EST-224: Probabilidad e Inferencia Estadística

Prueba 3. Junio 19, 2017 **Nombre:** __________________________

Tiempo: 80 minutos **Profesor:** Felipe Osorio

---

1. (20 pts) Considere R y S estimadores insesgados para θ

a) Muestre que para cualquier $\alpha \in [0,1]$,

$$T = \alpha R + (1-\alpha)S$$

es un estimador insesgado para θ.

b) Suponga que R y S son no correlacionados y que $\operatorname{var}(R) = \sigma^2$ y $\operatorname{var}(S) = \phi^2$. Obtenga $\operatorname{var}(T)$.

c) Determine el valor de $\alpha \in [0,1]$ tal que $\operatorname{var}(T)$ sea mínimo.

2. (20 pts) Sea $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias IID con densidad

$$f(x;\theta) = \frac{\theta}{x^2}\, I_{[\theta,\infty)}(x).$$

Determine el estimador de momentos de θ.

Sugerencia: Calcule el momento k-ésimo, μ_k y luego considere $k = \frac{1}{2}$.

3. (20 pts) Considere la función de densidad

$$f(x;b) = \frac{x^2}{2b^3} \exp\Big(-\frac{x}{b}\Big), \qquad x > 0, b > 0. \tag{1}$$

Obtenga el estimador ML de b basado en una muestra aleatoria $X_1, \dots, X_n$ desde la densidad dada en **(1)**. Calcule $\operatorname{var}(\widehat{b}_{\mathsf{ML}})$.

4. (20 pts) Sea $X_1, \dots, X_m$ y $Y_1, \dots, Y_n$ dos muestras independientes desde $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ y $\mathcal{N}(\mu_2, \phi^2)$, respectivamente. Obtenga un intervalo de confianza asintótico del $100(1-\alpha)\%$ para $\delta = \mu_1 - \mu_2$.

Instrucciones:

- Ud. debe escoger **solamente** 60 puntos.
- La comprensión de las preguntas hace parte de la evaluación.
- El "formulario" se encuentra a continuación.
- Consultas son hechas desde su asiento y en voz alta.

Algunas fórmulas útiles

- $\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}} = h(m_1, \dots, m_k)$, donde $m_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^j$.
- $\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}}$ es solución del problema:
$$\max_{\theta \in \Theta} \ell(\theta),$$
donde $\ell(\theta)$ denota la función de log-verosimilitud.
- $U(\theta) = \partial \ell(\theta)/\partial\theta$.
- $\mathcal{F}(\theta) = \operatorname{var}(U(\theta)) = \operatorname{E}(U^2(\theta)) = \operatorname{E}(-\partial^2\ell(\theta)/\partial\theta^2)$.
- Considere $X_1, \dots, X_n$ variable aleatorias IID. Entonces
$$\mathcal{F}_n(\theta) = n\mathcal{F}_1(\theta).$$
- Suponga $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ independiente de $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$. Entonces
$$\mathcal{F}_{X,Y}(\theta) = \mathcal{F}_X(\theta) + \mathcal{F}_Y(\theta).$$
- Un intervalo de confianza (asintótico) del $100(1-\alpha)\%$ para θ es dado por:
$$IC(\theta) = \Big[\widehat{\theta} - z_{1-\alpha/2}\widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\theta}), \widehat{\theta} + z_{1-\alpha/2}\widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\theta})\Big],$$
donde
$$\widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\theta}) = \sqrt{\operatorname{var}(\widehat{\theta})} = \sqrt{\frac{1}{n\mathcal{F}_1(\widehat{\theta})}}.$$
- Para $z > 0$ y $a > 0$, tenemos que
$$a^z\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t/a}\,\mathrm{d}t,$$
Además, si k es entero, $\Gamma(k) = (k-1)!$