MAT-042: Taller 7

Felipe Osorio

http://fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM

Ejercicio 1.a)

La función de log-verosimilitud es dada por:

$$\begin{aligned}\ell(\theta;\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^{n}\log f(x_i;\theta) = \sum_{i=1}^{n}\Big\{\log(x_i+1) - \log\theta(\theta+1) - \frac{1}{\theta}\,x_i\Big\}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\log(x_i+1) - n\log\theta(\theta+1) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i,\end{aligned}$$

de este modo la función score asume la forma:

$$U(\theta;\boldsymbol{x}) = \frac{\mathsf{d}\,\ell(\theta)}{\mathsf{d}\theta} = -\frac{n(2\theta+1)}{\theta(\theta+1)} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

Resolviendo la condición de primer orden $U(\theta;\boldsymbol{x}) = 0$ obtenemos,

$$(2\theta+1)\theta - (\theta+1)\overline{x} = 0,$$

es decir, el estimador máximo verosímil $\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}}$ para θ es solución de la ecuación de segundo grado:

$$2\theta^2 - (\overline{x}-1)\theta - \overline{x} = 0. \tag{1}$$

Ejercicio 1.b)

El estimador para θ vía el método de los momentos debe ser obtenido mediante resolver la ecuación:

$$\mathsf{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

Para obtener $\mathsf{E}(X)$, Note que

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x/s}\,\mathsf{d}x = s^a \Gamma(a).$$

De este modo,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X) &= \int_0^\infty x f(x;\theta)\,\mathsf{d}x = \frac{1}{\theta(\theta+1)}\int_0^\infty x(x+1)e^{-x/\theta}\,\mathsf{d}x \\
&= \frac{1}{\theta(\theta+1)}\left[\int_0^\infty x^2 e^{-x/\theta}\,\mathsf{d}x + \int_0^\infty x e^{-x/\theta}\,\mathsf{d}x\right] \\
&= \frac{1}{\theta(\theta+1)}[\theta^3\Gamma(3) + \theta^2\Gamma(2)] = \frac{\theta(2\theta+1)}{\theta+1}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.b)

Es decir, el estimador de momentos, $\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}}$ corresponde a una solución de la ecuación:

$$\frac{\theta(2\theta+1)}{\theta+1} = \overline{x},$$

o equivalentemente,

$$2\theta^2 - (\overline{x}-1)\theta - \overline{x} = 0.$$

que coincide con la ecuación de verosimilitud dada en (1).

Ejercicio 2.a)

En este caso, tenemos que la función de log-verosimilitud es dada por

$$\ell(\theta) = n \log \theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i = n \log \theta - \theta n \overline{x},$$

así,

$$U(\theta) = \frac{n}{\theta} - n\overline{x}.$$

Luego, resolviendo la ecuación de estimación $U(\theta) = 0$, sigue que $\widehat{\theta} = 1/\overline{X}$. Además

$$U'(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{F}_n(\theta) = \mathsf{E}\{-U'(\theta)\} = \frac{n}{\theta^2},$$

luego $\widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\theta}) = \widehat{\theta}/\sqrt{n}$. De este modo

$$CI_n(\theta) = \Big[\frac{1}{\overline{x}} - z_{1-\alpha/2}\frac{\widehat{\theta}}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\overline{x}} + z_{1-\alpha/2}\frac{\widehat{\theta}}{\sqrt{n}}\Big] = \Big[\frac{1}{\overline{x}} - z_{1-\alpha/2}\frac{1}{\overline{x}\sqrt{n}}, \frac{1}{\overline{x}} + z_{1-\alpha/2}\frac{1}{\overline{x}\sqrt{n}}\Big].$$

Ejercicio 2.b)

Por otro lado, $g(\theta) = 1/\theta = \lambda$, luego

$$|g'(\theta)| = \left| -\frac{1}{\theta^2} \right| = \frac{1}{\theta^2}$$

De este modo $\widehat{\lambda} = 1/\widehat{\theta} = \overline{X}$, y

$$\widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\lambda}) = |g'(\widehat{\theta})| \widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\theta}) = \frac{1}{\widehat{\theta}^2} \frac{\widehat{\theta}}{\sqrt{x}} = \frac{\overline{x}}{\sqrt{n}}.$$

Finalmente

$$CI_n(\lambda) = \left[\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \frac{\overline{x}}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \frac{\overline{x}}{\sqrt{n}} \right].$$

EX UMBRA IN SOLEM

Ejercicio 3)

Se desea probar

$$H_0 : \mu = 2270, \qquad \text{versus} \qquad H_1 : \mu \neq 2270.$$

En este caso consideramos el estadístico de prueba

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)}{s} = \frac{\sqrt{12}(2260 - 2270)}{36} = -0.9623,$$

y rechazamos H_0 a un nivel $\alpha = 0.05$ si,

$$|T| > t_{0.975}(11) = 2.2010,$$

como $|T| = 0.9623 < 2.2010$, aceptamos H_0. Es decir, la resistencia promedio a la compresión del concreto es de 2270 dpi.

EX UMBRA IN SOLEM

Ejercicio 4)

Considere $Z = X - \theta$. De este modo, la MGF de Z adopta la forma

$$M_Z(t) = \mathsf{E}(e^{tZ}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} e^{-z} \exp(-e^{-z}) \, \mathsf{d}z$$

Haciendo la substitución,

$$y = e^{-z} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{d}y = -e^{-z} \, \mathsf{d}z.$$

y notando que

$$\begin{aligned} z \to -\infty \quad &\Rightarrow \quad y \to e^{-(-\infty)} = \infty, \\ z \to +\infty \quad &\Rightarrow \quad y \to e^{-\infty} = 0, \end{aligned}$$

obtenemos

$$M_Z(t) = \int_0^{\infty} y^{-t} e^{-y} \, \mathsf{d}y = \int_0^{\infty} y^{(1-t)-1} e^{-y} \, \mathsf{d}y = \Gamma(1-t).$$

De este modo,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(Z) &= M_Z'(t)\big|_{t=0} = \Gamma'(1-t)\,\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\,(1-t) = -\Gamma'(1-t)\big|_{t=0} \\ &= -\Gamma'(1) = \gamma \approx 0.577216.\end{aligned}$$

Por tanto, haciendo $X = Z + \theta$, sigue que

$$\mathsf{E}(X) = \mathsf{E}(Z) + \theta = \theta + \gamma.$$

Ahora, usando el método de momentos, debemos resolver $\overline{X} = \mathsf{E}(X) = \theta + \gamma$. De este modo,

$$\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}} = \overline{X} - \gamma.$$

Ejercicio 5.a)

Sea $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, la función de verosimilitud es dada por

$$\begin{aligned} L(\lambda; \boldsymbol{z}) &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\Big\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \Big\} \\ &\quad \times (2\pi\lambda\sigma^2)^{-n/2} \exp\Big\{ -\frac{1}{2\lambda\sigma^2} \sum_{j=1}^n (y_j - \mu)^2 \Big\} \\ &\propto \lambda^{-n/2} \exp\Big\{ -\frac{1}{2\lambda\sigma^2} \sum_{j=1}^n (y_j - \mu)^2 \Big\}, \end{aligned}$$

mientras que la función de log-verosimilitud asume la forma

$$\ell(\lambda; \boldsymbol{z}) = -\frac{n}{2} \log \lambda - \frac{1}{2\lambda\sigma^2} \sum_{j=1}^n (y_j - \mu)^2 + k_1,$$

donde k_1 representa una constante.

De este modo, $\widehat{\lambda}_{\mathsf{ML}}$ es solución de:

$$U(\lambda;\boldsymbol{z}) = -\frac{n}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(y_j-\mu)^2 = 0,$$

de este modo,

$$\widehat{\lambda}_{\mathsf{ML}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{y_j-\mu}{\sigma}\Big)^2.$$

Además

$$\ell''(\widehat{\lambda}_{\mathsf{ML}};\boldsymbol{z}) = -\frac{n^4}{2\widehat{\lambda}_{\mathsf{ML}}} < 0.$$

Ejercicio 5.b)

Considerando σ^2 y λ desconocidos, sigue que:

$$\ell(\lambda, \sigma^2; \boldsymbol{z}) = -n \log \sigma^2 - \frac{n}{2} \log \lambda - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 - \frac{1}{2\lambda\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} (y_j - \mu)^2 + k_2$$

para k_2 denotando una constante. El MLE de $\boldsymbol{\theta} = (\lambda, \sigma^2)^\top$ es solución de:

$$\frac{\partial \ell(\lambda, \sigma^2; \boldsymbol{z})}{\partial \lambda} = -\frac{n}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} (y_j - \mu)^2 = 0$$

$$\frac{\partial \ell(\lambda, \sigma^2; \boldsymbol{z})}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 + \frac{1}{2\lambda\sigma^4} \sum_{j=1}^{n} (y_j - \mu)^2 = 0.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, obtenemos

$$\widehat{\lambda}_{\mathsf{ML}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} (y_j - \mu)^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}, \qquad \widehat{\sigma}^2_{\mathsf{ML}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2.$$

Ejercicio 6)

Es sabido que el MLE de λ es dado por

$$\widehat{\lambda} = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Ahora,

$$\log f(x;\lambda) = -\lambda + x\log\lambda - \log x!$$

de este modo,

$$U(x;\lambda) = -1 + \frac{x}{\lambda}, \qquad U'(x;\lambda) = -\frac{x}{\lambda^2}.$$

Así, la información de Fisher (para una única observación) es dada por

$$\mathcal{F}_1(\lambda) = \mathsf{E}\{-U'(X;\lambda)\} = \mathsf{E}\left(\frac{X}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{\lambda},$$

por tanto,

$$\widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{F}_n(\widehat{\lambda})}} = \frac{1}{\sqrt{n\mathcal{F}_1(\widehat{\lambda})}} = \sqrt{\widehat{\lambda}/n}.$$

Ejercicio 6)

De este modo, un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ para λ es dado por:

$$\begin{aligned} CI_n(\lambda) &= \left[\widehat{\lambda} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{\lambda}/n}, \widehat{\lambda} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{\lambda}/n}\right] \\ &= \left[\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\overline{x}/n}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\overline{x}/n}\right]. \end{aligned}$$

Para el conjunto de datos $\boldsymbol{x} = \{2, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 2\}$, se obtuvo $\overline{x} = 8/10 = 0.8$. Así, usando $\alpha = 0.05$, tenemos:

$$\begin{aligned} CI_n(\lambda) &= \left[0.8 - z_{0.975}\sqrt{0.8/10}, 0.8 + z_{0.975}\sqrt{0.8/10}\right] \\ &= [0.2456, 1.3544], \end{aligned}$$

donde $z_{0.975} = 1.96$ representa el valor cuantil 0.975 de la distribución $\mathsf{N}(0,1)$.

Ejercicio 7)

Para la distribución Uniforme en el intervalo (a, b), tenemos

$$\mathsf{E}(X) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,\mathsf{d}x = \frac{1}{b-a}\Big(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\Big) = \frac{a+b}{2},$$

$$\mathsf{E}(X^2) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,\mathsf{d}x = \frac{1}{b-a}\Big(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\Big) = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2).$$

De este modo debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\mu_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad \mu_2 = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2).$$

Es decir, $a + b = 2\mu_1 \Rightarrow a = 2\mu_1 - b$. Substituyendo en la segunda ecuación, obtenemos

$$(2\mu_1 - b)^2 + (2\mu_1 - b)b + b^2 = 3\mu_2.$$

O sea, $\widehat{b}_{\mathsf{MM}}$ debe ser solución de la ecuación de segundo grado

$$b^2 - 2\mu_1 b + (4\mu_1^2 - 3\mu_2) = 0,$$

Ejercicio 7)

Cuyas raíces pueden ser escritas como:

$$\widehat{b}_{\mathsf{MM}} = m_1 \pm \sqrt{3(m_2 - m_1^2)}.$$

Notando que se debe satisfacer $\widehat{a}_{\mathsf{MM}} < \widehat{b}_{\mathsf{MM}}$, sigue que

$$\widehat{a}_{\mathsf{MM}} = 2m_1 - \widehat{b}_{\mathsf{MM}} = m_1 - \sqrt{3(m_2 - m_1^2)}, \qquad \widehat{b}_{\mathsf{MM}} = m_1 + \sqrt{3(m_2 - m_1^2)},$$

como $m_2 - m_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$, obtenemos finalmente que

$$\widehat{a}_{\mathsf{MM}} = \overline{x} - \left\{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right\}^{1/2}$$

$$\widehat{b}_{\mathsf{MM}} = \overline{x} + \left\{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right\}^{1/2}$$