EST-224: Probabilidad e Inferencia Estadística **Pauta de Corrección**
Prueba 3. Junio 19, 2017
Tiempo: 80 Minutos Felipe Osorio

---

1. a) Tenemos

$$\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(\alpha R + (1-\alpha)S) = \alpha\,\mathrm{E}(R) + (1-\alpha)\,\mathrm{E}(S) = \alpha\theta + (1-\alpha)\theta = \theta,$$

es decir T es un estimador insesgado.

1. b) Como R y S son no correlacionados, sigue que

$$\operatorname{var}(T) = \operatorname{var}(\alpha R + (1-\alpha)S) = \alpha^2 \operatorname{var}(R) + (1-\alpha)^2 \operatorname{var}(S) = \alpha^2\sigma^2 + (1-\alpha)^2\phi^2.$$

1. c) Sea $V(\alpha) = \operatorname{var}(T)$. Entonces,

$$V'(\alpha) = 2\alpha\sigma^2 - 2(1-\alpha)\phi^2 = 2\alpha(\sigma^2+\phi^2) - 2\phi^2,$$

y

$$V''(\alpha) = 2(\sigma^2+\phi^2) > 0.$$

Así, desde $V'(\alpha) = 0$, obtenemos

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{\phi^2}{\sigma^2+\phi^2}, \qquad \alpha_{\text{opt}} \in (0,1).$$

2. Primeramente, obtenemos el momento k-ésimo,

$$\mu_k = \mathrm{E}(X^k) = \theta \int_\theta^\infty x^{k-2}\,\mathrm{d}x = \theta\Big\{\lim_{x\to\infty} \frac{x^{k-1}}{k-1} - \frac{\theta^{k-1}}{k-1}\Big\},$$

así para $k < 1$, obtenemos

$$\mu_k = \theta\,\frac{\theta^{k-1}}{1-k} = \frac{\theta^k}{1-k}, \qquad k < 1.$$

Usando $k = \frac{1}{2}$, tenemos que $\mu_{1/2} = 2\sqrt{\theta}$. Luego, por el método de los momentos debemos resolver la ecuación $\mu_{1/2} = m_{1/2}$, de este modo:

$$2\sqrt{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^{1/2} \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{\theta}_{\mathsf{MM}} = \frac{1}{4n^2}\Big(\sum_{i=1}^n x_i^{1/2}\Big)^2.$$

3. Considere $x_1,\dots,x_n$ una $\mathsf{m.a.}(n)$ desde la densidad

$$f(x;b) = \frac{x^2}{2b^3}\exp\Big(-\frac{x}{b}\Big), \qquad x>0, b>0, \tag{1}$$

la función de log-verosimilitud asume la forma

$$\ell(b;\boldsymbol{x}) = -n\log 2 - 3n\log b + \sum_{i=1}^n \log x_i - \frac{1}{b}\sum_{i=1}^n x_i,$$

y, desde la condición

$$U(b) = \frac{\mathrm{d}\,\ell(b;\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}\,b} = -\frac{3n}{b} + \frac{1}{b^2}\sum_{i=1}^n x_i = 0$$

sigue que

$$3nb - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{b}_{\mathsf{ML}} = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^n x_i = \frac{\overline{x}}{3}.$$

Para obtener la varianza de $\widehat{b}_{\mathsf{ML}}$, primeramente debemos calcular la derivada de la función score

$$U'(b) = \frac{3n}{b^2} - \frac{2}{b^3}\sum_{i=1}^n x_i.$$

De este modo, tenemos que la información de Fisher asume la forma

$$\mathcal{F}_n(b) = \mathrm{E}(-U'(b)) = -\frac{3n}{b^2} + \frac{2}{b^3}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}(X_i).$$

Debemos obtener $\mathrm{E}(X)$ para el modelo definido por la densidad en Ecuación (1), es decir

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2b^3}\int_0^\infty x^{4-1}\exp(-x/b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2b^3}\,b^4\Gamma(4) = 3b,$$

lo que lleva a

$$\mathcal{F}_n(b) = -\frac{3n}{b^2} + \frac{6nb}{b^3} = \frac{3n}{b^2}.$$

Finalmente, la varianza de $\widehat{b}_{\mathsf{ML}}$ es dada por:

$$\mathrm{var}(\widehat{b}_{\mathsf{ML}}) = \mathcal{F}_n^{-1}(b) = \frac{b^2}{3n},$$

y un estimador de esta cantidad, puede ser escrito como

$$\widehat{\mathrm{var}}(\widehat{b}_{\mathsf{ML}}) = \frac{\widehat{b}^2_{\mathsf{ML}}}{3n} = \frac{\overline{x}^2}{27n}.$$

4. Sabemos que

$$\widehat{\mu}_1 = \overline{X}, \qquad \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m (X_i - \overline{X})^2,$$

$$\widehat{\mu}_2 = \overline{Y}, \qquad \widehat{\phi}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2,$$

de este modo $\widehat{\delta} = \overline{X} - \overline{Y}$. Además,

$$\ell(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{z}) = \ell(\mu_1,\sigma^2;\boldsymbol{x}) + \ell(\mu_2,\phi^2;\boldsymbol{y}),$$

con $\boldsymbol{\theta} = (\mu_1,\sigma^2,\mu_2,\phi^2)^\top$, $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}^\top,\boldsymbol{y}^\top)^\top$, donde

$$\ell(\mu_1,\sigma^2;\boldsymbol{x}) = -\frac{m}{2}\log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^m (x_i - \mu_1)^2,$$

$$\ell(\mu_2,\phi^2;\boldsymbol{y}) = -\frac{n}{2}\log 2\pi\phi^2 - \frac{1}{2\phi^2}\sum_{i=1}^n (y_i - \mu_2)^2.$$

Por la independencia entre $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ sigue que

$$\mathcal{F}_n(\delta) = \mathcal{F}_n(\mu_1) + \mathcal{F}_n(\mu_2),$$

(además tenemos que $\widehat{\mu}_1, \widehat{\sigma}^2$ y $\widehat{\mu}_2, \widehat{\phi}^2$ son independientes) con $\mathcal{F}_n(\mu_j) = \mathrm{E}\{-U'(\mu_j)\}$, para $j = 1, 2$. Note que:

$$U(\mu_1) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu_1)^2, \qquad U'(\mu_1) = -\frac{m}{\sigma^2},$$
$$U(\mu_2) = \frac{1}{\phi^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_2)^2, \qquad U'(\mu_2) = -\frac{n}{\phi^2},$$

de este modo

$$\mathcal{F}_n(\delta) = \frac{m}{\sigma^2} + \frac{n}{\phi^2},$$

asi una estimación del error estándar es dada por:

$$\widehat{\mathsf{SE}}(\delta) = \sqrt{1/\mathcal{F}_n(\widehat{\delta})} = \frac{1}{\sqrt{m/\widehat{\sigma}^2 + n/\widehat{\phi}^2}}.$$

Finalmente un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ para δ asume la forma:

$$IC(\delta) = \Big[\widehat{\delta} - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{m/\widehat{\sigma}^2 + n/\widehat{\phi}^2}}, \widehat{\delta} + \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{m/\widehat{\sigma}^2 + n/\widehat{\phi}^2}}\Big],$$

con $\widehat{\delta} = \overline{x} - \overline{y}$.