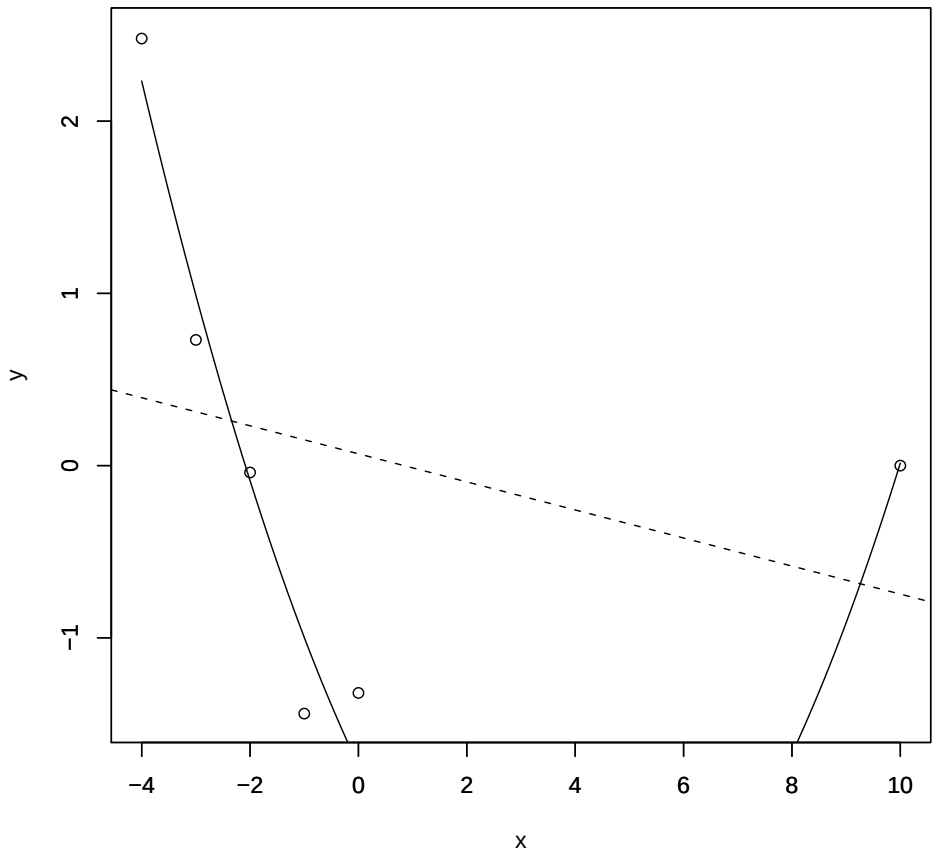
Datos de Huber

¿Y ahora?



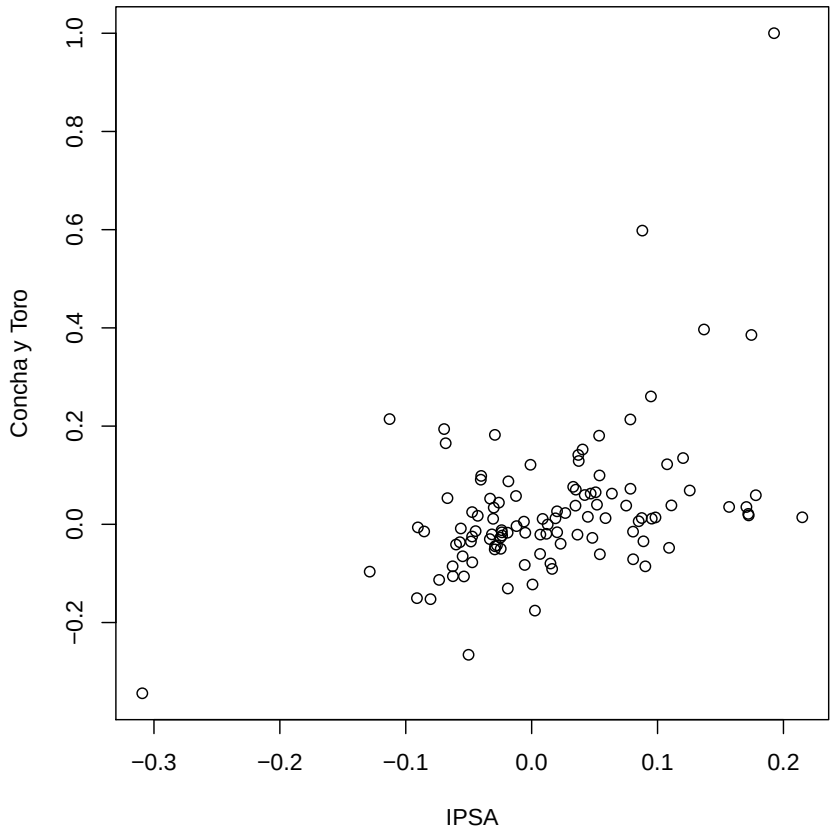
Datos de Huber

¿Cuál modelo prefiere?



Datos de Concha y Toro (Osorio y Galea, 2006)[6]

Rentabilidades mensuales de Concha y Toro vs. IPSA, ajustados por bonos de interés del Banco Central entre marzo/1990 a abril/1999.



[6] Statistical Papers **47**, 31-38

Datos de Concha y Toro

Modelo CAPM (Valoración de Activos de Capital), Sharpe (1964)[7]

$$\mathsf{E}(r) = r_f + \beta(\mathsf{E}(r_m) - r_f),$$

usando datos observados, podemos escribir

$$R_t = \alpha + \beta \times IPSA_t + \epsilon, \qquad t = 1, \ldots, T.$$

Características del problema:

- Relación lineal entre las variables.
- Posibles periodos de alta volatilidad.

Hipótesis de interés:

- $H_0 : \beta > 1$ (Amante del riesgo).
- $H_0 : \beta = 1$ (Neutral al riesgo).
- $H_0 : \beta < 1$ (Averso al riesgo).

[7] Journal of Finance **19**, 425-442

Datos de Concha y Toro

Modelo CAPM (Valoración de Activos de Capital), Sharpe (1964)[7]

$$\mathsf{E}(r) = r_f + \beta(\mathsf{E}(r_m) - r_f),$$

usando datos observados, podemos escribir

$$R_t = \alpha + \beta \times IPSA_t + \epsilon, \qquad t = 1, \ldots, T.$$

Características del problema:

- Relación lineal entre las variables.
- Posibles periodos de alta volatilidad.

Hipótesis de interés:

- $H_0 : \beta > 1$ (Amante del riesgo).
- $H_0 : \beta = 1$ (Neutral al riesgo).
- $H_0 : \beta < 1$ (Averso al riesgo).

[7] Journal of Finance **19**, 425-442

Datos de Concha y Toro

Modelo CAPM (Valoración de Activos de Capital), Sharpe (1964)[7]

$$\mathsf{E}(r) = r_f + \beta(\mathsf{E}(r_m) - r_f),$$

usando datos observados, podemos escribir

$$R_t = \alpha + \beta \times IPSA_t + \epsilon, \qquad t = 1, \ldots, T.$$

Características del problema:

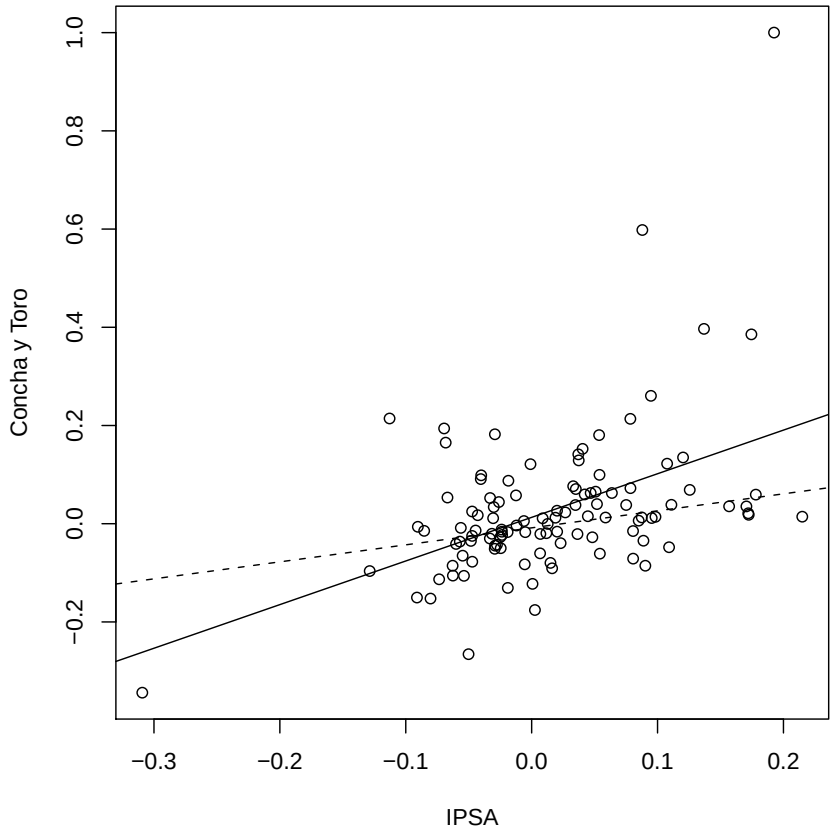
- Relación lineal entre las variables.
- Posibles periodos de alta volatilidad.

Hipótesis de interés:

- $H_0 : \beta > 1$ (Amante del riesgo).
- $H_0 : \beta = 1$ (Neutral al riesgo).
- $H_0 : \beta < 1$ (Averso al riesgo).

[7] Journal of Finance **19**, 425-442

Datos de Concha y Toro



Ajuste usando errores normales (—) y Cauchy (– –).

Cemento Portland (Woods, Steinour y Starke, 1932)[8]

Estudio experimental relacionando la emisión de calor durante la producción y endurecimiento de 13 muestras de cementos Portland. Woods et al. (1932) consideraron cuatro compuestos para los clinkers desde los que se produce el cemento.

La respuesta (Y) es la emisión de calor después de 180 días de curado, medido en calorías por gramo de cemento. Los regresores son los porcentajes de los cuatro compuestos: aluminato tricálcico (X_1), silicato tricálcico (X_2), ferrito aluminato tetracálcico (X_3) y silicato dicálcico (X_4).

[8] Industrial and Engineering Chemistry **24**, 1207-1214.

Cemento Portland (Woods, Steinour y Starke, 1932)

Y	x_1	x_2	x_3	x_4
78.5	7	26	6	60
74.3	1	29	15	52
104.3	11	56	8	20
87.6	11	31	8	47
95.9	7	52	6	33
109.2	11	55	9	22
102.7	3	71	17	6
72.5	1	31	22	44
93.1	2	54	18	22
115.9	21	47	4	26
83.8	1	40	23	34
113.3	11	66	9	12
109.4	10	68	8	12

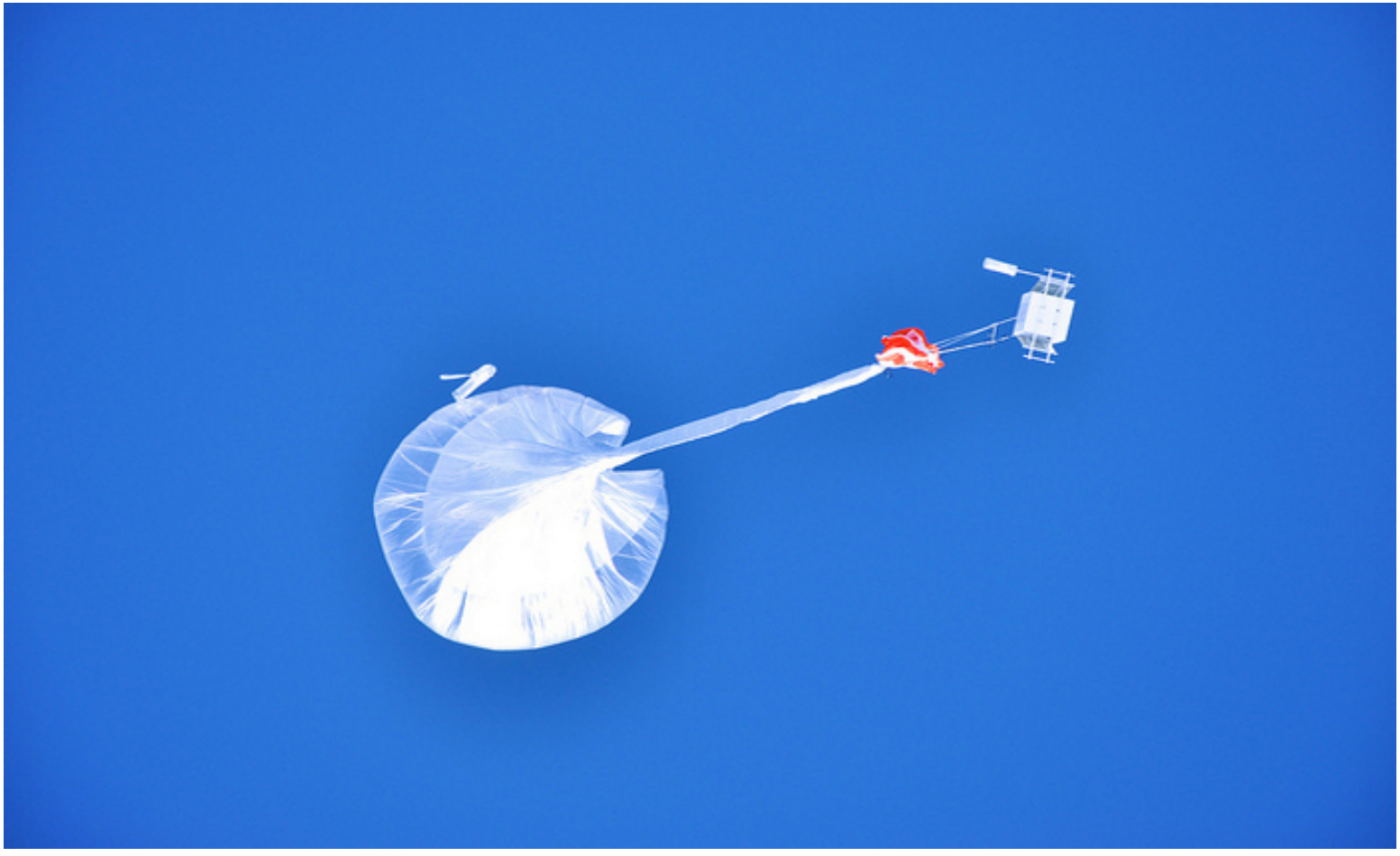
Observación:

En efecto, existe una relación lineal aproximada, pues $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \approx 100$.

Mediciones de Radiación Solar (Davies y Gather, 1993)[9]

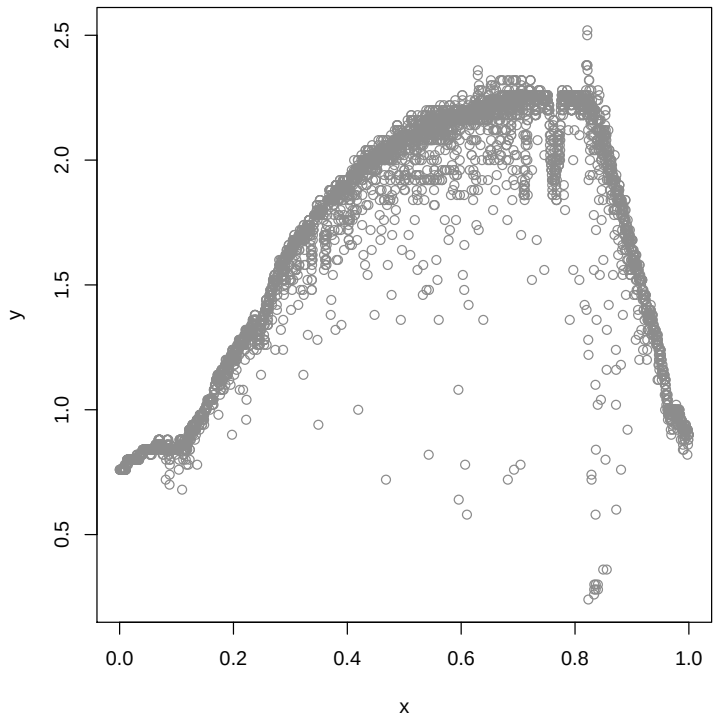
[9] Journal of the American Statistical Association **88**, 782-801.

Mediciones de Radiación Solar (Davies y Gather, 1993)



Mediciones de Radiación Solar (Davies y Gather, 1993)

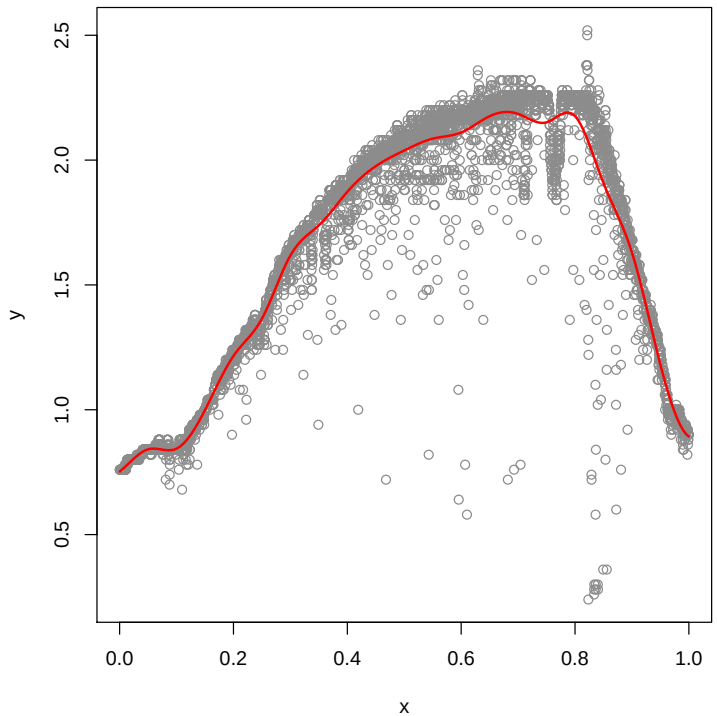
- Mediciones de la radiación del sol tomadas durante el vuelo de un globo meteorológico.
- Una gran cantidad de observaciones son consideradas outliers.
- Se ha sugerido usar métodos robustos (Kovac y Silverman, 2000;[10] Lee y Oh, 2007;[11] Tharmaratnam et al., 2010[12]).
- Diagnóstico de influencia en splines penalizados (Osorio, 2016)[13].



[10] Journal of the American Statistical Association **95**, 172-183.
[11] Computational Statistics **22**, 159-171.
[12] Journal of Computational and Graphical Statistics **19**, 609-625.
[13] Annals of the Institute of Statistical Mathematics **68**, 589-619.

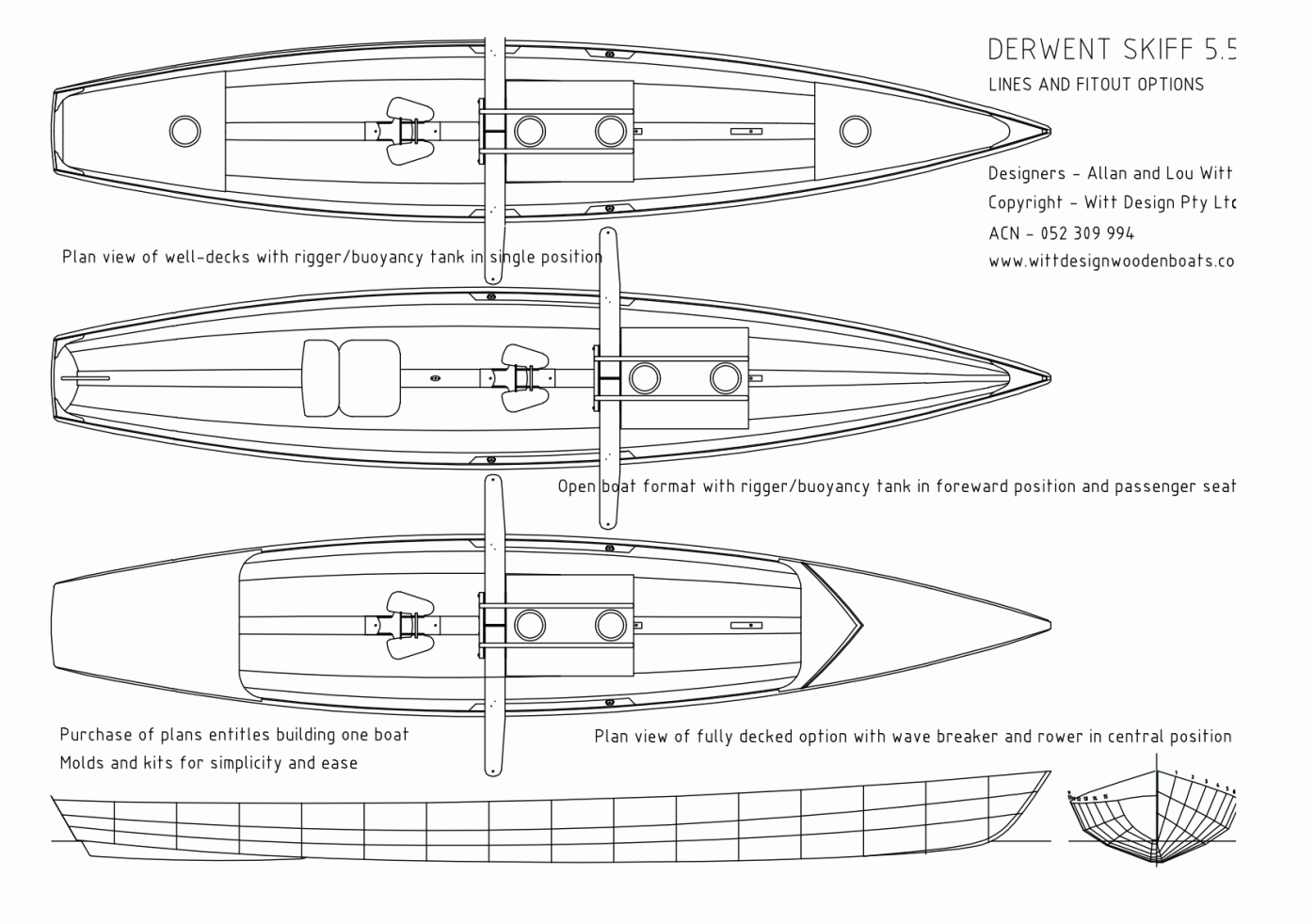
Mediciones de Radiación Solar (Davies y Gather, 1993)

- Mediciones de la radiación del sol tomadas durante el vuelo de un globo meteorológico.
- Una gran cantidad de observaciones son consideradas outliers.
- Se ha sugerido usar métodos robustos (Kovac y Silverman, 2000;[10] Lee y Oh, 2007;[11] Tharmaratnam et al., 2010[12]).
- Diagnóstico de influencia en splines penalizados (Osorio, 2016)[13].

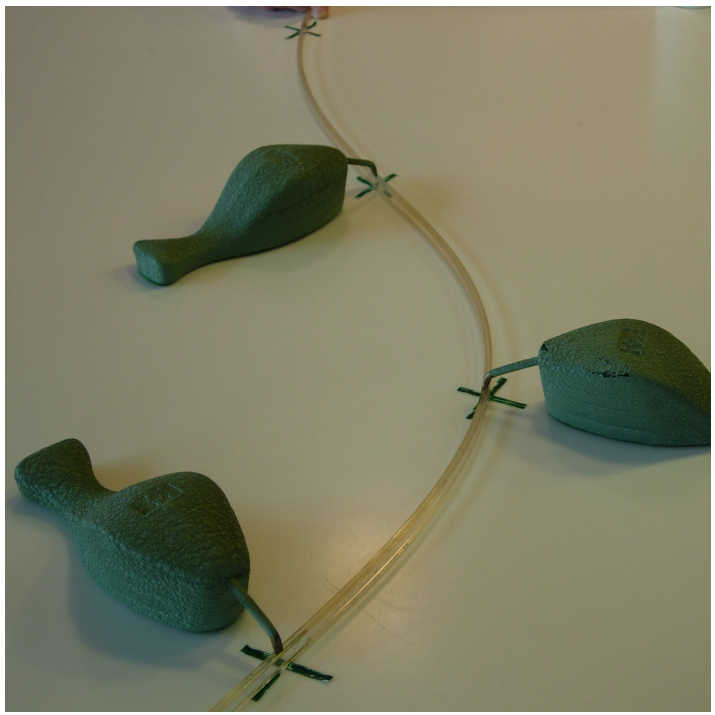


[10] Journal of the American Statistical Association **95**, 172-183.
[11] Computational Statistics **22**, 159-171.
[12] Journal of Computational and Graphical Statistics **19**, 609-625.
[13] Annals of the Institute of Statistical Mathematics **68**, 589-619.

Métodos Spline: Diseño técnico



Métodos Spline: Diseño técnico[14]



[14] Imágenes extraídas desde página web del Prof. Carl de Boor, University Wisconsin-Madison

Suavizamiento usando P-splines

Considere el modelo de regresión no paramétrica

$$Y_i = g(t_i) + \epsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

donde las respuestas Y_i son medidas en los puntos de diseño t_i, g es una función suave definida en $[a, b]$ y $\{\epsilon_i\}$ representa disturbios aleatorios.

Típicamente, $\widehat{g}_\lambda$ puede ser obtenido como solución de un problema de mínimos cuadrados penalizados (PLS)

$$S(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \{Y_i - g(t_i)\}^2 + \lambda \int_a^b \{g''(t)\}^2 \, \mathrm{d}t, \qquad \lambda > 0,$$

sobre la clase de todas las funciones dos veces diferenciables.

Suavizamiento usando P-splines

Considere el modelo de regresión no paramétrica

$$Y_i = g(t_i) + \epsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

donde las respuestas Y_i son medidas en los puntos de diseño t_i, g es una función suave definida en $[a, b]$ y $\{\epsilon_i\}$ representa disturbios aleatorios.

Típicamente, $\widehat{g}_\lambda$ puede ser obtenido como solución de un problema de mínimos cuadrados penalizados (PLS)

$$S(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \{Y_i - g(t_i)\}^2 + \lambda \int_a^b \{g''(t)\}^2 \, \mathrm{d}t, \qquad \lambda > 0,$$

sobre la clase de todas las funciones dos veces diferenciables.

Suavizamiento usando P-splines

El criterio PLS puede ser adaptado para ajuste de curvas usando P-splines:

$$S(\lambda) = (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{a})^\top (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{a}) + \lambda\, \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{K}^\top \boldsymbol{K}\boldsymbol{a}, \qquad \lambda > 0,$$

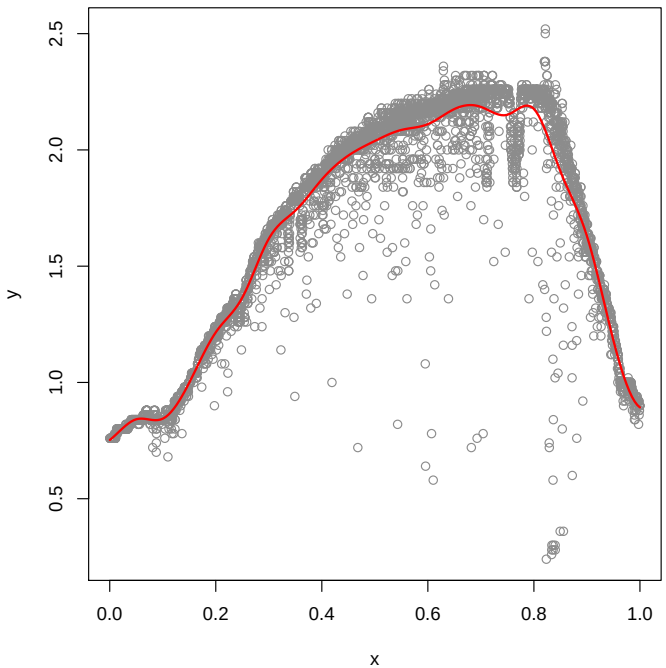
donde $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^\top$, $\boldsymbol{B} = (B_j(t_i))$ es matriz $n \times p$, $\boldsymbol{K}^\top \boldsymbol{K}$ es una representación matricial de la penalidad descrita por Eilers y Marx (1996) y

$$g(t) = \sum_{j=1}^{p} a_j B_j(t),$$

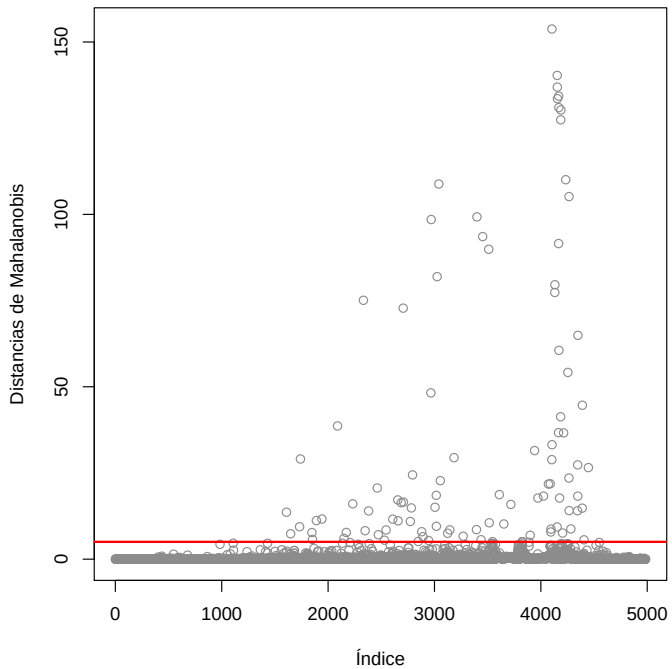
con $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_p)^\top$ y p el número de funciones base conocidas $B_1(t), \ldots, B_p(t)$. Una elección común para las funciones base es B-splines.

En este contexto λ denota un parámetro de suavizamiento.

Modelo ajustado y distancias de Mahalanobis

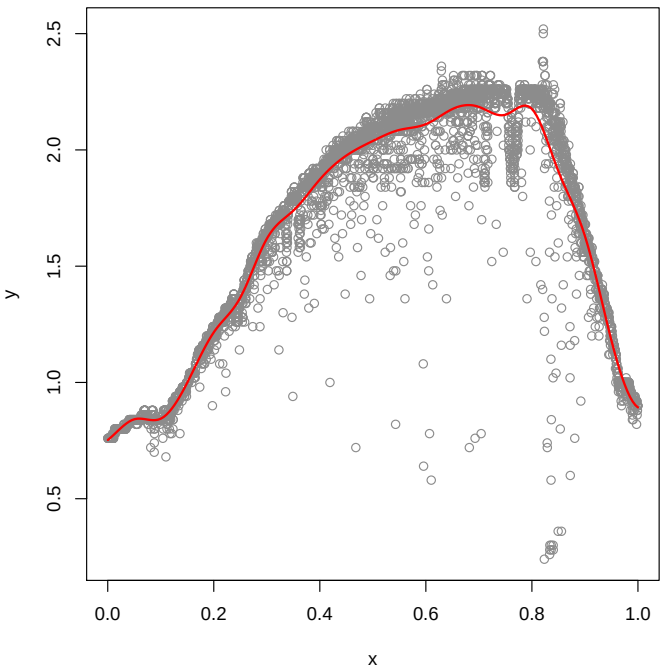


(a) curva ajustada

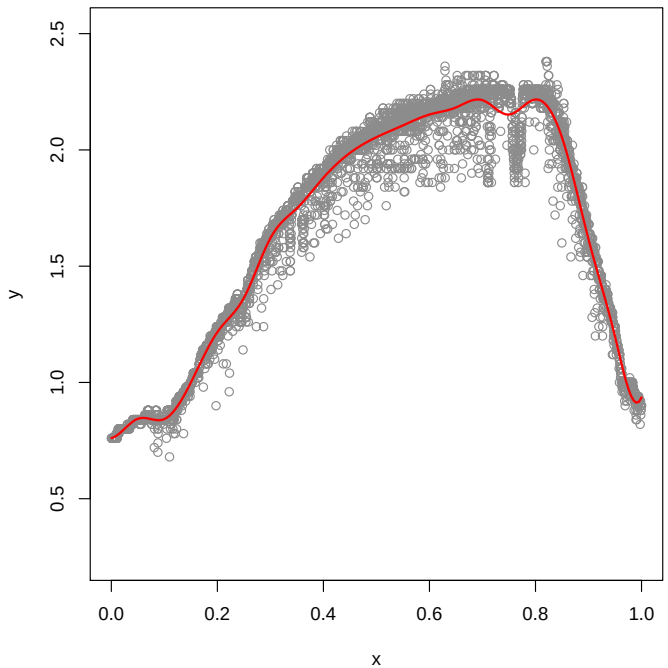


(b) distancias de Mahalanobis

Modelo ajustado con todos los datos y “outliers” removidos

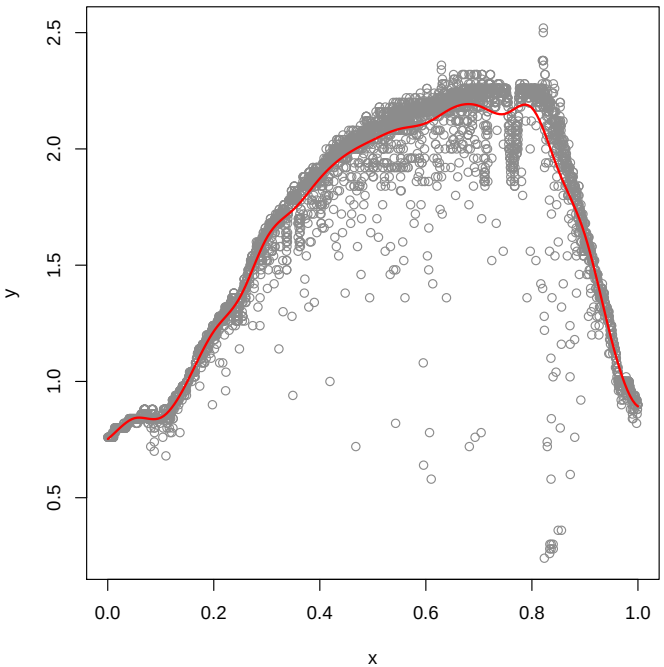


(a) curva ajustada

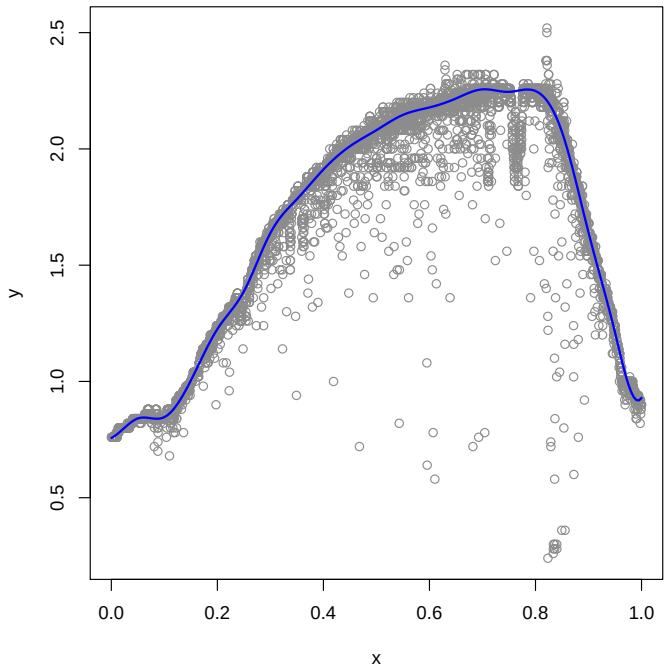


(b) eliminando ‘outliers’

Modelo ajustado usando distribuciones con colas pesadas



(a) curva ajustada



(b) ajuste robusto

Tópicos adicionales

Modelos lineales son los *bloques de construcción* para metodologías más complejas, tales como:

- Modelos lineales generalizados.
- Modelos no lineales.
- Regresión multivariada.
- Datos longitudinales, GMANOVA.
- Regresión semiparamétrica.
- Modelos con efectos mixtos.