1. Tenemos que el vector aleatorio (X, Y) tiene densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 120\,x(y-x)(1-y), & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a. Para obtener la densidad marginal de Y, se debe calcular:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^y 120\,x(y-x)(1-y)\,\mathsf{d}x = 120(1-y)\Big[\frac{yx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^y \\ &= 120(1-y)\Big(\frac{y^3}{2} - \frac{y^3}{3}\Big) = 20(1-y)y^3, \qquad 0 \leq y \leq 1. \end{aligned}$$

b. La densidad condicional de $X|Y = y$ es dada por:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{120\,x(y-x)(1-y)}{20(1-y)y^3} = \frac{6x(y-x)}{y^3}, \qquad 0 \leq x \leq y.$$

c. Como:

$$f_{X|Y}(x|y = \tfrac{1}{2}) = \frac{6x(\frac{1}{2} - x)}{(\frac{1}{2})^3} = 48\,x(\tfrac{1}{2} - x), \qquad 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2}.$$

sigue que

$$P(X > \tfrac{1}{4}|Y = \tfrac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 48\,x(\tfrac{1}{2} - x)\,\mathsf{d}x = \frac{1}{2}.$$

2. La función de verosimiltud asociada a la muestra $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$ asume la forma

$$L(\phi; \boldsymbol{Y}) = \phi^{-2n}\Big(\prod_{i=1}^n y_i\Big) \exp\Big(-\frac{1}{\phi}\sum_{i=1}^n y_i\Big).$$

de este modo la función de log-verosimilitud es dada por

$$\ell(\phi; \boldsymbol{Y}) = -2n\log\phi + \sum_{i=1}^n \log y_i - \frac{1}{\phi}\sum_{i=1}^n y_i.$$

Resolviendo la condición de primer orden $U(\phi) = \mathsf{d}\,\ell(\phi; \boldsymbol{Y})/\,\mathsf{d}\phi = 0$, tenemos

$$U(\phi) = -\frac{2n}{\phi} + \frac{1}{\phi^2}\sum_{i=1}^n y_i = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{\phi} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n y_i = \frac{\overline{y}}{2}.$$

En efecto $\widehat{\phi}$ corresponde al estimador máximo verosímil pues

$$\frac{\mathsf{d}^2\,\ell(\phi; \boldsymbol{Y})}{\mathsf{d}\phi^2}\Big|_{\phi=\widehat{\phi}} = \Big\{\frac{2n}{\phi^2} - \frac{2n\overline{y}}{\phi^3}\Big\}\Big|_{\phi=\widehat{\phi}} = \frac{2n}{\widehat{\phi}^2}\Big(1 - \frac{\overline{y}}{\widehat{\phi}}\Big) = -\frac{2n}{\widehat{\phi}^2} < 0.$$

Como $Y \sim \mathsf{Gama}(2, \phi)$ sabemos que $\mathsf{E}(Y) = 2\phi$ y $\mathsf{var}(Y) = 2\phi^2$. De este modo,

$$\mathsf{E}(\widehat{\phi}) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}(Y_i) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} 2\phi = \phi,$$

es decir $\widehat{\phi}$ es estimador insesgado, y

$$\mathsf{var}(\widehat{\phi}) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{var}(Y_i) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n} 2\phi^2 = \frac{\phi^2}{2n}.$$

Además, $\widehat{\phi}$ es estimador consistente pues

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{MSE}(\widehat{\phi}) = \lim_{n\to\infty}\mathsf{var}(\widehat{\phi}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\phi^2}{2n} = 0.$$

3. Tenemos el siguiente test de hipótesis,

$$H_0 : p = 0.6, \qquad \text{versus}, \qquad H_1 : p \neq 0.6.$$

Debido a que la muestra es grande, podemos considerar:

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{100 - 144 \cdot 0.6}{\sqrt{144 \cdot 0.6 \cdot 0.4}} = \frac{13.6000}{5.8788} = 2.3134,$$

para $\alpha = 0.05$ tenemos $z_{1-\alpha/2} = 1.9600$. De ahí que, $|Z| > z_{1-\alpha/2}$ y portanto se rechaza H_0. Es decir, el nuevo medicamento no tiene la misma efectividad que el antiguo.