3.3 泰勒展开拓展与洛朗展开

3.3.1 泰勒展开拓展

上节课我们讲了解析函数在解析区域点一个解析点附近一定能做泰勒展开，并通过具体的实例介绍了求泰勒展开的几种常见方法。

例题 3.5 试以 $z=0$ 为中心将 $f(z)=\ln\frac{1+z}{1-z}$ 展开为泰勒级数.

解 为求各阶泰勒系数 $a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, 先求 $f(z)$ 的各阶导数, 即

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \ln\frac{1+z}{1-z}\bigg|_{z=0}=\ln 1=0\\
f^{(1)}(0) &= \frac{2}{1-z^2}\bigg|_{z=0}=2\\
f^{(2)}(0) &= 4z\left(1-z^2\right)^{-2}\Big|_{z=0}=0\\
f^{(3)}(0) &= \left[-8z\left(1-z^2\right)^{-3}(-2z)+4\left(1-z^2\right)^{-2}\right]\Big|_{z=0}=2\cdot 2!\\
f^{(4)}(0) &= 0
\end{aligned}
$$

$$f^{(5)}(0)=2\cdot 4!$$

将以上数值代人 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$ 得

$$
\begin{aligned}
f(z)=\ln\frac{1+z}{1-z} &= 2\left(0+\frac{1}{1!}z+0+\frac{2!}{3!}z^3+0+\frac{4!}{5!}z^5+\cdots\right)\\
&= 2\left(\frac{z}{1}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\cdots+\frac{z^{2k+1}}{2k+1}+\cdots\right)=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{2k+1}
\end{aligned}
$$

今天我们继续介绍另外两种常用的泰勒展开的方法

在收敛圆内逐项求导

例题 3.6 试以 $z=0$ 为中心展开 $f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$ 为泰勒级数.

解 先展开 $\frac{1}{1-z}$ 为级数, 再逐项求导可得

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(1-z)^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{1-z}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{\infty}z^k\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}kz^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k,\quad |z|<1
\end{aligned}
$$

在收敛圆内逐项积分:

例题 3.7 取 $\arctan 0=0$, 试以 $z=0$ 为中心展开 $\arctan z$ 为泰勒级数.

解 由于 $\arctan z=\int_0^z\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$, 故展开 $\frac{1}{1+z^2}$ 后逐项积分即得

$$\arctan z=\int_0^z\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\int_0^z\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kz^{2k}\,\mathrm{d}z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}z^{2k+1},\quad |z|<1$$

例题 3.8 试用逐项积分法重新计算上一节课的例题：以 $z=0$ 为中心将 $f(z)=\ln\frac{1+z}{1-z}$ 展开为泰勒级数.

解 由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\ln\frac{1+z}{1-z}\right)=\frac{2}{1-z^2}$，故将 $\frac{2}{1-z^2}$ 展开为级数后，通过级数的逐项积分可得

$$\begin{aligned}\ln\frac{1+z}{1-z}&=\int_0^z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\ln\frac{1+z}{1-z}\right)\mathrm{d}z=\int_0^z\frac{1-z}{1+z}\frac{(1-z)+(1+z)}{(1-z)^2}\,\mathrm{d}z\\&=\int_0^z\frac{2}{1-z^2}\,\mathrm{d}z=2\int_0^z\sum_{k=0}^{\infty}z^{2k}\,\mathrm{d}z=2\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^z z^{2k}\,\mathrm{d}z=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{2k+1}\end{aligned}$$

与上一节课的解法相比较，可见直接计算泰勒系数不是好方法.

泰勒级数在 $z=0$ 处就变成了麦克劳林级数:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

以下是 6 个必须熟练掌握的级数

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z}&=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=1+z+z^2+\cdots\quad(|z|<1)\\ \mathrm{e}^z&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots\quad(|z|<+\infty)\\ \sin z&=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\quad(|z|<+\infty)\\ \cos z&=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\quad(|z|<+\infty),\\ \sinh z&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\quad(|z|<+\infty),\\ \cosh z&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\quad(|z|<+\infty).\end{aligned}$$

例题 3.9 可以从

$$\sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

$$\sin z=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{i}z)^n}{n!}\right]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{+\infty}[1-(-1)^n]\frac{\mathrm{i}^nz^n}{n!}\quad(|z|<+\infty).$$

然而，当 n 为偶数时，$1-(-1)^n=0$，故我们将上述级数中的 n 替换为 $2n+1$:

$$\sin z=\frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[1-(-1)^{2n+1}\right]\frac{\mathrm{i}^{2n+1}z^{2n+1}}{(2n+1)!}(|z|<+\infty).$$

由于

$$1-(-1)^{2n+1}=2\ \text{和}\ \mathrm{i}^{2n+1}=\left(\mathrm{i}^2\right)^n\mathrm{i}=(-1)^n\mathrm{i},$$

故而之前的等式就简化为展开式

$$\sin z=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

例题 3.10 利用逐项求导我们对式 $\sin z$ 的两边分别求导, 记

$$\cos z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}z^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\quad(|z|<+\infty)$$

例题 3.11 双曲函数 $\sinh z=-\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z)$, 故我们只需利用 $\sin z$ 的展开式, 记

$$\sinh z=-\mathrm{i}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\mathrm{i}z)^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(|z|<+\infty)$$

即得到

$$\sinh z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(|z|<+\infty).$$

例题 3.12 双曲函数

$\cosh z=\cos(\mathrm{i}z)$, 故而 $\cos z$ 的麦克劳林级数可知

$$\cosh z=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\mathrm{i}z)^{2n}}{(2n)!}\quad(|z|<+\infty),$$

于是, 我们得到麦克劳林级数展开式

$$\cosh z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\quad(|z|<+\infty).$$

可以不加证明的推广到复连通区域的柯西定理 (证明思路大致和下面的柯西公式的推导的前半部分类似)

定理 3.2

若 $f(z)$ 在闭复通区域 $\bar{D}$ 解析, 则 $f(z)$ 沿所有内、外边界线 $(L=L_0+\ \sum_k L_k)$ 正方向积分之和为零

$$\oint_L f(z)\mathrm{d}z=\oint_{L_0}f(z)\mathrm{d}z+\sum_k\oint_{L_k}f(z)\mathrm{d}z=0$$

♡

"正方向" 是指, 当沿内、外边界线环行时, $\bar{D}$ 保持在左边. 换句话说, 外边界线取逆时针方向, 内边界线取顺时针方向. 作为约定, 今后积分号中没标明方向的积分均沿正方向

推论设 C_1 和 C_2 都表示正向的简单闭围线, 其中 C_1 在 C_2 的内部. 如果函数 f 在由此两条闭围线以及它们之间的所有点所组成的闭区域上解析, 那么

$$\int_{C_2}f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_1}f(z)\mathrm{d}z.$$

此推论就是著名的路径变形原理. 它告诉我们, 如果 C_1 可以经由 f 的解析区域连续地变形为 C_2, 那么 f 在 C_1 上的积分值保持不变.

3.3.2 洛朗展开

问题：函数在 z_0 附近解析时可以展开为一些正幂次的多项式，当在 z_0 附近不解析时，怎么展开？

朴素的想法也能猜出可以展开为负幂次和正幂次之和。

下面洛朗展开的定理将严格的告诉我们。

定理 3.3

Any function $f(z)$ that is analytic in a region R between two such circles C_A and C_B centred on $z = z_0$ can be expressed as a Laurent series about z_0 that converges in R. We note that, depending on the nature of the point $z = z_0$, the inner circle may be a point (when the principal part contains only a finite number of terms) and the outer circle may have an infinite radius.

如果 $f(z)$ 是在环内解析的函数（如图所示），则它在此环内的点上可表示成

$$f(z_0+\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-z_0-\xi}dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \xi^n \tag{3.4}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

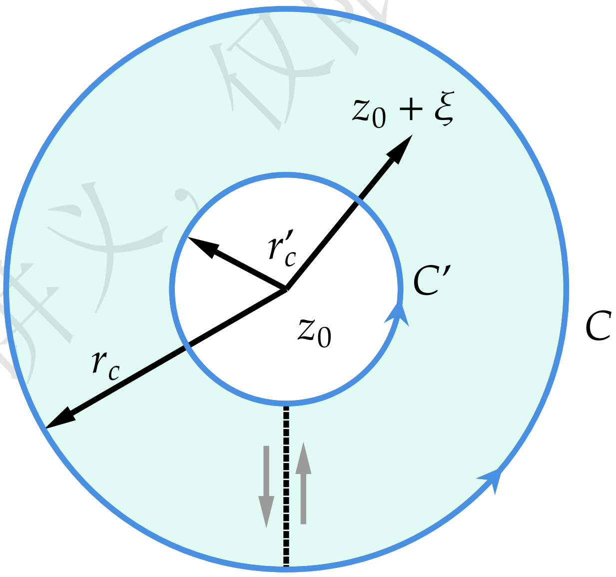

图 3.2: 环内的展开

证明洛朗定理的证明不要求掌握，只需要知道有这样一个定理保证即使有奇点也能做级数展开，只不过会出现负幂次的项。[2]

如果点 z 位于围道 C 上，则

$$|\xi| < |z - z_0| = r_C;$$

[2]负一幂次的系数叫留数，在后面留数定理求积分就是算这个负一幂次的系数。

则可以构造适合几何级数展开的展开变量

$$\left|\frac{\xi}{z-z_0}\right|<1$$

如果 z 位于围道 C' 上, 则

$$|\xi|>|z-z_0|=r'_C.$$

则可以构造适合几何级数展开的展开变量

$$\left|\frac{z-z_0}{\xi}\right|<1$$

在前面定理中研究过的那种展开式, 在围道 C 上同样成立:

$$\frac{1}{z-z_0-\xi}=\sum_{n=0}^{N}\frac{\xi^n}{\left(z-z_0\right)^{n+1}}+R_N^C.$$

在围道 C' 上用类似的方法则可得

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{z-z_0-\xi}&=\frac{1}{\xi}-\frac{z-z_0}{\xi\left(z-z_0-\xi\right)}= \\
&=\sum_{n=0}^{N}\frac{\left(z-z_0\right)^n}{\xi^{n+1}}-\frac{\left(z-z_0\right)^{N+1}}{\xi^{N+1}\left(z-z_0-\xi\right)}= \\
&=\sum_{n=0}^{N}-\frac{\left(z-z_0\right)^n}{\xi^{n+1}}+R_N^{c!}.
\end{aligned}$$

因在围道 C' 上

$$\left|\frac{z-z_0}{\xi}\right|<1$$

所以后面那个级数显然是收敛的。从而

$$f\left(z_0+\xi\right)=\sum_{n=0}^{N}a_n\xi^n+\sum_{n=0}^{N}b_{n+1}\frac{1}{\xi^{n+1}}+R_N,$$

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)dz}{\left(z-z_0\right)^{n+1}} \\
b_n&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'}\frac{f(z)dz}{\left(z-z_0\right)^{-n}} \\
R_N&=R_N^C+R_N^{C'}
\end{aligned}\tag{3.5}$$

但当 $n\to\infty$ 时, R_N^C 和 $R_N^{C'}$: 趋于零; 故当 $n\to\infty$ 时, $R_N\to 0$ 。所以命 $N\to\infty$, 就得

$$f\left(z_0+\xi\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\xi^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_{n+1}\frac{1}{\xi^{n+1}}$$

最后根据上面的路径变形原理，积分路径可以改为任意一条路径，则

$$f\left(z_0+\xi\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z-z_0-\xi}dz=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\xi^n\tag{3.6}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

这个展开式称为洛朗 (Laurent) 级数。有了这个定理之后，我们遇到也可以在奇点附近做级数展开了。

例题 3.13 在环域 $1 < |z| < 2$ 内将 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开成幂级数

求解：

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

利用几何级数，关键是构造模小于 1 的展开变量。

$$|z| < 2 \quad \to \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$|z| > 1 \quad \to \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$f(z) = -\sum_{n=\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

学而时习之

1. 将 $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$ 在 $1 < |z-2| < \infty$ 区域内展开为洛朗级数
2. 将 $f(z) = \frac{1}{z(z-i)}$ 在 $z = i$ 点进行洛朗展开
3. 将 $f(z) = \frac{1}{z^4(z^2-1)^2}$ 在以 $z = 0$ 点为展开中心的所有环形区域上展开成洛朗级数
4. 将函数 $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ 在 $|z| > 0$ 的区域内展开为洛朗级数

课程预告

- □ 泰勒级数和洛朗级数展开的应用：斐波那契级数展开
- □ 洛朗级数展开，对应教材 5.4, 5.4 节
- □ 解析延拓和 Gamma 函数，5.7，7.1，7.2
- □ 课前十分钟四位同学到黑板上不看讲义计算，如果有同学觉得例题简单的话，可以做一道上面的习题代替我指定的例题——

李俊乐试以 $z = 0$ 为中心展开 $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ 为泰勒级数.

李睿恒取 $\arctan 0 = 0$，试以 $z = 0$ 为中心展开 $\arctan z$ 为泰勒级数.

李烨试以 $z = 0$ 为中心将 $f(z) = \ln\frac{1+z}{1-z}$ 展开为泰勒级数.

廖超洲在环域 $1 < |z| < 2$ 内将 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开成幂级数

思考题

1. 学了洛朗级数后，请结合柯西定理、柯西积分公式、柯西积分推广公式，自己发明留数定理
2. 自己系统总结归纳出常用的级数展开的方法

3.4 斐波那契数列：泰勒展开拓展与洛朗展开拓展

本节以斐波那契数列构成的级数为例巩固级数求和、级数展开的基本概念和技巧

例题 3.14 热身题：Consider the function

$$f(z)=\frac{z^3+2z^2+4}{(z-1)^3}.$$

Find the Laurent expansion of $f(z)$ about the singular point $z=1$.

Writing $z\equiv(z-1)+1$,

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{[(z-1)+1]^3+2[(z-1)+1]^2+4}{(z-1)^3}\\&=1+\frac{5}{z-1}+\frac{7}{(z-1)^2}+\frac{7}{(z-1)^3}.\end{aligned}$$

例题 3.15 若 $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nz^n, |z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 为斐波那契数列构成的幂级数, 若已经知道斐波那契数列的通式[3]为:

$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], n\geq 0$ 则

$$F(z)=\frac{z}{1-z-z^2}, |z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

[3]课外阅读材料绝对不是本课程需要掌握的知识：斐波那契数列是自然界非常常见的数列 F_n 定义为:

$F_0=0, F_1=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, n\geq 2$ 。

以组合数学中特征方程的理论来求解它的一般表达式, 得到下列。

引理 1: $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], n\geq 0$ 。

证明

$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, 它的特征方程为

$$t^2-t-1=0$$

解得

$$t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

为它的两个特征值, 因此

$$F_n=\alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

由 $F_0=0, F_1=1$ 解得

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

得到

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

证明

利用 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], n\geq 0$ 与几何级数求和的方法

当 $|z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}F_nz^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]z^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}z\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}z\right)^n\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}z\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}z\right)^n\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z}-\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z}\right)\\
&= \frac{z}{1-z-z^2}.
\end{aligned}$$

例题 3.16 若 $F(z)=\frac{z}{1-z-z^2}, z\in C$, F_n 为上面例题中的斐波那契数列，证明以下不同区域的级数展开形式

1. 当 $|z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}, F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nz^n$ 。
2. 当 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<|z|<\frac{\sqrt{5}+1}{2}, F(z)=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{1}{z}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot z\right)^n\right]$ 。
3. 当 $|z|>\frac{1+\sqrt{5}}{2}, F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{F_n}{z^n}$ 。

证明 1. 当 $|z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$$\begin{aligned}
F(z)=\frac{z}{1-z-z^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z}-\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot z\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot z\right)^n\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot z\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot z\right)^n\right)\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)z^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}F_nz^n.
\end{aligned}$$

2. 当 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < |z| < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$$
\begin{aligned}
F(z) = \frac{z}{1-z-z^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z} - \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}z\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z}-1\right)} - \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot z}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}z\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot z\right)^n\right) \\
&= \frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{1}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot z\right)^n\right)
\end{aligned}
$$

3. 当 $|z| > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

$$
\begin{aligned}
F(z) = \frac{z}{1-z-z^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z} - \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}z\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z}-1\right)} - \frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}z\left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z}-1\right)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\Bigg(-\frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}z\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right.}z\Bigg)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z}\right)^n\Bigg) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{1}{z}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1}{z}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1}{z}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{z}\right)^{n+1}\right), \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{F_{n+1}}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{F_n}{z^n}.
\end{aligned}
$$