第四章　解析延拓实例：伽马函数和多值函数

4.1　解析延拓简介

1 解析延拓的概念设 $f_1(z)$ 在区域 σ_1 中解析, 若 $f_2(z)$ 在另一与 σ_1 有重叠部分 σ_{12} 的区域 σ_2 中解析, 且在 σ_{12} 中 $f_2(z) \equiv f_1(z)$, 则称 $f_2(z)$ 为 $f_1(z)$ 在 σ_2 中的解析延拓. 反之, 亦称 $f_1(z)$ 为 $f_2(z)$ 在 σ_1 中的解析延拓.

通俗地说解析延拓就是将解析函数的定义域进行扩大.

2. 解析延拓的 (内部) 惟一性定理设 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在区域 G 中均解析, 若在 G 的任一子区域 g 中 $f_1(z) = f_2(z)$, 则在整个区域 G 中必有 $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

例子:

几何级数的解析延拓

斐波那契数列构成的级数的解析延拓

gamma 函数的解析延拓

多值函数的解析延拓重要应用：很好的通过黎曼面 + 解析延拓的概念来把多值函数变成单值函数，从而使得目前所有解析函数的性质都直接适用。后面介绍多值函数的时候再介绍。

4.2　伽马函数

这里我们先介绍解析延拓重要例子——Γ 函数[1]

对于实部大于 0 的复数 p，$\Gamma(p)$ 定义为积分形式，(We state without proof that, for

黄俊明讲义 仅限当年上课使用

[1]What is your favorite function?

If your answer is not the gamma function, then I' ll ask you again after you have read this article.

Your answer might have changed···

Many of those pages were written while he was blind, and for that reason, Euler has been called the Beethoven of mathematics.

Beethoven could not hear his music. Likewise, Euler could not see his calculations.

Actually, Euler was quite optimistic about the loss of his vision. He is known to have said something like: "In this way I will have fewer distractions" .

One should think that this would slow him down, but in fact, when he became blind, his production went up!

The Beautiful Gamma Function and the Genius Who Discovered It complex numbers p with positive real parts $Re\, p > 0$, $\Gamma(p)$ can be defined by an integral representation as)

$$\Gamma(p) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt \tag{4.1}$$

这是我们学习的第一个特殊函数。为什么要定义这么一个奇怪的特殊函数? Euler 考虑把整数阶乘推广到非整数情况，比如

$$1.5!$$

. 是多少？后面讨论原子的平均动能，以及 3 维球体积都会用到。

Euler 的思路是先把通常的阶乘变成积分的形式，然后把整数推广到非整数。

下面从一个常见的简单积分[2]两边简单的微分[3]来得到阶乘的积分定义

$$\begin{aligned}
& b>0, \quad I=\int_0^\infty dx e^{-bx} = \frac{1}{b}\text{基于这个常见积分的另一种推导} \\
& \frac{d}{db}(I) \qquad \int_0^\infty dx e^{-bx}(-x) = \frac{-1}{b^2} \\
& \frac{d^2}{db^2}(I) \quad \int_0^\infty dx e^{-bx}(-x)^2 = \frac{(-1)(-2)}{b^3} \\
& \frac{d^{n-1}}{db^{n-1}}(I) \int_0^\infty dx e^{-bx}(-x)^{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{b^n}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

取 $b=1$ 得到第一个重要的性质：

$$\int_0^\infty dx e^{-x}x^{n-1} = (n-1)! = \Gamma(n)$$

[4]

[2]后面学拉普拉斯变换后会知道，这个积分 $b>0$, $\int_0^\infty dx e^{-bx} = \frac{1}{b}$ 是 1 的拉普拉斯变换。

[3]课外知识：两边求 n 次导得到 e^{-x} 的 Mellin 变换

[4]方法 1728 年, 哥德巴赫在思考数列插值的问题时，希望将阶乘的定义推广到一般实数集上，且推广后的函数图像在定义域内是光滑的。他自己没能解决这个阶乘往实数集上延拓的问题, 于是写信请教尼古拉斯 · 伯努利和他的弟弟丹尼尔 · 伯努利。由于欧拉当时和丹尼尔 · 伯努利在一块, 他也因此得知了这个问题。1729 年, 仅 22 岁的欧拉年解决了这个问题, 伽玛函数由此诞生。欧拉的思路根据等比数列求和公式或泰勒公式可知

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^\infty x^k$$

另外又有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \int_0^{+\infty} e^{-(1-x)t}dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t}\sum_{k=0}^\infty \frac{(xt)^k}{k!}dt \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt}{k!}x^k
\end{aligned}$$

比较上述两个关于 x 的幂级数展开式的各项系数可知

$$k! = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$$

The gamma function $\Gamma(x)$ is an extension of the factorial (function) $n!$ because it generalizes the “classical” factorial, which is defined on the natural numbers, to real or complex arguments (different from the negative integers and from zero); that is,

$$\Gamma(n+1)=n! \text{ for } n\in\mathbb{N}, \text{ or } \Gamma(n)=(n-1)! \text{ for } n\in\mathbb{N}-0 \tag{4.3}$$

We state without proof that, for complex numbers z with positive real parts $Re\,(p)>0$, $\Gamma(p)$ can be defined by an integral representation as

$$\Gamma(p)\stackrel{\text{def}}{=}\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx \tag{4.4}$$

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty \underbrace{t^0}_{=1}e^{-t}dt=-e^{-t}\big|_0^\infty=-\underbrace{e^{-\infty}}_{=0}-\underbrace{(-e^0)}_{=-1}=1=0!. \tag{4.5}$$

下面我们考虑 Gamma 函数是否满足类似阶乘的递推公式？分部积分 by partial integration

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1)&=\int_0^\infty t^z e^{-t}dt\\&=\underbrace{-t^z e^{-t}\big|_0^\infty}_{=0}-\left[-\int_0^\infty\left(\frac{d}{dt}t^z\right)e^{-t}dt\right]\\&=\int_0^\infty zt^{z-1}e^{-t}dt\\&=z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt=z\Gamma(z).\end{aligned} \tag{4.6}$$

上面为 0 的一项用到了无穷除以无穷的洛必达法则，分子分母同时求 p 次导数，得到极限为 0.

牢固掌握的递推公式

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

重要公式 4.1

有了这个递推公式，我们可以做解析延拓，从正数延拓到非正整数除外的全部复平面。

$f_1(z)=\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 的定义域为 $\operatorname{Re}z>0$，称为 D_1. 这样，$\{D_1,f_1(z)\}$ 亦即 $\{\operatorname{Re}z>0,\Gamma(z)\}$ 构成了一个解析元素. 现在由它出发，通过解析延拓，得到第二个解析元素.

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

将 k 取任意使积分收敛的实数就得到了阶乘运算在实数集上的延拓。再令

$$\Gamma(k+1)=k!$$

就可以得到 Γ 函数的定义式。

此式成立的条件是 $\operatorname{Re}(z+1)>0$ (即 $\operatorname{Re} z>-1$) , 以及 $z\neq 0$. 由此定义

$$f_2(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}=\frac{1}{z}\int_0^{\infty} t^z \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$$

$f_2(z)$ 的定义域 D_2 即为 $\operatorname{Re} z>-1$ 及 $z\neq 0$. 因为 D_1 与 D_2 重叠的区域 D_{12} (即 D_1) 中 $f_1(z)=f_2(z)$, 故 $f_2(z)$ 是 $f_1(z)$ 在 D_2 的解析延拓. 这样便得到第二个解析元素

$$\left\{\operatorname{Re} z>-1, z\neq 0;\quad \frac{\Gamma(z+1)}{z}\right\}$$

继续作下去, 可得 $\Gamma(z+2)=(z+1)\Gamma(z+1)$, 由此得

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}=\frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}$$

此式成立的条件是 $\operatorname{Re}(z+2)>0$ (即 $\operatorname{Re} z>-2), z\neq 0$ 及 $z\neq -1$. 由此定义

$$f_3(z)=\frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}=\frac{1}{z(z+1)}\int_0^{\infty} t^{z+1} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$$

$f_3(z)$ 的定义域 D_3 即为 $\operatorname{Re} z>-2, z\neq 0$ 及 $z\neq -1$. 因为 D_2 与 D_3 重叠的区域 D_{23} (即 D_2) 中 $f_2(z)=f_3(z)$, 故 $f_3(z)$ 是 $f_2(z)$ 在 D_3 的解析延拓. 这样我们便得到第三个解析元素

$$\left\{\operatorname{Re} z>-2, z\neq 0, z\neq -1;\quad \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}\right\}$$

继续作下去, 便得到 $\{D_4, f_4(z)\}, \{D_5, f_5(z)\}, \cdots$ 这样, 这些解析元素的全体就构成一个完全的解析函数

$$F(z)=\begin{cases}\int_0^{\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t, & \operatorname{Re} z>0\\ \frac{\Gamma(z+1)}{z}, & \operatorname{Re} z>-1,\quad z\neq 0\\ \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}, & \operatorname{Re} z>-2,\quad z\neq 0,-1\\ \cdots\end{cases}$$

它的定义域就是这些函数的定义域的总和, 即除 $z=0,-1,-2,\cdots$ 以外的全平面.

基本性质：

黄发朋讲义，仅限学生上课使用

$$
\begin{aligned}
&1.5! = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty dx x^{\frac{1}{2}-1}e^{-x} = \int_0^\infty dx x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\\
&x^{\frac{1}{2}} = y \quad ; x = y^2\\
&\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = dy \quad \Rightarrow x^{-\frac{1}{2}}dx = 2dy\\
&\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty 2dye^{-y^2}\\
&= \int_{-\infty}^\infty dye^{-y^2}\\
&\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^\infty dye^{-y^2} \quad \text{高斯积分} \qquad (4.7)\\
&\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^\infty dy \int_{-\infty}^\infty dxe^{-x^2-y^2}\\
&= \iint dxdye^{-r^2}\\
&= \int_0^\infty d\left(\pi r^2\right)e^{-r^2}\\
&= \pi\int_0^\infty dxe^{-x}\\
&= \pi\\
&\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\\
&\therefore \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

> 非常常用的公式，必须牢固掌握
>
> $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty dx x^{-\frac{1}{2}}e^{-x} = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

Furthermore, more generally, without proof

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{(n-2)!!}{2^{(n-1)/2}}, \text{ for } n > 0; \text{ and} \qquad (4.8)$$

$$\text{Euler's reflection formula } \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}. \qquad (4.9)$$

Here, the *double factorial* is defined by

$$n!! = \begin{cases} 1 & \text{if } n = -1, 0, \\ 2\cdot 4\cdots(n-2)\cdot n & \text{for even } n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ 1\cdot 3\cdots(n-2)\cdot n & \text{for odd } n = 2k-1, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \qquad (4.10)$$

讲义 仅限当年上课使用

Note that the even and odd cases can be respectively rewritten as

$$\begin{aligned}
\text{for even } n = 2k, k \geq 1 : n!! &= 2 \cdot 4 \cdots (n-2) \cdot n \\
[n = 2k, k \in \mathbb{N}] = (2k)!! &= \prod_{i=1}^{k} (2i) = 2^k \prod_{i=1}^{k} i \\
&= 2^k \cdot 1 \cdot 2 \cdots (k-1) \cdot k = 2^k\, k! \\
\text{for odd } n = 2k-1, k \geq 1 : n!! &= 1 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot n \\
[n = 2k-1, k \in \mathbb{N}] = (2k-1)!! &= \prod_{i=1}^{k} (2i-1) \qquad (4.11) \\
&= 1 \cdot 3 \cdots (2k-1) \underbrace{\frac{(2k)!!}{(2k)!!}}_{=1} \\
&= \frac{1 \cdot 2 \cdots (2k-2) \cdot (2k-1) \cdot (2k)}{(2k)!!} = \frac{(2k)!}{2^k\, k!} \\
&= \frac{k!(k+1)(k+2) \cdots [(k+1)+k-2][(k+1)+k-1]}{2^k\, k!}
\end{aligned}$$

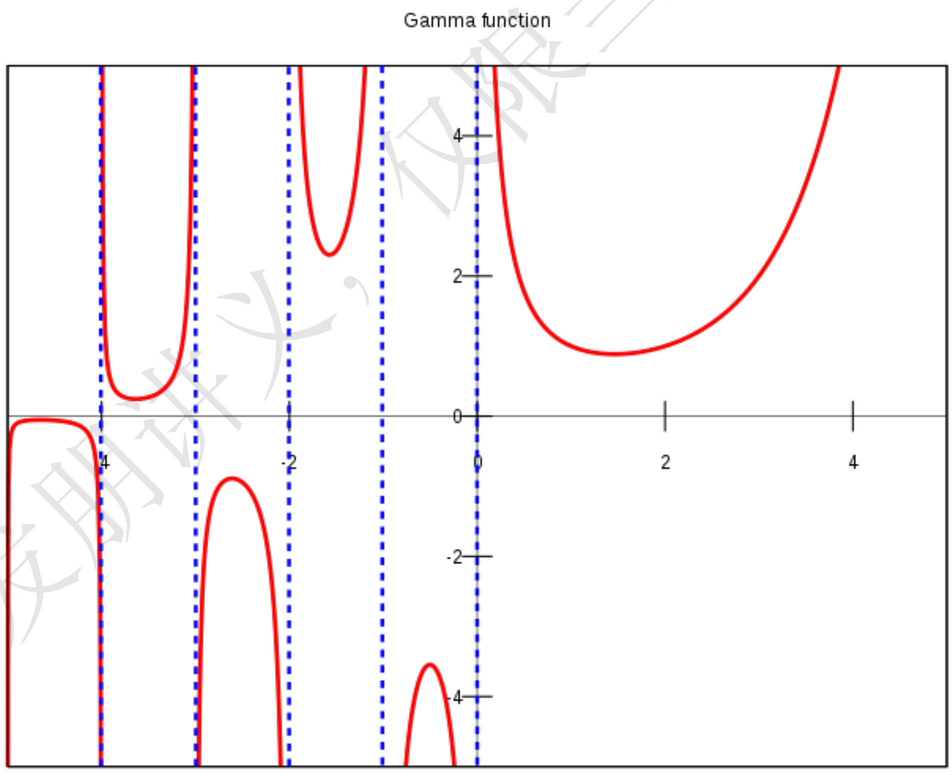

图 4.1: 实轴上的 Gamma 函数 wiki

例题 4.1 求 n 维球的体积 V_n?

黄安朋讲义，仅限当年上课使用

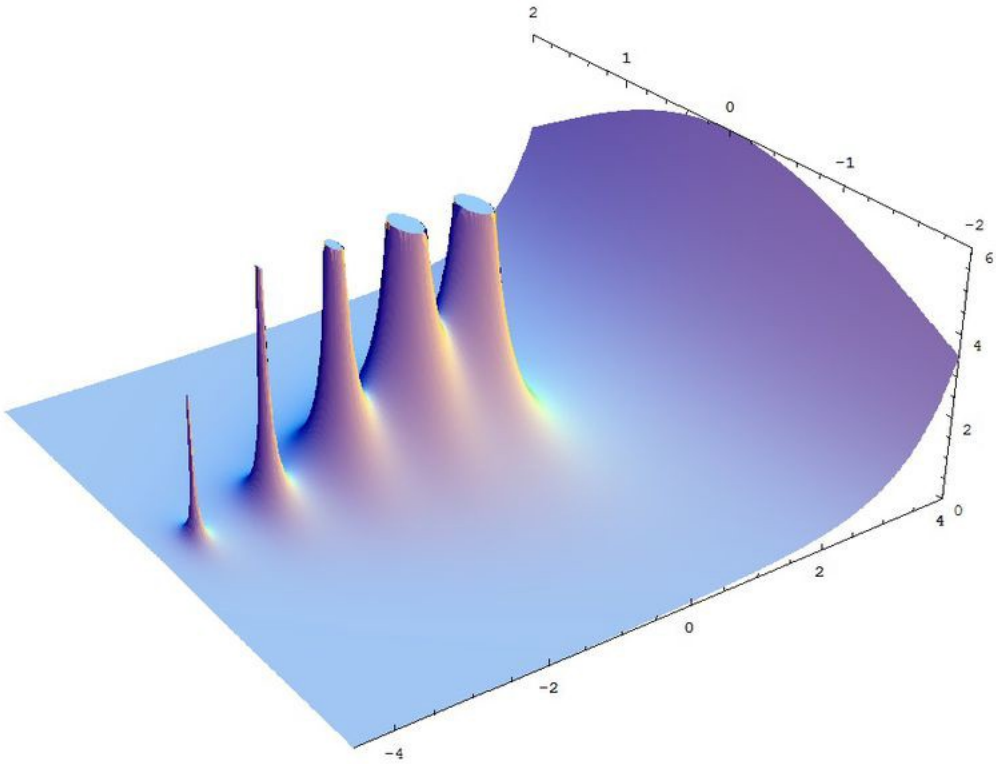

图 4.2: 三维 Gamma 函数 wiki

$$
\begin{aligned}
&x_1^2+\cdots+x_n^2=R^2\\
&V_n=C_nR^n\\
&dV_n=C_nnR^{n-1}dR\\
&\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots dx_1\cdots dx_n e^{-\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)}\\
&\quad=\int dV_n e^{-R^2}\\
&\quad=C_nn\int_0^{\infty}R^{n-1}dRe^{-R^2}\\
&R^2=x\to R=x^{1/2}\\
&2RdR=dx\\
&\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n=C_nn\int_0^{\infty}R^{n-2}\frac{dx}{2}e^{-x}\\
&\quad=\frac{nC_n}{2}\int_0^{\infty}x^{\frac{n}{2}-1}dxe^{-x}\\
&\quad=\frac{nC_n}{2}\Gamma(n/2)\\
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n&=C_n\Gamma(n/2+1)
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

于是

$$
C_n=\frac{\Gamma(1/2)^n}{\Gamma(n/2+1)} \tag{4.13}
$$

最终得到

$$V_n = R^n \frac{\Gamma(1/2)^n}{\Gamma(n/2+1)} \tag{4.14}$$

补充知识[5]

Gamma 函数在热力学和统计物理中有着广泛的应用。

例题 4.2 按照 Maxwell 速率分布率, 速率处于 v 与 $v+\mathrm{d}v$ 间的粒子数 $\mathrm{d}N$ 为

$$\mathrm{d}N = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-mv^2/2kT} v^2 \,\mathrm{d}v$$

其中 N 为总粒子数. 求平均值 $\langle v^2 \rangle = \frac{1}{N}\int_0^\infty v^2 \,\mathrm{d}N$.

解：只需直接计算积分

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{N}\int_0^\infty v^2 \,\mathrm{d}N = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-mv^2/2kT} v^{2+2} \,\mathrm{d}v$$

即可. 令 $x = mv^2/2kT$, 就能算出

$$\begin{aligned}\langle v^2 \rangle &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{(2+3)/2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{(2+1)/2} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{2kT}{m} \Gamma\left(\frac{2+3}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\langle v^2 \rangle = 3kT/m$$

我们来计算原子的动能的平均值. 根据平均值的定义并利用 Maxwell 分布, 我们求出速度的任意一个笛卡儿分量 [1],

$$\overline{v_x^2} = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \mathrm{e}^{-mv_x^2/2kT} \,\mathrm{d}v_x = \frac{kT}{m}.$$

因此原子动能的平均值等于 $\frac{3}{2}kT$. 因而可以说, 在经典统计学中物体的全部粒子的平均动能总是等于 $\frac{3}{2}NkT$, 其中 N 是原子的总数.

定理 4.1

Theorem (Beta Integral) Let $p > 0$ and $q > 0$ be real numbers. Then

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \equiv B(p,q)$$

♡

例题 4.3

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{1/4}}}$$

[5]：$R=1$ 的 n 维单位圆的面积是体积的 n 倍，$\Omega(R=1) = nV_n$. 例如三维单位球体积为 $4\pi/3$, 其表面积为 4π。

仅限当年上课使用

Indeed, making the u-substitution $u = x^{1/4}$ (so that $dx = 4u^3 du$) yields

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{1/4}}} = \int_0^1 4u^3(1-u)^{-1/2} du = \frac{4\Gamma(4)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}.$$

But we already know that $\Gamma(4) = 3! = 6$ and

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{105}{16}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Therefore the above expression simplifies nicely to

$$\frac{4 \cdot 6 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{105}{16}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{128}{35}.$$

学而时习之

(i) 应用麦克斯韦分布时 (求速度绝对值的 n 次幂的平均值.) 经常会遇到以下积分

$$I_n = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2} x^n \, \mathrm{d}x$$

的积分的值, $\alpha > 0$

(ii) 用伽马函数表示出积分 $\int_0^\infty e^{-x^4} dx$

(iii) 已经

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

求

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$$

(iv)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

课程预告

- □ Gamma 函数和解析延拓，教材 5.7，7.1，7.2
- □ 课前十分钟四位同学到黑板上不看讲义计算，如果有同学觉得例题简单的话，可以做一道上面的习题代替我指定的例题——

  马艳坤：计算

  $$\Gamma(1/2)$$

毛钰麒：计算

$$\Gamma(5/2)$$

潘嘉锐：求 n 维球体积

潘锦才：证明单个原子的能量为 $3kT/2$

明讲义，仅限当年上课使用