# MAT-042: Taller 5

**Felipe Osorio**

http://fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM

## Ejercicio 1)

Tenemos $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, de ahí que:

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(\{3\}) = \frac{1}{6}, \qquad \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(\{1,3,6\}) = \frac{3}{6}.$$

Adicionalmente,

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(\{3\}) = \frac{1}{6}.$$

De este modo,

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}.$$

*Observación:*

Si sabemos que tenemos un número impar, la probabilidad de obtener un 3 es calculada sobre $\{1,3,6\}$, es decir, $1/3$.

Mientras que

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{1/6}{1/6} = 1.$$

# Ejercicio 2)

Tenemos

$$\begin{aligned} A &= \{(1,2),(2,1),(2,2)\}, \\ B &= \{(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\mathsf{P}(A) = \frac{3}{36}, \qquad \mathsf{P}(B) = \frac{9}{36}, \qquad \mathsf{P}(\{(2,2)\}) = \frac{1}{36},$$

como $\mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B) \neq \mathsf{P}(A \cap B)$ sigue que $A$ y $B$, no son independientes.

# Ejercicio 3)

Considere los eventos $A \cap B$ y $C$. Sabemos que

$$\mathsf{P}(C|A \cap B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B \cap C)}{\mathsf{P}(A \cap B)},$$

y

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(A)}.$$

De ahí que,

$$\mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B|A)\,\mathsf{P}(C|A \cap B) = \mathsf{P}(A)\frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(A)}\,\frac{\mathsf{P}(A \cap B \cap C)}{\mathsf{P}(A \cap B)} = \mathsf{P}(A \cap B \cap C).$$

# Ejercicio 4)

**a)** Sea $F = \{\text{la vaca tiene fiebre aftosa}\}$. Entonces,

$$\mathsf{P}(A \cap F) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(F|A) = \frac{1000}{2000} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}.$$

**b)** Sea $C$ el evento de que la vaca seleccionada tiene más de un año de edad

$$\mathsf{P}(B \cap F \cap C) = \mathsf{P}(B)\,\mathsf{P}(F|B)\,\mathsf{P}(C|B \cap F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{80}.$$

# Ejercicio 5)

La probabilidad de escoger una jaula es $1/3$. Si seleccionamos la jaula I, entonces

$$\mathsf{P}(C|I) = \frac{2}{5}, \qquad \mathsf{P}(B|I) = \frac{3}{5}.$$

Asimismo,

$$\mathsf{P}(C|II) = \frac{4}{6}, \qquad \mathsf{P}(B|II) = \frac{2}{6},$$
$$\mathsf{P}(C|III) = \frac{5}{10}, \qquad \mathsf{P}(B|III) = \frac{5}{10}.$$

De ahí que,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(B) &= \mathsf{P}(B|I)\,\mathsf{P}(I) + \mathsf{P}(B|II)\,\mathsf{P}(II) + \mathsf{P}(B|III)\,\mathsf{P}(III) \\
&= \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{3} + \frac{5}{10}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\Big(\frac{18}{30} + \frac{10}{30} + \frac{15}{30}\Big) \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{43}{30} = \frac{43}{90}.
\end{aligned}$$

# Ejercicio 6)

Sea $D = \{\text{la persona es daltónica}\}$. Se desea obtener,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(H|D) &= \frac{\mathsf{P}(H)\,\mathsf{P}(D|H)}{\mathsf{P}(H)\,\mathsf{P}(D|H) + \mathsf{P}(M)\,\mathsf{P}(D|M)} \\
&= \frac{(1/2)\cdot 0.05}{(1/2)\cdot 0.05 + (1/2)\cdot 0.0025} = \frac{5/100}{5/100 + 0.25/100} \\
&= \frac{500}{525} = \frac{20}{21}.
\end{aligned}$$

# Ejercicio 7)

Sabemos que

$$\mathsf{P}(A) = 0.50, \qquad \mathsf{P}(B) = 0.25, \qquad \mathsf{P}(C) = 0.25.$$

Sea $G$ el evento de que usted gana un partido. Entonces,

$$\mathsf{P}(G|A) = 0.3, \qquad \mathsf{P}(G|B) = 0.4, \qquad \mathsf{P}(G|C) = 0.5.$$

Por la ley de probabilidad total, tenemos que la probabilidad de ganar un partido es:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(G) &= \mathsf{P}(G|A)\,\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(G|B)\,\mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(G|C)\,\mathsf{P}(C) \\ &= \frac{3}{10}\cdot\frac{50}{100} + \frac{4}{10}\cdot\frac{25}{100} + \frac{5}{10}\cdot\frac{25}{100} \\ &= \frac{150}{1000} + \frac{100}{1000} + \frac{125}{1000} = \frac{375}{1000} = 0.375.\end{aligned}$$

Mientras que la probabilidad de $A$ dado $G$ es:

$$\mathsf{P}(A|G) = \frac{\mathsf{P}(G|A)\,\mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(G)} = \frac{0.3\cdot 0.5}{0.375} = \frac{150}{375} = \frac{2}{5}.$$

# Ejercicio 8)[1]

Debemos tener,

$$\sum_{x=1}^{\infty} c\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{\infty} c\left(\frac{1}{2}\right)^x &= c\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots\right\} \\
&= c \cdot \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots\right\} \\
&= \frac{c}{2}\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) \\
&= c
\end{aligned}$$

De este modo, $c = 1$.

[1] Recuerde que $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1/(1-r)$, siempre que $0 < r < 1$.

# Ejercicio 9)

Tenemos,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\tfrac{1}{2} < X < \tfrac{3}{4}) &= \int_{1/2}^{3/4} f(x)\,\mathsf{d}x = \int_{1/2}^{3/4} 2x\,\mathsf{d}x = 2\,\frac{x^2}{2}\bigg|_{1/2}^{3/4} \\
&= 2\left\{\frac{(3/4)^2}{2} - \frac{(1/2)^2}{2}\right\} = \frac{9}{16} - \frac{1}{4} = \frac{9}{16} - \frac{4}{16} \\
&= \frac{5}{16}.
\end{aligned}$$

Análogamente, podemos hacer

$$F(x) = \int_0^x 2u\,\mathsf{d}u = 2\int_0^x u\,\mathsf{d}u = 2\,\frac{u^2}{2}\bigg|_0^x = x^2, \qquad x \in (0,1).$$

De ahí que,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\tfrac{1}{2} < X < \tfrac{3}{4}) &= \mathsf{P}(X < \tfrac{3}{4}) - \mathsf{P}(X < \tfrac{1}{2}) = F(3/4) - F(1/2) \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}.
\end{aligned}$$

# Ejercicio 9)

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(-\tfrac{1}{2} < X < \tfrac{1}{2}) &= \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,\mathsf{d}x = \int_{-1/2}^{0} f(x)\,\mathsf{d}x + \int_{0}^{1/2} f(x)\,\mathsf{d}x \\
&= \int_{-1/2}^{0} 0\,\mathsf{d}x + \int_{0}^{1/2} 2x\,\mathsf{d}x = 0 + \mathsf{P}(X < \tfrac{1}{2}) \\
&= F(1/2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

# Ejercicio 10)

Note que el espacio muestral es equiprobable, con:

$$\Omega = \{CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS\}.$$

Sea $\mathsf{P}(x)$ la probabilidad de $x$ éxitos (es decir la probabilidad de que se obtiene $x$ caras). Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(0) &= \mathsf{P}(\{SSS\}) = \frac{1}{8}, \\
\mathsf{P}(1) &= \mathsf{P}(\{CSS, SCS, SSC\}) = \frac{3}{8}, \\
\mathsf{P}(2) &= \mathsf{P}(\{CCS, CSC, SCC\}) = \frac{3}{8}, \\
\mathsf{P}(3) &= \mathsf{P}(\{CCC\}) = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Evidentemente,

$$\mathsf{P}(0) + \mathsf{P}(1) + \mathsf{P}(2) + \mathsf{P}(3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1.$$

EX UMBRA IN SOLEM

# Ejercicio 10)

*Observación:*

Note que podemos escribir,

$$\mathsf{P}(x) = \binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}.$$

En efecto,

$$\mathsf{P}(1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{3!}{1!(3-1)!}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2^2} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}.$$

En general, tenemos

$$\mathsf{P}(X = x) = \binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x},$$

que es la probabilidad de obtener exactamente $x$ éxitos en $n$ ensayos, cada uno con probabilidad de éxito $p$.

# Ejercicio 10)

Suponga que una moneda es lanzada 8 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 5 caras?

En este caso tenemos $n = 8$, $p = 1/2$ y se desea calcular

$$\mathsf{P}(X = 5) = \binom{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 56\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{56}{256} = \frac{7}{32}.$$

EX UMBRA IN SOLEM