Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática.

# Certamen N° 1 MAT-266 Análisis de Regresión

Profesor: Felipe Osorio. 20 de diciembre de 2011
Ayudante: Claudio Henríquez.

1. (25 puntos) Considere el estadístico chi-cuadrado de Pearson, definido por

$$T = \sum_{i=1}^{m} \frac{(nX_i - n\mu_i)^2}{n\mu_i},$$

donde $n$ es un entero positivo, $X_1, \dots, X_m$ son variables aleatorias, mientras que las constantes no negativas $\mu_i$ satisfacen $\mu_1 + \cdots + \mu_m = 1$. Sea $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_m)^T$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)^T$ y $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T$, donde $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_m)$.

   (a) ¿$\boldsymbol{\Omega}$ es una matriz singular?

   (b) Muestre que si $\sqrt{n}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \mathcal{N}_m(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Omega})$, entonces $T \sim \chi^2_{m-1}$.

2. (25 puntos) Considere la transformación $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\epsilon}$ donde $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{I}_a \otimes \boldsymbol{1}_n$ y $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{I})$. Defina las forma cuadráticas, $q_1 = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Y}$ y $q_2 = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{Y}$, con

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{I}_a \otimes \boldsymbol{C}_n \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{C}_a \otimes \frac{1}{n}\boldsymbol{J}_n,$$

respectivamente. Aquí $\boldsymbol{J}_k = \boldsymbol{1}_k\boldsymbol{1}_k^T$ denota una matriz de unos de orden $k \times k$ y $\boldsymbol{C}_k = \boldsymbol{I}_k - \frac{1}{k}\boldsymbol{J}_k$ es la matriz de centrado de orden $k$.

   (a) Determine la distribución de $q_1$ y $q_2$.

   (b) Muestre que $q_1$ y $q_2$ son mutuamente independientes.

*Sugerencia:* Recuerde que $(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})(\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{AC} \otimes \boldsymbol{BD})$ y $\operatorname{rg}(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) = \operatorname{rg}(\boldsymbol{A})\operatorname{rg}(\boldsymbol{B})$.

3. (25 puntos) Sea $\overline{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ y $z_{ij} = x_{ij} - \overline{x}_j$, para todo $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, k$ y considere $\boldsymbol{Z} = (z_{ij})$, $\boldsymbol{\beta}_{(0)} = (\beta_1, \dots, \beta_k)^T$. De este modo, tenemos el *modelo centrado* dado por:

$$\boldsymbol{Y} = \gamma_0\boldsymbol{1} + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\beta}_{(0)} + \boldsymbol{\epsilon} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{Z})\begin{pmatrix}\gamma_0 \\ \boldsymbol{\beta}_{(0)}\end{pmatrix} + \boldsymbol{\epsilon}.$$

Para $\operatorname{E}(\boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{0}$ y $\operatorname{Cov}(\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2\boldsymbol{I}$, obtenga el estimador mínimos cuadrados de $\gamma_0$ y $\boldsymbol{\beta}_{(0)}$. Calcule también la matriz de covarianza de $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = (\widehat{\gamma}_0, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^T_{(0)})^T$. ¿Son $\widehat{\gamma}_0$ y $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)}$ independientes?

4. (25 puntos) Considere el modelo

$$Y_{ij} = \theta_i x_j + \epsilon_{ij}, \qquad i = 1, 2; j = 1, \dots, T,$$

con $\{\epsilon_{ij}\}$ variables aleatorias independientes $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ y $\{x_i\}$ constantes conocidas. Obtenga el estadístico $F$ para probar $H_0 : \theta_1 = \theta_2$.