MAT-042, 2° Semestre 2013 **Pauta de Corrección**
Certamen 2. Diciembre 3, 2013
Tiempo: 90 Minutos Felipe Osorio, Patricio Videla.

---

1. Tenemos que $F_X(x) = x$, $0 < x < 1$. Sea $Y = g(X) = -2\log X$. Entonces

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-2\log x) = -\frac{2}{x} < 0, \qquad \text{para } 0 < x < 1,$$

es función decreciente con soporte $\mathcal{Y} = (0,\infty)$. Para $y > 0$, $y = -2\log x$ implica que $x = g^{-1}(y) = e^{-y/2}$. De este modo,

$$F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y)) = 1 - F_X(e^{-y/2}) = 1 - e^{-y/2},$$

y

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{2}\, e^{-y/2}, \qquad y > 0.$$

Es decir $Y \sim \mathsf{Exp}(1/2)$.

a. Se desea

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y) &= \int_0^\infty y f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^\infty y\, e^{-y/2}\,\mathrm{d}y = -y\, e^{-y/2}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty y\, e^{-y/2}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty y\, e^{-y/2}\,\mathrm{d}y = 2 \ (\mathrm{M\$}).\end{aligned}$$

Análogamente $\mathrm{var}(Y) = 2^2$, luego su desviación estándar es $\sqrt{\mathrm{var}\, Y} = 2$ (M$).

b. Se debe hallar el valor de c, tal que $P(Y \geq c) = 0.75$. De este modo

$$1 - P(Y \leq c) = 0.75 \quad \Rightarrow \quad 1 - (1 - e^{-c/2}) = 0.75 \quad \Rightarrow \quad e^{-c/2} = 0.75,$$

es decir $c = -2\log(0.75) = 0.57536$. El asistente espera recibir al menos \$ 575.

2.a. Note que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, K_X(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log M_X(t) = \frac{1}{M_X(t)}\, M_X'(t)$$

y

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\, K_X(t) = \frac{1}{M_X^2(t)}\Big\{M_X''(t) M_X(t) - M_X'(t) M_X'(t)\Big\}.$$

Como $M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tx})$, sigue que $M_X(t)\big|_{t=0} = \mathrm{E}(e^0) = 1$. Además, sabemos que

$$M_X'(t)\big|_{t=0} = \mathrm{E}(X) \qquad \text{y} \qquad M_X''(t)\big|_{t=0} = \mathrm{E}(X^2).$$

De este modo,

$$K_X'(t)\big|_{t=0} = M_X'(t)\big|_{t=0} = \mathrm{E}(X),$$

y

$$K_X''(t)\big|_{t=0} = \big\{M_X''(t) - M_X'(t) M_X'(t)\big\}\big|_{t=0} = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) = \mathrm{var}(X).$$

2.b. Debemos calcular

$$\mathrm{E}(X)=\int_{-1}^{1} x f_X(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(1+x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{3},$$

además

$$\mathrm{E}(X^2)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2(1+x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Big(\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\Big)\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{3}.$$

De este modo, $\mathrm{var}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}^2(X)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}=\frac{2}{9}$.

3.a. Tenemos que

$$\mathrm{E}(e^{tx})=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}e^{-|x|}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Big\{\int_{-\infty}^{0} e^{(1+t)x}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty} e^{-(1-t)x}\,\mathrm{d}x\Big\}=\frac{1}{1-t^2},$$

para $|t|<1$.

3.b. Sabemos que la función generadora de momentos de la transformación $Y=\mu+\phi X$ está dada por

$$M_Y(t)=M_{\mu+\phi X}(t)=e^{\mu t}M_X(\phi t)=\frac{e^{\mu t}}{1-\phi^2t^2}.$$

Ahora, considere $\log M_Y(t)=\mu t-\log(1-\phi^2t^2)$. De este modo,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log M_Y(t)=\mu-\frac{1}{1-\phi^2t^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-\phi^2t^2)=\mu+\frac{2\phi^2t^2}{1-\phi^2t^2}.$$

Evaluando esta expresión en $t=0$, obtenemos $\mathrm{E}(Y)=\mu$. Por otro lado,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\log M_Y(t)=\frac{1}{(1-\phi^2t^2)^2}\big\{2\phi^2(1-\phi^2t^2)+4\phi^4t^2\big\}.$$

Así, evaluando en $t=0$, obtenemos $\mathrm{var}(Y)=2\phi^2$.

4. Sea X : el volumen (en onzas) depositado en las latas. Considere $X\sim\mathcal{N}(12.4,0.1^2)$.

a. Se desea calcular la siguiente probabilidad

$$\begin{aligned}1-P(12.1\le X\le 12.6)&=1-P\Big(\frac{12.1-12.4}{0.1}\le Z\le\frac{12.6-12.4}{0.1}\Big)\\&=1-P(-3\le Z\le 2)=1-[\Phi(2)-\Phi(-3)]\\&=1-(0.97725-0.00135)=0.02410.\end{aligned}$$

b. Sea Y : el número de latas "inservibles" entre las n seleccionadas. De este modo, podemos considerar $Y\sim\mathsf{Bin}(n,0.0241)$. Se pide determinar n tal que $P(Y\ge 1)\ge 0.784$. Es decir,

$$1-P(Y=0)\ge 0.784\quad\Rightarrow\quad P(Y=0)\le 0.216$$

ahora,

$$P(Y=0)=\binom{n}{0}0.0241^0(1-0.0241)^{n-0}=0.9759^n\le 0.216.$$

Finalmente $n\ge\log(0.216)/\log(0.9759)\approx 63$.