

1. (25 pts) La densidad de una variable aleatoria chi-cuadrado no central, con N grados de libertad y parámetro de no centralidad λ , es dada por

$$f_Y(y; N, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} g(y; N + 2j), \quad (1)$$

donde $g(y; \nu)$ representa la densidad de una distribución chi-cuadrado con ν grados de libertad. Si Y tiene la densidad dada en (1) anotamos $Y \sim \chi_N^2(\lambda)$. La distribución chi-cuadrado no central tiene la siguiente propiedad

$$Y|X \sim \chi_{N+2x}^2, \quad X \sim \text{Poi}(\lambda). \quad (2)$$

Usando la representación en (2) obtenga $E(Y)$ y $\text{var}(Y)$.

2. El tiempo (en minutos) para llevar a cabo una determinada tarea asociada con un proceso industrial, es una variable aleatoria Y cuya función de densidad está dada por:

$$f_Y(y; \phi) = \frac{y}{\phi^2} e^{-y/\phi}, \quad y > 0, \phi > 0.$$

- a. (15 pts) Sea Y_1, \dots, Y_n una muestra aleatoria desde la variable aleatoria Y . Determine el estimador máximo verosímil $\hat{\phi}$ y obtenga su varianza.
- b. (10 pts) ¿ $\hat{\phi}$ es un estimador insesgado? Verifique si $\hat{\phi}$ es un estimador consistente.
- Sugerencia:* Recuerde que la definición de consistencia:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon) = 0,$$

es equivalente a la condición:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ECM(\hat{\theta}_n) = 0.$$

3. (25 pts) Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de tamaño n desde la densidad

$$f_X(x; \theta) = (2\pi\theta)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \theta > 0.$$

Obtenga un intervalo de confianza del 95% para θ en base al siguiente conjunto de datos:

-1.5	-6.4	1.2	6.4	6.0
8.7	-11.0	-1.2	5.5	-5.4

Sugerencia: Considere los valores cuantiles $q_1 = 3.247$ y $q_2 = 20.483$ tales que $P(\chi_n^2 \leq q_1) = \alpha/2$ y $P(\chi_n^2 \geq q_2) = \alpha/2$ con $n = 10$ y $\alpha = 0.05$.

4. (25 pts) Por investigaciones de mercado anteriores se sabe que las ventas diarias de un negocio de computación es de 450 mil pesos, con una desviación estándar de 80 mil pesos. Se lleva a cabo una campaña publicitaria por un período de seis meses, tras lo cual se registran las ventas de 49 días seleccionados al azar. Se encuentra que la venta promedio es de 475 mil pesos. ¿Ha existido aumento real en las ventas después de la campaña publicitaria? Use $\alpha = 0.05$.