MAT-042: Probabilidad y Estadística Industrial
Taller 7, 2022 **Profesor:** Felipe Osorio

---

1. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n desde la variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x;\theta) = \frac{(x+1)}{\theta(\theta+1)} \exp(-x/\theta), \qquad x > 0,\, \theta > 0.$$

Encuentre estimadores **a)** ML y **b)** de momentos para θ.

Puede ser útil: Recuerde que

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x/s}\,\mathrm{d}x = s^a\,\Gamma(a).$$

2. Sea $X_1, \dots, X_n$ muestra aleatoria desde la densidad

$$f(x;\theta) = \theta \exp(-\theta x), \qquad x > 0.$$

Obtenga intervalos de confianza asintóticos del $100(1-\alpha)\%$ para **a)** θ y, **b)** $\lambda = 1/\theta$.

3. Un ingeniero civil hace pruebas con la resistencia a la compresión de bloques de concreto. Para ello examina 12 especímenes obteniendo una media de 2260 psi y una desviación estándar de 36 psi. Pruebe la hipótesis $\mu = 2270$ psi contra la alternativa $\mu \neq 2270$ psi. Use $\alpha = 0.05$.

Puede ser útil: considerar alguno de los siguientes valores cuantiles,

$$z_{0.950} = 1.6449, \qquad t_{0.950}(11) = 1.7959, \qquad \chi^2_{0.950}(11) = 19.6751,$$
$$z_{0.975} = 1.9600, \qquad t_{0.975}(11) = 2.2010, \qquad \chi^2_{0.975}(11) = 21.9201.$$

4. Para modelar valores extremos se ha sugerido la distribución Gumbell con densidad

$$f(x) = e^{-(x-\theta)} \exp[-e^{-(x-\theta)}], \qquad x \in \mathbb{R}, \theta > 0.$$

Obtenga el estimador de momentos de θ.

Sugerencia: Obtener la MGF de X y note que $-\Gamma'(1) = \gamma \approx 0.577216$ es la constante de Euler, donde

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty u^{a-1}\, e^{-u}\,\mathrm{d}u, \qquad a > 0.$$

denota la función Gama.

5. Considere variables aleatorias independientes $X_1, \dots, X_n$ y $Y_1, \dots, Y_n$ desde una distribución $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ y $\mathsf{N}(\mu, \lambda\sigma^2)$, respectivamente, donde μ es conocido.

a) Suponga que $\sigma^2 > 0$ es conocido. Obtenga el MLE de $\lambda > 0$.

b) Asuma que ámbos σ^2 y λ son desconocidos. Obtenga el MLE de $\boldsymbol{\theta} = (\sigma^2, \lambda)^\top$.

6. Sea $X_1, \dots, X_n$ muestra aleatoria de tamaño n desde una distribución $\mathsf{Poi}(\lambda)$ con función de densidad

$$f(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x \in \{0, 1, \dots\}, \lambda > 0.$$

Considere el conjunto de datos

$$\boldsymbol{x} = \{2, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 2\}.$$

Obtenga un intervalo de confianza asintótico del $100(1-\alpha)\%$ para λ con $\alpha = 0.05$.

Puede ser útil: considere alguno de los siguientes valores cuantiles,

$$z_{0.975} = 1.96, \qquad t_{0.975}(9) = 2.26, \qquad \mathsf{Poi}_{0.975}(0.8) = 3.00.$$

7. Suponga que $X_1, \dots, X_n$ representa una muestra aleatoria desde $\mathsf{U}(a,b)$ donde a y b son parámetros desconocidos con $a < b$. Obtenga los estimadores de momentos de a y b.

Recuerde que: Si $X \sim \mathsf{U}(a,b)$. Entonces,

$$f(x;a,b) = \frac{1}{b-a}, \qquad x \in [a,b].$$

Además puede ser útil: $b^3 - a^3 = (b-a)(a^2 + ab + b^2)$.