MAT-266: Análisis de Regresión
Certamen 1. Abril 19, 2022 **Nombre:** ____________________
Tiempo: 70 minutos **Profesor:** Felipe Osorio

---

1. (30 pts) Sea $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_n(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$. Muestre que

$$\operatorname{var}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}) = 2\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^2).$$

2. (30 pts) Sea $\boldsymbol{Y} \sim \mathsf{EC}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; g)$ con $\boldsymbol{\Sigma}$ matriz definida positiva. Suponga además que $\boldsymbol{\Sigma}$ es conocida. Muestre que

$$\mathsf{Cov}\left(\frac{\partial \log f(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}}\right) = \frac{1}{p}\,\mathsf{E}\{W_g^2(R^2)R^2\}\boldsymbol{\Sigma}^{-1},$$

donde $W_g(u) = -2g'(u)/g(u)$.

3. Considere $\boldsymbol{b} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1})$ y $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathsf{N}_n(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{I}_n)$.

a. (15 pts) Obtenga la distribución de:

$$Q_1 = \frac{(\boldsymbol{Gb} - \boldsymbol{g})^\top[\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{G}^\top]^{-1}(\boldsymbol{Gb} - \boldsymbol{g})}{\sigma^2},$$

donde $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{q\times p}$ con $\operatorname{rg}(\boldsymbol{G}) = q$, y $Q_2 = \boldsymbol{e}^\top\boldsymbol{e}/\sigma^2$, con $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\epsilon}$, donde $\boldsymbol{M}$ es matriz simétrica e idempotente con rango $n - p$.

b. (10 pts) Suponga que $\boldsymbol{G\beta} = \boldsymbol{g}$ y, usando $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{Y}$. Muestre que

$$\boldsymbol{Gb} - \boldsymbol{g} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{\epsilon},$$

con $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta}$.

c. (15 pts) Suponga que $\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$, ¿son Q_1 y Q_2 independientes?