1.a. La función de log-verosimilitud es dada por:

$$\begin{aligned}\ell(\theta;\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^n \log f(x_i;\theta) = \sum_{i=1}^n \Big\{\log(x_i+1) - \log\theta(\theta+1) - \frac{1}{\theta}\,x_i\Big\} \\ &= \sum_{i=1}^n \log(x_i+1) - n\log\theta(\theta+1) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i,\end{aligned}$$

de este modo la función score asume la forma:

$$U(\theta;\boldsymbol{x}) = \frac{\mathsf{d}\,\ell(\theta)}{\mathsf{d}\theta} = -\frac{n(2\theta+1)}{\theta(\theta+1)} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i.$$

Resolviendo la condición de primer orden $U(\theta;\boldsymbol{x}) = 0$ obtenemos,

$$(2\theta+1)\theta - (\theta+1)\overline{x} = 0,$$

es decir, el estimador máximo verosímil $\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}}$ para θ es solución de la ecuación de segundo grado:

$$2\theta^2 - (\overline{x}-1)\theta - \overline{x} = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

1.b. El estimador para θ vía el método de los momentos debe ser obtenido mediante resolver la ecuación:

$$\mathsf{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i,$$

Para obtener $\mathsf{E}(X)$, Note que

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x/s}\,\mathsf{d}x = s^a\Gamma(a).$$

De este modo,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(X) &= \int_0^\infty x f(x;\theta)\,\mathsf{d}x = \frac{1}{\theta(\theta+1)}\int_0^\infty x(x+1)e^{-x/\theta}\,\mathsf{d}x \\ &= \frac{1}{\theta(\theta+1)}\Big[\int_0^\infty x^2e^{-x/\theta}\,\mathsf{d}x + \int_0^\infty xe^{-x/\theta}\,\mathsf{d}x\Big] \\ &= \frac{1}{\theta(\theta+1)}[\theta^3\Gamma(3) + \theta^2\Gamma(2)] = \frac{\theta(2\theta+1)}{\theta+1}.\end{aligned}$$

Es decir, el estimador de momentos, $\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}}$ corresponde a una solución de la ecuación:

$$\frac{\theta(2\theta+1)}{\theta+1} = \overline{x},$$

o equivalentemente,

$$2\theta^2 - (\overline{x}-1)\theta - \overline{x} = 0.$$

que coincide con la ecuación de verosimilitud dada en **(1)**.

2.a. En este caso, tenemos que la función de log-verosimilitud es dada por

$$\ell(\theta) = n \log \theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i = n \log \theta - \theta n \overline{x},$$

así,

$$U(\theta) = \frac{n}{\theta} - n\overline{x}.$$

Luego, resolviendo la ecuación de estimación $U(\theta) = 0$, sigue que $\widehat{\theta} = 1/\overline{X}$. Además

$$U'(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{F}_n(\theta) = \mathsf{E}\{-U'(\theta)\} = \frac{n}{\theta^2},$$

luego $\widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\theta}) = \widehat{\theta}/\sqrt{n}$. De este modo

$$CI_n(\theta) = \Big[\frac{1}{\overline{x}} - z_{1-\alpha/2}\frac{\widehat{\theta}}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\overline{x}} + z_{1-\alpha/2}\frac{\widehat{\theta}}{\sqrt{n}}\Big] = \Big[\frac{1}{\overline{x}} - z_{1-\alpha/2}\frac{1}{\overline{x}\sqrt{n}}, \frac{1}{\overline{x}} + z_{1-\alpha/2}\frac{1}{\overline{x}\sqrt{n}}\Big].$$

2.b. Por otro lado, $g(\theta) = 1/\theta = \lambda$, luego

$$|g'(\theta)| = \Big| -\frac{1}{\theta^2}\Big| = \frac{1}{\theta^2}$$

De este modo $\widehat{\lambda} = 1/\widehat{\theta} = \overline{X}$, y

$$\widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\lambda}) = |g'(\widehat{\theta})|\widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\theta}) = \frac{1}{\widehat{\theta}^2}\frac{\widehat{\theta}}{\sqrt{x}} = \frac{\overline{x}}{\sqrt{n}}.$$

Finalmente

$$CI_n(\lambda) = \Big[\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\overline{x}}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\overline{x}}{\sqrt{n}}\Big].$$

3. Se desea probar

$$H_0 : \mu = 2270, \qquad \text{versus} \qquad H_1 : \mu \neq 2270.$$

En este caso consideramos el estadístico de prueba

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)}{s} = \frac{\sqrt{12}(2260 - 2270)}{36} = -0.9623,$$

y rechazamos H_0 a un nivel $\alpha = 0.05$ si,

$$|T| > t_{0.975}(11) = 2.2010,$$

como $|T| = 0.9623 < 2.2010$, aceptamos H_0. Es decir, la resistencia promedio a la compresión del concreto es de 2270 dpi.