MAT-032: Probabilidad y Estadística Comercial **Pauta de corrección**
Certamen 2. Mayo 4, 2021 Prof. Felipe Osorio, Enzo Hernández

---

1. Considere los eventos I : se produce un incidente, y A : suena la alarma. Desde la información provista en el enunciado tenemos:

$$\mathsf{P}(I) = 0,10, \qquad \mathsf{P}(I^c) = 0,90, \qquad \mathsf{P}(A|I) = 0,97, \qquad \mathsf{P}(A|I^c) = 0,02.$$

Note que,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A) &= \mathsf{P}(A|I)\,\mathsf{P}(I) + \mathsf{P}(A|I^c)\,\mathsf{P}(I^c) = 0,97 \cdot 0,10 + 0,02 \cdot 0,90\\ &= 0,097 + 0,018 = 0,115.\end{aligned}$$

De ahí que,

$$\mathsf{P}(I^c|A) = \frac{\mathsf{P}(A|I^c)\,\mathsf{P}(I^c)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{0,02 \cdot 0,90}{0,115} = 0,157,$$

es la probabilidad deseada.

2. Sea M_i el evento: la pieza producida en la i-ésima máquina ($i = 1,2,3,4$) y A: la pieza es defectuosa. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(M_1) &= \frac{5000}{10000} = 0.50, \qquad & \mathsf{P}(M_2) &= \frac{2500}{10000} = 0.25,\\ \mathsf{P}(M_3) &= \frac{1500}{10000} = 0.15, \qquad & \mathsf{P}(M_4) &= \frac{1000}{10000} = 0.10.\end{aligned}$$

Además sabemos desde el enunciado que

$$\mathsf{P}(A|M_1) = 0.01, \quad \mathsf{P}(A|M_2) = 0.03, \quad \mathsf{P}(A|M_3) = 0.60, \quad \mathsf{P}(A|M_4) = 0.10.$$

Se pide calcular

$$\mathsf{P}(M_i|A) = \frac{\mathsf{P}(M_i)\,\mathsf{P}(A|M_i)}{\sum_{i=1}^4 \mathsf{P}(M_i)\,\mathsf{P}(A|M_i)}, \qquad i = 1,2,3,4,$$

como $\sum_{i=1}^4 P(M_i)P(A|M_i) = 0.1125$ obtenemos

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(M_1|A) &= \frac{0.50 \cdot 0.01}{0.1125} = 0.0444, \qquad & \mathsf{P}(M_2|A) &= \frac{0.25 \cdot 0.03}{0.1125} = 0.0667,\\ \mathsf{P}(M_3|A) &= \frac{0.15 \cdot 0.60}{0.1125} = 0.8000, \qquad & \mathsf{P}(M_4|A) &= \frac{0.10 \cdot 0.10}{0.1125} = 0.0889.\end{aligned}$$

3.a. Tenemos que $f(x) = 0$, para $x < 0$ y $x > 3$, mientras que para $0 \le x \le 1$,

$$f(x) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}\frac{x^2}{5} = \frac{2}{5x},$$

y para $1 < x \le 3$, sigue que

$$f(x) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}\frac{(-x^2 + 6x - 4)}{5} = \frac{(-2x + 6)}{5}.$$

De este modo,

$$f(x)=\begin{cases}2x/5, & 0\leq x\leq 1,\\ (-2x+6)/5, & 1<x\leq 3,\\ 0, & \textsf{en otro caso.}\end{cases}$$

3.b. Se desea calcular

$$\mathsf{P}(X\leq 2)=F(2)=\frac{-x^2+6x-4}{5}\Big|_{x=2}=\frac{4}{5}.$$

Además

$$\mathsf{P}(1<X\leq 2)=F(2)-F(1)=\frac{4}{5}-\frac{x^2}{5}\Big|_{x=1}=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}.$$

Finalmente,

$$\mathsf{P}(X>\tfrac{1}{2})=1-\mathsf{P}(X\leq\tfrac{1}{2})=1-F(\tfrac{1}{2})=1-\frac{x^2}{5}\Big|_{x=1/2}=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}.$$

3.c. Se desea calcular:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(X)&=\int_0^3 xf(x)\,\mathsf{d}x=\int_0^1\frac{2x^2}{5}\,\mathsf{d}x+\int_1^3\frac{x(-2x+6)}{5}\,\mathsf{d}x\\ &=\frac{2}{5}\int_0^1 x^2\,\mathsf{d}x+\frac{1}{5}\int_1^3(-2x^2+6x)\,\mathsf{d}x\\ &=\frac{2}{5}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\frac{1}{5}\Big(\frac{2x^3}{3}+3x^2\Big)\Big|_1^3=\frac{2}{5}\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\Big(9-\frac{7}{3}\Big)\\ &=\frac{22}{15}.\end{aligned}$$

4. Por el teorema de probabilidad total sigue que

$$F_X(x)=P(X\leq x)=pF_1(x)+qF_2(x),$$

derivando obtenemos que la función de densidad de X es dada por

$$f_X(x)=pf_1(x)+qf_2(x).$$

Ahora

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(X)&=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)\,\mathsf{d}x=p\int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x)\,\mathsf{d}x+q\int_{-\infty}^{\infty}xf_2(x)\,\mathsf{d}x\\ &=p\,\mathsf{E}_1(X)+q\,\mathsf{E}_2(X)=p\,\mu_1+q\,\mu_2,\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(X^2)&=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_X(x)\,\mathsf{d}x=p\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_1(x)\,\mathsf{d}x+q\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_2(x)\,\mathsf{d}x\\ &p\,\mathsf{E}_1(X^2)+q\,\mathsf{E}_2(X^2)=p\,\phi_1+q\,\phi_2.\end{aligned}$$

Luego

$$\mathsf{var}(X)=\mathsf{E}(X^2)-\{\mathsf{E}(X)\}^2=p\,\phi_1+q\,\phi_2-(p\,\mu_1+q\,\mu_2)^2.$$