4.3 多值函数

由于复平面幅角的多值性，不能把复变函数简单定义为从复平面到复平面的映射。一个更加现代的复变函数定义是：从 Riemann（黎曼）面到复平面的映射。因此从内容的讲授上，是在复平面的基础上先介绍了简单 Riemann 面的构造。当然一个复平面是最简单的 Riemann 面。由于 Riemann 面的构造非常复杂，在通常的情况下并没有整体的结构，因此我们不会对这部分的内容没有进行深入的讨论，只介绍了几种简单的具有整体结构的 Riemann 面。复变函数的内容是数学上一个大的分支，这里我们没有涉及其数学结构和复分析的理论，只是着重让学生掌握复变函数的解析运算与积分运算，复变函数的级数展开，以及如何用复积分来计算难以求积的一些类型的实积分。

下面介绍如何构造 Riemann 面.

首先要研究 $f(z)$ 在定义域 $\mathbf{C}$ 中出现“多值性”的某些点的性质.

定理 4.2

对于 $f(z)$ 的定义域 $\mathbf{C}$，若存在 $z_0 \in \mathbf{C}$，当自变量 z 绕 z_0 转一圈回到原来位置时，$f(z)$ 的值不还原，则称 z_0 为 $f(z)$ 的枝点.

那么什么样的点是 $f(z)$ 的枝点呢？很多时候，使 $f(z)=0$ 的点或使 $f(z)=\infty$ 的点可能是 $f(z)$ 的枝点 ♡

当 z 绕 z_0 转 n 圈（最少的圈数）后，$f(z)$ 的值还原了，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 $n-1$ 阶枝点.

4.3.1 $\sqrt{z}$

具体对于 $f(z)=\sqrt{z}$，取 $z_0=0$ 点时，当 z 绕其转一圈时，$f(z)=\sqrt{z}$ 的值不还原，而绕两圈时，$f(z)$ 的值还原了，则 $z_0=0$ 点是 $f(z)=\sqrt{z}$ 的一阶枝点. 同时，我们可以看出，除 $z_0=0$ 点外，其他的 $\mathbf{C}$ 上的有限远点都不是 $f(z)=\sqrt{z}$ 的枝点，因为 z 绕这些点一圈后 $f(z)$ 的值还原了.

定理 4.3

若要考虑 z 为 ∞ 的点，此时作一变量代换，令 $\zeta=\frac{1}{z}$，则 $\zeta=0$ 时，$z=\infty$。♡

对 $f(z)=\sqrt{z}=\frac{1}{\sqrt{\zeta}}$，当 ζ 绕 $\zeta_0=0$ 一圈时 f 的数值不还原，而绕两圈时 f 的值还原了，因此可看出，$\zeta=0$ 亦是 $f(z)=\sqrt{z}$ 的一个一阶枝点，因此 $f(z)=\sqrt{z}$，在 $\mathbf{C}$ 上有两个一阶枝点，即 $z_0=0,\infty$.

确定了一个 $f(z)$ 的枝点后，如何构造 Riemamn 面呢？

重要公式 4.2

我们把两个枝点之间用一条直线或曲线连起来（一般情况下尽可能取直线），自变量 z 不能通过（越过）此线作连续变化，即把原来自变量的定义域用线割开了. 我们把这种连接两个枝点间的联线称为割线. 用割线割开的自变量定义域就变成了一个单值分支的定义域 C_i，如果我们把这些单值分支的定义域的割线的上下沿互相粘接起来，就构成了 Riemann 面，记为 C^R. ♠

对于 $f(z)=\sqrt{z}$ 的两个一阶枝点, $z_0=0,\infty$, 我们一般取 x 轴从 $0\to\infty$ (或沿负 x 轴到无穷远点) 为割线. 这样自变量就分成了 $C_1:\arg z:0\to 2\pi, C_2:\operatorname{Arg} z:2\pi\to 4\pi$. 把 C_1 的割线下沿 $\arg z=2\pi$ 与 C_2 的上沿 $\operatorname{Arg} z=2\pi$ 粘接 (注意这种粘接不是物理意义上的粘接, 而是数学构造意义上的粘接). 当 z 从 C_1 的上沿一点开始绕 $z_0=0$ 转时, 到 $\mathbf{C}$ 的下沿时就顺利的转到 C_2 的上沿, 再继续绕 $z_0=0$ 点转到 C_2 的下沿时, 顺利地回到 C_1 的上沿的起始点, 这样粘接而成的 Riemann 面就是 $f(z)=\sqrt{z}$ 的单值映射的定义域了[6].

在本课程中, 所涉及的 Riemann 面的构造即简单开方型的函数 (如 $f(z)=\sqrt{z-a}, f(z)=\sqrt{(z-a)(z-b)}$, 并含非整数幂型)、简单对数函数 (即 $\ln z$) 等的 Riemann 面. 对一般无多值性问题的函数, 其 Riemann 面即复平面 $\mathbf{C}$ 本身. 在完成了对 Riemann 面的构成的讨论后, 我们可以给复变函数一个严格的定义: 从 Riemann (黎曼) 面到复平面的映射

例题 4.4

$$f(z)=\sqrt{(z-a)(z-b)}$$

, a,b 为支点， ∞ 不是支点

例题 4.5 把 $f(z)=\sqrt{z}$ 在 $z=0$ 点展成 Taylor 级数.

解：因为 $z=0$ 是 $f(z)$ 的枝点, 故 $f(z)$ 无法在枝点展成 Taylor 级数.

枝点处不解析

4.3.2 对数函数

对数函数是指数函数的反函数

$$w=\ln z$$

其多值性也来源于辐角的多值性. 令

$$z=\rho e^{i\varphi}=\rho e^{i(\varphi_0+2k\pi)}, \quad 0\leqslant\varphi_0<2\pi, \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

则有

$$w=u+iv=\ln\rho+i(\varphi_0+2k\pi)$$

由于 z 环绕 $z=0$ 或 ∞ 转一周时, $\arg z$ 改变 $2\pi, \ln z$ 改变 $i2\pi$, 故 $z=0,\infty$ 是对数函数的枝点.

从 $z=0$ 沿正实轴作一割线至 $z=\infty$, 规定

$$2k\pi\leqslant\arg z<2(k+1)\pi$$

则得 $w=\ln z$ 的第 k 分支.

4.3.3 多值函数积分

例题 4.6

$$I=\int_0^\infty\frac{dx}{(x+a)^3x^{1/2}}, \quad a>0, \qquad a=1 \tag{4.30}$$

[6](1) 关于 Riemann 面构造的问题, 是一个很复杂的问题, 像我们例子 $f(z)=\sqrt{z}$ 的 Riemann 面, 它有整体的结构, 即如果我们把 ∞ 点看成一点时, 此时的 Riemann 面就与一个二维环面 T^2 (游泳圈面) 同胚, 有整体的空间结构, 但复杂的 Riemann 面一般没有整体的结构, 只可能分析局域的结构性质.

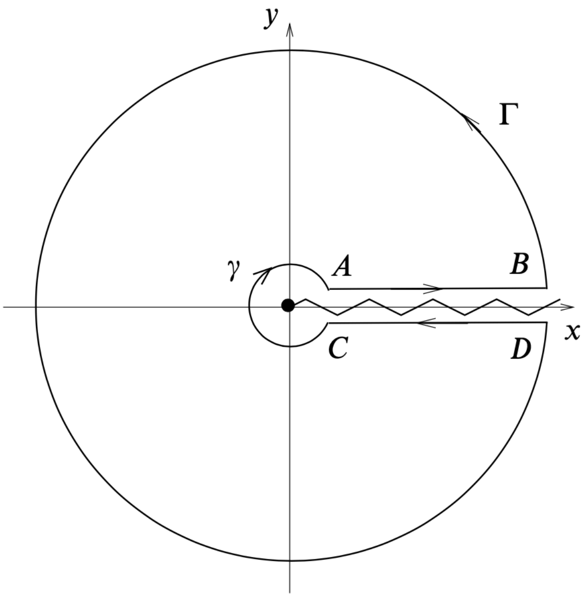

图 4.3: 典型的多值函数积分围道图

解 大致思路：通过在复平面上构造闭合的围道积分，用留数定理积分，积分曲线上一部分为所求的事数积分，一部分为和所求积分有一些关系（通常是旋转一定角度），同时大圆弧上积分一般为 0，小圆弧上积分或者常数或者 0。

第一步：构造被积分的表达式

$$f(z)=\frac{dz}{(z+a)^3z^{1/2}},\quad a>0,\qquad a=1 \tag{4.31}$$

观察该表达式里面有 $\sqrt{z}$, 所以如果要构造单值函数，必须割开复平面，即构造割线，这样其实是提示我们构造积分围道时必须绕开割线（根号函数的割线）

第二步：构造如上图所示的积分围道，其中 Γ 是半价为 R 的大圆，γ 是半价为 ρ 的小圆。都以根式的支点, 原点为圆心。最后让 t $R\to\infty$ and $\rho\to 0$.

第三步：利用留数定理,

$$\int_{AB}+\int_{\Gamma}+\int_{DC}+\int_{\gamma}=2\pi iRes[f(z),z=-a] \tag{4.32}$$

$f(z)=(z+a)^{-3}z^{-1/2}$ ，在 $\rho\to 0$ 以及 $R\to\infty$ 时 $|zf(z)|\to 0$. 大小圆弧上的积分，在无穷大和无穷小半径大极限下积分分别为 0。利用大小圆弧引理。

求留数：

积分围道内有 $z=-a$ 三阶奇点. 留数计算方法一：

直接在 $-a$ 处展开求留数, 带入 $z=-a+\xi$ 再展开 (注意 $(-a)^{1/2}=a^{1/2}\exp(i\pi/2)=ia^{1/2}$)
:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z+a)^3z^{1/2}}&=\frac{1}{\xi^3ia^{1/2}(1-\xi/a)^{1/2}}\\&=\frac{1}{i\xi^3a^{1/2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\xi}{a}+\frac{3}{8}\frac{\xi^2}{a^2}+\cdots\right)\end{aligned}$$

因此留数为 $-3i/\left(8a^{5/2}\right)$.

留数计算方法二：直接带入三阶奇点的公式，留数为

$$(1/\sqrt{z})^{(2)}/2|_{z=-a} = -3i/\left(8a^{5/2}\right)$$

因此

$$\int_{AB} + \int_{\Gamma} + \int_{DC} + \int_{\gamma} = 2\pi i\left(\frac{-3i}{8a^{5/2}}\right) \tag{4.33}$$

大圆弧 $\int_\Gamma$ 和小圆弧上的积分 $\int_\gamma$ 为 0（大小圆弧引理[7]）
沿着线 AB 上 $z=x$，
而沿着线 DC $z=xe^{2\pi i}$
带入上面的公式得到

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^3x^{1/2}} + \int_\infty^0 \frac{dx}{[x\exp 2\pi i + a]^3 x^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2}2\pi i\right)} = \frac{3\pi}{4a^{5/2}} \tag{4.34}$$

$$\left(1-\frac{1}{\exp \pi i}\right)\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^3x^{1/2}} = \frac{3\pi}{4a^{5/2}}$$
$$I = \frac{1}{2}\times\frac{3\pi}{4a^{5/2}} \tag{4.35}$$

带入 $a=1$，

$$I = \frac{3\pi}{8}$$

学而时习之

(i) 求下列函数的枝点以及如何构造割线 (1) $\sqrt[3]{(z-1)(z-100)}$; (2) $z+\ln z$; (3) $\sqrt{z}\ln z$.
(ii) 求 $\frac{z^2-3}{(z-1)^3(z-2)}$ 在环区域 $1<|z|<2$ 内的洛朗展开

课程预告

- 留数定理进阶：教程第六章
- 课前十分钟四位同学到黑板上不看讲义计算，如果有同学觉得例题简单的话，可以做一道上面的习题代替我指定的例题——

  彭思远：写出 $\sqrt{z}$ 的支点并构造割线，有几个单值分支

彭想：写出 $logz$ 的支点，并构造割线，有多少单值分支
彭彦哲：计算

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^3x^{1/2}}$$

区靖愉：计算

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^3x^{1/2}}$$

[7]小圆弧引理：如果函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 点的空心邻域内连续，并且在 $\theta_1 \leqslant arg(z-a) \leqslant \theta_2$ 中，当 $|z-a|\to 0$ 时，$(z-a)f(z)$ 一致地趋近于 k，则 $\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}k\left(\theta_2-\theta_1\right)$ C_δ 是以$z=a$ 为圆心、δ 为半径、张角为$\theta_2-\theta_1$ 的圆弧，$|z-a|=\delta, \theta_1 \leqslant \arg(z-a) \leqslant \theta_2$ 大圆弧引理：设 $f(z)$ 在 ∞ 点的邻域内连续，在 $\theta_1 \leqslant argz \leqslant \theta_2$ 中，当 $|z|\to\infty$ 时，$zf(z)$ 一致地趋近于 K，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}K\left(\theta_2-\theta_1\right),$$

C_R 是以原点为圆心、R 为半径、张角为 $\theta_2-\theta_1$ 的圆弧，$|z|=R, \theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2$