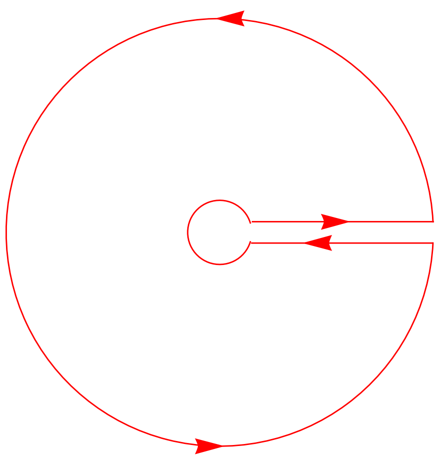
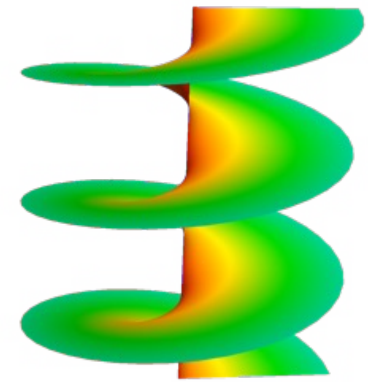
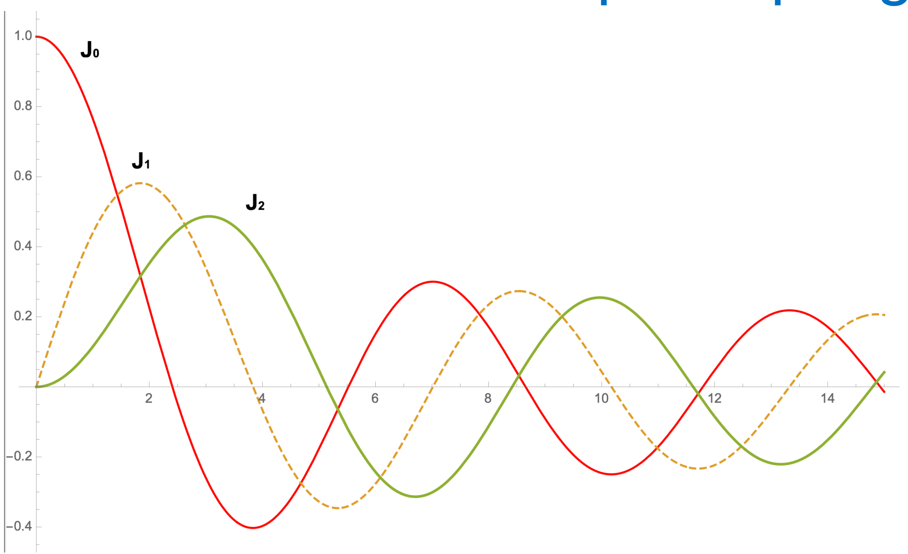
数学物理方法

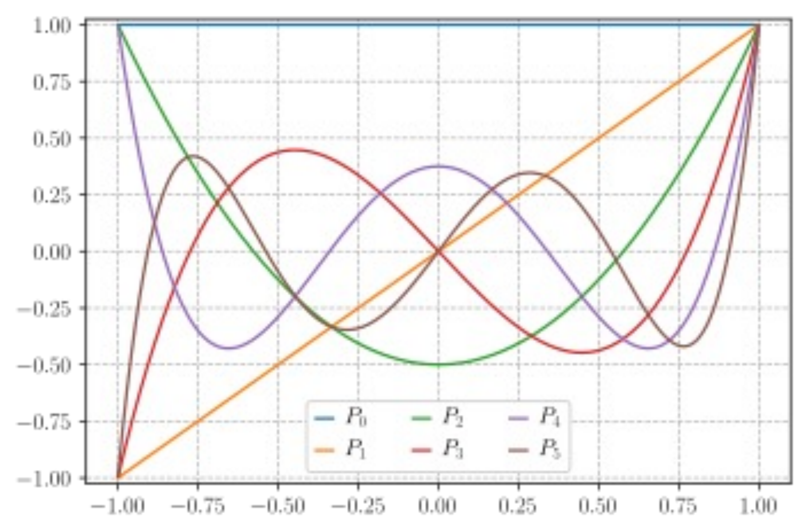




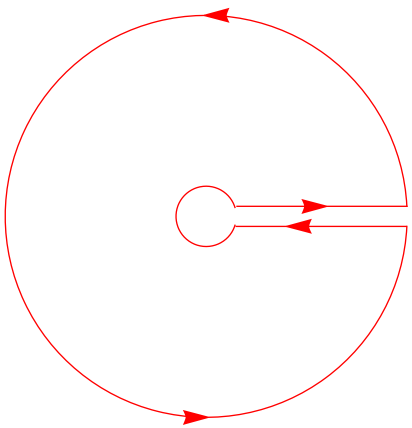
天琴中心 黄发朋

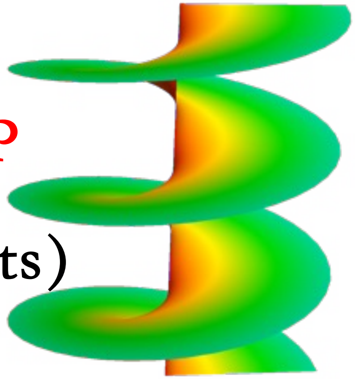
https://fapenghuang.github.io/





第0章 引言

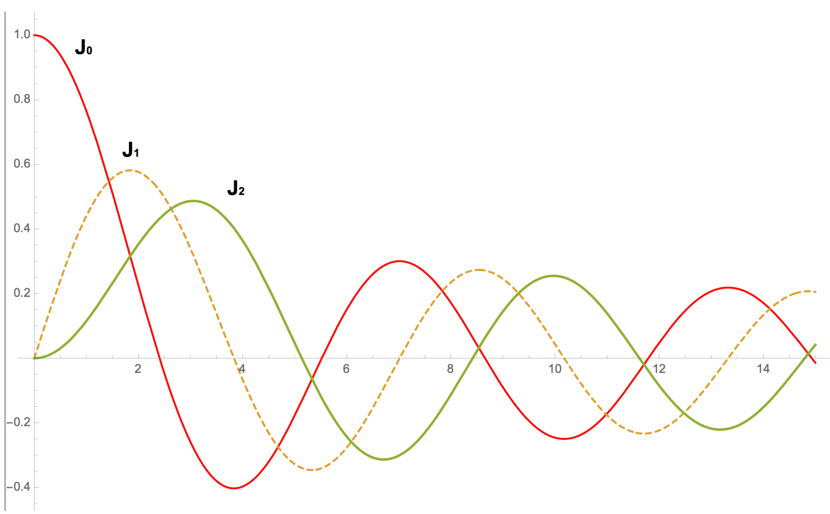


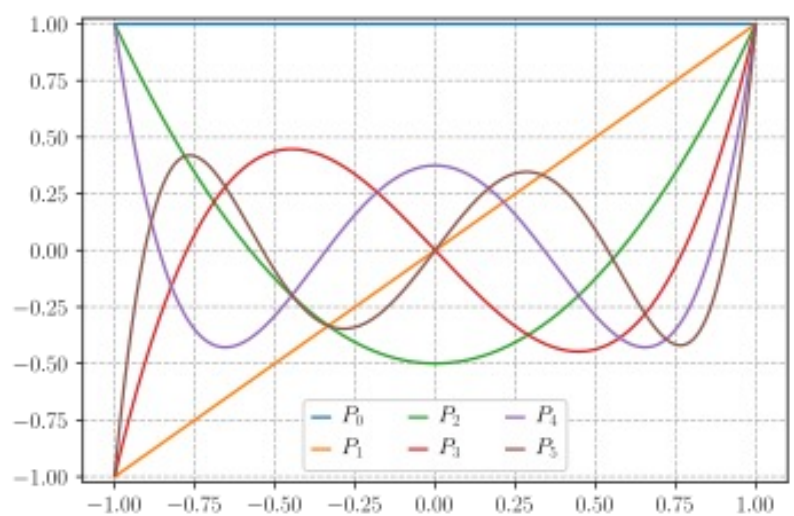


What I talk when I talk about MMP

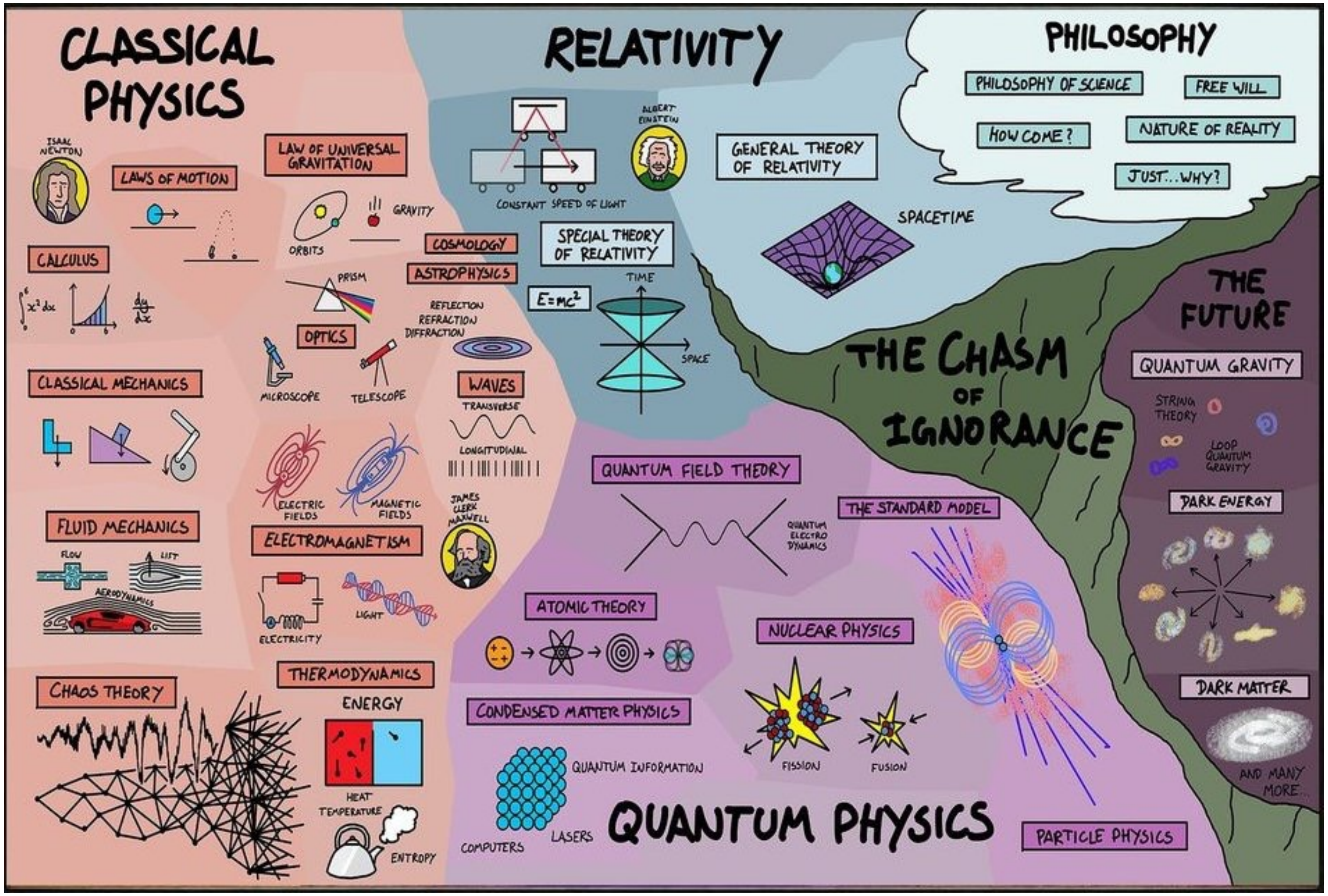
(mathematical method for physicists)

开局四幅图，内容全靠?__





无处不在的数学物理方法



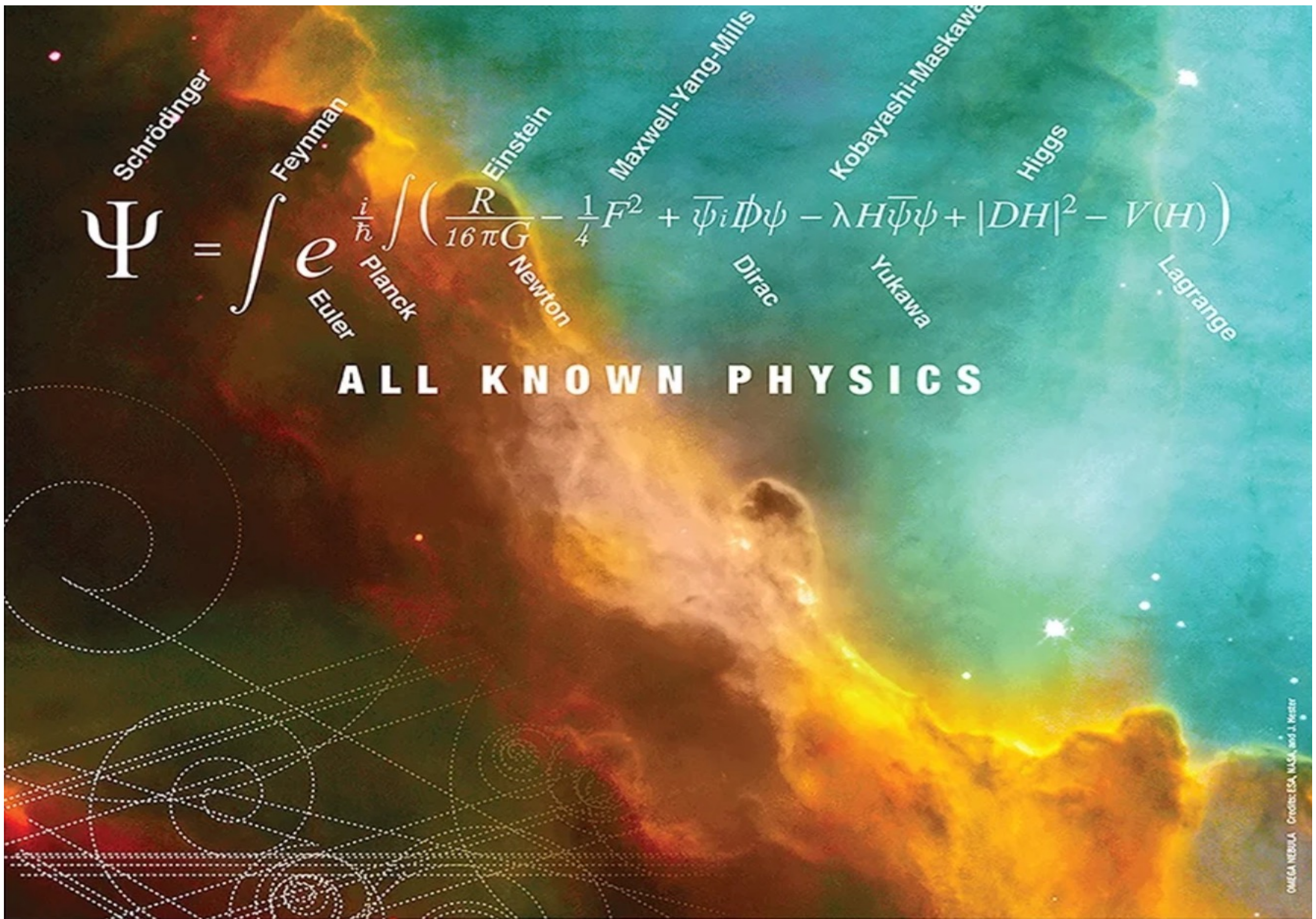
一劳永逸、受用终身的课，最后的数学课

量子力学、光学、量子场论、电动力学、计算机、热力学与统计物理
数理统计、理论力学、拓扑学微分几何等很多现代数学分支

量子统计

宇宙相变

$$\ln Z = -\frac{1}{2}\sum_{n}\sum_{\mathbf{p}}\ln\left[\beta^2(\omega_n^2+\omega^2)\right]$$



Credit:PI institute

教学目标

- 学术必备: Baoyan面试（光学常用菲涅尔积分）

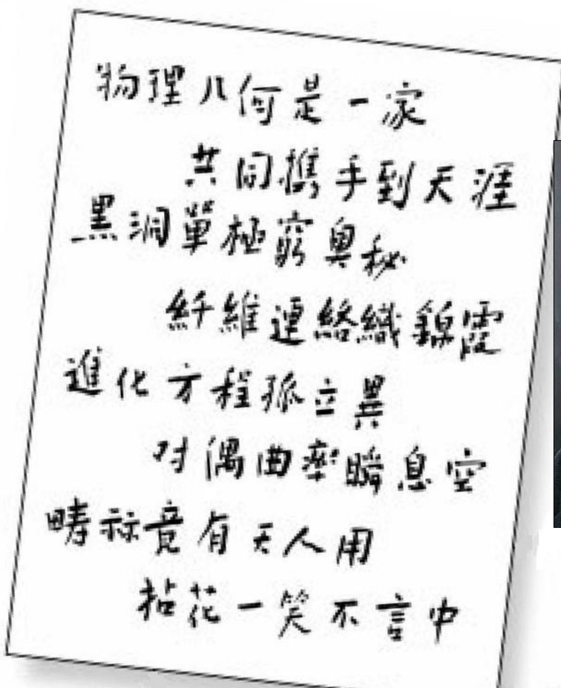
$$\int_0^\infty \cos x^2 dx$$

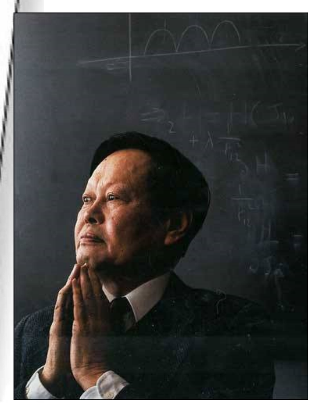
- 工作外挂：google面试 $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2 = R^2$

（炫技） V_N?

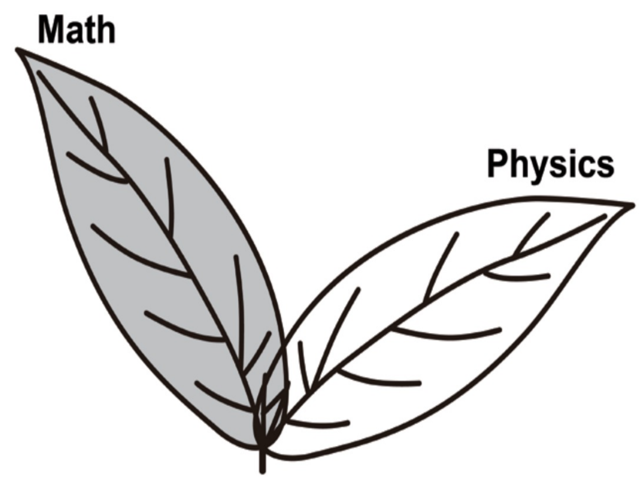
- 数理审美

20世纪最伟大的华裔数学大师、...
陈省身





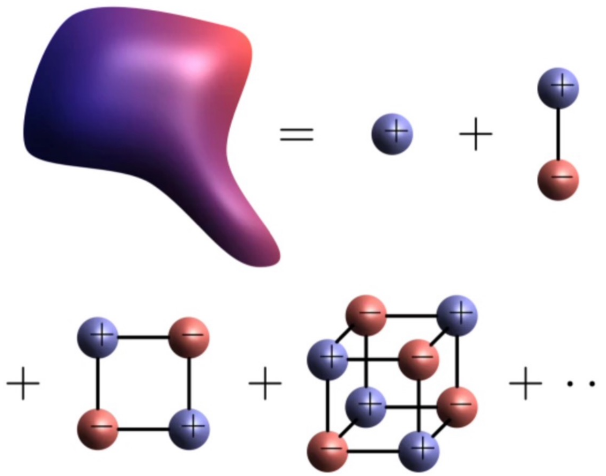
杨振宁

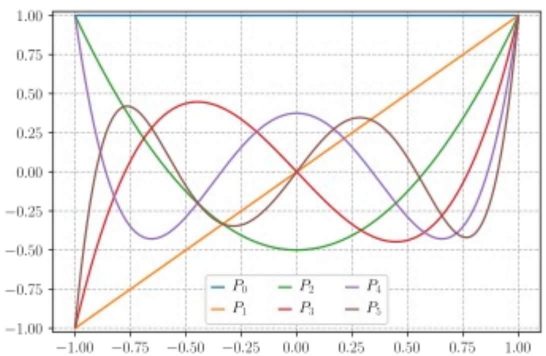


教学目标

必须会证明：Gaussian(高显老师?)函数的傅立叶变换(在动量空间) 还是Gaussian(还是高显老师)函数

量子力学(海森堡测不准原理)

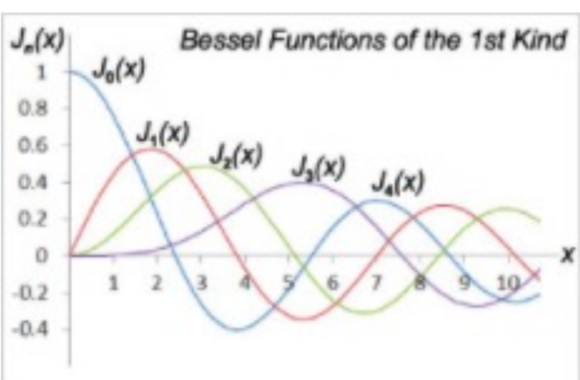




特殊函数P_n

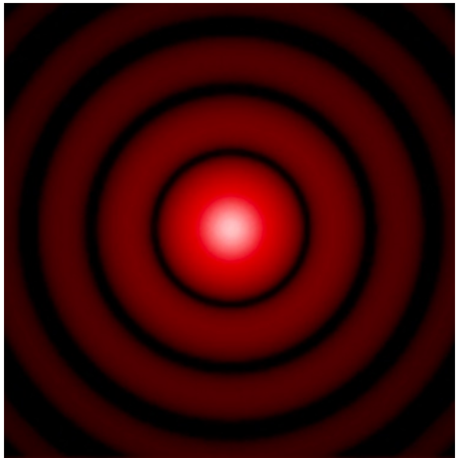
电动力学的

多极展开



特殊函数J_n

光学的Airy斑



教学目标

很多物理问题，都会约化成(非)齐次线性微分方程的求解

(例如波动方程、泊松方程、热传导方程)

$$L\varphi\left(x_1,\cdots,x_n\right)=\rho\left(x_1,\cdots,x_n\right)$$

$$L=a_0+a_i\frac{\partial}{\partial x_i}+a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\cdots$$

$$\varphi\left(x_i\right)=\int\rho\left(x_i'\right)G\left(x_i',x_i\right)\left(\mathrm{d}x_i'\right)$$

$$G\left(x_i'-x_i\right)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i\left(x_i-x_i'\right)}\left(\mathrm{d}k_i\right)}{a_0+\mathrm{i}\sum_{i=1}^n k_ia_i-\sum_{i,j=1}^n k_ik_ja_{ij}+\cdots}$$

教学目标

课程目标 低目标：认识并能描述这四幅图的意义

高目标：对上两图的熟悉程度和微积分一样熟悉

对下面两个图代表的特殊函数，熟练的像三角函数和多项式一样熟练，会解波动方程、泊松方程、热传导方程

教学方式和内容

趣味化！先主干，后枝节（替你读书的方法，不适合自学）。

数理方法其实很有趣的(过去种种原因),

四有：有用，有趣，有料，有范

前9周：复变函数理论+积分变换

后9周：数学物理方程/特殊函数

72-4=68节课 内容多 时间少,
少而精 精而深(翻阅参考20多
本国内外教材和科研经历)

Espresso

A cup of espresso from Ventimiglia, Italy

教学方式

教学方式： 板书为主，ppt为辅，详细讲义每节课后给同学们复习和实习，讲义会预报下次预习内容

有任何建议和问题欢迎给我写邮件 huangfp8@sysu.edu.cn

每次上课前要四名同学分别在黑板上推导上一次的公式或者例题，讲义上会提前指定学生和推导的内容，艾宾浩斯遗忘曲线；课后思考题以及课外扩展阅读材料

学习方法

无它，唯“学而时习之”

习：复习+实习：类似学滑雪、游泳，

即认真听课+例题作业实习

学以致用/实用主义：侧重物理中普适的数学方法，

不重数学上严格的证明。系统学习，反碎片化知识。

eg. Dirac 发明 $\delta(x)$ 之初，数学家很不以为然。后来

发展出了广义函数一个数学分支。

Get Your Hands Dirty

信心

其实比其它课简单：

去年坚持来现场上课

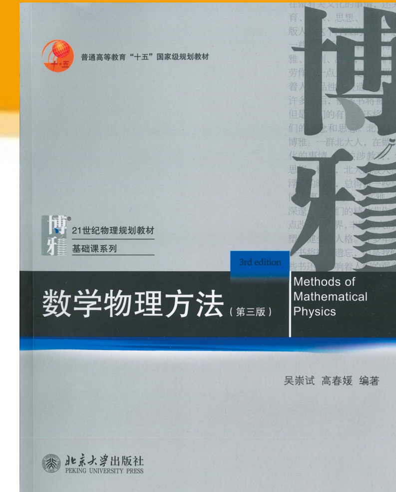
的同学都及格了，90分以上15人，

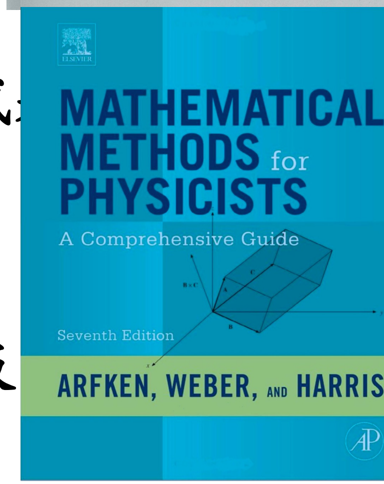
80分以上36人，总人数73人。

只有68节课，总共51小时，

百忙之中务必抽出51小时

考核与教材





成绩评定方式：线上刷题/小测 40%+期末考试 60%

线上小测：第九周周五晚开放，第十周周日晚关闭

课程教材:《数学物理方法》第三版，高春媛，吴崇试

北京大学出版社2019年出版

参考书:《Mathematical methods for physicists 》第7版

George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris 著

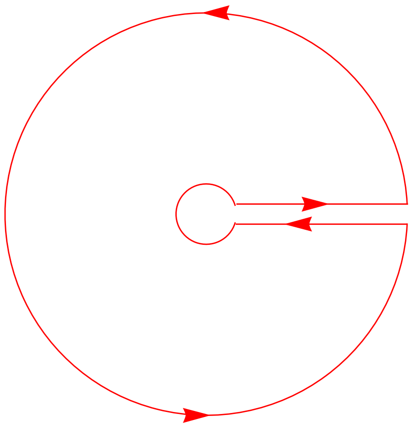
答疑时间：每周六上午9:00-10:00

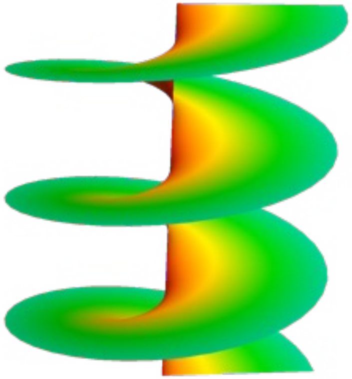
地点：天琴中心1415会议室

答疑助教：马久成 微信号：M2386516832 有疑问及时问

粒子宇宙/天文讨论班：每周六上午9:00-12:00点

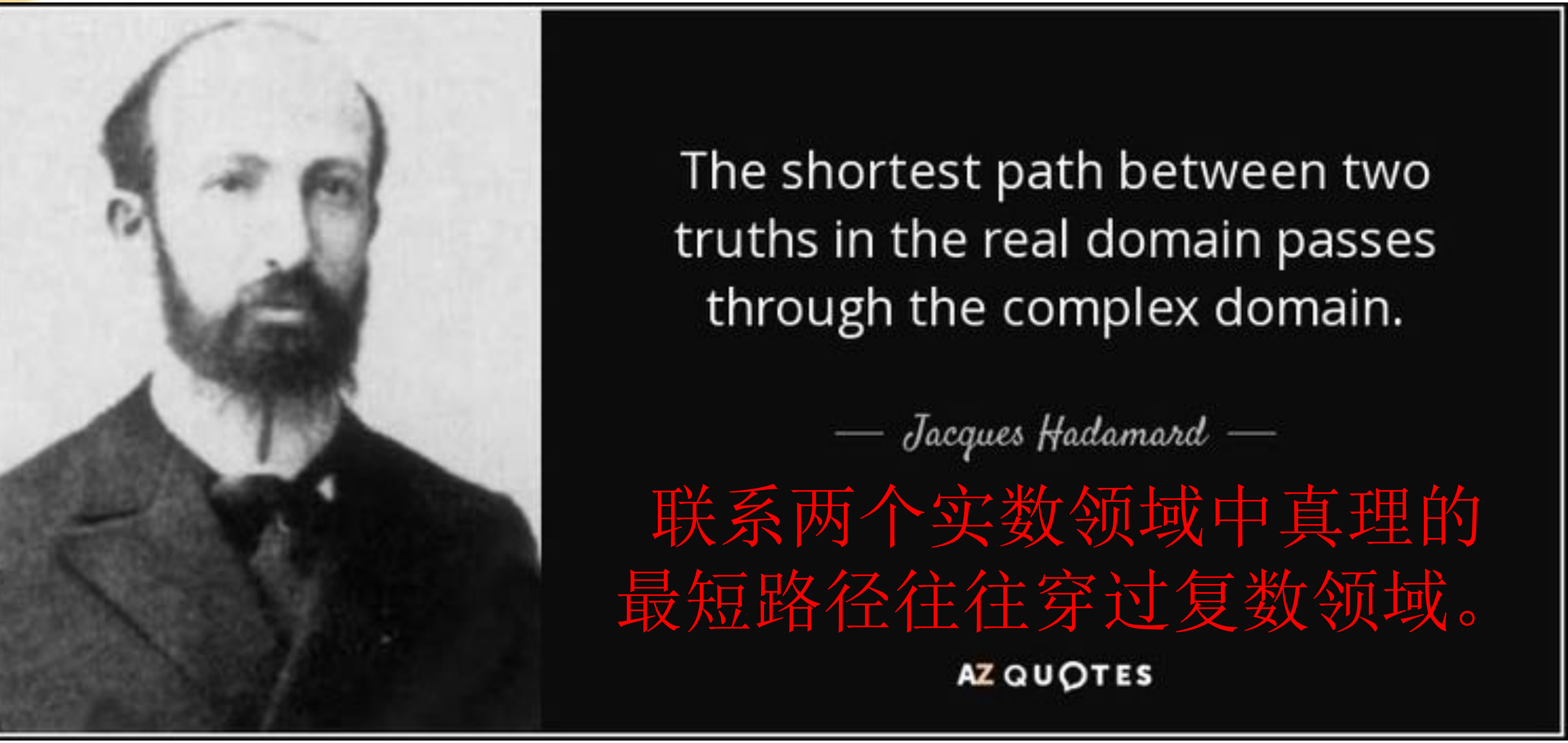
第1章 复数和复变函数





黄发朋
huangfp8@sysu.edu.cn

复变函数魔法



复变函数能把数学和物理不同分支奇妙的联系在一起，并提供理解沟通的捷径。

复变函数魔法

20世纪最伟大的华裔数学大师、...

陈省身

陈先生在南开给本科生上微分几何的课中反复强调复数/复变函数的重要性。

6次讲义，三次讲义都强调：

“微积分还有一个发展, 最要紧的是复数. ”

“我想微积分有一个重要的应用是在复变函数论. 你要讲数, 最有意思的数就是复数. ”

“在数学中, 很要紧的一件事实, 同时在数学史上也是非常要紧的一件事情, 就是有复数. 这个复数使得数学简单, 复函数有许多漂亮, 有意思的性质, 因此, 这使得这些函数在应用上特别有用处. ”

复变函数魔法

事实上，如果通过在论证中引入复值来拓展这些函数的范畴的话，那么就会产生一种以前一直隐而未现的和谐与规律.

B. Riemann，1851

复数的物理意义

Square root of minus one, complex phases and Erwin Schrödinger

In *Schrödinger, Centenary Celebration of a Polymath*, ed. C. W. Kilmister, Cambridge University Press, 1987, pp. 53–64

Chen Ning Yang

【86c】“负 1 的平方根、复相位与埃尔文·薛定谔”后记

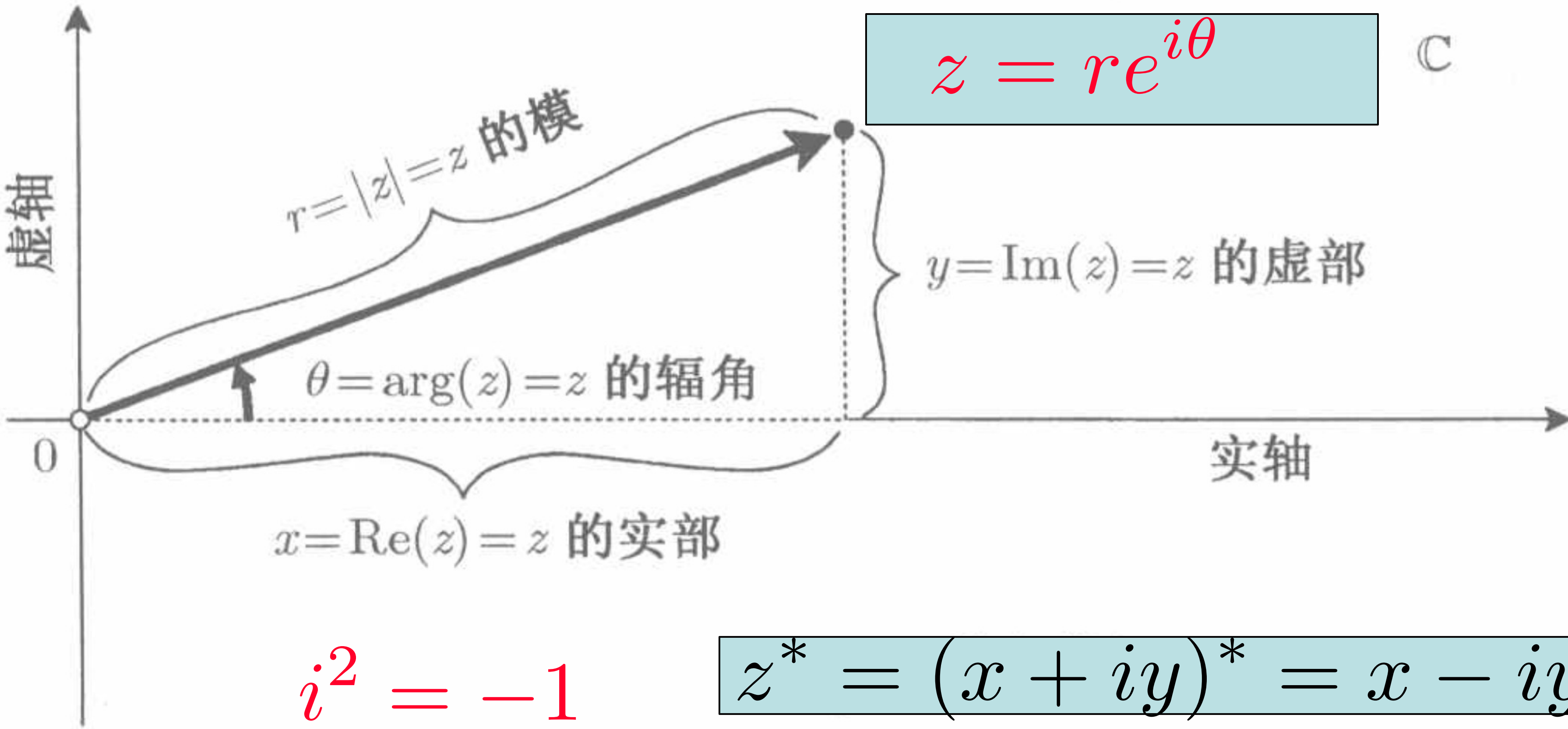
这是我为 1987 年纪念薛定谔百年诞辰所写的。纪念会从 3 月 31 日到 4 月 3 日在伦敦的帝国学院举行。文章发表在《薛定谔，一位通才的百年纪念》(*Schrödinger, Centenary Celebration of a Polymath*) 上。在执笔时我很高兴地深入了解到，1926 年薛定谔最后被迫在他的基本方程式中接受了负 1 的平方根之前的内心争斗。那是如何煎熬的一段时间啊！又是怎样一个伟大的创造良机啊！

推荐课后阅读杨振宁先生虚数与量子力学的文章。

复变和复变函数在光学、量子力学、量子场论、基本粒子物理中有着基础性的物理意义。

目前国际上基础物理最前沿的课题——散射振幅也和复变函数理论有着关联。

一、复数的几何意义



$$z = re^{i\theta}$$

$$i^2 = -1$$

$$z^* = (x+iy)^* = x - iy$$

$$z \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) = x + iy = re^{i\theta} = re^{i\arg(z)}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

复数的应用之一：三角恒等式生成器

欧拉公式 (Euler formula)：物理诺奖得主费曼称该公式为：“数学上最值得注意的公式，这就是我们的无价之宝。”

$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$$

第莫佛定理 (de Moivre’s formula)

$$[cos\ \theta + isin\ \theta]^p = cos\ p\theta + isin\ p\theta$$

二、复变函数

简单来说，复变函数就是在复平面上讨论微积分。

实数的微积分三部曲：

1. 微分
2. 积分
3. 联系微分积分的微积分基本定理（高维微积分时是广义Stokes公式）

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(a), \quad a \le x \le b.$$

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega$$

复数的微积分三部曲：

1. 复微分
2. 复积分
3. 联系微分积分的柯西积分定理

复变函数独有的性质：可导(解析)则无穷可导；多值函数

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

思考题?

实数域微积分与复数域微积分的异与同

题目自拟，内容要包括：

1. 大一学的实数域上微积分最核心的要素，
2. 本课程学习的复数域上微积分的核心要素，
3. 哪些可以直接从实数推广到复数域，
4. 哪些是复数域微积分的特有性质

二、复微分

可导的定义简单推出

柯西-黎曼方程 Cauchy-Riemann equations

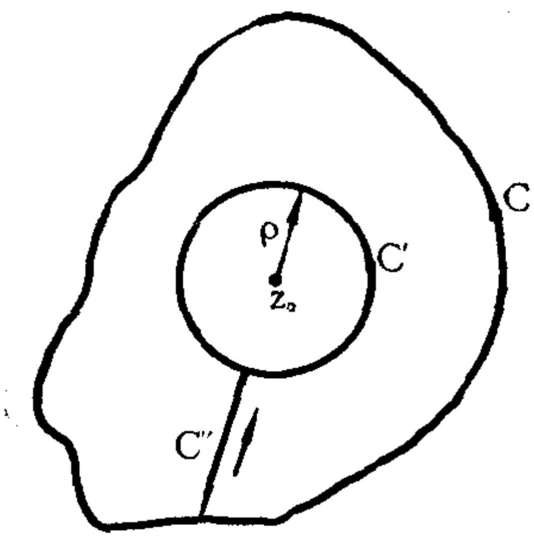
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

先讲主干知识，多值函数和黎曼面放在后面讲！

复积分与柯西积分公式

复变函数学完后即使什么都忘记了，也不要忘记柯西积分公式。地位相当于微积分基本定理(牛顿-莱布尼茨公式)。直接上雪山滑雪！

非常有用(比如可以作为非常强大的积分方法)，非常深刻的公式(自然联系到拓扑学)。



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

理解并记住这个图！

解析函数的绝妙性质

不同于实变函数，复变函数如果解析的话，拥有独特的绝妙性质：**解析函数无限可微**。

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$