第五章　留数定理进阶

5.1　Jordan lemma

广义的 Jordan 引理包括三个引理：大圆弧引理，小圆弧引理，Jordan 引理。这三个引理在积分中十分常用。

引理 5.1

小圆弧引理：如果函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 点的空心邻域内连续，并且在 $\theta_1 \leqslant arg(z-a) \leqslant \theta_2$ 中，当 $|z-a| \to 0$ 时，$(z-a)f(z)$ 一致地趋近于 k，则 $\lim_{\delta \to 0} \int_{C_\delta} f(z) \mathrm{d}z = \mathrm{i}k\left(\theta_2-\theta_1\right)$
C_δ 是以 $z=a$ 为圆心、δ 为半径、张角为 $\theta_2-\theta_1$ 的圆弧，
$|z-a|=\delta, \theta_1 \leqslant \arg(z-a) \leqslant \theta_2$

引理 5.2

大圆弧引理：设 $f(z)$ 在 ∞ 点的邻域内连续，在 $\theta_1 \leqslant argz \leqslant \theta_2$ 中，当 $|z| \to \infty$ 时，$zf(z)$ 一致地趋近于 K，则

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z) \mathrm{d}z = \mathrm{i}K\left(\theta_2-\theta_1\right),$$

C_R 是以原点为圆心、R 为半径、张角为 $\theta_2-\theta_1$ 的圆弧，$|z|=R, \theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2$

引理 5.3

Jordan 引理：设在 $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ 范围内，当 $|z| \to \infty$ 时 $Q(z)$ 一致地趋于 0，则

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} Q(z) \mathrm{e}^{\mathrm{i}pz} \mathrm{~d}z = 0,$$

$p>0, C_R$ 是以原点为圆心，R 为半径的上半圆弧.

Jordan 引理的证明，已经包含在菲涅尔积分的详细讨论中了。

What about $p<0$? To ensure that the exponential is decreasing for $R \to \infty$ we need $\sin\theta<0$. This is true in the lower half plane. Hence in this case we take our contour in the lower half plane but still in an anti-clockwise direction.

例题 5.1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\cdot r}}{k^2+m^2} kdk \tag{5.1}$$

例题 5.2

$$f(z)=\frac{2z}{z^4+1} \tag{5.2}$$

的极点及其对应的留数

例题 5.3

$$f(z)=\frac{(z+1)^2}{(z-1)^2} \tag{5.3}$$

的极点及其对应的留数

例题 5.4 设 $f(z)$ 在全复平面上处处满足微分方程

$$z^2 f''(z)-2zf'(z)+\left(2-z^2\right)f(z)=0$$

且已知

$$f'(0)=1.$$

计算逆时针方向沿着单位圆 $|z|=1$ 的围道积分

$$\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^4}dz$$

解答: 设 $f(z)=c_0+z+c_2z^2+c_3z^3+\ldots$, 代人微分方程并比较两边同次项系数, 可以得到:

$$c_0=c_2=0, c_3=\frac{1}{2},\ldots$$

所以

$$\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^4}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{f(z)}{z^4},0\right)=2\pi ic_3=\pi i.$$

例题 5.5

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\sin\theta}\quad 0<|a|<| \tag{5.4}$$

5.2 留数定理系统讨论

5.2.1 包含复指数的积分类型

热身回顾题

例题 5.6 计算

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+1}dx, a>0 \tag{5.5}$$

计算

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos ax}{x^2+1}dx, a>0 \tag{5.6}$$

这两道题实际上就是上一节课初的汤川势 (Yukawa potential) 最后一步关键的留数定理积分计算。

例题 5.7

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik\cdot r}}{k^2+m^2}kdk \tag{5.7}$$

5.2.2 实轴上不含奇点的积分

例题 5.8

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2} \tag{5.8}$$

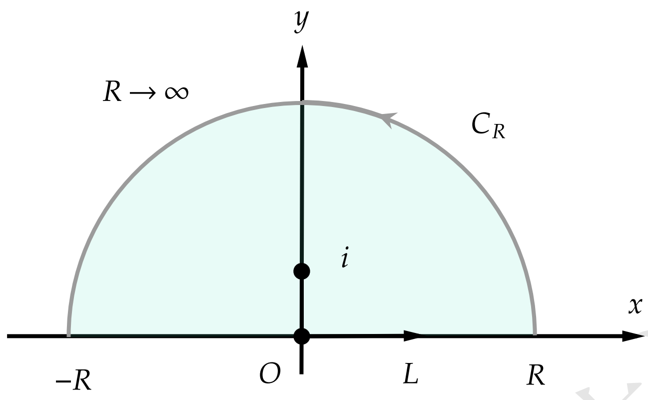

图 5.1: 积分轴上无奇点的积分围道

解 构造辅助函数和相应的积分围道5.1

$\lim_{z\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=0$ 增加无穷大半圆周 C_R

按留数定理计算.

$$\begin{aligned}I&=\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z\right]=\oint_L f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(\mathrm{i})\\&=\frac{2\pi\mathrm{i}}{1!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-\mathrm{i})^2\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\right]=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

5.2.3 三角函数的积分

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

型积分

积分的特征: 被积函数是 $\cos\theta,\sin\theta$ 的有理实函数, 积分区间为 $[0,2\pi]$ 或可化为长度为 2π 的区间.

计算方法: 首先, 作变换 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 用复变量 z 表示被积表达式, 易见

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$
$$\sin\theta=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}z\ \mathrm{d}\theta,\quad \mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

其次, 把沿 $[0,2\pi]$ 的积分变成沿单位圆的回路积分.

利用留数定理可得

重要公式 5.1

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} f\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$
$$= 2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}\left[\frac{f\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)}{\mathrm{i}z}, b_k\right]$$

上式表示, 积分等于 $2\pi\mathrm{i}$ 乘函数 $\frac{f\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)}{\mathrm{i}z}$ 在 $|z|=1$ 圆内所有奇点处留数之和.

例题 5.9

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\sin\theta} \quad 0<|a|<1 \tag{5.9}$$

5.2.4 实轴上含有一阶奇点的积分——主值积分

被积函数在实轴上有奇点的情形当我们所研究积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的被积函数 $f(x)$ 在实轴上有奇点 x_0 时, 我们知道这个反常积分由于 $f(x)$ 在奇点上的发散性, 它的一般积分是不存在的, 但其主值积分

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \equiv \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0+\epsilon}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)$$

还是有可能存在的, 且可以运用留数定理来求得. 当然, 被积函数须满足如下要求: 当把被积函数 $f(x)$ 自变量直接换为复数而延拓成一个复变函数 $f(z)$ 后, $f(z)$ 须满足下列条件: (1) $f(z)$ 在复平面上半平面上除有限个孤立奇点外解析; (2) 当 $|z|\to\infty$ 时, 对于 $0\leqslant \arg z\leqslant \pi$, $zf(z)$ 一致地趋于零; (3) 实轴上的奇点 x_0 为 $f(z)$ 的单极点.

定理 5.1

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{l=1}^{n}\mathrm{Res}\, f(z_l) + \pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Res}\, f(x_i)$$

例题 5.10

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4-1} \tag{5.10}$$

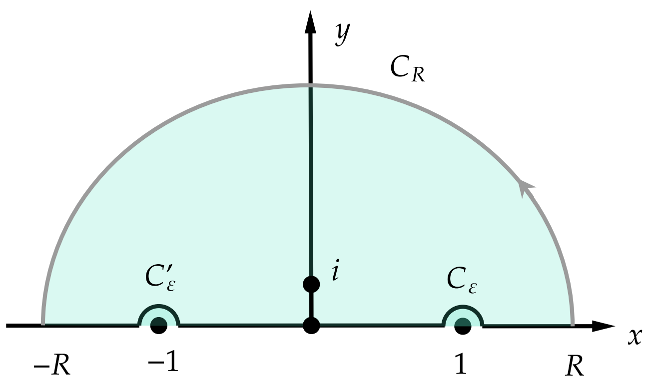

图 5.2: 积分轴上有奇点的积分围道

解

构造复变函数及其相应的积分围道5.2

$$f(z)=\frac{1}{z^4-1}$$

它在上半平面内有一阶极点 $b_1=\mathrm{i}$ 外, 还在实轴上有两个一阶极点 $b=1, b'=-1$.

按留数定理计算

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \operatorname{Res} f(i)+\pi i \operatorname{Res} f(1)+\pi i \operatorname{Res} f(-1) \\ &= 2\pi i \frac{1}{4i^3}+\pi i \frac{1}{4}+\pi i \frac{1}{4(-1)^3}=-\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

复变函数的色散关系在数学物理问题中, 一个十分有意思的问题是: 对于一个在上半平面解析 (包括实轴) 的复变函数 $f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$, 如果它满足 $\lim_{z\to\infty} f(z)\to 0$, 则在实轴上该解析函数 $f(x)=u(x)+\mathrm{i}v(x)$ 的实部和虚部有怎样的相互依赖关系. 为了研究这一问题, 我们来考虑如图 1.11 所示的回路积分

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z,$$

其中, z_0 在实轴上, 我们可以将它记为 $z_0\equiv x_0$. 由于函数 $f(z)$ 在上半平面解析, 利用柯西积分定理, 我们可得

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-x_0}\,\mathrm{d}z=0.$$

而对于该回路积分, 我们还可将它拆分成如下若干个积分的和, 即

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{z-x_0}\,\mathrm{d}z= & \int_{-R}^{x_0-\delta} \frac{f(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^{R} \frac{f(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x \\ & +\int_\pi^0 \frac{f\left(x_0+\delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{i}\delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \mathrm{d}\theta+\int_0^\pi \frac{f\left(x_0+R \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{i}R \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

由于 $\lim_{z\to\infty} f(z)\to 0$, 因此

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^\pi \frac{f\left(x_0+R \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{i}R \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \mathrm{d}\theta=0.$$

而由于 $f(z)$ 在 $z=x_0$ 点解析, 因此利用解析函数的连续性, 我们很容易知道

$$\lim_{\delta\to 0} \int_\pi^0 \frac{f\left(x_0+\delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{i}\delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \mathrm{d}\theta=-\mathrm{i}\pi f\left(x_0\right)$$

且在上述极限下, 有

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \delta\to 0}}\left[\int_{-R}^{x_0-\delta} \frac{f(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^{R} \frac{f(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x\right] \equiv P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x,$$

于是可得

定理 5.2

$$i\pi f\left(x_0\right)=P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x$$

♡

例题 5.11 带入

$$f(x)=e^{ix}$$

可得到 (这样我们集齐了第二课龙珠)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{isinx}{x}dx=i\pi$$

即

$$i\left[u\left(x_0\right)+\mathrm{i}v\left(x_0\right)\right]=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x)+\mathrm{i}v(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x.$$

这样, 我们就得到如下关系式

$$\begin{aligned}u\left(x_0\right)&=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x,\\ v\left(x_0\right)&=-\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

我们发现, 对于上述函数 $f(x)$, 它在 x_0 点函数值的实部 $u\left(x_0\right)$ 和虚部 $v\left(x_0\right)$ 可以分别由函数 $f(x)$ 的虚部和实部的积分得到. 上述积分关系式在数学上称为希尔伯特 (Hilbert) 变换, 这也称为是该函数的色散关系. 通常也可将它写为

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}f\left(x_0\right)&=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}f(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x\\ \operatorname{Im}f\left(x_0\right)&=-\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}f(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

在物理系统中有很多这样的复解析函数, 当其自变量 (如频率、能量之类) 取实数时, 它的实部和虚部均有明确的物理含义, 如在光学研究中. 色散这个概念其实最初就是从光学引入的, 它表明了各相关物理量对光的频率或波长的依赖关系. 当研究光在耗散介质中传播的问题时需用到复折射率的概念

设入射波的电场强度 $\vec{E}=\vec{E}_0e^{-i\omega t}$, 振子的固有频率为 ω_0, 而 γ 表征唯象阻尼力, 则电子的运动方程为

$$\ddot{\vec{r}}+\gamma\dot{\vec{r}}+\omega_0^2\vec{r}=\frac{e}{m}\vec{E}.$$

该方程的解为故意写这个公式，是因为后面接着讨论傅立叶变换和拉普拉斯变换可以提供很简单的求解这类二阶微分方程的方法。

$$\vec{r}=\frac{e\vec{E}}{m\left[\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma\right]},$$

一个电子的偶极矩为

$$\vec{P}=e\vec{r}=\frac{e^2\vec{E}}{m\left[\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma\right]}.$$

假定介质中单位体积电子数为 N, 然而不是所有电子都有相同的固有频率 ω_0, 设单位体积固有频率为 ω_j 的电子数为 $\mathrm{Nf_j}$, 其中 $\mathrm{f_j}$ 为一分数, 满足 $\sum \mathrm{f_j} = 1$, 于是单位体积中的总偶极矩为

$$\vec{P} = \sum_j \frac{N f_j \left(\frac{e^2}{m}\right)}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \vec{E}$$

γ_j 是第 j 个束缚群振荡电子的阻尼因子。对于一般各向同性线性介质, 极化强度 $\vec{P}$ 与 $\vec{E}$ 之间有简单的线性关系 $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$ 而 $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \chi_\mathrm{e}$, 故介电常数

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \sum_j \frac{Ne^2}{m} \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j}$$

由 $n^2(\omega) = \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}$ 介质的折射率

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_j \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j}$$

结果表明, $\varepsilon(\omega)$ 、$\mathrm{n}(\omega)$ 都与外场的频率有关, 这就是由振子模型所得到的介质的频率色散性质。

具体研究可以参考 Jackson 的经典电动力学第七章

学而时习之

(i) 祝大家节日快乐!

(ii) 到今天复变函数本课程的核心内容都讲完了，希望大家能总结复习复变函数，写一篇小论文：a. 画一个好看的知识系统图，b. 重点是系统的把所学串联起来，而且都要有一些例子或者言简意赅的推导或者讨论。(请大家优先选这道题，可以顺道联系一下写论文，有小奖品.....)

(iii) 或者找助教要 10 道题做