MAT-042, 2° Semestre 2013 **Pauta de Corrección**
Certamen 3. Enero 15, 2014
Tiempo: 90 Minutos Felipe Osorio, Patricio Videla.

---

1. Usando resultados de esperanzas y varianzas condicionales, tenemos que

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X)), \qquad \mathrm{var}(Y) = \mathrm{E}(\mathrm{var}(Y|X)) + \mathrm{var}(\mathrm{E}(Y|X)),$$

como $Y|X \sim \chi^2_{N+2x}$ y $X \sim \mathsf{Poi}(\lambda)$. Sigue que

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X)) = \mathrm{E}(N + 2X) = N + 2\,\mathrm{E}(X) = N + 2\lambda,$$

mientras que

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(Y) &= \mathrm{E}(\mathrm{var}(Y|X)) + \mathrm{var}(\mathrm{E}(Y|X)) = \mathrm{E}(2(N+2X)) + \mathrm{var}(N+2X)\\ &= 2N + 4\,\mathrm{E}(X) + 4\,\mathrm{var}(X) = 2N + 8\lambda.\end{aligned}$$

2.a. La función de verosimiltud asociada a la muestra $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$ asume la forma

$$L(\phi; \boldsymbol{Y}) = \phi^{-2n}\Big(\prod_{i=1}^n y_i\Big)\exp\Big(-\frac{1}{\phi}\sum_{i=1}^n y_i\Big).$$

de este modo la función de log-verosimilitud es dada por

$$\ell(\phi; \boldsymbol{Y}) = -2n\log\phi + \sum_{i=1}^n \log y_i - \frac{1}{\phi}\sum_{i=1}^n y_i.$$

Resolviendo la condición de primer orden $U(\phi) = \mathrm{d}\,\ell(\phi;\boldsymbol{Y})/\,\mathrm{d}\phi = 0$, tenemos

$$U(\phi) = -\frac{2n}{\phi} + \frac{1}{\phi^2}\sum_{i=1}^n y_i = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{\phi} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n y_i = \frac{\overline{y}}{2}.$$

En efecto $\widehat{\phi}$ corresponde al estimador máximo verosímil pues

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\ell(\phi;\boldsymbol{Y})}{\mathrm{d}\phi^2}\Big|_{\phi=\widehat{\phi}} = \Big\{\frac{2n}{\phi^2} - \frac{2n\overline{y}}{\phi^3}\Big\}\Big|_{\phi=\widehat{\phi}} = \frac{2n}{\widehat{\phi}^2}\Big(1 - \frac{\overline{y}}{\widehat{\phi}}\Big) = -\frac{2n}{\widehat{\phi}^2} < 0.$$

Como $Y \sim \mathsf{Gama}(2, \phi)$ sabemos que $\mathrm{E}(Y) = 2\phi$ y $\mathrm{var}(Y) = 2\phi^2$. De este modo,

$$\mathrm{var}(\widehat{\phi}) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{var}(Y_i) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^n 2\phi^2 = \frac{\phi^2}{2n}.$$

2.b. Como

$$\mathrm{E}(\widehat{\phi}) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}(Y_i) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n 2\phi = \phi,$$

es decir $\widehat{\phi}$ es estimador insesgado. Por otro lado, $\widehat{\phi}$ es estimador consistente pues

$$\lim_{n\to\infty} ECM(\widehat{\phi}) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{var}(\widehat{\phi}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\phi^2}{2n} = 0.$$

3. Tenemos una muestra aleatoria desde $X \sim \mathcal{N}(0, \theta)$, de este modo

$$\frac{X}{\sqrt{\theta}} \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{\theta} \sim \chi_n^2.$$

por lo tanto $Q(\boldsymbol{X}; \theta) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2/\theta$ es una cantidad pivotal. Luego,

$$P\Big(\chi_n^2(\alpha/2) \leq \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \leq \chi_n^2(1-\alpha/2)\Big) = 1-\alpha$$
$$P\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\chi_n^2(1-\alpha/2)} \leq \theta \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\chi_n^2(\alpha/2)}\Big) = 1-\alpha.$$

Entonces el intevalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ para θ es dado por

$$IC(\theta) = \Big[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\chi_n^2(1-\alpha/2)}; \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\chi_n^2(\alpha/2)}\Big]$$

Desde la muestra de datos se obtuvo $\sum_{i=1}^{10} = 379,15$. Por lo tanto

$$IC_{95\%}(\theta) = \Big[\frac{379,15}{20,489}; \frac{379,15}{3,247}\Big] = [18,510; 116,769].$$

4. Sea X : ventas (diarias) de un negocio de computación (M\$). Se supone que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ donde $\sigma^2 = 80.000^2$. Se desea probar la hipótesis

$$H_0 : \mu = 450.000 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > 450.000$$

Luego el estadístico de prueba es:

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Evaluando en los datos muestrales obtenemos,

$$t = \frac{\sqrt{49}(475.000 - 450.000)}{80.000} = 2,1875.$$

La región crítica es:

$$RC = \{T \leq Z_{0.95}\} = \{T \leq 1.645\}.$$

De este modo se rechaza H_0, la campaña fue efectiva en el aumento de las ventas.