

MAT-042: Probabilidad y Estadística Industrial**Certamen 2. Junio 10, 2022****Tiempo: 70 minutos****Nombre:** _____**Profesor:** Felipe Osorio

1. Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 120x(y-x)(1-y), & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- a. (10 pts) Determine la densidad marginal de Y .
- b. (10 pts) Obtenga la densidad condicional de X dado $Y = y$.
- c. (10 pts) Calcule $P(X > \frac{1}{4} | Y = \frac{1}{2})$.
2. (40 pts) Sea Y_1, \dots, Y_n una muestra aleatoria desde la variable aleatoria Y , con función de densidad:

$$f_Y(y; \phi) = \frac{y}{\phi^2} e^{-y/\phi}, \quad y > 0, \phi > 0.$$

Determine el estimador máximo verosímil de ϕ , ¿ $\hat{\phi}$ es insesgado? Obtenga su varianza y verifique que $\hat{\phi}$ es consistente.

Sugerencia: Recuerde que un estimador $\hat{\theta}_n$ se dice consistente, si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{MSE}(\hat{\theta}_n) = 0.$$

3. (30 pts) Se sabe que la efectividad de un medicamento en el alivio de cierta enfermedad es del 60%. Los resultados experimentales sobre un nuevo medicamento administrado a una muestra de 144 personas que sufrían de esa enfermedad muestran 100 casos con alivio. ¿Se puede concluir, a un nivel del 0.05, que el nuevo medicamento tiene la misma efectividad que el antiguo?

Puede ser útil: considerar alguno de los siguientes valores cuantiles,

$z_{0.950} = 1.6449,$	$t_{0.950}(12) = 1.7823,$	$\chi^2_{0.950}(12) = 21.0261,$
$z_{0.975} = 1.9600,$	$t_{0.975}(12) = 2.1788,$	$\chi^2_{0.975}(12) = 23.3367,$
$z_{0.990} = 2.3263,$	$t_{0.990}(12) = 2.6810,$	$\chi^2_{0.990}(12) = 26.2170,$
$z_{0.995} = 2.5758,$	$t_{0.995}(12) = 3.0545,$	$\chi^2_{0.995}(12) = 28.2995.$