3.5 奇点分类

到目前为止, 我们还没有将奇点加以分类的准则。它们是可以区分的。例如, 可根据在此点附近函数性质的特点来区分。此时洛朗级数展开式为基本工具。考虑函数 $f(z)$, 它在点 z_0 的某个邻域内解析, 但点 z_0 本身除外 (孤立奇点的情形)。作中心在 z_0 的圆, 则对函数 $f(z)$ 解析区域内的任一点 $z_0+\xi$,

$$f\left(z_0+\xi\right)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{\xi^n}$$

可能对某个 $n=N$

$$b_{N+1}=b_{N+2}=\cdots=0,$$

成为

$$f\left(z_0+\xi\right)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n+\frac{b_1}{\xi}+\frac{b_2}{\xi^2}+\cdots+\frac{b_N}{\xi^N}$$

在这种情形, 就说在点 $z=z_0$ 处有 N 阶极点。而表示式

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{\xi^n}$$

称为函数 $f(z)$ 在点 $z=z_0$ 处展开式的主部。也可给出下面极点的定义。

如果 $\varphi(z)=1/f(z)$ 在点 z_0 处为 N 阶零点, 且在点 z_0 处零点聚集的情形除外, 则点 z_0 称为函数 $f(z)$ 的 N 阶极点。

可以这样来研究无穷远点 $(z=\infty)$： 先作变换 $\rho=1/z$, 然后研究函数 $g(\rho)=f(1/\rho)$ 在点 $\rho=0$ 处的情形, 如果此时 $g(\rho)$ 在零点处为 n 阶极点, 则我们说函数 $f(z)$ 在无穷远处有同样阶数的极点。

3.5.1 非孤立奇点

若 $f(z)$ 在 z_0 的任意小的邻域内存在除 z_0 以外的其它奇点，则 z_0 是 $f(z)$ 的非孤立奇点。

$$\text{例如, } z=0 \text{ 是} f(z)=\left(\sin \frac{1}{z}\right)^{-1} \text{ 的非孤立奇点} \tag{3.7}$$

因为 n 很大时，$z=1/(n\pi)$ 和奇点 $z=1/((n+1)\pi)$ 可以无限接近

3.5.2 三种类型的孤立奇点

1. 可去奇点:

z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，若 $f(z)$ 在 z_0 的无心邻域 $0<|z-z_0|<r$ 内的洛朗展开不包含负幂次项，即 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$，则称 z_0 为可去奇点。例如

$$z=0 \text{ 是} f(z)=\frac{\sin z}{z} \text{ 的可去奇点.} \tag{3.8}$$

2. 本性奇点:

如果函数 $f(z)$ 在点 z_0 处展开式的主部用无穷级数来表示, 则点 z_0 称为函数 $f(z)$ 的本性奇点。

$$z=0\text{ 是}f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\text{ 的本性奇点} \tag{3.9}$$

3.m 阶极点:

最高负幂次为 m. 特别是负 1 幂次的系数为叫留数 residue，使积分后唯一留下的非 0 项。后面讲留数定理的时候会用到。

3.6 留数定理发现之旅

$$\oint_{c_1}(z-z_0)^n\,dz \overset{n=0,1,2,\cdots}{=} \because (z-z_0)\text{的非负幂次是解析的，由柯西定理知积分为 }0$$

$$\oint_{c_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\,dz=0\text{同上}$$

$$\oint_{c_1}\frac{1}{z-z_0}dz=2\pi i\text{由柯西积分公式}\oint_c\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$$

$$\oint_{c_1}\frac{b_{-1}}{z-z_0}dz=2\pi i b_{-1}\text{同上}$$

$$\oint_{c_1}\frac{1}{(z-z_0)^2}dz=0\text{由柯西积分推广公式}\oint_c\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}dz=2\pi i f^n(z_0)/n!$$

$$\oint_{c_1}\frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2}dz=0\text{同上}$$

$$\oint_{c_1}\sum_{M=2}^{\infty}\frac{b_{-M}}{(z-z_0)^M}dz=0\text{同上}$$

从上图得到留数定理过程中可以得到求留数的一般性方法:

$$b_{-1}=\frac{1}{(P-1)!}\frac{\mathrm{d}^{P-1}}{\mathrm{d}z^{P-1}}(z-z_k)^P f(z)\bigg|_{z=z_k} \tag{3.10}$$

常见的情况是 $f(z)$ 可以表示为 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 的形式, 其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都在 z_0 点及其邻域内解析, 且 $P(z_0)\neq 0, z=z_0$ 是 $Q(z)$ 的一阶零点, 即 $Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$, 则

$$b_{-1}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

3.7 留数定理

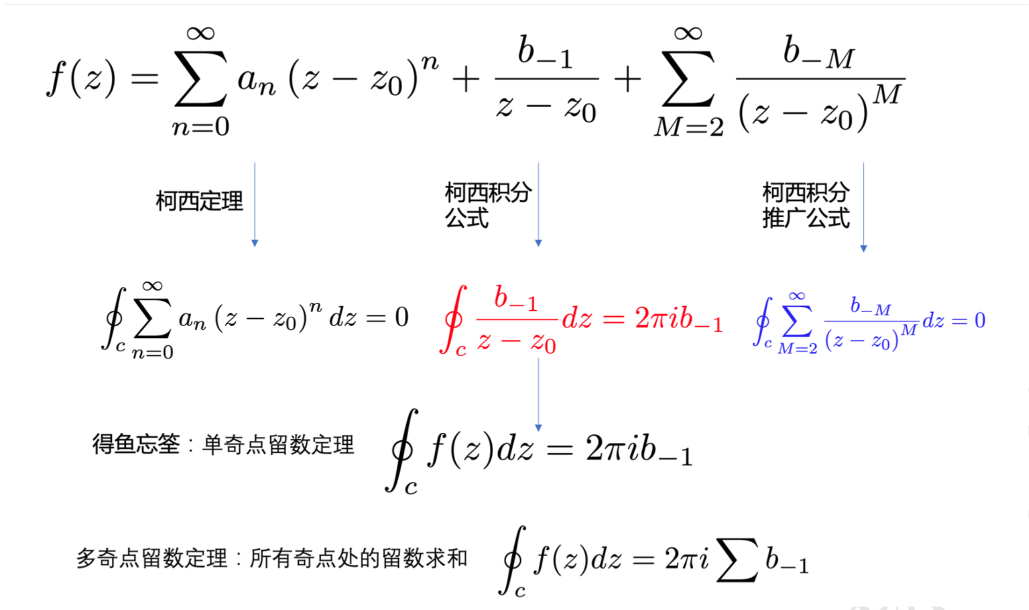

图 3.3: 留数定理

定理 3.4

若函数 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 内除有限个孤立奇点 b_k 外解析，则

$$\oint_{L_0} f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_k \operatorname{Res} f\left(b_k\right), \quad \operatorname{Res} f\left(b_k\right)=a_{-1}^{(k)}$$

式中 $\operatorname{Res} f\left(b_k\right)$ 称为 $f(z)$ 在 b_k 处的留数，它等于 $f(z)$ 在 b_k 的无心邻域的洛朗展开中的洛朗系数 $a_{-1}^{(k)}$.$f(z)$ 的洛朗展开为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(k)}\left(z-b_k\right)^n, \quad k=1,2,\cdots$$

证明和应用下节课，更多细节请配合手写讲义阅读。

例题 3.17 若 $F(z)=\frac{z}{1-z-z^2}, z\in C$，求积分

$$\oint_{|z|=0.6,0.7,1.6,1.7} F(z)\mathrm{d}z$$

例题 3.18

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\cdot r}}{k^2+\mu^2} kdk \tag{3.11}$$

这道题实际上就是基础物理中计算汤川势 (Yukawa potential[4]) 最后一步关键的留数定理

[4]H .Yukawa，Proc. Phys . -Math . Soc. Japan，17(1935) ,48 .

积分计算[5]。

3.7.1 实轴上不含奇点的积分

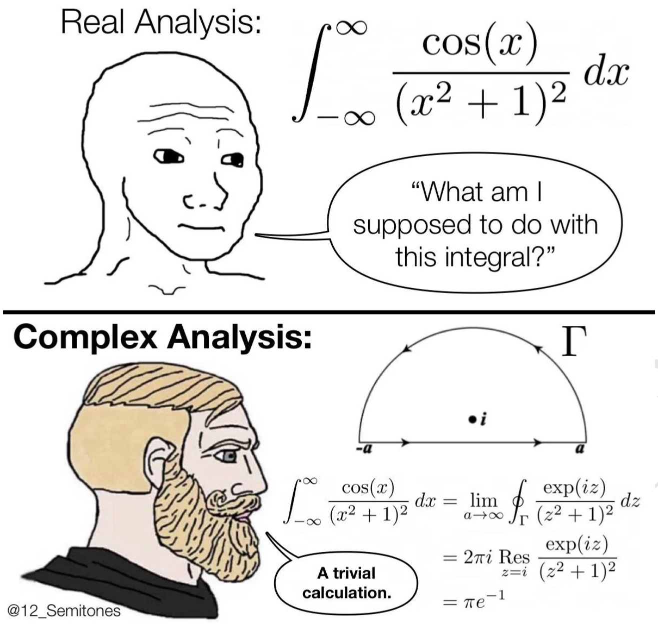

图 3.4: 复变函数积分的威力漫画

例题 3.19

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)^2} \tag{3.12}$$

解 构造辅助函数和相应的积分围道5.1

$\lim_{z\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=0$ 增加无穷大半圆周 C_R

按留数定理计算.

$$\begin{aligned}
I&=\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R}f(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z\right]=\oint_L f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(\mathrm{i})\\
&=\frac{2\pi\mathrm{i}}{1!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-\mathrm{i})^2\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}\right]=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

[5]

$$\begin{aligned}
I&=\int\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2+\mu^2}d\mathbf{k}\\
&=\int_0^{2\pi}kd\phi\int_0^{\pi}k\sin\theta d\theta\int_0^{\infty}dk\frac{e^{ik|r|\cos\theta}}{k^2+\mu^2}\\
&=2\pi\int_{-1}^{1}dt\int_0^{\infty}dk\frac{k^2e^{ik|r|t}}{k^2+\mu^2}\\
&=\frac{2\pi}{i|r|}\int_0^{\infty}dk\frac{k\left(e^{ik|r|}-e^{-ik|r|}\right)}{k^2+\mu^2}\\
&=\frac{2\pi}{i|r|}\int_{-\infty}^{\infty}dk\frac{ke^{ik|r|}}{k^2+\mu^2}.
\end{aligned}$$

$$I=\frac{2\pi}{i|r|}2\pi i\sum_{y>0}\mathrm{Res}\frac{ke^{ik|r|}}{k^2+\mu^2}=\frac{4\pi^2}{|r|}\frac{i\mu e^{i\cdot i\mu|r|}}{2i\mu}=\frac{2\pi^2}{|r|}e^{-\mu|r|},$$

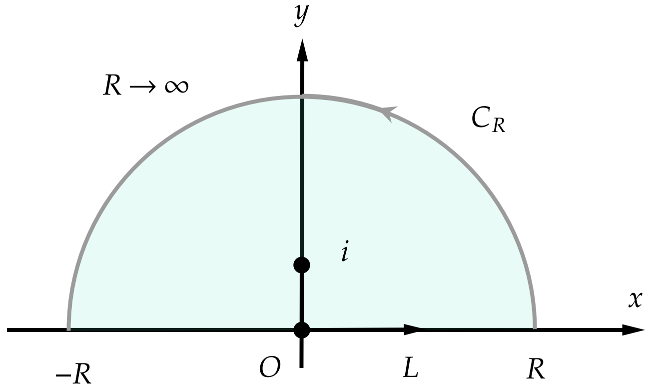

图 3.5: 积分轴上无奇点的积分围道

学而时习之

1. 计算积分

$$\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz$$

2. Consider

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipx}}{x^2 + a^2} dx$$

   with $a \neq 0$.

3.

$$f(z) = \frac{2z}{z^4 + 1} \tag{3.13}$$

   的极点及其对应的留数

4. 设 $f(z)$ 在全复平面上处处满足微分方程

$$z^2 f''(z) - 2z f'(z) + \left(2 - z^2\right) f(z) = 0$$

   且已知

$$f'(0) = 1.$$

   计算逆时针方向沿着单位圆 $|z| = 1$ 的围道积分

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^4} dz$$

5. 找出函数

$$f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{z^2 + a^2} \pi \operatorname{cotan}(\pi z),$$

   的所有奇点

课程预告

- Gamma 函数和解析延拓，教材 5.7，7.1，7.2
- 课前十分钟四位同学到黑板上不看讲义计算，如果有同学觉得例题简单的话，可以做一道上面的习题代替我指定的例题——

  林宇涛：
  $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{(x^2+1)^2}dx$$
  林语凰：
  $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik\cdot r}}{k^2+m^2}kdk$$

罗禹杰：若 $F(z)=\frac{z}{1-z-z^2}, z\in C$，分别求积分
$$\oint_{|z|=0.6,0.7,1.6,1.7}F(z)\mathrm{d}z$$

马佳瑜：若 $F(z)=\frac{z}{1-z-z^2}, z\in C$，分别求积分
$$\oint_{|z|=0.6,0.7,1.6,1.7}F(z)\mathrm{d}z$$

思考题

1. Suppose we want to evaluate the sum
$$S=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{n^2+a^2},$$
where a is a nonzero real number. We will then define
$$f(z)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{z^2+a^2}\pi\operatorname{cotan}(\pi z),$$
and S is the sum of the residues of this function at all the integers if $a\neq 0$. We will therefore assume $a>0$.