

1. Considere $\mathbf{Z} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbf{Y}_j$. De este modo,¹

$$\varphi_Z(\mathbf{t}) = \mathbb{E}\{\exp(i\mathbf{t}^\top \mathbf{Z})\} = \mathbb{E}\left\{\exp\left(i\mathbf{t}^\top \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbf{Y}_j\right)\right\} = \mathbb{E}\left\{\prod_{j=1}^N \exp(i\alpha_j \mathbf{t}^\top \mathbf{Y}_j)\right\},$$

por la independencia entre $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_N$, sigue que

$$\varphi_Z(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^N \mathbb{E}\{\exp(i\mathbf{h}_j^\top \mathbf{Y}_j)\},$$

con $\mathbf{h}_j = \alpha_j \mathbf{t}$, para $j = 1, \dots, N$. Así,

$$\begin{aligned} \varphi_Z(\mathbf{t}) &= \prod_{j=1}^N \varphi_{Y_j}(\mathbf{h}_j) = \prod_{j=1}^N \exp(i\mathbf{h}_j^\top \boldsymbol{\mu}_j - \frac{1}{2}\mathbf{h}_j^\top \boldsymbol{\Sigma}_j \mathbf{h}_j) = \prod_{j=1}^N \exp(i\alpha_j \mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu}_j - \frac{\alpha_j^2}{2}\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\Sigma}_j \mathbf{t}) \\ &= \exp\left\{i\mathbf{t}^\top \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j \boldsymbol{\mu}_j\right) - \frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2 \boldsymbol{\Sigma}_j\right) \mathbf{t}\right\}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_k\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j \boldsymbol{\mu}_j, \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 \boldsymbol{\Sigma}_j\right).$$

Para una muestra aleatoria $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_N$, tenemos $\mathbf{X}_i = \mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\mu} \sim \mathcal{N}_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ para $i = 1, \dots, N$, y

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{X}_i \sim \mathcal{N}_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}).$$

2. Podemos escribir $Q_i = \mathbf{X}^\top \mathbf{A}_i \mathbf{X}$, para $i = 1, 2$, con

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Además, note que

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

¹Este resultado, puede ser mostrado de diversas maneras. Aquí hemos calculado la función característica de \mathbf{Z} . Alternativamente, podríamos haber usado, por ejemplo, que \mathbf{Z} es una combinación lineal de vectores normales.

2.a. De este modo, notando que

$$\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

que es matrix idempotente. Además,

$$\lambda = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\mu} / 2 = 4/2 = 2, \quad \text{rg}(\mathbf{A}_1) = \text{tr}(\mathbf{A}_1) = 2.$$

Es decir, $Q_1 \sim \chi^2(2; 2)$ una chi-cuadrado con 2 grados de libertad y parámetro de no-centralidad $\lambda = 2$.

Por otro lado,

$$\mathbf{A}_2 \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & 1 & 1 \\ 3/2 & 3/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3/2 & 3/2 \\ 1 & 1 & 3/2 & 3/2 \end{pmatrix},$$

que no es idempotente y por tanto Q_2 no sigue una distribución chi-cuadrado.

2.b. Es fácil notar que

$$\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

y portanto Q_1 es independiente de Q_2 .²

3.a. Podemos escribir,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\|^2 &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^\top (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^\top (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) - (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^\top \mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \\ &\quad - (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^\top \mathbf{X}^\top (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) + (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}). \end{aligned}$$

Sabemos que $\mathbf{H}\mathbf{X} = \mathbf{X}$ de ahí que $(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^\top \mathbf{X} = \mathbf{Y}^\top (\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{X} = \mathbf{0}$ y portanto,

$$\|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\|^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\|^2 + (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}),$$

como ambos términos son positivos, es evidente que el mínimo de la función

$$Q(\boldsymbol{\beta}) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\|^2,$$

se obtiene cuando $\boldsymbol{\beta} = \hat{\boldsymbol{\beta}}$.

²Note que en la demostración de la independencia entre formas cuadráticas esencialmente hemos usado la normalidad de \mathbf{X} .

3.b. Sabemos que $\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{Y}$ y $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{H}\mathbf{Y}$. De este modo,

$$\mathbf{e}^\top \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}^\top (\mathbf{I} - \mathbf{H})^\top \mathbf{H} \mathbf{Y} = 0,$$

pues $\mathbf{H}^2 = \mathbf{H}$ y de ahí que $(\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{H} = \mathbf{0}$.

3.c. Note que $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}_{n-p}(\mathbf{A}^\top \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{A}^\top \mathbf{A})$, como $\mathbf{A}^\top \mathbf{X} = \mathbf{0}$, tenemos

$$\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}_{n-p}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{A}^\top \mathbf{A}),$$

con función de log-verosimilitud,

$$\ell_*(\sigma^2) = -\frac{n-p}{2} \log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2} \log |\mathbf{A}^\top \mathbf{A}| - \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{Z}^\top (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{Z}.$$

Así,

$$\frac{d \ell_*(\sigma^2)}{d \sigma^2} = -\frac{n-p}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{Z}^\top (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{Z}.$$

De este modo,

$$\hat{\sigma}_*^2 = \frac{1}{n-p} \mathbf{Z}^\top (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{Z} = \frac{1}{n-p} \mathbf{Y}^\top \mathbf{A} (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{Y} = \frac{1}{n-p} \mathbf{Y}^\top (\mathbf{I} - \mathbf{H}) \mathbf{Y}.$$

Ahora,

$$\mathbb{E}(\hat{\sigma}_*^2) = \frac{1}{n-p} \mathbb{E} \{ \mathbf{Y}^\top (\mathbf{I} - \mathbf{H}) \mathbf{Y} \} = \frac{1}{n-p} \{ \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{I} - \mathbf{H}) + \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{X}^\top (\mathbf{I} - \mathbf{H}) \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} \}$$

como $\text{tr}(\mathbf{I} - \mathbf{H}) = n - p$ y $(\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{X} = \mathbf{0}$, sigue que $\hat{\sigma}_*^2$ es un estimador insesgado.³

4. El modelo

$$Y_i \sim \mathbf{N}(\alpha + \theta z_i, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, n,$$

puede ser escrito en forma lineal como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon},$$

con $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$, $\boldsymbol{\beta} = (\alpha, \theta)^\top$,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & z_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim \mathbf{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_1 & \dots & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n z_i \\ \sum_{i=1}^n z_i & \sum_{i=1}^n z_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \|\mathbf{z}\|^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{X}^\top \mathbf{Y} &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_1 & \dots & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n z_i Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\bar{Y} \\ \mathbf{z}^\top \mathbf{Y} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

³Más adelante en la asignatura veremos que este es conocido como *estimador REML*.

con $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^\top$. De ahí que

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y},$$

donde

$$\hat{\alpha} = \bar{Y}, \quad \hat{\theta} = \frac{\mathbf{z}^\top \mathbf{Y}}{\|\mathbf{z}\|^2}.$$

Sabemos que

$$\text{cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & 1/\|\mathbf{z}\|^2 \end{pmatrix},$$

por la normalidad de $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ sigue que $\hat{\alpha}$ y $\hat{\theta}$ son independientes.