EST-224: Probabilidad e Inferencia Estadística **Pauta de Corrección**
Prueba 1. Abril 3, 2017
Tiempo: 80 Minutos Felipe Osorio

---

1. Se desea calcular $r = \operatorname{cor}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Notando que las observaciones centradas $u_i = x_i - \overline{x}$ y $z_i = y_i - \overline{y}$ son dadas por

$$\boldsymbol{u} = \{-5, 0, -5, 5, -5, 10, -5, 10, -5\}, \qquad \boldsymbol{z} = \{2, -2, -2, -2, 4, -2, -2, -2, 6\},$$

luego

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{9}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \sum_{i=1}^{9} u_i z_i \\
&= (-5)2 + 0(-2) + (-5)(-2) + 5(-2) + (-5)4 + 10(-2) + (-5)(-2) + 10(-2) + (-5)6 \\
&= -10 + 0 + 10 - 10 - 20 - 20 + 10 - 20 - 30 = -90.
\end{aligned}$$

Sabemos que $\sum_{i=1}^{9}(x_i - \overline{x})^2 = 350$ y $\sum_{i=1}^{9}(y_i - \overline{y})^2 = 80$. De este modo,

$$\operatorname{cor}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}} = \frac{-90}{\sqrt{350 \cdot 80}} = -0.53785$$

2. Sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + n\overline{x}^2,$$

dividiendo ámbos términos por $(n-1)s^2$, tenemos

$$\kappa = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{(n-1)s^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{(n-1)s^2} + \Big(\frac{n}{n-1}\Big)\frac{\overline{x}^2}{s^2},$$

como $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = (n-1)s^2$ y $CV = s/\overline{x}$, sigue que

$$\kappa = 1 + \Big(\frac{n}{n-1}\Big)\frac{1}{CV^2},$$

como deseado.

3. Como A, B y C son mutuamente excluyentes, sabemos que

$$A \cap B = \varnothing, \qquad A \cap C = \varnothing, \qquad B \cap C = \varnothing, \qquad A \cap B \cap C = \varnothing.$$

a) De este modo,

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) = 0.2 + 0.3 + 0.2 = 0.7.$$

b) Se desea calcular

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A^c \cap (B \cup C)) &= \mathrm{P}((A^c \cap B) \cup (A^c \cap C)) \\
&= \mathrm{P}(A^c \cap B) + \mathrm{P}(A^c \cap C) - \mathrm{P}((A^c \cap B) \cap (A^c \cap C)),
\end{aligned}$$

pero

$$(A^c \cap B) \cap (A^c \cap C) = A^c \cap B \cap C \cap A^c = \varnothing$$

Luego,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^c \cap (B \cup C)) &= \mathrm{P}(A^c \cap B) + \mathrm{P}(A^c \cap C) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap C) \\ &= \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) = 0.2 + 0.3 = 0.5.\end{aligned}$$

c) Debemos calcular

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B \cup C^c) - \mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C^c) - \mathrm{P}(B \cap C^c) - \mathrm{P}(B) \\ &= 1 - \mathrm{P}(C) - \{\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(B \cap C)\} = 1 - \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(C) \\ &= 1 - 0.5 = 0.5.\end{aligned}$$

4. a) Sabemos

$$\mathrm{P}(A \cap B^c) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B),$$

pero, si $B \subset A \Rightarrow A \cap B = B$, luego

$$\mathrm{P}(A \cap B^c) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B).$$

4. b) Tenemos que

$$\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A^c)} = \frac{\mathrm{P}(A)}{1 - \mathrm{P}(A)} = \frac{a}{b},$$

es decir

$$b\,\mathrm{P}(A) = a(1 - \mathrm{P}(A)) \quad \Rightarrow \quad (a + b)\,\mathrm{P}(A) = a,$$

de donde sigue que

$$\mathrm{P}(A) = \frac{a}{a + b}.$$