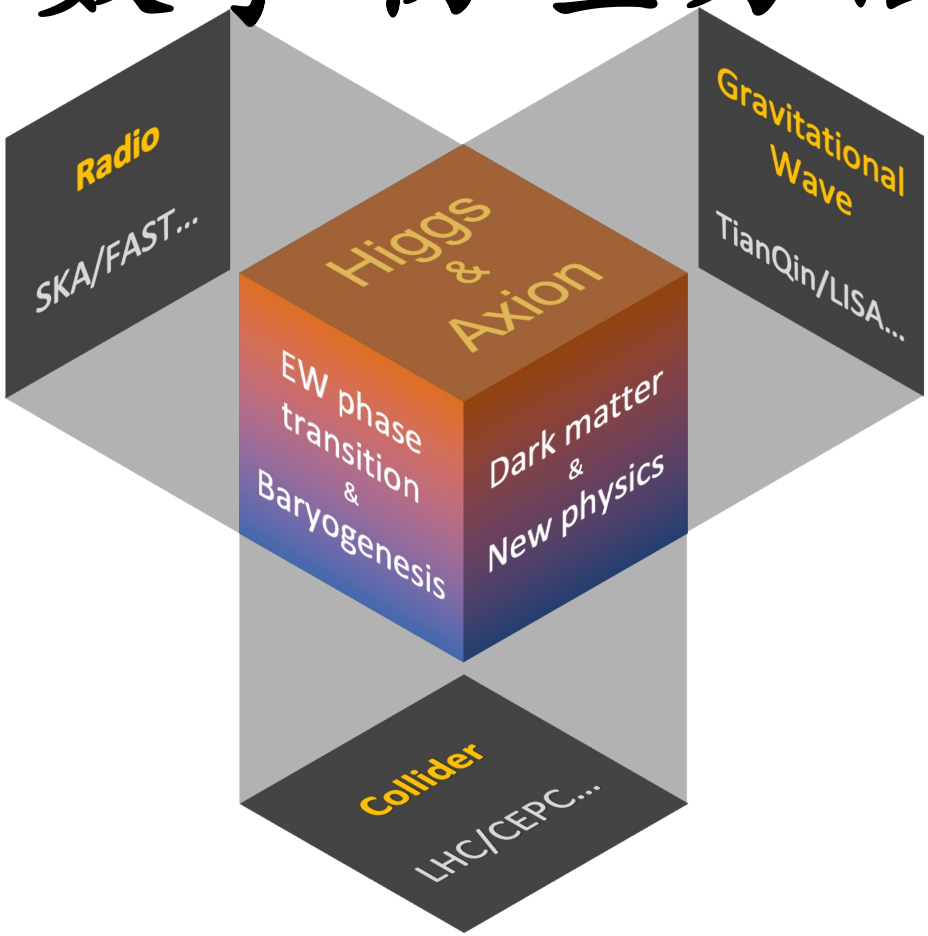
数学物理方法

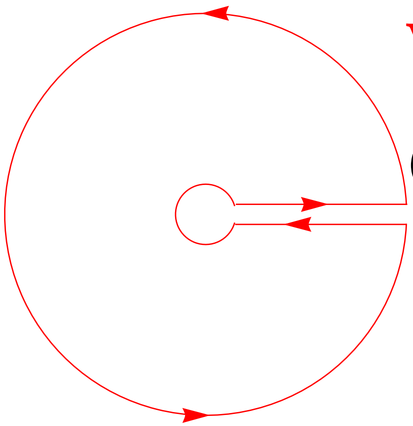


黄发朋 天琴中心1409办公室 15201510572

huangfp8@sysu.edu.cn

https://fapenghuang.github.io/teaching/

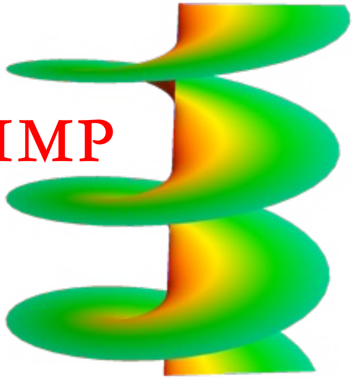
第0章 引言

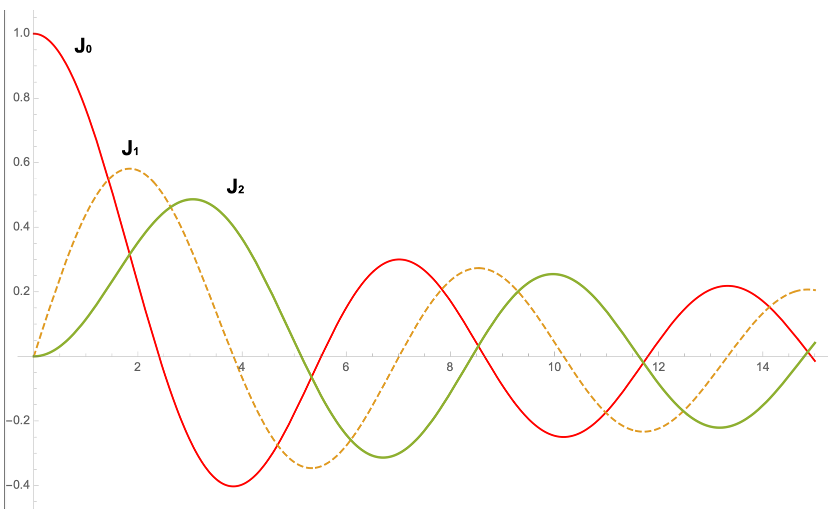


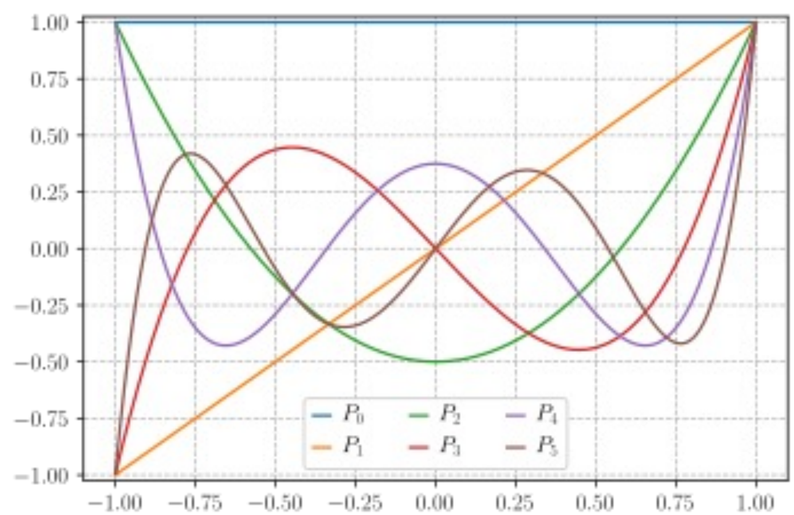
What we talk when we talk about MMP

(mathematical method for physics)

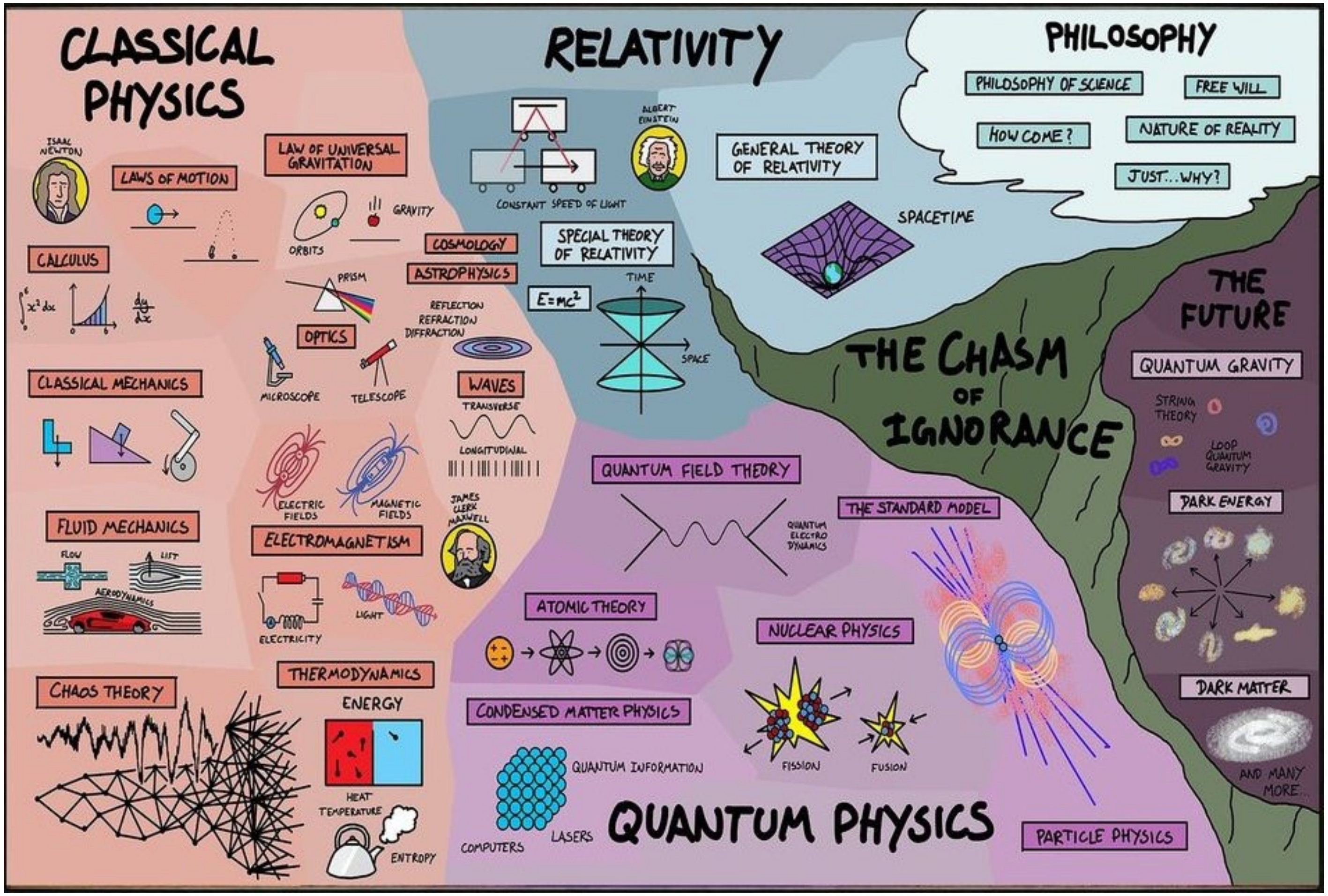
开局四幅图，内容全靠？__







无处不在的数学物理方法



一劳永逸、受用终身的课，最后的数学课

量子力学、光学、量子场论、电动力学、计算机、热力学与统计物理、数理统计、理论力学、拓扑学微分几何等很多现代数学分支

极小尺度

量子统计

粒子物理

量子场论

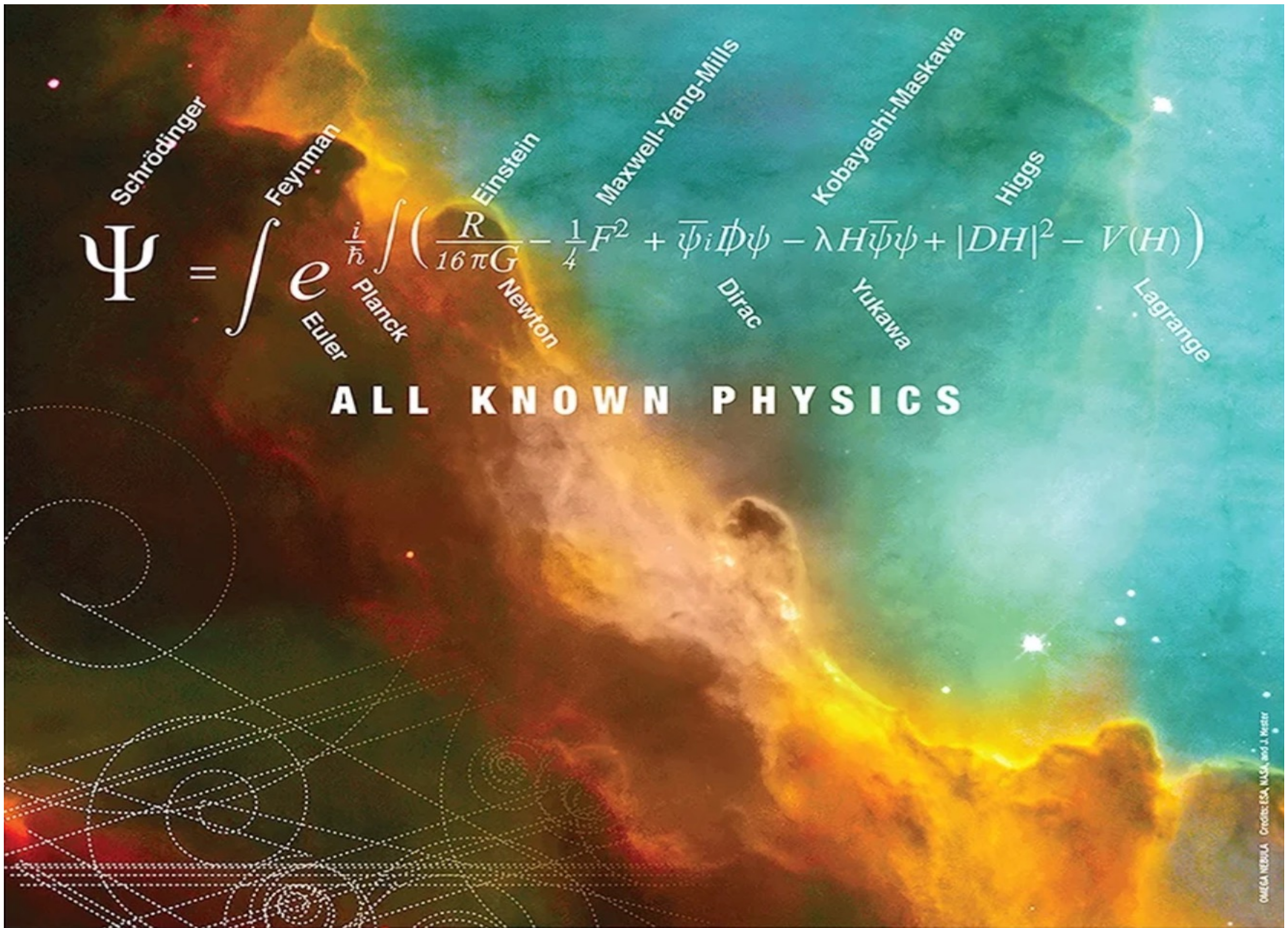
$$\ln Z = -\frac{1}{2}\sum_{n}\sum_{\mathbf{p}} \ln\left[\beta^2(\omega_n^2+\omega^2)\right]$$

极大尺度

宇宙相变

早期宇宙

粒子宇宙



Credit:PI institute

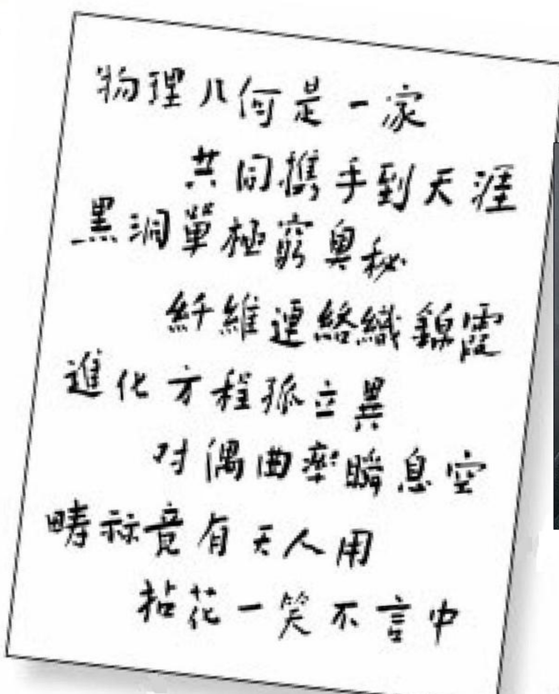
教学目标

- 学术必备 考研保研面试（光学 菲涅尔积分）；民科难以逾越的门槛；肤浅与深刻 $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$
- 工作外挂 google面试 $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2 = R^2$ V_N?

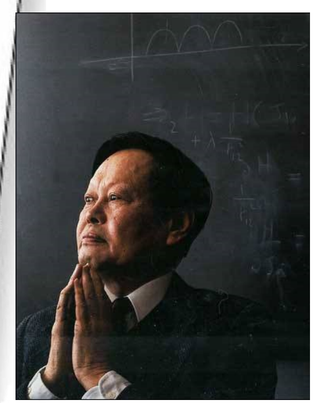
  （炫技）
- 数理审美

20世纪最伟大的华裔数学大师、...

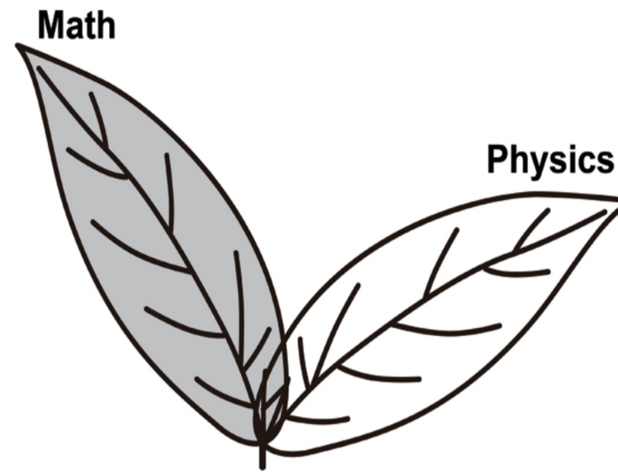
陈省身



物理几何是一家
共同携手到天涯
黑洞單極窮奧秘
纖維連絡織錦霞
進化方程孫立異
對偶曲率瞬息空
疇算竟有天人用
拈花一笑不言中



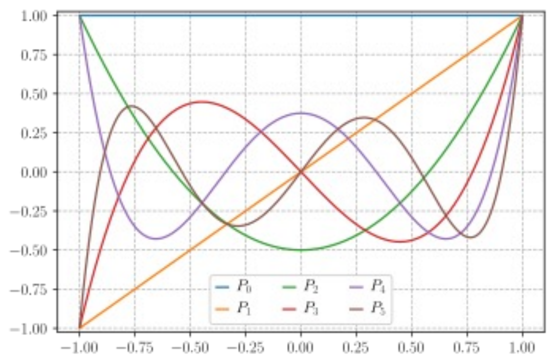
杨振宁



教学目标

必须会证明：Gaussian(高显老师?)函数的傅立叶变换(在动量空间)还是Gaussian(还是高显老师)函数

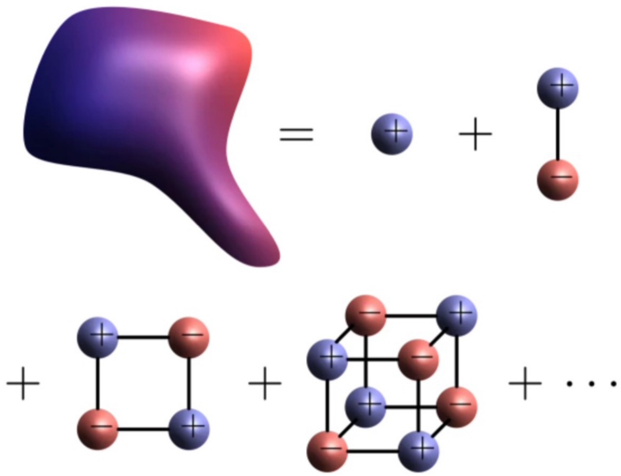
量子力学(海森堡不确定性原理)

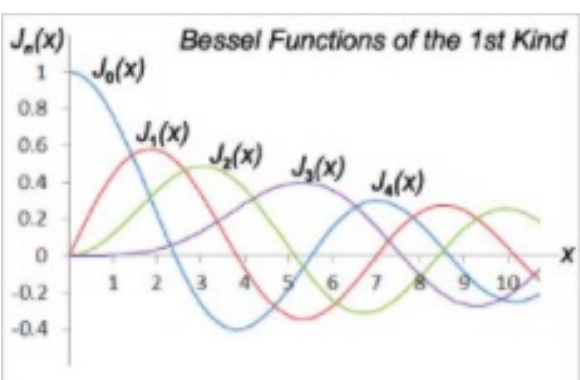


特殊函数P_n

电动力学的

多极展开



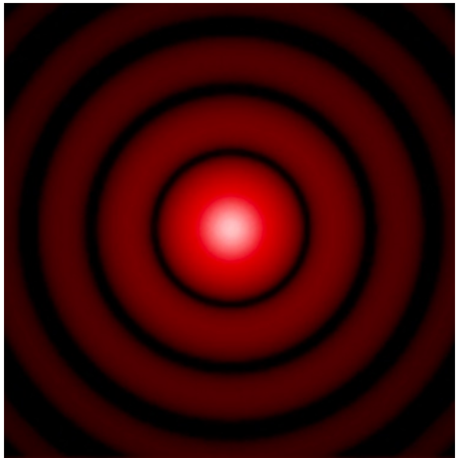


特殊函数J_n

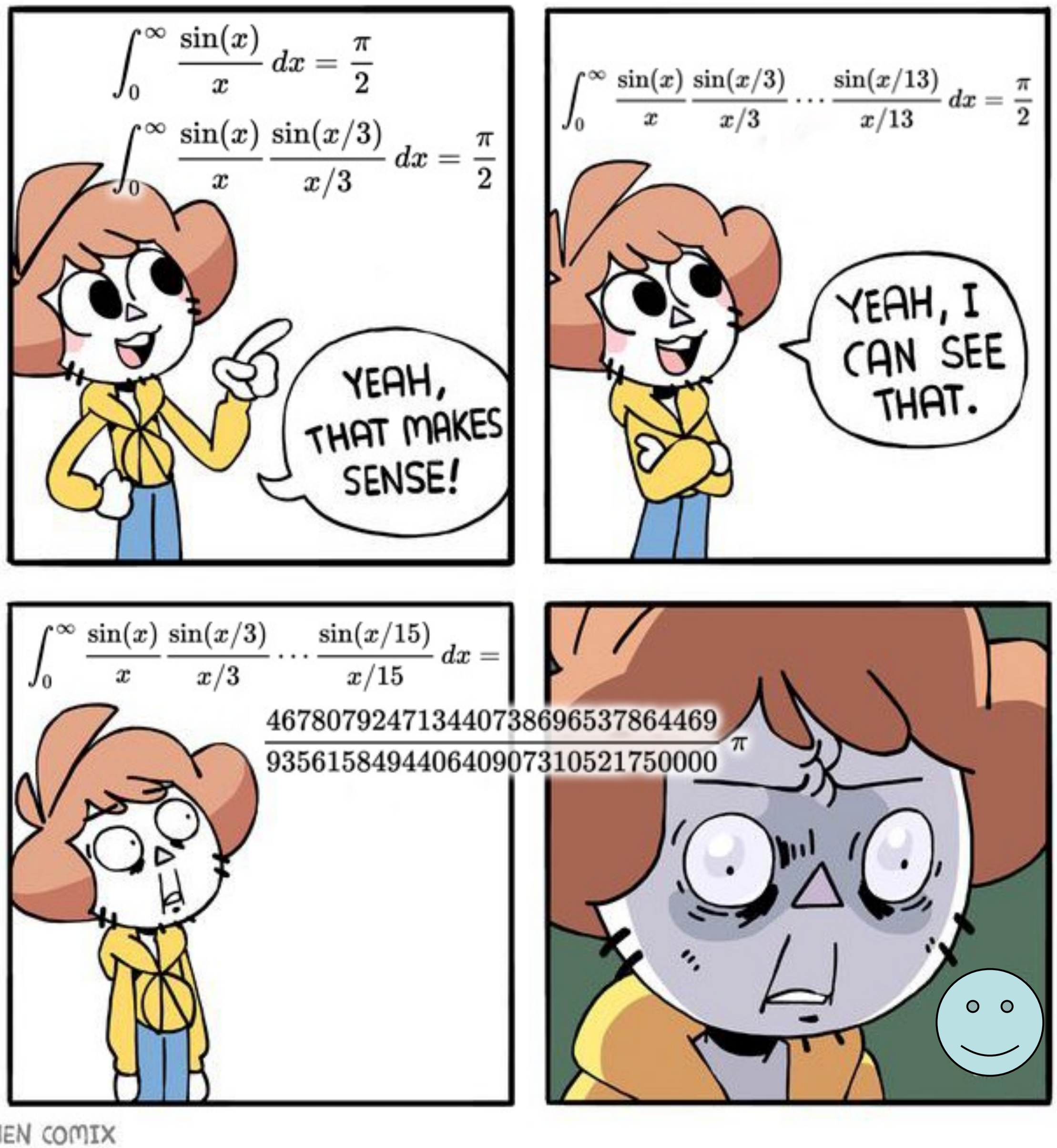
光学的Airy斑

夫琅和费衍射

傅立叶光学



教学目标



$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

熟练掌握6种计算方法：

1. (复变函数柯西定理)围道积分

2.(复变函数)留数定理

3. 傅立叶变换

4. 拉普拉斯变换

5. Dirac delta函数

6. (球)贝塞尔函数

教学目标

以下偏微分方程（输运方程or扩散方程）的解提供了

二战中第一颗原子铀235球体的临界质量

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(Be^{kr}\right)+\frac{\sigma-\alpha-1}{D\tau}Be^{kr}=0$$

$$k^2Be^{kr}+\frac{\sigma-\alpha-1}{D\tau}Be^{kr}=0$$

$$k^2=-\frac{\sigma-\alpha-1}{D\tau}$$

$$k=\pm i\sqrt{\frac{\sigma-\alpha-1}{D\tau}}$$

$$k=\pm i\gamma$$

教学目标

很多物理问题，都会约化成(非)齐次线性微分方程的求解 $L\varphi\left(x_1,\cdots,x_n\right)=\rho\left(x_1,\cdots,x_n\right)$

(例如波动方程、泊松方程、扩散/输运方程)

三类理想解：震荡解，衰减解，稳定解

现实解：震荡衰减解

$$L=a_0+a_i\frac{\partial}{\partial x_i}+a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\cdots$$

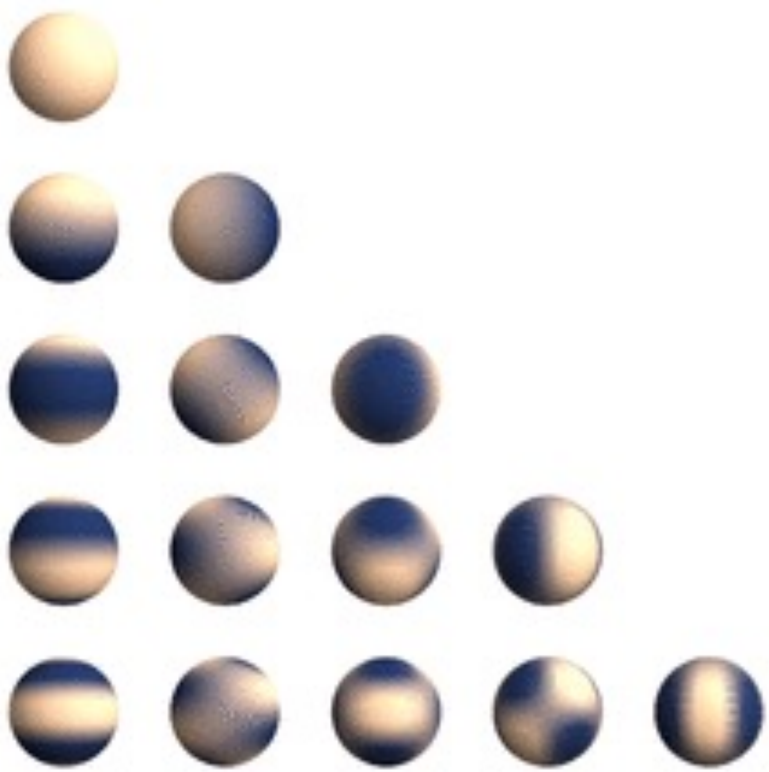
$$\varphi\left(x_i\right)=\int\rho\left(x_i'\right)G\left(x_i',x_i\right)\left(\mathrm{d}x_i'\right)$$

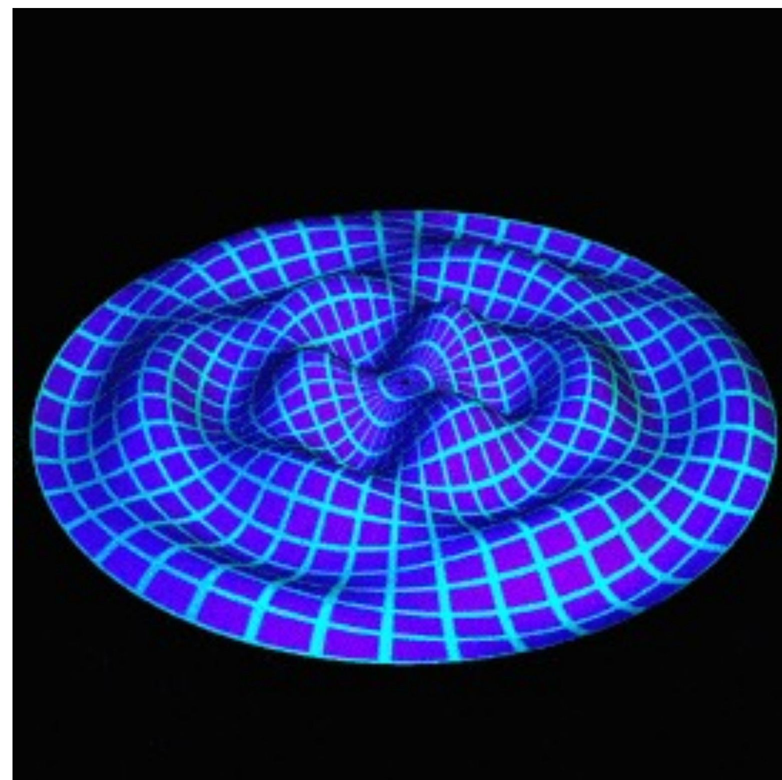
$$G\left(x_i'-x_i\right)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i\left(x_i-x_i'\right)}\left(\mathrm{d}k_i\right)}{a_0+\mathrm{i}\sum_{i=1}^n k_ia_i-\sum_{i,j=1}^n k_ik_ja_{ij}+\cdots}$$

教学目标

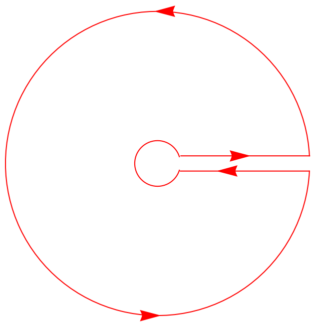
Is there anything more powerful than this?

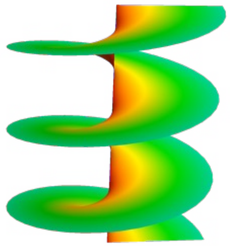
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,\mathrm{d}k = \delta(x)$$

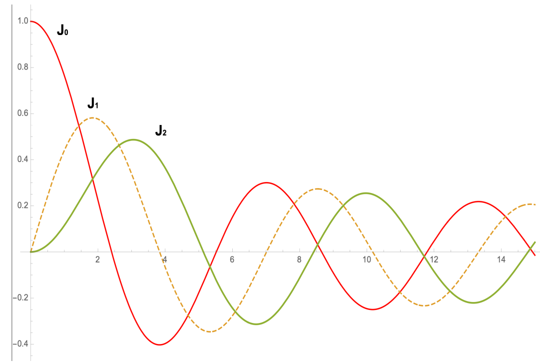


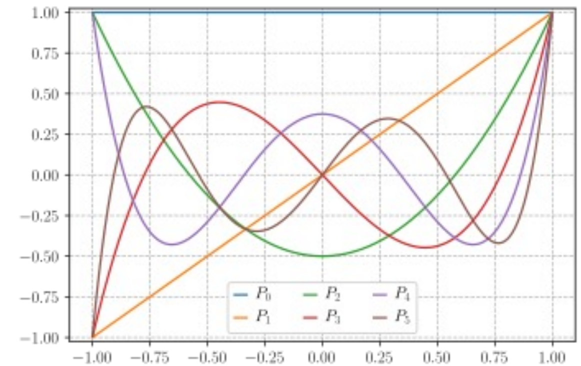


教学目标









课程目标 低目标：认识并能描述这四幅图的意义

高目标：对前面两个图的熟悉程度和微积分一样

对后面两个图代表的特殊函数，熟练的像三角函数和多项式一样，会解波动方程、泊松方程、扩散/输运方程

教学方式和内容

趣味化！先主干，后枝节（替你读书的方法，不适合自学）。

数理方法其实很有趣的，

四有：有用，有趣，有料，有范

前9周：复变函数理论+积分变换

后9周：数学物理方程/特殊函数

72-4=68节课 内容多 时间少，少而精 精而深(翻阅参考20多本国内外教材和科研经历)

Espresso

A cup of espresso from Ventimiglia, Italy

教学方式

教学方式：板书为主，ppt为辅，详细讲义每节课后给同学们复习和实习，讲义会预报下节课内容

有任何建议和问题欢迎给我写邮件 huangfp8@sysu.edu.cn

每次上课前要四名同学分别在黑板上推导上一次的公式或者例题，讲义上会提前指定学生和推导的内容，艾宾浩斯遗忘曲线；课后思考题以及课外扩展阅读材料

每次上课现场签到！！

上课时会随机点名学生回答问题，点名不在的同学算缺勤一次

学习方法

无它，唯“学而时习之”

习：复习+ 实习：类似学滑雪、游泳，

即认真听课+例题作业实习

学以致用/实用主义：侧重物理中普适的数学方法，不重数学上严格的证明。系统学习，反碎片化知识。

eg. Dirac 发明 $\delta(x)$ 之初，数学家很不以为然。后来发展出了广义函数一个数学分支。

Get Your Hands Dirty

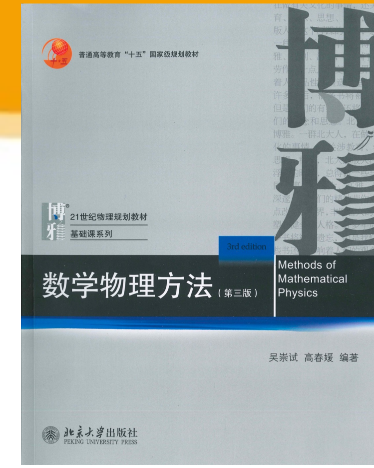
信心

去年坚持来现场上课的同学都及格了，90分以上15人，80分以上36人，总考试人数73人。

只有68节课，总共51小时，百忙之中务必抽出51小时。

2024年1月2号上午期末考试（最早的期末考试，没有最后突击复习时间，需要平时学而时习之）

考核与教材



成绩评定方式：平时40%+期末考试60%

课程教材:《数学物理方法》第三版，高春媛，吴崇试著，北京大学出版社2019年出版

参考书：《物理学家用的数学方法》第7版，Arfken，Weber，Harris著．

答疑地点：天琴中心1415会议室

每周六上午9:00-11:00点：粒子宇宙学,经典和量子场论讨论班

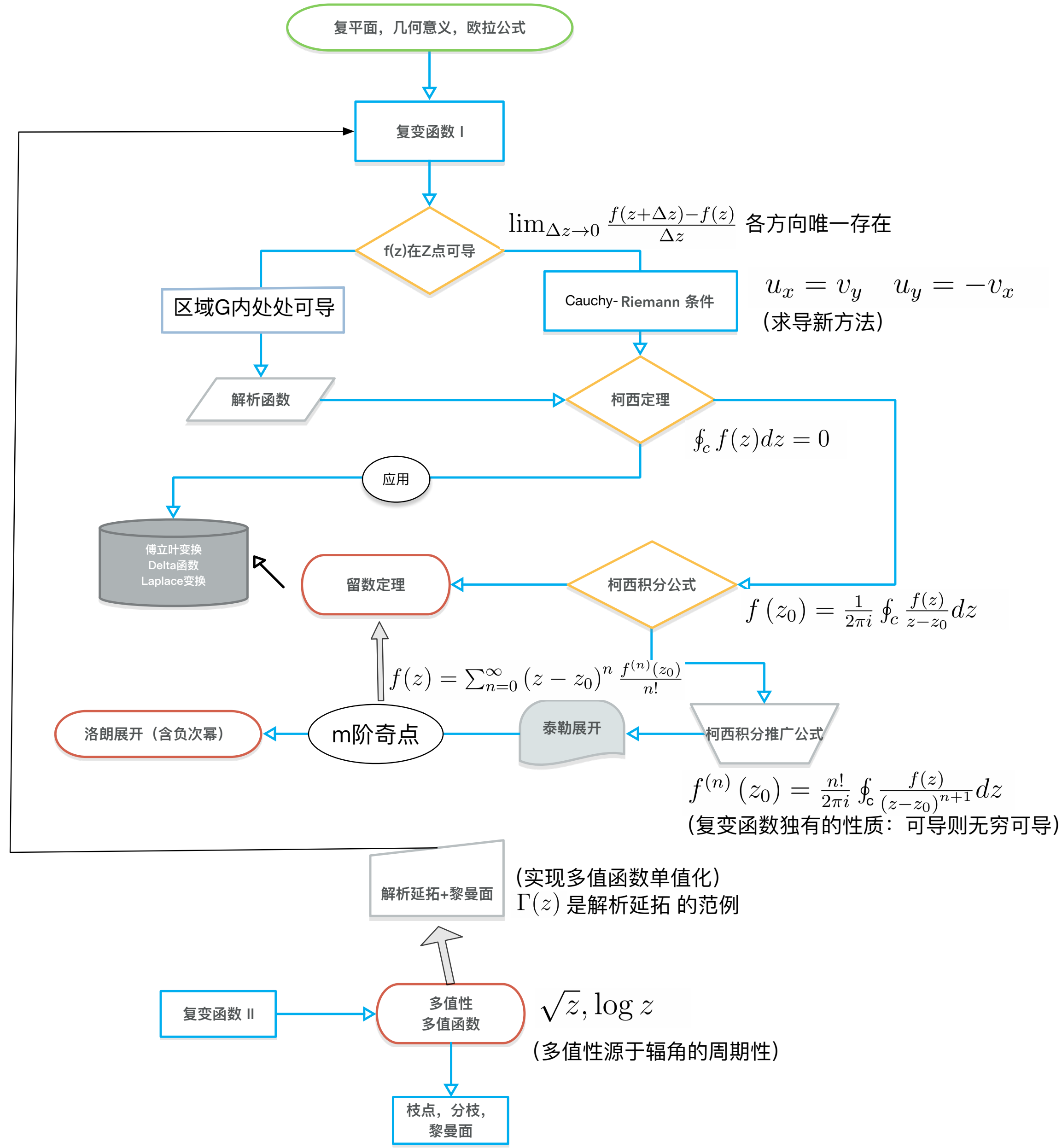
每周六上午10:00-12:00：姜思宇 杨靖 助教答疑

每个月一次习题课

有疑问及时答疑（往年经常去答疑的同学都是高分）

课程主线(安排)

上半学期：复变函数



课程主线(安排)

下半学期：数学物理方程

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{r^2}[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}]$$

球

拉普拉斯方程 $\nabla^2\psi=0$

波动方程 $\nabla^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{c^2\partial t^2}$

解法：1.分离变量+2.级数解法+3.特解

柱

$$\nabla^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

分离变量 角度部分

分离变量 径向部分

分离变量 径向部分

球谐函数

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]Y_{lm}(\theta,\phi)=-l(l+1)Y_{lm}(\theta,\phi)$$

球贝塞尔

$$j_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

贝塞尔方程

级数解法或者生成函数法

半奇数阶

第一类贝塞尔函数

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}$$

连带勒让德

勒让德多项式常用性质、特殊值、正交、模方、递推、勒让德展开

生成函数 $\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n(x)$

远场电势多极展开

$P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$

$J_n(-x)=(-1)^nJ_n(x)$

$P_n(x)\quad x^n$

$J_n(x)\quad cos(x-n\pi/2)$

$P_n(x)$ 多项式的推广

$J_n(x)$三角函数的推广

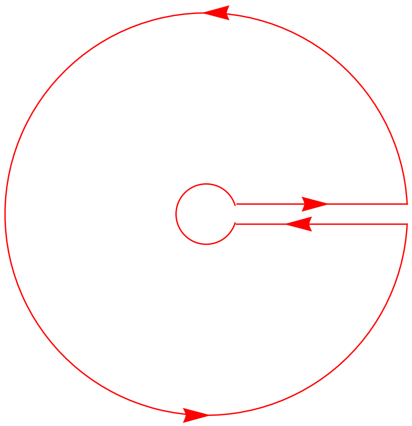
$P_n(x)$最高阶项为 x^n

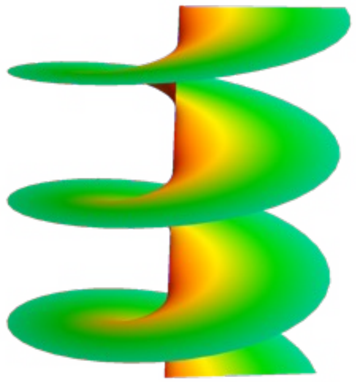
$J_n(x)$最低阶项为 x^n

定义出发得到J的基本性质，并得到其它几类贝塞尔函数

$N_\nu,K_\nu,I_\nu,H_\nu,$

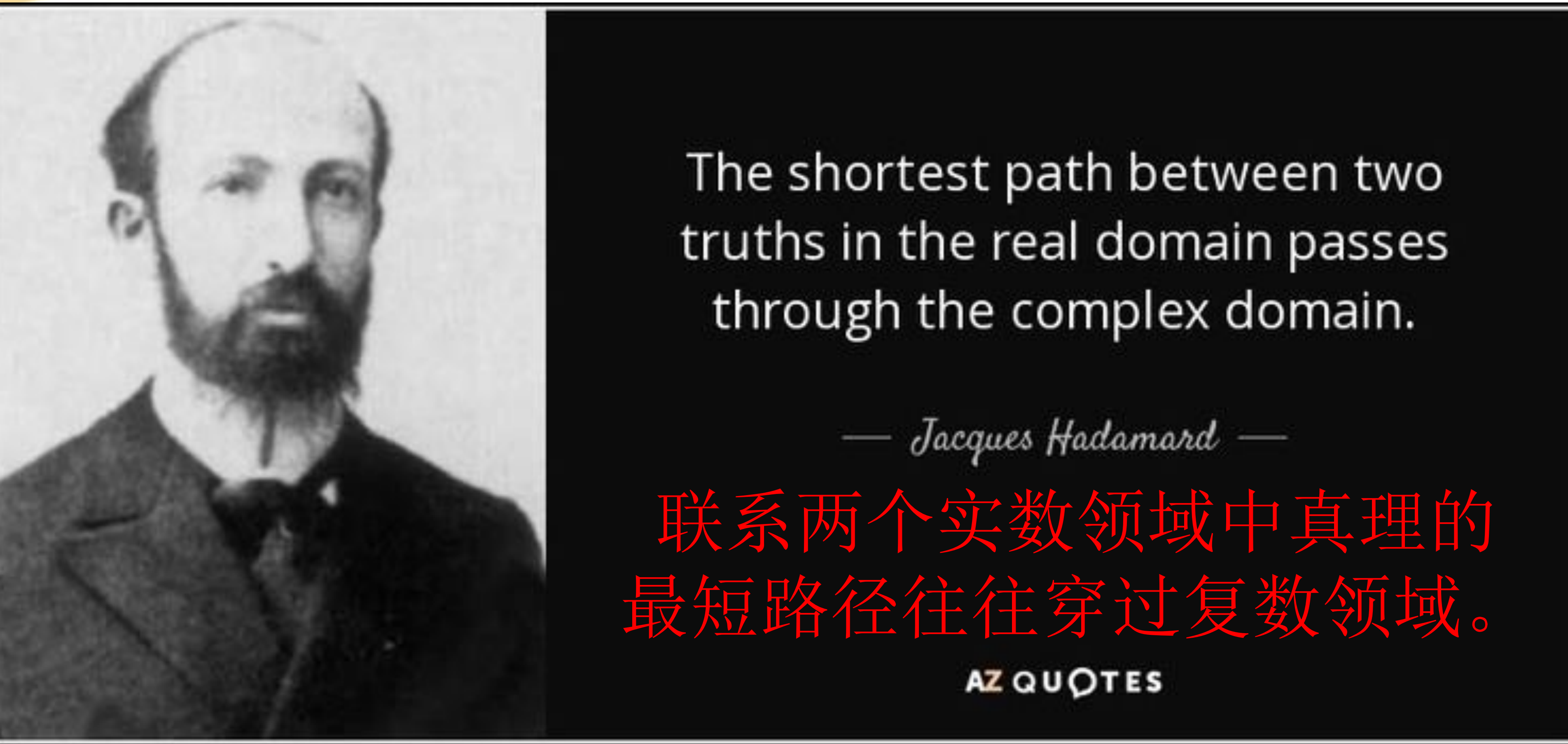
第1章 复数和复变函数





黄发朋
huangfp8@sysu.edu.cn

复变函数魔法



复变函数能把数学和物理不同分支奇妙的联系在一起，并提供理解沟通的捷径。

复变函数魔法


20世纪最伟大的华裔数学大师、...
陈省身

陈先生在南开给本科生上微分几何的课中反复强调复数/复变函数的重要性。

6次讲义，三次讲义都强调：

“微积分还有一个发展, 最要紧的是复数. ”

“我想微积分有一个重要的应用是在复变函数论. 你要讲数, 最有意思的数就是复数. ”

“在数学中, 很要紧的一件事实, 同时在数学史上也是非常要紧的一件事情, 就是有复数. 这个复数使得数学简单, 复函数有许多漂亮, 有意思的性质, 因此, 这使得这些函数在应用上特别有用处. ”

复变函数魔法

事实上，如果通过在论证中引入复值来拓展这些函数的范畴的话，那么就会产生一种以前一直隐而未现的和谐与规律.

B. Riemann，1851

One of the most remarkable discoveries in elementary particle physics has been that of the existence of the complex plane.

—— 诺贝尔奖得主 J. Schwinger

A. Zee，Quantum field theory in a nutshell：When we begin the study of complex analysis we enter a marvelous world, full of wonderful insights. We are tempted to use the adjectives magical, or even miraculous when describing the first theorems we learn; and in pursuing the subject, we continue to be astonished by the elegance and sweep of the results.

复数的物理意义

Square root of minus one, complex phases and Erwin Schrödinger

In *Schrödinger, Centenary Celebration of a Polymath*, ed. C. W. Kilmister, Cambridge University Press, 1987, pp. 53 – 64

Chen Ning Yang

【86c】"负 1 的平方根、复相位与埃尔文·薛定谔"后记

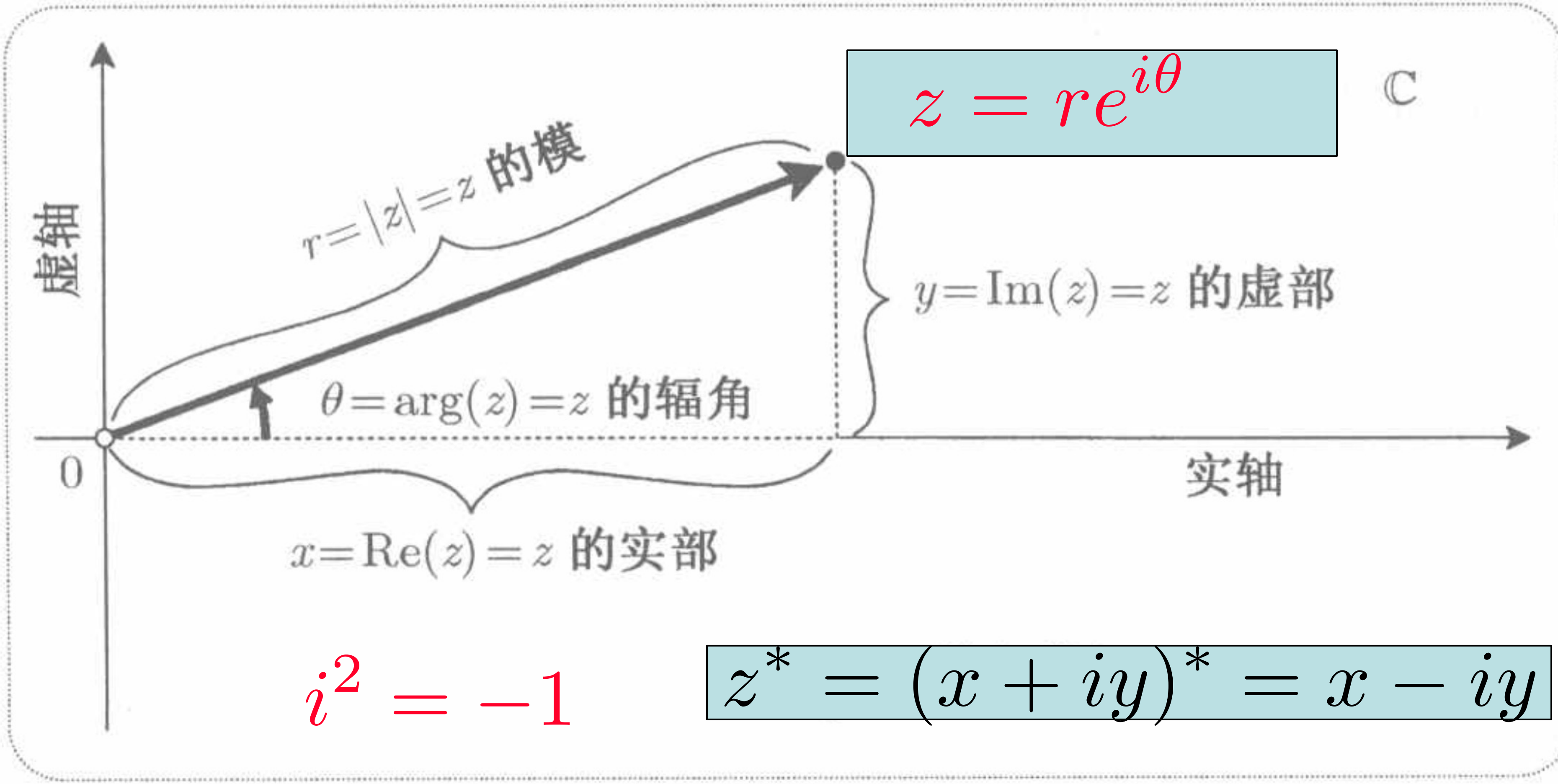
这是我为 1987 年纪念薛定谔百年诞辰所写的。纪念会从 3 月 31 日到 4 月 3 日在伦敦的帝国学院举行。文章发表在《薛定谔，一位通才的百年纪念》(*Schrödinger, Centenary Celebration of a Polymath*) 上。在执笔时我很高兴地深入了解到，1926 年薛定谔最后被迫在他的基本方程式中接受了负 1 的平方根之前的内心争斗。那是如何煎熬的一段时间啊！又是怎样一个伟大的创造良机啊！

推荐阅读杨振宁先生虚数与量子力学的文章

复变和复变函数在光学、量子力学、量子场论、基本粒子物理中有着基础性的物理意义。

目前国际上基础物理最前沿的课题——散射振幅也和复变函数理论有着关联。

一、复数的几何意义



$$z = re^{i\theta}$$

$$i^2 = -1$$

$$z^* = (x+iy)^* = x - iy$$

$$z \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) = x + iy = re^{i\theta} = re^{i\arg(z)}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

复数的应用之一：三角恒等式生成器

欧拉公式 (Euler formula)：物理诺奖得主费曼称该公式为：

“数学上最值得注意的公式，这就是我们的无价之宝。”

$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$$

第莫佛定理 (de Moivre’s formula)

$$[cos\ \theta + isin\ \theta]^p = cos\ p\theta + isin\ p\theta$$

二、复变函数

简单来说，复变函数就是在复平面上讨论微积分。

实数的微积分三部曲：

1. 微分
2. 积分
3. 联系微分积分的微积分基本定理（高维微积分时是广义Stokes公

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(a), \quad a \le x \le b.$$

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_\Sigma d\omega$$

复数的微积分三部曲：

1. 复微分
2. 复积分
3. 联系微分积分的柯西积分定理

复变函数独有的性质：可导(解析)则无穷可导；多值函数

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

思考题?

实数域微积分与复数域微积分的异与同

题目自拟，内容要包括：

1. 大一学的实数域上微积分最核心的要素，
2. 本课程学习的复数域上微积分的核心要素，
3. 哪些可以直接从实数推广到复数域，
4. 哪些是复数域微积分的特有性质

二、复微分

可导的定义简单推出

柯西-黎曼方程 Cauchy-Riemann equations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

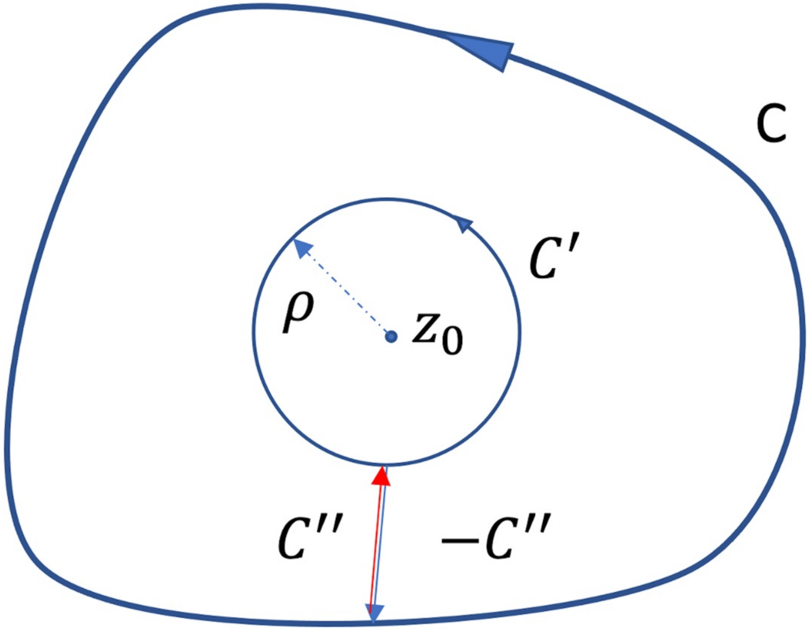
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

先讲主干知识，多值函数和黎曼面放在后面讲！

复积分与柯西积分公式

复变函数学完后即使什么都忘记了，也不要忘记柯西积分公式。地位相当于微积分基本定理(牛顿-莱布尼茨公式)。 直接上雪山滑雪！

非常有用(比如可以作为非常强大的积分方法)，非常深刻的公式(自然联系到拓扑学)。



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

理解并记住这个图！

解析函数的绝妙性质

不同于实变函数，复变函数如果解析的话，拥有独特的绝妙性质：解析函数无限可微。

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$