第三章　复变函数进阶

3.1　复变函数的级数展开

3.1.1　无穷级数

无穷级数, 特别是幂级数, 是解析函数的重要表达形式之一. 事实上, 除了代数函数, 许多初等函数和特殊函数都是用幂级数定义的. 在复变函数理论中, 无穷级数的许多基本概念, 和高等数学中的实数级数完全相似. 对于这部分内容, 我们将不加证明地叙述一下有关结论. 请读者在注意表述的相似性的同时, 更要关注内涵上可能存在的差异.

给定复数级数

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

如果它的部分和

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

所构成的序列 $\{S_n\}$ 收敛, 则称级数 $\sum u_n$ 收敛, 而序列 $\{S_n\}$ 的极限 $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, 称为级数 $\sum u_n$ 的和; 否则, 级数 $\sum u_n$ 是发散的. 级数的收敛性, 完全等价于其部分和序列的收敛性. 因此, 根据序列收敛的充要条件, 可以写出无穷级数收敛的 Cauchy 充要条件: $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 正整数 n, 使对于任意正整数 p, 有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

特别是, 令 $p = 1$, 就得到级数收敛的必要条件

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 绝对收敛. 因为

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots u_{n+p}| \leqslant |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}|,$$

所以绝对收敛的级数一定收敛. 反之, 收敛级数不一定绝对收敛. 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ 是实数级数, 而且是正项级数, 所以高等数学中的任何一种正项级数的收敛判别法都可以用来判别复数级数是否绝对收敛. 下面列出最常用的几个判别法.

例题 3.1 考察几何级数 $\sum_{n=0} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$ 的收敛性.

几何级数的部分和为

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

由于当 $|z|<1$ 时, $z^n \to 0$, 此时部分和序列 $\{S_n\}$ 收敛,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-z}.$$

而当 $|z| \geqslant 1$ 时, $|z^n| \geqslant 1$, 不满足级数收敛的必要条件 (4.4) 式, 因此几何级数发散. 综上所述, 知

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots = \begin{cases} \frac{1}{1-z}, & |z|<1, \\ \text{发散}, & |z| \geqslant 1. \end{cases}$$

重要公式 3.1

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (|z|<1) \tag{3.1}$$

这个例题非常重要, 在证明泰勒定理、洛朗定理, 以及将函数展开为幂级数时都要用到. 你们以后遇到很多求函数级数展开的题都可以用这个几何级数展开的方法，但前提是要凑出一个模小于 1 的变量。

3.2 泰勒展开

As a consequence of Cauchy's (generalized) integral formula, analytic functions have power series representations.

今研究解析函数展开成泰勒级数的可能性和此级数的收敛半径问题。

先给出奇点的定义：如果函数 $f(z_0)$ 在点 $z=z_0$ 处不解析, 则此点就称为函数 $f(z)$ 的奇点; 也可称函数 $f(z)$ 在点 z_0 处有奇异性。

思考：Why Taylor expansioin? eg. 已经函数在 $f(x_0)$ 出的函数值，则 $f(x_0+\xi) = f(x_0)+f'(x_0)\xi$

定理 3.1 设函数 $f(z)$ 在点 $z=z_0$ 处解析, 离此点最近的奇点为 z_0+a, 则在以 z_0 为圆心, $|a|$ 为半径的圆内 $f(z)$ 可表示成收敛幂级数的和。

证明：在 $|\xi|<r<|a|$ 时有:

$$\begin{aligned} & f(z_0+\xi) - f(z_0) = \\ = & \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) \left[\frac{1}{z-z_0-\xi} - \frac{1}{z-z_0}\right] dz \end{aligned}$$

这里 C 为以 z_0 为圆心, r 为半在的圆。

$$f(z_0+\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0-\xi} dz \tag{3.2}$$

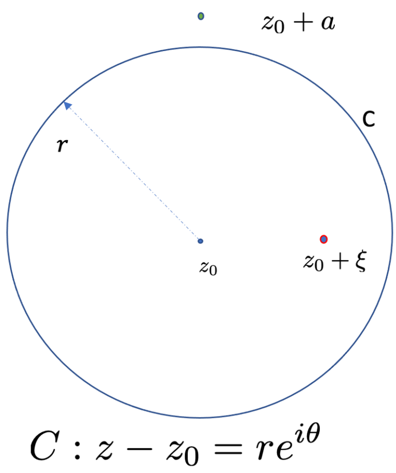

图 3.1: 泰勒展开

方法一：迭代法将被积表达式作变化:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-z_0-\xi} =& \frac{1}{z-z_0} + \frac{\xi}{(z-z_0)(z-z_0-\xi)} = \\ =& \frac{1}{z-z_0} + \frac{\xi}{z-z_0}\left[\frac{1}{z-z_0} + \frac{\xi}{(z-z_0-\xi)(z-z_0)}\right] = \\ =& \frac{1}{z-z_0} + \frac{\xi}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{\xi^N}{(z-z_0)^{N+1}} + \\ &+ \frac{\xi^{N+1}}{(z-z_0)^{N+1}(z-z_0-\xi)}\end{aligned}$$

最后有

$$\begin{aligned}&f(z_0+\xi) - f(z_0) = \\ =& \frac{1}{2\pi i}\oint_C \sum_{n=1}^{N} \frac{\xi^n f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}} + R_N\end{aligned}$$

这里

$$R_N = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\xi^{N+1}}{(z-z_0)^{N+1}(z-z_0-\xi)} dz$$

现证明, 当 $N \to \infty$ 时, R_n 趋向于零, 在围道 C 上 $z - z_0 = re^{i\theta}$, 而 $f(z)$ 由于解析, 故有界。显然, $z - z_0 - \xi \neq 0$ 。所以余项 R_N 可作如下的估计:

$$|R_N| < \text{const.}\left|\frac{\xi}{r}\right|^{N+1}$$

这里的常数不依赖于 N 。但 $|\xi| < r$, 因此

$$\lim_{N\to\infty} R_N = 0$$

而此即表示成立等式

$$f(z_0+\xi) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\xi^n,$$

这里位于右边的级数对所有 $|\xi|<|a|$ 都收敛。定理证毕。

这是复变函数解析延拓的基础 (解析延拓是我们后面将多值函数变成现在学习的单值函数的基础)

方法二：几何级数法

直接利用几何级数的方法

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{k=0}^{\infty}t^k(|t|<1)$$

但是要注意首先要凑出模小于 1 的变量

$t\equiv\frac{\xi}{z-z_0}$

$$\frac{1}{z-z_0-\xi}=\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{\xi}{z-z_0}}=\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\xi}{z-z_0})^n$$

$$\Rightarrow f\left(z_0+\xi\right)=\frac{1}{2\pi}\oint_c\frac{f(z)}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi}{z-z_0}\right)^{\eta}dz=f\left(z_0\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(z_0\right)}{n!}\xi^n$$

例题 3.2 证明 $F(z)=\frac{z}{1-z-z^2},z\in C$ ，的泰勒展开系数 F_n 为斐波那契数列[1]，1. 当 $|z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2},F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nz^n$ 。

解

这一类 0 点附近的泰勒展开题（麦克劳林展开），一般先找 0 附近最近的疑似奇点，然后确定收敛半径，最后在收敛半径内用定义或者等比级数等方法求出泰勒展开的系数

当 $|z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$$\begin{aligned}F(z)&=\frac{z}{1-z-z^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z}-\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot z\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot z\right)^n\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot z\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot z\right)^n\right)\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)z^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}F_nz^n.\end{aligned}$$

[1] $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。黄金分割比例

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\end{aligned}$$

在收敛圆内逐项求导

例题 3.3 试以 $z=0$ 为中心展开 $f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$ 为泰勒级数.

解 先展开 $\frac{1}{1-z}$ 为级数, 再逐项求导可得

$$
\begin{aligned}
f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{1-z}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{\infty}z^k\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}kz^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k,\quad |z|<1
\end{aligned}
$$

利用两个绝对收敛的幂级数的乘积或商

例题 3.4 以 $z=0$ 为中心在 $|z|<1$ 区域展开 $f(z)=\frac{\mathrm{e}^z}{1-z}$.

解

先将分子与分母分别展开为幂级数

$$
\mathrm{e}^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots,\quad |z|<\infty
$$

$$
\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots,\quad |z|<1
$$

这两个级数均在 $|z|<1$ 内绝对收敛, 它们的乘积也在 $|z|<1$ 内绝对收敛 (证明方法与实变函数类似), 利用 “多项式” 的乘法将它们相乘 (实际上有无穷多项) :

由此可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^z}{1-z}&=1+\left(1+\frac{1}{1!}\right)z+\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)z^2+\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)z^3+\cdots\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!}z^k,\quad |z|<1
\end{aligned}
$$

学而时习之

1. 将 $sinz$ 在 $z=n\pi$ 处展开为泰勒级数
2. 计算
$$
\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+z+1}\tag{3.3}
$$
3. 将 $2z-z^2$ 在 $z=2$ 处展开为泰勒级数
4. 将 $\frac{1}{z^2+z+1}$ 在 $z=0$ 处展开为泰勒级数

课程预告

- □ 泰勒级数展开 5.2 节
- □ 洛朗级数展开，对应教材 5.4, 5.4 节
- □ 课前十分钟四位同学到黑板上不看讲义计算，如果有同学觉得例题简单的话，可以做一道上面的习题代替我指定的例题——

  贾昊 wen 火文 $F(z)=\frac{z}{1-z-z^2}, z\in C$ 在 0 处的泰勒展开系数，$|z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

  贾浩然

  证明定理 3.1 ：设函数 $f(z)$ 在点 $z=z_0$ 处解析，离此点最近的奇点为 z_0+a, 则在以 z_0 为圆心，$|a|$ 为半径的圆内 $f(z)$ 可表示成收敛幂级数的和。

  赖秋怡

  试以 $z=0$ 为中心展开 $f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$ 为泰勒级数

  江佳航

  以 $z=0$ 为中心在 $|z|<1$ 区域展开 $f(z)=\frac{e^z}{1-z}$.