1. Primeramente escribimos el modelo lineal $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$, donde

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_3(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}).$$

Note que la restricción $\beta_1 = \beta_2$ puede ser escrita como $\boldsymbol{G}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{g}$, con

$$\boldsymbol{G} = (1, -1), \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{g} = 0.$$

(en este caso tenemos $q = 1$). Usando el método del modelo reducido, tenemos $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{G}_q, \boldsymbol{G}_r)$, con

$$\boldsymbol{G}_q = (1), \qquad \boldsymbol{G}_r = (-1).$$

(5 pts)

De este modo el modelo reducido es dado por $\boldsymbol{Y}_R = \boldsymbol{X}_R \beta_2 + \boldsymbol{\epsilon}$, donde

$$\boldsymbol{Y}_R = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}_q \boldsymbol{G}_q^{-1} \boldsymbol{g}, \qquad \boldsymbol{X}_R = \boldsymbol{X}_r - \boldsymbol{X}_q \boldsymbol{G}_q^{-1} \boldsymbol{G}_r,$$

con

$$\boldsymbol{X}_q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X}_r = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, obtenemos:

$$\boldsymbol{Y}_R = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 0 = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X}_R = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(5 pts)

Luego, $\widetilde{\beta}_2 = (\boldsymbol{X}_R^\top \boldsymbol{X}_R)^{-1} \boldsymbol{X}_R^\top \boldsymbol{Y}_R$. Además

$$\boldsymbol{X}_R^\top \boldsymbol{X}_R = (3, 2, 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 9 + 4 + 4 = 17,$$

mientras que,

$$\boldsymbol{X}_R^\top \boldsymbol{Y}_R = (3, 2, 2) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = 3Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3.$$

Así,

$$\widetilde{\beta}_2 = \frac{1}{17}(3Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3), \qquad \widetilde{\beta}_1 = \boldsymbol{G}_q^{-1}(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{G}_r \widetilde{\beta}_2) = \widetilde{\beta}_2.$$

(5 pts)

Finalmente,

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\beta}_2 \\ \widetilde{\beta}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 3Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 \\ 3Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 \end{pmatrix}.$$

(5 pts)

2. El modelo puede ser escrito como

$$\boldsymbol{Y} = \beta\boldsymbol{1} + \gamma\boldsymbol{z} + \boldsymbol{\epsilon},$$

con $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_n)^\top$ y $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$. Es decir, $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\epsilon}$, con

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{z}), \qquad \boldsymbol{\theta} = (\beta, \gamma)^\top.$$

Se desea probar $H_0 : \gamma = 0$ que puede ser escrita como

$$H_0 : \boldsymbol{G}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{g},$$

con $\boldsymbol{G} = (0, 1)$, $\boldsymbol{g} = 0$ y $q = 1$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{1}^\top \\ \boldsymbol{z}^\top \end{pmatrix} (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1}^\top\boldsymbol{1} & \boldsymbol{1}^\top\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{z}^\top\boldsymbol{1} & \boldsymbol{z}^\top\boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \|\boldsymbol{z}\|^2 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{Y} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{1}^\top \\ \boldsymbol{z}^\top \end{pmatrix} \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1}^\top\boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{z}^\top\boldsymbol{Y} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De este modo, $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = (\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{Y}$, donde

$$\widehat{\beta} = \overline{Y}, \qquad \widehat{\gamma} = \frac{\boldsymbol{z}^\top\boldsymbol{Y}}{\|\boldsymbol{z}\|^2},$$

(5 pts)

mientras que

$$\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{n-2}(\boldsymbol{Y}^\top\boldsymbol{Y} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}^\top\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{n-2}\Big\{\boldsymbol{Y}^\top\boldsymbol{Y} - n\overline{Y}^2 - \frac{1}{\|\boldsymbol{z}\|^2}\boldsymbol{Y}^\top\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^\top\boldsymbol{Y}\Big\} \\
&= \frac{1}{n-2}\boldsymbol{Y}^\top\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^\top - \frac{1}{\|\boldsymbol{z}\|^2}\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^\top.
\end{aligned}$$

De este modo,

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y} - \widehat{\gamma}z_i)^2.$$

(5 pts)

Por otro lado, tenemos que

$$\boldsymbol{G}\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{g} = (0, 1)\begin{pmatrix} \widehat{\beta} \\ \widehat{\gamma} \end{pmatrix} = \widehat{\gamma},$$

y

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{G}^\top = (0, 1)\begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & 1/\|\boldsymbol{z}\|^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\boldsymbol{z}\|^2}$$

Luego, el estadístico F es dado por

$$F = \frac{\widehat{\gamma}^2\|\boldsymbol{z}\|^2}{s^2} \sim \mathsf{F}(1, n-2),$$

(5 pts)

y rechazamos H_0 si

$$F > F_{1-\alpha}(1, n-2).$$

(5 pts)

3. Para el modelo $\mathcal{M}_1$, tenemos

$$\boldsymbol{Y} = \beta_0 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\epsilon},$$

con $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \dots, Y_6)^\top$ y $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_6)^\top$. En este caso,

$$\widehat{\beta}_0 = \frac{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i Y_i}{\sum_{i=1}^6 x_i^2} = \frac{280}{91} = 3.07692$$

(5 pts)

Ahora,

$$\begin{aligned} Q(\widehat{\beta}_0) &= \boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{Y} - \widehat{\beta}_0 \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^6 Y_i^2 - \frac{1}{\sum_{i=1}^6 x_i^2} \Big(\sum_{i=1}^6 x_i Y_i \Big)^2 \\ &= 879 - \frac{280^2}{91} = 17.46154 \end{aligned}$$

Por otro lado, para el modelo $\mathcal{M}_2$, tenemos:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon},$$

con

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \\ 10 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \\ 4 & 16 \\ 5 & 25 \\ 6 & 36 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

En este caso,

$$\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \\ 4 & 16 \\ 5 & 25 \\ 6 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91 & 441 \\ 441 & 2275 \end{pmatrix},$$

así

$$(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1} = \frac{1}{91 \cdot 2275 - 441^2} \begin{pmatrix} 2275 & -441 \\ -441 & 91 \end{pmatrix} = \frac{1}{12544} \begin{pmatrix} 2275 & -441 \\ -441 & 91 \end{pmatrix}.$$

Ahora

$$\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \\ 10 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280 \\ 1376 \end{pmatrix},$$

luego

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12544} \begin{pmatrix} 2275 & -441 \\ -441 & 91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 280 \\ 1376 \end{pmatrix} = \frac{1}{12544} \begin{pmatrix} 30184 \\ 1736 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.40625 \\ 0.13839 \end{pmatrix}.$$

(5 pts)

De este modo

$$Q(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{Y}^\top\boldsymbol{Y} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^\top\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{Y} = 879 - \frac{1}{12544}(30184, 1736)\begin{pmatrix}280\\1376\end{pmatrix} = 879 - \frac{10840256}{12544}$$
$$= 879 - 864.1786 = 14.82143$$

Para el modelo $\mathcal{M}_2$, considere la hipótesis,[1] $H_0 : \beta_2 = 0$ (aquí $\boldsymbol{G} = (0, 1)$, $g = 0$ y $q = 1$), luego el estadístico F es dado por

$$F = \frac{Q(\widehat{\beta}_0) - Q(\widehat{\boldsymbol{\beta}})}{s^2} = \frac{Q(\widehat{\beta}_0) - Q(\widehat{\boldsymbol{\beta}})}{Q(\widehat{\boldsymbol{\beta}})/(n-p)} = \frac{17.46154 - 14.82143}{14.82143/4} = 0.71251,$$

(5 pts)

que debe ser comparado con un valor cuantil de la distribución $F(1, 4)$. En nuestro caso, el valor-p es dado por

$$p = \mathsf{P}(F > 0.71251) = 0.44614,$$

y por tanto debemos seleccionar el modelo $\mathcal{M}_1$. **(5 pts)**

[1] Es decir, si aceptamos H_0 escogemos el modelo $\mathcal{M}_1$, en caso contrario seleccionamos $\mathcal{M}_2$.