MAT-266: Algunas distribuciones no centrales

Felipe Osorio

fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM

Resultado 1:

Sea $\boldsymbol{Z} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$ y sea $U = \boldsymbol{Z}^\top \boldsymbol{Z}$. Entonces $U \sim \chi^2(p)$, con función de densidad

$$f(u) = \frac{1}{2^{p/2}\Gamma(p/2)}\, u^{p/2-1} \exp(-u/2), \qquad u > 0.$$

Demostración:

Como U es una función de variables aleatorias normales, entonces su función característica asume la forma

$$\begin{aligned}\varphi_U(t) = \mathsf{E}\{\exp(itU)\} &= \int_{\mathbb{R}^p} \exp(itu)(2\pi)^{-p/2} \exp(-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{z})\, \mathsf{d}\boldsymbol{z} \\ &= (2\pi)^{-p/2} \int_{\mathbb{R}^p} \exp(-\tfrac{1}{2}(1-2it)\boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{z})\, \mathsf{d}\boldsymbol{z} = (1-2it)^{-p/2},\end{aligned}$$

que corresponde a la función característica de una variable aleatoria chi-cuadrado con p grados de libertad.

Definición 1 (Distribución chi-cuadrado no central):

Si $\boldsymbol{Y} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{I})$, entonces $U = \boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{Y}$ tiene distribución chi-cuadrado no central con p grados de libertad y parámetro de no centralidad $\lambda = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\mu}/2$, en cuyo caso anotamos $U \sim \chi^2(p; \lambda)$.

Resultado 2:

Sea $\boldsymbol{Y} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{I})$ donde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p) \neq \mathbf{0}$ y sea $U = \boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{Y}$. Entonces la función característica de U es dada por

$$\varphi_U(t) = (1 - 2it)^{-p/2} \exp\Big(\frac{2it\lambda}{1 - 2it}\Big),$$

con $\lambda = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\mu}/2$.

Demostración:

Como $Y_1, \dots, Y_p$ son variables aleatorias independientes, tenemos

$$\varphi_U(t) = \prod_{j=1}^{p} \varphi_{Y_j^2}(t).$$

Ahora, la función característica asociada a la variable aleatoria Y_j^2 es dada por

$$\begin{aligned}\varphi_{Y_j^2}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ity_j^2)(2\pi)^{-1/2} \exp\{-\tfrac{1}{2}(y_j - \mu_j)^2\}\, \mathrm{d}y_j \\ &= \exp\Big\{\frac{\mu_j^2}{2}\Big(\frac{1}{1-2it}\Big) - \frac{\mu_j^2}{2}\Big\} \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} \exp\Big\{-\frac{(1-2it)}{2}\Big(y_j - \frac{\mu_j}{1-2it}\Big)^2\Big\}\, \mathrm{d}y_j\end{aligned}$$

de este modo,

$$\varphi_{Y_j^2}(t) = (1-2it)^{-1/2} \exp\Big\{\frac{\mu_j^2}{2}\Big(\frac{2it}{1-2it}\Big)\Big\},$$

y por tanto la función característica de la variable $U = \sum_{j=1}^{p} Y_j^2$, asume la forma

$$\varphi_U(t) = (1-2it)^{-p/2} \exp\Big(\frac{2it\lambda}{1-2it}\Big), \qquad \lambda = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\mu}/2.$$

Observación:

La función característica de la variable $U = \boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{Y}$, puede ser escrita como

$$\begin{aligned}
\varphi_U(t) &= (1-2it)^{-p/2} \exp\left(\frac{\lambda}{1-2it} - \lambda\right) \\
&= (1-2it)^{-p/2} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{\lambda/(1-2it)\}^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} (1-2it)^{-(p+2k)/2}.
\end{aligned}$$

Es decir, la función característica de U es un promedio ponderado con pesos Poisson de funciones características de variables aleatorias chi-cuadrado con $p + 2k$ grados de libertad.

Chi-cuadrado no central

Usando la relación entre funciones características y sus correspondientes funciones de densidad, sigue que la chi-cuadrado no central tiene la siguiente representación:

$$U|Z \sim \chi^2(p+2z), \qquad Z \sim \text{Poisson}(\lambda), \tag{1}$$

con densidad

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \, \frac{1}{2^{p/2+k}\Gamma(\frac{p}{2}+k)} \, u^{p/2+k-1} \exp(-u/2), \quad u > 0.$$

La representación en (1) es muy útil para obtener los momentos de una variable aleatoria con distribución chi-cuadrado no central.

Chi-cuadrado no central

El valor esperado de $U \sim \chi^2(p; \lambda)$ es dado por

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(U) &= \mathsf{E}\{\mathsf{E}(U|Z)\} = \mathsf{E}(p + 2Z) \\ &= p + 2\,\mathsf{E}(Z) = p + 2\lambda, \end{aligned}$$

mientras que la varianza de U puede ser calculada como

$$\begin{aligned} \mathsf{var}(U) &= \mathsf{E}\{\mathsf{var}(U|Z)\} + \mathsf{var}\{\mathsf{E}(U|Z)\} \\ &= \mathsf{E}\{2(p + 2Z)\} + \mathsf{var}(p + 2Z) \\ &= 2p + 4\lambda + 4\lambda = 2p + 8\lambda. \end{aligned}$$

Resultado 3:

Si $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ donde $\boldsymbol{\Sigma}$ es matriz no singular. Entonces

(a) $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2(p)$.

(b) $\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{X} \sim \chi^2(p; \lambda)$, donde $\lambda = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$.

Demostración:

Considere $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top$ con $\boldsymbol{B}$ no singular. Para probar (a), tome

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}),$$

luego $\boldsymbol{Z} \sim \mathsf{N}_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})$ y de este modo

$$(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{Z}^\top \boldsymbol{Z} \sim \chi^2(p; 0).$$

Para probar (b), sea $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{X}$, luego

$$\boldsymbol{Y} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{I}),$$

y

$$\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{Y},$$

que por definición tiene una distribución chi-cuadrado no central, con parámetro de no centralidad

$$\lambda = \frac{1}{2}(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\mu})^\top(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}.$$

Definición 2 (Distribución F no central):

Sea $X_1 \sim \chi^2(\nu_1; \lambda)$ y $X_2 \sim \chi^2(\nu_2)$ variables aleatorias independientes. Entonces,

$$F = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2} \sim \mathsf{F}(\nu_1, \nu_2, \lambda),$$

es decir F sigue una distribución F no central con ν_1 y ν_2 grados de libertad y parámetro de no centralidad λ.

Definición 3 (Distribución Beta no central):

Considere $U_1 \sim \chi^2(\nu_1; \lambda)$, $U_2 \sim \chi^2(\nu_2)$ tal que U_1 y U_2 son variables aleatorias independientes. Entonces,

$$G = \frac{U_1}{U_1 + U_2} \sim \mathsf{Beta}(\nu_1, \nu_2, \lambda),$$

esto es, G sigue una distribución Beta no central con parámetros de forma y escala ν_1 y ν_2, respectivamente y parámetro de no centralidad λ.

Definición 4 (Distribución t de Student no central):

Si $Y \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ y $U/\sigma^2 \sim \chi^2(\nu)$ son independientes, entonces

$$T = \frac{Y}{\sqrt{U/\nu}} \sim t(\nu; \lambda), \quad \lambda = \mu/\sigma,$$

es llamada una variable aleatoria con distribución t de Student no central con ν grados de libertad y parámetro de no centralidad λ.

Observación:

Si $Z \sim \mathsf{N}(0, 1)$, $U \sim \chi^2(\nu)$, δ es una constante, y Z es independiente de U, entonces

$$T = \frac{Z + \delta}{\sqrt{U/\nu}} \sim t(\nu; \delta).$$

Además,

$$t^2(\nu; \lambda) \stackrel{\mathsf{d}}{=} \mathsf{F}(1, \nu, \lambda^2/2).$$