MAT-042: Taller 6

Felipe Osorio

http://fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM

Ejercicio 1)

Es fácil verificar que $f(x) \geq 0$, y

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,\mathsf{d}x &= \frac{3}{4}\int_0^2 x(2-x)\,\mathsf{d}x = \frac{3}{4}\Big[\int_0^2 2x\,\mathsf{d}x - \int_0^2 x^2\,\mathsf{d}x\Big] \\ &= \frac{3}{4}\Big[2\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2\Big] = \frac{3}{4}\Big[2\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\Big] = \frac{3}{4}\Big[4 - \frac{8}{3}\Big] \\ &= \frac{3}{4}\Big(\frac{12-8}{3}\Big) = 1.\end{aligned}$$

Adicionalmente,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(X) &= \frac{3}{4}\int_0^2 x^2(2-x)\,\mathsf{d}x = \frac{3}{4}\Big[2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big]_0^2 = \frac{3}{4}\frac{2^4}{12} = 1, \\ \mathsf{E}(X^2) &= \frac{3}{4}\int_0^2 x^3(2-x)\,\mathsf{d}x = \frac{3}{4}\Big[2\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\Big]_0^2 = \frac{3}{4}\Big(2^3 - \frac{2^5}{5}\Big) = \frac{3}{4}\frac{8}{5} = \frac{6}{5},\end{aligned}$$

luego $\mathsf{var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \{\mathsf{E}(X)\}^2 = 6/5 - 1 = 1/5$.

Ejercicio 2)

a) Sea $a = 120$, se desea obtener

$$\mathsf{E}(X) = \frac{1}{a}\int_0^\infty x e^{-x/a}\,\mathrm{d}x$$

La integral puede ser evaluada usando la función gama. En efecto,

$$a^z\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1}e^{-u/a}\,\mathrm{d}u.$$

De ahí que

$$\mathsf{E}(X) = \frac{a^2\Gamma(2)}{a} = a.$$

En nuestro caso, la esperanza de vida de las plantas de esta especie es $\mathsf{E}(X) = 120$ días.

b) La función de distribución de X es,

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{120}e^{-t/120}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-x/120}.$$

Ejercicio 2)

c) La proporción de plantas que mueren dentro de los 100 primeros días es

$$\mathsf{P}(0 \leq X \leq 100) = F(100) = 1 - e^{-100/120} = 0.5654$$

d) Se desea calcular:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X \geq 200 | X \geq 100) &= \frac{\mathsf{P}(\{X \geq 200\} \cap \{X \geq 100\})}{\mathsf{P}(X \geq 100)} = \frac{\mathsf{P}(X \geq 200)}{\mathsf{P}(X \geq 100)} \\ &= \frac{1 - F(200)}{1 - F(100)} = \frac{e^{-200/120}}{e^{-100/120}} = e^{-100/120} \\ &= 0.4346,\end{aligned}$$

es decir, alrededor del 43% de las plantas que viven 100 días, vivirán al menos otros 100 días.

Ejercicio 3)

Sea R la distancia viajada por una hormiga desde el punto de liberación en 1 minuto. Entonces, R es una variable aleatoria continua con función de distribución

$$F(r) = \mathsf{P}(R \leq r) = 1 - e^{-2r}.$$

a) La proporción de hormigas que viajan más que 1 metro es

$$\mathsf{P}(R \geq 1) = 1 - F(1) = e^{-2} = 0.1353$$

b) La función de densidad de la variable R es:

$$f(r) = \frac{\mathsf{d}F(r)}{\mathsf{d}r} = 2e^{-2r}.$$

De ahí que la distancia promedio es

$$\mathsf{E}(R) = \int_0^\infty r f(r)\,\mathsf{d}r = \int_0^\infty 2re^{-2r\,\mathsf{d}\,r} = \frac{1}{2}.$$

Es decir, la distancia promedio recorrida en en 1 minuto desde el punto de liberación es medio metro.

Ejercicio 4)

Defina la variable aleatoria estándar $Z = (X-5)/2 \sim \mathsf{N}(0,1)$.

a) Se desea calcular,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(4 \leq X \leq 7) &= \mathsf{P}\left(\frac{4-5}{2} \leq \frac{X-5}{2} \leq \frac{7-5}{2}\right) = \mathsf{P}(-\tfrac{1}{2} \leq Z \leq 1)\\ &= \Phi(1) - \Phi(-\tfrac{1}{2}).\end{aligned}$$

Sin embargo $\Phi(-\frac{1}{2}) = 1 - \Phi(\frac{1}{2})$ y como $\Phi(1) = 0.8413$ y $\Phi(\frac{1}{2}) = 0.6915$. Por tanto,

$$\mathsf{P}(4 \leq X \leq 7) = \Phi(1) - (1 - \Phi(\tfrac{1}{2})) = 0.8413 - 1 + 0.6915 = 0.5328.$$

b) Tenemos,

$$\mathsf{P}(X \geq 10) = \mathsf{P}\left(\frac{X-5}{2} \geq \frac{5-10}{2}\right) = \mathsf{P}(Z \geq \tfrac{5}{2}) = 1 - \Phi(\tfrac{5}{2}).$$

Es decir, $\mathsf{P}(X \geq 10) = 1 - 0.9938 = 0.0062$.

Ejercicio 5)

Defina la variable aleatoria $Z = (T - 31)/5 \sim \mathsf{N}(0, 1)$.

a) Se desea calcular,

$$\mathsf{P}(T \leq 35) = \mathsf{P}\left(\frac{T - 31}{5} \leq \frac{31 - 35}{5}\right) = \mathsf{P}(Z \leq \tfrac{4}{5}) = \Phi(0.8) = 0.7881.$$

b) La probabilidad requerida es

$$\mathsf{P}(T \leq 35 | T \geq 30) = \frac{\mathsf{P}(\{T \leq 35\} \cap \{T \geq 30\})}{\mathsf{P}(T \geq 30)} = \frac{\mathsf{P}(30 \leq T \leq 35)}{\mathsf{P}(T \geq 30)}.$$

Como

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(30 \leq T \leq 35) &= \mathsf{P}\left(\frac{30 - 31}{5} \leq Z \leq \frac{35 - 31}{5}\right) = \mathsf{P}(-0.2 \leq Z \leq 0.8)\\ &= \Phi(0.8) - \Phi(-0.2) = \Phi(0.8) - (1 - \Phi(0.2))\\ &= 0.7881 - 1 + 0.5793 = 0.3674\end{aligned}$$

Ejercicio 5)

Mientras que

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(T \geq 30) &= \mathsf{P}(Z \geq -0.2) = 1 - \Phi(-0.2) = 1 - (1 - \Phi(0.2)) \\ &= \Phi(0.2) = 0.5793.\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\mathsf{P}(T \leq 35 | T \geq 30) = \frac{0.3674}{0.5793} = 0.6342.$$

Esto significa que aproximadamente el 63% de las unidades de comida que no han sido completamente digeridas después de 30 minutos serán digeridos después de 35 minutos.

Aproximando probabilidades binomiales

Considere $X \sim \text{Bin}(n, p)$, entonces

$$p(x) = \mathsf{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \qquad q = 1 - p,$$

y sea $\mu = np$. De este modo,

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!}\Big(\frac{\mu}{n}\Big)^x\Big(1-\frac{\mu}{n}\Big)^{n-x} \\ &= \frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-x+1}{n}\,\frac{\mu^x}{x!}\Big(1-\frac{\mu}{n}\Big)^n\Big(1-\frac{\mu}{n}\Big)^{-x}, \end{aligned}$$

para $n \to \infty$ tendremos $(n-x)/n \to 1$ y dado que $\mu/n = p$ es pequeño

$$(1-\mu/n)^{-x} \to 1.$$

Adicionalmente, $(1-\mu/n)^n \to e^{-\mu}$ esto lleva a

$$p(x) \approx \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}.$$

Observación:

La fórmula anterior permite una aproximación a la distribución binomial con $\mu = np$ donde n es grande y p pequeño.

Para la distribución binomial también podemos considerar,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2npq}(x-np)^2 \Big\}.$$

Es decir corresponde a la distribución normal con media $\mu = np$ y varianza $\sigma^2 = npq$ que es suficientemente preciso para $np \geq 10$.

Ejercicio 6)

Defina X como el número de personas en la muestra de 10 000 que son zurdos. Entonces X es una variable aleatoria binomial con $n = 10\,000$ y $p = 0.2$. El valor esperado de personas zurdas en la muestra es $\mu = \mathsf{E}(X) = np = 2000$. Mientras que la desviación estándar es

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10000 \cdot 0.2 \cdot 0.8} = \sqrt{1600} = 40.$$

Definiendo $Z = (X - 2000)/40$ tenemos que $Z \sim \mathsf{N}(0, 1)$. De ahí que,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X \geq 1900) &= \mathsf{P}\left(Z \geq \frac{1900 - 2000}{40}\right) = \mathsf{P}(Z \geq -2.5) \\ &= 1 - \Phi(-2.5) = 1 - (1 - \Phi(2.5)) = \Phi(2.5) = 0.9938. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(1960 \leq X \leq 2040) &= \mathsf{P}(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 \\ &= 0.6827. \end{aligned}$$

Ejercicio 7)

Si $X \sim \text{Bin}(10, \theta)$, entonces

$$\mathsf{P}(X = x) = \binom{10}{x}\theta^x(1-\theta)^{10-x}, \qquad x \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}.$$

Como $\mathsf{P}(X = 0) = 0.3486$, se tiene que:

$$\binom{10}{0}\theta^0(1-\theta)^{10} = 0.3486,$$

es decir,

$$(1-\theta)^{10} = 0.3486, \qquad \Longrightarrow \qquad 1 - \theta = 0.9,$$

de ahí que $\theta = 0.1$.

Lo anterior permite calcular,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X > 1) = 1 - \mathsf{P}(X = 0) - \mathsf{P}(X = 1) &= 1 - 0.3486 - \binom{10}{1}0.1(0.9)^9 \\ &= 1 - 0.3486 - 0.3874 = 0.2640.\end{aligned}$$

EX UMBRA IN SOLEM

Ejercicio 8)

Suponiendo que d está dado en tanto por ciento, la probabilidad p de que una pieza sea defectuosa es $p = d/100$. Si se seleccionan n piezas y X es el número de piezas defectuosas entre n, es claro que $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

a) De este modo, debemos calcular:

$$\mathsf{P}(X = 0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = (1-p)^n$$

b) En este caso $X \sim \text{Bin}(n, 0.1)$ y $\mathsf{P}(X = 0) = 0.9^n$. Por tanto, $0.9^n < 0.05$, es decir, $n \log 0.9 =< log 0.05$, o bien $n(-0.1053) < -2.9957$. Lo que lleva a,

$$n > \frac{2.9957}{0.1053} = 28.4332,$$

y por tanto n debe ser como mínimo 29.

Ejercicio 8)

c) Tenemos $X \sim \text{Bin}(40, p)$, y la condición adopta la forma:

$$(1-p)^{40} < 0.01,$$

es decir $1 - p < 0.8913$, o bien $p > 0.1087$. Lo que lleva a $d > 11\%$.

d) Suponiendo $d = 1\%$, $d = 4\%$ y $d = 7\%$, la variable X es $\text{Bin}(80, 0.01)$, $\text{Bin}(80, 0.04)$ y $\text{Bin}(80, 0.07)$, respectivamente. Luego,

$$\mathsf{P}(X = 2; p = 0.01) = \binom{80}{2}(0.01)^2(0.99)^{78} = 0.1443,$$
$$\mathsf{P}(X = 2; p = 0.04) = \binom{80}{2}(0.04)^2(0.96)^{78} = 0.2094,$$
$$\mathsf{P}(X = 2; p = 0.07) = \binom{80}{2}(0.07)^2(0.93)^{78} = 0.0539,$$

la mayor probabilidad se obtiene cuando $p = 0.04$, de ahí que la proporción más verosímil es $d = 4\%$.