EST-224: Probabilidad e Inferencia Estadística **Pauta de Corrección**
Prueba 2. Mayo 15, 2017
Tiempo: 80 Minutos Felipe Osorio

---

1. Tenemos que

$$\mathrm{P}(C^c) = \frac{99\,994}{100\,000} = 0.99994,$$

también

$$\mathrm{P}(T|C) = 1 - \mathrm{P}(T^c|C) = 1 - 0.16 = 0.84, \qquad \mathrm{P}(T^c|C^c) = 1 - \mathrm{P}(T|C^c) = 1 - 0.10 = 0.90.$$

a) De este modo, usando el teorema de probabilidad total:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T) &= \mathrm{P}(C)\,\mathrm{P}(T|C) + \mathrm{P}(C^c)\,\mathrm{P}(T|C^c) = 0.00006 \cdot 0.84 + 0.99994 \cdot 0.10 \\ &= 0.1000444\end{aligned}$$

b) Se desea

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(C|T) &= \frac{\mathrm{P}(C \cap T)}{\mathrm{P}(T)} = \frac{\mathrm{P}(C)\,\mathrm{P}(T|C)}{\mathrm{P}(T)} \\ &= \frac{0.00006 \cdot 0.84}{0.00006 \cdot 0.84 + 0.99994 \cdot 0.10} = \frac{504}{504 + 99\,994} \\ &= 0.000504.\end{aligned}$$

Es decir, por cada 1 millón de PAPs positivos sólo 504 son casos *verdaderos* de cáncer cervicouterino.

2. a) Se debe calcular,

$$1 = \int_{-1}^{1} kx^2 \,\mathrm{d}x = k\Big(\frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2k}{3},$$

es decir, $k = 3/2$.

2. b) En este caso,

$$\mathrm{E}(X) = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x \cdot x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\Big(\frac{x^4}{4}\Big)\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Además,

$$\mathrm{E}(X^2) = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^2 \cdot x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\Big(\frac{x^5}{5}\Big)\Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{5}.$$

Así, $\operatorname{var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) = \mathrm{E}(X^2) = 3/5$.

2. c) Note que

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X^2) - 2\,\mathrm{E}(X) + 6 = \frac{3}{5} + 6 = \frac{33}{5}.$$

3. Se pide calcular $\psi_Y(t) = \mathrm{E}(e^{ty})$, es decir

$$\psi_Y(t) = \frac{1}{e^\lambda - 1}\sum_{y=1}^\infty e^{ty}\,\frac{\lambda^y}{y!} = \frac{1}{e^\lambda - 1}\sum_{y=1}^\infty \frac{(\lambda e^t)^y}{y!},$$

sabemos que $\sum_{k=1}^\infty z^k/k! = e^z - 1$, por tanto

$$\psi_Y(t) = \frac{1}{e^\lambda - 1}\{\exp(\lambda e^t) - 1\}.$$

4. Note que, la CDF de la variable aleatoria X es dada por:

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{a}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}(u)\Big|_0^x = \frac{x}{a}.$$

a) Tenemos que

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(\sqrt{X} \leq y) = \mathrm{P}(X \leq y^2) = F_X(y^2) = \frac{y^2}{a}.$$

Ahora,

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\,F_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\,\frac{y^2}{a} = \frac{2y}{a}.$$

Además, es fácil notar que $\mathcal{X} = [0, a]$ es transformado en $\mathcal{Y} = [0, \sqrt{a}\,]$. Por tanto,

$$f_Y(y) = \frac{2y}{a}, \qquad 0 \leq y \leq \sqrt{a}.$$

b) Debemos calcular

$$F_Z(z) = \mathrm{P}(Z \leq z) = \mathrm{P}(e^X \leq z) = \mathrm{P}(X \leq \log z) = F_X(\log z) = \frac{1}{a}\log z,$$

es fácil notar que,

$$f_Z(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,F_Z(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{1}{a}\log z = \frac{1}{az},$$

como $\mathcal{X} = [0, a]$ tenemos $\mathcal{Z} = [1, e^a]$. Finalmente,

$$f_Z(z) = \frac{1}{az}, \qquad 1 \leq z \leq e^a.$$