

2.3 复微分与解析函数

定义 2.3

复变量 z 的函数 $f(z)$ 称为在某个区域 R 内解析, 如果它 1) 在此域内单值; 2) 有限; 3) 在域 R 内任一点处存在极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \equiv f'(z),$$

且其值与 Δz 趋向于零的方式无关 (即该极限存在且唯一)。



注意: 我们把 $f(z)$ 在给定一个点 z 上满足上述定义叫 $f(z)$ 在 z 处可导或者可微。弱 $f(z)$ 在区域 R 内处处可导, 则称 $f(z)$ 是区域 R 内的解析函数。更严格的名词定义见用后续学了泰勒展开后再回头讨论⁶

例题 2.8 根据定义证明

$$f(z) = z^2$$

是复平面上的解析函数

z^* 在复平面上不解析

根据所给的定义容易证明, 略。

注意: 复变量函数的导数的定义形式上和大一学过的实数几乎一样, 所以各种求导规则原则上可以拿来直接套用。只是要注意复变函数有是两个实数变量的组合, 所以一个复变量函数根据上面的导数定义, 可能满足可导和解析的条件非常苛刻。

现寻求函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 解析的条件。我们先讨论复微分/解析的必要条件。可以简单利用 Δz 从实轴和虚轴上趋于 0 给出的极限必须一样, 得到一个必要条件。

$$\begin{aligned} f'(z) &\stackrel{\Delta y=0}{\underset{\Delta x \rightarrow 0}{\lim}} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ &\stackrel{\Delta y \rightarrow 0}{\underset{\Delta x=0}{\lim}} \frac{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{i \Delta y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

⁶Consider the function $f(z)$ on the domain $G \subset \text{Domain}(f)$.

f is called *differentiable* at the point z_0 if the differential quotient

重要公式 2.6

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_{z_0} = f'(z)|_{z_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{z_0} = \frac{1}{i} \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{z_0} \quad (2.20)$$



exists.

If f is (arbitrarily often) differentiable in the domain G it is called *holomorphic*. We shall state without proof that, if a holomorphic function is differentiable, it is also arbitrarily often differentiable.

If a function can be expanded as a convergent power series, like $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, in the domain G then it is called *analytic* in the domain G . We state without proof that holomorphic functions are analytic, and vice versa; that is the terms “holomorphic” and “analytic” will be used synonymously.

概念上说清楚: 在某一点可导则可微, 反之亦然, 不区分

在区域内处处可微, 则全纯 (holomorphic) 或者不区分叫解析 (analytic) 函数。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.21)$$

比较实部和虚部得到

重要公式 2.7

Cauchy-Riemann equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

例题 2.9 证明:

$$\begin{aligned} |f'(z)|^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \end{aligned}$$

证明

$$\frac{df}{dz} = f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2.23)$$

再求模方, 则得到第一行的两个表达式; 第一行分别带入柯西-黎曼条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

得到第二行的公式。

可见复变函数可导或者在区域内解析需要满足很强的条件。但是正是因为复解析的条件苛刻, 导致复解析函数有绝妙的性质。

我们先讨论利用复解析的 Cauchy-Riemann 示意性的推到复变函数最核心的定理——柯西定理 (也可以看成 Cauchy-Riemann 条件最直接的一个应用的例题)

定理 2.1

(柯西定理) 如果函数 $f(z)$ 在区域 R 内解析, 则此函数沿着复平面中区域 R 内的任一简单闭曲线 C 的积分都等于零。

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

证明 假定

$$f(z) = u + iv \text{ 和 } dz = dx + idy,$$

$$\begin{aligned}
I &= \oint_c f(z) dz = \oint_c [u(x, y) + iv(x, y)][dx + idy] \\
&= \oint_c [u dx - v dy] + i[v dx + u dy] \\
\text{use } \oint_c P dx + Q dy &= \iint dxdy (Q_x - P_y) \text{ (Green Theorem)} \\
\Rightarrow I &= \iint dxdy \{[-v_x - u_y] + i[u_x - v_y]\} . \\
\text{Cauchy-Riemann eqs. } v_x &= -u_y \quad u_x = v_y \\
\Rightarrow I &= 0 = \oint_c f(z) dz
\end{aligned} \tag{2.25}$$

数学系的复变函数书上有更严格的证明 (条件可以进一步放松), 然后我们这里只需要掌握这种简单但体现复变函数核心思想的证明方法。

例题 2.10 计算

$$\begin{aligned}
&\oint_{|z|=1} z dz \\
&\oint_{|z|=1} z^2 dz \\
&\oint_{|z|=1} z^{100} dz \\
&\oint_{|z-3|+|z+3|=10} z^{100} dz
\end{aligned}$$

2.3.1 简要复习实变函数微积分基本定理

微积分基本定理: 广义 Stokes 公式 1. Newton-Leibniz $\int_a^x f(t) dt = \Phi(x) - \Phi(a)$, $a \leq x \leq b$

2. Green

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

3. Stokes

$$\begin{aligned}
\oint_L P dx + Q dy + R dz &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx \\
&\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy
\end{aligned}$$

4. Gauss

$$\iiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

5. 广义 Stokes

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega$$

这些公式是微积分基本定理 (从一维到任意高维微积分)。一般的证明, 特别是广义 Stokes 定理, 有兴趣的同学可以学习外微分的知识。

2.4 柯西定理在光学中的应用——菲涅尔积分

The Fresnel Integrals

$$S(R) = \int_0^R \sin x^2 dx \quad C(R) = \int_0^R \cos x^2 dx$$

$R \rightarrow \infty$ 可解析积分

$$S \equiv \int_0^\infty \sin x^2 dx \quad C \equiv \int_0^\infty \cos x^2 dx \quad (2.26)$$

同样的方法, 不同的积分路径, 可以见后面讲傅立叶变换时证明 Gaussian 函数的傅立叶变换还是 Gaussian。

2.4.1 柯西定理构造积分围道严格积分

Solution:

1. 选定积分函数: 观察 S 和 C 分别对应 $\int_0^\infty e^{ix^2} dx$ 的 real 和 imaginary, 猜测可以构造被积分函数

$$f(z) = e^{iz^2} \quad (2.27)$$

2. 构造积分围道: 构造半径为 R , 弧度为 $\pi/4$ 的扇形积分围道, 如图所示

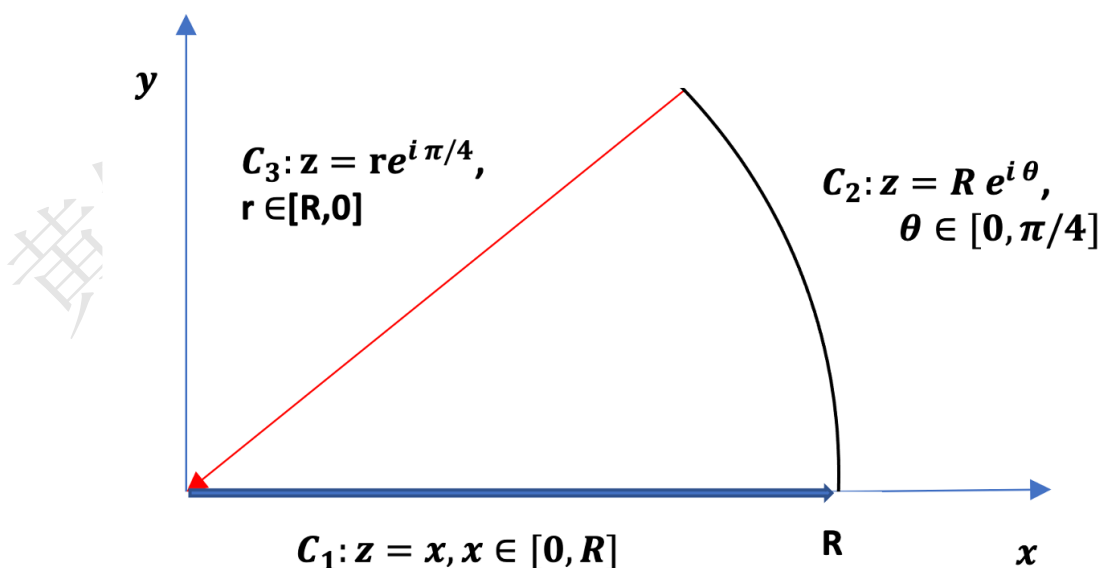


图 2.6: 积分围道

3. 应用柯西定理:

$$\oint_{C_1+C_2+C_3} e^{iz^2} dz = 0 \equiv I_1 + I_2 + I_3 \quad (2.28)$$

$$I_1 = \int_{C_1} e^{iz^2} dz \quad I_2 = \int_{C_2} e^{iz^2} dz \quad I_3 = \int_{C_3} e^{iz^2} dz \quad (2.29)$$

3.1

$$C_1 : z = x \quad dz = dx \quad z^2 = x^2 \quad x \in [0, R] \quad (2.30)$$

$$I_1 = \int_0^R dx e^{ix^2} \quad (2.31)$$

$R \rightarrow \infty$ 时, real 和 imaginary 分别对应 S 和 C

3.2

$$C_3 : z = re^{i\frac{\pi}{4}}, r \in [R, 0] \quad (2.32)$$

$$dz = e^{i\frac{\pi}{4}} dr \quad (2.33)$$

$$z^2 = r^2 e^{i\frac{\pi}{2}} = ir^2 \quad (2.34)$$

$$e^{iz^2} = e^{-r^2} \quad (2.35)$$

$$I_3 = \int_R^0 e^{-r^2} e^{i\frac{\pi}{4}} dr = - \int_0^R e^{-r^2} e^{i\pi/4} dr = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-r^2} dr \quad (2.36)$$

$R \rightarrow \infty$ 时, 积分部分对应 Gaussian 积分 ($G = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

3.3

$$C_3 : z = Re^{i\theta}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \quad (2.37)$$

$$dz = d\theta iRe^{i\theta}, z^2 = R^2 e^{i2\theta} \quad (2.38)$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta e^{iR^2 e^{i2\theta}} iRe^{i\theta} \quad (2.39)$$

$R \rightarrow \infty$ 时, $I_2 \rightarrow 0$, 先得到主要结果, 再证明这个。

由柯西定理,

$$R \rightarrow \infty \Rightarrow I_1 + I_2 + I_3 = 0, \quad I_2 = 0 \quad (2.40)$$

即

$$\int_0^\infty dx e^{ix^2} - e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^\infty e^{-r^2} dr = 0 \quad (2.41)$$

$$\int_0^\infty dx e^{ix^2} = C + iS = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^\infty e^{-r^2} dr = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (2.42)$$

Joke: 柯西叫菲涅尔遛了一个圈，结果变成了高斯

补充知识高斯积分：

I will now show you how to do the integral $G \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}x^2}$. The trick is to square the integral, call the dummy integration variable in one of the integrals y , and then pass to polar coordinates(

$$dxdy = r d\theta dr \quad (2.43)$$

):

$$\begin{aligned} G^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-\frac{1}{2}y^2} = 2\pi \int_0^{+\infty} dr r e^{-\frac{1}{2}r^2} \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} dw e^{-w} = 2\pi \end{aligned}$$

Thus, we obtain

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}x^2} = \sqrt{2\pi}$$

补充证明：

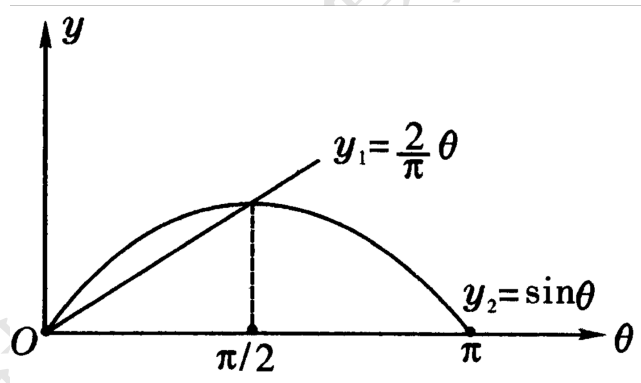


图 2.7: Jordan 不等式的证明

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta e^{iR^2 e^{i2\theta}} i R e^{i\theta} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta e^{iR^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} i R e^{i\theta} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta e^{iR^2 \cos 2\theta} e^{-R^2 \sin 2\theta} i R e^{i\theta} \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$|e^{i\theta}| = 1 \quad (2.45)$$

$$|e^{iR^2 \cos \theta}| = 1$$

$$|I_2| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta e^{-R^2 \sin 2\theta} R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{2} e^{-R^2 \sin \alpha} R \quad (2.46)$$

比较图中直线和曲线的函数值得到

$$\sin \alpha > \frac{2\alpha}{\pi}$$

$$\Rightarrow e^{-R^2 \sin \alpha} < e^{-R^2 \frac{2\alpha}{\pi}}$$

$$\begin{aligned} |I_2| &< \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{2} e^{-R^2 \frac{2\alpha}{\pi}} R \\ &= \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}) \stackrel{R \rightarrow \infty}{=} 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

故得证明 $R \rightarrow \infty$ 时, I_2 为 0, 该证明方法很有用, 将来会用来证明 jordan 引理, 大圆弧引理等。

思考题

1. 逐步总结复变函数求导的方法? 定义法? 实变函数求导规则? Cauchy-Riemann? 其它方法?
- 2.

$$f(z) = z^2$$

的实部和虚部在电磁学中对应的物理意义?

3. 实变函数和复变函数求导以及沿着曲线的积分有什么异同?

学而时习之

1. 若 $f(z)$ 为解析函数, 请问 $f^*(z)$ 是否为解析函数? $f^*(z^*)$ 是否为解析函数?
- 2.

$$\oint_{|z-3|+|z+3|=10} (z^2 + z^5 + z^7) dz$$

3. 在极坐标下, 推导出复变函数解析需要满足的 Cauchy-Riemann 条件
4. 已经解析函数 $f(z)$ 的虚部为 $v(x, y) = \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}$, 求该解析函数的实部以及 $f(z)$ 的完整表达式

课程预告

- 讲解这次课没时间证明的“圆弧上积分为 0”
- 课前十分钟四位同学到黑板上不看讲义计算，如果有同学觉得例题简单的话，可以做一道上面的习题代替我指定的例题——

李昊然：假设已经知道圆弧上积分为 0，计算 $\int_0^\infty \sin x^2 dx$ $\int_0^\infty \cos x^2 dx$ ；

肖家宇：根据解析函数的定义，推导 Cauchy-Riemann 条件

招泓正：根据 Cauchy-Riemann 条件，推导柯西定理：如果函数 $f(z)$ 在区域 R 内解析，则此函数沿着复平面中区

域 R 内的任一简单闭曲线 C 的积分都等于零。

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

曾鑫：假设已经知道圆弧上积分为 0，计算 $\int_0^\infty \sin x^2 dx$ $\int_0^\infty \cos x^2 dx$ ；

- 通过更多的例子，更加深入的讲解复变函数可导和解析的条件（柯西-黎曼条件）及其最重要的应用——得到复变函数的核心，即柯西定理。然后是柯西定理的应用。对应教材上 2.3 3.1 3.2.3.3 节