MAT-042: Intervalos de confianza

Felipe Osorio

fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM

El objetivo de esta sección es abordar el problema $\boldsymbol{\theta} \in C$, donde $C \subseteq \Theta$, $C = C(\boldsymbol{X})$ es un conjunto determinado por los datos observados $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$.[1]

Definición 1:

Una estimación intervalar de un parámetro real-valuado θ es cualquier par de funciones $L(x_1, \dots, x_n)$ y $U(x_1, \dots, x_n)$ que satisfacen

$$L(\boldsymbol{x}) \leq U(\boldsymbol{x}), \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}.$$

Para $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ tenemos $L(\boldsymbol{x}) \leq \theta \leq U(\boldsymbol{x})$, mientras que $[L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X})]$ es un intervalo aleatorio.

[1] Si θ es real-valuado, entonces C corresponde a un intervalo.

Ejemplo:

Considere X_1, X_2, X_3, X_4 una muestra aleatoria desde $\mathsf{N}(\mu, 1)$. Un estimador intervalar de μ es $[\overline{X} - 1, \overline{X} + 1]$, es decir

$$\mu \in [\overline{X} - 1, \overline{X} + 1]$$

Note que $\overline{X} \sim \mathsf{N}(\mu, 1/4)$, pero

$$\mathsf{P}(\overline{X} = \mu) = 0.$$

Mientras que,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\mu \in [\overline{X} - 1, \overline{X} + 1]) &= \mathsf{P}(\overline{X} - 1 \leq \mu \leq \overline{X} + 1) = \mathsf{P}(-1 \leq \mu - \overline{X} \leq 1) \\ &= \mathsf{P}(-1 \leq \overline{X} - \mu \leq 1) = \mathsf{P}\Big(- \frac{1}{\sqrt{1/4}} \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{1/4}} \leq \frac{1}{\sqrt{1/4}}\Big) \\ &= \mathsf{P}\Big(- 2 \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{1/4}} \leq 2\Big) = \mathsf{P}(-2 \leq Z \leq 2) = 0.9544\end{aligned}$$

pues $Z = (\overline{X} - \mu)/\sqrt{1/4} \sim \mathsf{N}(0, 1)$.

Interpretación:

Tenemos un 95% de chances de cubrir el parámetro verdadero (desconocido) con nuestro estimador intervalar.

Observación:

En este contexto $\mathsf{P}_\theta(\theta \in [L(\boldsymbol{x}), U(\boldsymbol{x})])$ se denomina probabilidad de cobertura

Definición 2:

El coeficiente de confianza de $[L(\boldsymbol{x}), U(\boldsymbol{x})]$ es el ínfimo de las probabilidades de cobertura

$$\inf_\theta \ \mathsf{P}_\theta(\theta \in [L(\boldsymbol{x}), U(\boldsymbol{x})])$$

Observación:

Estimadores intervalares en conjunto con una medida de confianza (coeficiente de confianza) son conocidos como intervalos de confianza.

Definición 3:

Una variable aleatoria $Q(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta}) = Q(X_1,\ldots,X_n;\theta)$ es una cantidad pivotal o pivote si la distribución de $Q(\boldsymbol{X};\theta)$ no depende de θ. Esto es, si $\boldsymbol{X} \sim F(\boldsymbol{x};\theta)$, entonces $Q(\boldsymbol{X};\theta)$ tiene la misma distribución para todo valor de θ.

Observación:

La técnica confía en la habilidad de hallar un pivote y un conjunto A tal que el conjunto $\{\theta : Q(\boldsymbol{X};\theta) \in A\}$ sea una estimación intervalar para θ.

Ejemplo (CI para μ en poblaciones normales con varianza conocida):

Si $X_1, \dots, X_n$ es una muestra aleatoria de tamaño n desde $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathsf{N}(0, 1),$$

y por tanto es un pivote para μ (siempre que σ^2 sea conocido). Para cualquier constante a sigue que:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\Big(-a \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq a\Big) &= \mathsf{P}\Big(-a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} - \mu \leq a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) \\ &= \mathsf{P}\Big(\overline{X} - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big), \end{aligned}$$

es decir obtenemos el intervalo de confianza

$$\Big[\overline{X} - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big].$$

Podemos escribir también,

$$CI(\mu) = \left\{\mu : \overline{X} - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}.$$

Además suponga que $a = z_{1-\alpha/2}$ para un valor de α dado. Entonces, es fácil notar que

$$\mathsf{P}\left(\mu \in \left[\overline{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1 - \alpha,$$

corresponde a un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ para μ.

Observación:

Note que este intervalo de confianza es simétrico.

Ejemplo (CI para μ en poblaciones normales con varianza desconocida):

Si $X_1, \dots, X_n$ es una muestra aleatoria de tamaño n desde $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 desconocido. Para este caso, podemos usar el pivote

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

es decir,

$$\mathsf{P}(-a \leq T \leq a) = \mathsf{P}\Big(-a \leq \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \leq a\Big)$$

que lleva al intervalo de confianza

$$CI(\mu) = \Big\{\mu : \overline{X} - t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\Big\}.$$

Ejemplo (CI para la diferencia de medias en poblaciones normales):

Considere $X_1, X_2, \dots, X_n$ y $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ muestras aleatorias desde $\mathsf{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ y $\mathsf{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, respectivamente. Se desea un CI para $\delta = \mu_X - \mu_Y$. Note que

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_X^2}{m}}} \sim \mathsf{N}(0,1).$$

Así, evidentemente podemos encontrar el valor cuantil $z_{1-\alpha/2}$, tal que

$$\mathsf{P}(-z_{1-\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

lo que lleva a

$$\mathsf{P}\left(\overline{X}-\overline{Y}-z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_X^2}{m}}\leq \mu_X-\mu_Y\leq \overline{X}-\overline{Y}+z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_X^2}{m}}\right)=1-\alpha$$

Es decir,

$$CI(\mu_X-\mu_Y)=\left[\overline{X}-\overline{Y}\mp z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_X^2}{m}}\right]$$

Observación:

Si σ_X^2 y σ_Y^2 son desconocidos pero (se pueden asumir) iguales. Entonces

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2),$$

con

$$S_p^2 = \frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{n+m-2}.$$

De este modo, obtenemos el intervalo:

$$CI(\mu_X - \mu_Y) = \left[\overline{X} - \overline{Y} \mp t_{1-\alpha/2}(n+m-2)s_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right].$$

Ejemplo (CI para σ^2 en poblaciones normales con media desconocida):

Considere ahora,

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

que es cantidad pivotal y elija a y b, satisfaciendo que

$$\mathsf{P}(a \leq \chi^2 \leq b) = \mathsf{P}\left(a \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq b\right) = 1-\alpha,$$

desde donde obtenemos

$$CI(\sigma^2) = \left\{\sigma^2 : \frac{(n-1)S^2}{b} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{a}\right\}.$$

Las elecciones de a y b que producen el intervalo con el coeficiente de confianza requerido son $a = \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ y $b = \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$.

Definición 4 (Intervalo de confianza asintótico):

Considere SE $= \sqrt{\mathsf{var}(\widehat{\theta}_n)}$. Entonces $\widehat{\mathsf{SE}} = \sqrt{1/\mathcal{F}_n(\widehat{\theta}_n)}$, luego un intervalo del confianza asintótico del $100(1-\alpha)\%$ para θ es dado por:[2]

$$CI_n(\theta) = [\widehat{\theta}_n - z_{1-\alpha/2}\widehat{\mathsf{SE}}, \widehat{\theta}_n + z_{1-\alpha/2}\widehat{SE}].$$

Este procedimiento está basado en la "cantidad pivotal"

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{N}_1(0, \mathcal{F}_1^{-1}(\theta)),$$

es decir,

$$\frac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\mathsf{var}(\widehat{\theta}_n)}} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{N}_1(0, 1).$$

[2] En efecto, $\mathsf{P}_\theta(\theta \in IC_n(\theta)) \to 1 - \alpha$ para $n \to \infty$.

Ejemplo (CI para la proporción en datos dicotómicos):

Sea $X_1, \dots, X_n$ muestra aleatoria desde $\mathsf{Ber}(p)$. Sabemos que el MLE de p es $\widehat{p}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$, y

$$\log f(x;p) = x \log p + (1-x)\log(1-p),$$

así

$$U(x;p) = \frac{x}{p} - \frac{1-x}{1-p}, \qquad U'(x;p) = \frac{x}{p^2} + \frac{1-x}{(1-p)^2}.$$

De este modo,

$$\mathcal{F}_1(p) = \mathsf{E}\{-U'(X;p)\} = \frac{p}{p^2} + \frac{1-p}{(1-p)^2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p(1-p)},$$

de ahí que

$$\widehat{\mathsf{SE}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{F}_n(\widehat{p}_n)}} = \frac{1}{\sqrt{n\mathcal{F}_1(\widehat{p}_n)}} = \sqrt{\frac{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)}{n}},$$

luego, un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ para p es dado por

$$\widehat{p}_n \mp z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)}{n}}.$$

Observación:

Considere $\lambda = g(\theta)$. Sabemos que el estimador ML de λ es dado por $\widehat{\lambda}_n = g(\widehat{\theta}_n)$. Además, usando el método Delta, sigue que

$$\frac{\widehat{\lambda}_n - \lambda}{\widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\lambda}_n)} \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{N}(0,1),$$

donde

$$\widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\lambda}_n) = |g'(\widehat{\theta}_n)|\,\widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\theta}_n).$$

Lo que lleva al intervalo de confianza asintótico

$$CI_n(\lambda) = [\widehat{\lambda}_n - z_{1-\alpha/2}\,\widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\lambda}_n), \widehat{\lambda}_n + z_{1-\alpha/2}\,\widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\lambda}_n)].$$

Ejemplo:

Sea $X_1, \dots, X_n$ muestra aleatoria desde $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$. Suponga que μ es conocido y considere $\psi = \log \sigma^2$. Sabemos que

$$\ell(\sigma^2) = -\frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2,$$

y

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2.$$

Además,

$$U_n(\sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2, \qquad U_n'(\sigma^2) = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(\sigma^2) = \mathsf{E}\{-U_n'(\sigma^2)\} &= -\frac{n}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^6} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\{(X_i - \mu)^2\} \\ &= -\frac{n}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^6} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{var}(X_i) = -\frac{n}{2\sigma^4} + \frac{n\sigma^2}{\sigma^6} = \frac{n}{2\sigma^4}. \end{aligned}$$

Intervalos de confianza

De ahí que,

$$\widehat{\mathsf{SE}}(\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{F}_n(\widehat{\sigma}^2)}} = \sqrt{\frac{2\sigma^4}{n}}.$$

Sea $\psi = g(\sigma^2) = \log \sigma^2$. Notando que $g'(\sigma^2) = 1/\sigma^2$, obtenemos:

$$\widehat{\mathsf{SE}}(\psi) = |g'(\sigma^2)|\widehat{\mathsf{SE}}(\sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\frac{2\sigma^4}{n}} = \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Finalmente,

$$CI_n(\psi) = \left[\widehat{\psi} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{2}{n}}; \widehat{\psi} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{2}{n}}\right],$$

donde $\widehat{\psi} = \log \widehat{\sigma}^2$.