2.5 课堂练习

Joking: 化直为曲的哲学思想

定理 2.7

积分围道内无奇点用柯西定理：如果函数 $f(z)$ 在区域 G 内解析，则此函数沿着复平面中区域 G 内的任一简单闭曲线 C 的积分都等于零。

$$\oint_C f(z)dz = 0 \tag{2.60}$$

上节课讨论了最简单的柯西定理及其简单应用。可以不加证明的推广到复连通区域的柯西定理 (证明思路大致和下面的柯西公式的推导的前半部分类似)

定理 2.8

若 $f(z)$ 在闭复通区域 $\bar{D}$ 解析，则 $f(z)$ 沿所有内、外边界线 $(L = L_0 + \sum_k L_k)$ 正方向积分之和为零

$$\oint_L f(z)\mathrm{d}z = \oint_{L_0} f(z)\mathrm{d}z + \sum_k \oint_{L_k} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

“正方向”是指，当沿内、外边界线环行时，$\bar{D}$ 保持在左边. 换句话说，外边界线取逆时针方向，内边界线取顺时针方向. 作为约定，今后积分号中没标明方向的积分均沿正方向

定理 2.9

积分围道内有奇点用柯西积分公式:f 是区域 G 内解析函数，C 是 G 内的简单闭曲线，

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz = 2\pi i f(z_0) \tag{2.61}$$

定理 2.10

积分围道内有奇点用推广的柯西积分公式：f 是区域 G 内的解析函数，C 是 G 内的简单闭曲线，

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz = 2\pi i\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \tag{2.62}$$

例题 2.17 物理中常见的 Dirichlet 积分[10]

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \tag{2.63}$$

解 构造辅助函数

$$F(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$$

[10] The Dirichlet integral has applications in various areas of mathematics and physics, such as Fourier analysis, signal processing, and quantum mechanics. It is an example of an integral that cannot be evaluated using elementary functions but can be computed using advanced mathematical techniques. 本课程中，我们将学会 6 中以上的方法来得到这积分。多试试从不同方法算这个积分，就能够把本课程一半的知识点串起来了。本学期结束时希望同学们能集齐七颗龙珠（七种方法）。

构造积分路径如图所示. 函数 e^{iz}/z 黄（无限小半圆弧）、绿、蓝（无限大半圆弧）三段构成的围道 $\mathcal{C}$ 上面及其内部解析。则有柯西定理

$$0 = \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

即

$$\int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{L_2} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

正实轴上的绿色积分路径用 L_1 表示，负实轴上的绿色积分路径用 L_2 表示，

$L_1 : z = x, \epsilon \le x \le R,$

$$\int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

$L_2 : z = x, -R \le x \le -\epsilon,$

$$\int_{L_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{R}^{\epsilon} \frac{e^{-ix}}{x} dx = -\int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{-ix}}{x} dx.$$

注意这里的符号

因此

$$\int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{L_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2i \int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin x}{x} dx,$$

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \lim_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \int_{L_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2i \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

无限大半圆弧上 $C_R : z = Re^{i\theta}, 0 \le \theta \le \pi,$

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta = i \int_0^{\pi} e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta} d\theta.$$

From Jordan's inequality

$$sin\theta \ge \frac{2}{\pi}\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi/2$$

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \le \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta \le \frac{\pi}{R}\left(1 - e^{-R}\right).$$

因此无限大半圆弧的积分为 0

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

在无限小半圆弧上 $C_\epsilon : z = \epsilon e^{i\theta}, 0 \le \theta \le \pi,$

对指数函数做泰勒展开 (严格的泰勒展开的讨论将在下周学习)

$$\int_{C_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{C_\epsilon} \frac{1}{z} dz + \int_{C_\epsilon} g(z) dz$$

$g(z)$ 是 z 的非负幂次多项式，ϵ 趋于 0 时，每一项 z 的非负幂次的在无限小的半圆弧上的积分为 0 从而

$$\int_{C_\epsilon} \frac{1}{z} dz = \int_{\pi}^{0} \frac{i\epsilon e^{i\theta}}{\epsilon e^{i\theta}} d\theta = -\int_0^{\pi} i d\theta = -\pi i.$$

因此

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon}\frac{1}{z}dz+\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon}g(z)dz=-\pi i.$$

当 $\epsilon\to 0$ 以及 $R\to\infty$ 时，我们得到

$$2i\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx-\pi i=0,$$

也就是

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

第一课龙珠——复平面积分柯西定理

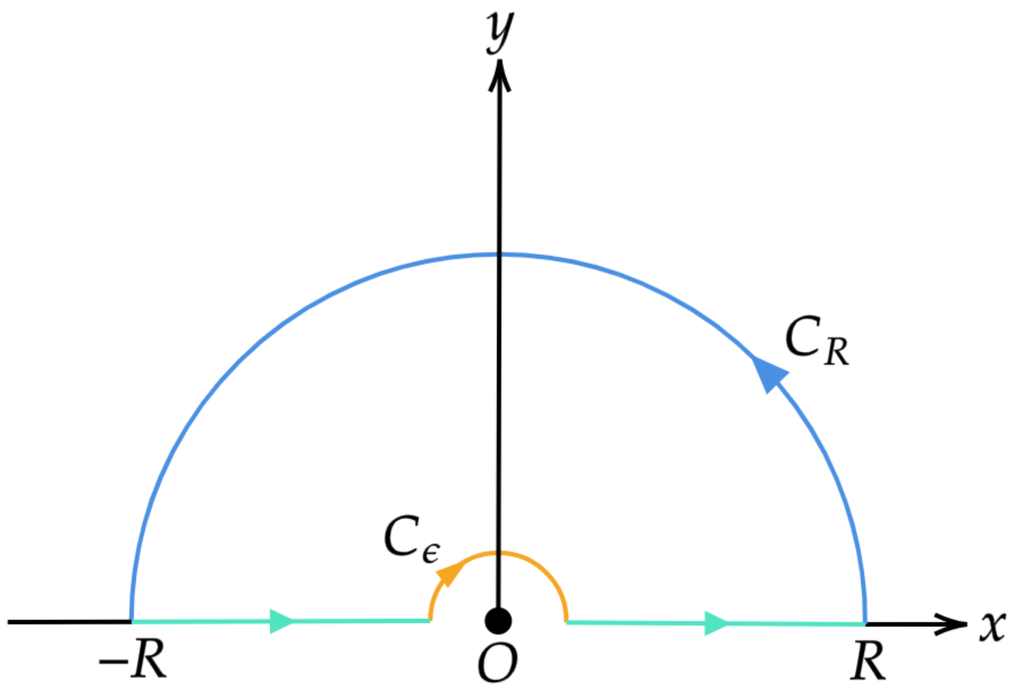

图 2.9: $sinz/z$ 积分围道

例题 2.18 计算积分

$$I=\int_0^\infty\frac{1-\cos x}{x^2}dx \tag{2.64}$$

解 观察被积函数，定义 $f(z)=\left(1-e^{iz}\right)/z^2$，同时考虑如图2.10的积分围道

正向的大圆弧 γ_R^+ 和负向的小圆弧 γ_ϵ^+ 的半价分别为 ϵ 和 R。由柯西定理得到

$$\int_{-R}^{-\epsilon}\frac{1-e^{ix}}{x^2}dx+\int_{\gamma_\epsilon^+}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz+\int_\epsilon^R\frac{1-e^{ix}}{x^2}dx+\int_{\gamma_R^+}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz=0.$$

当 $R\to\infty$ 时，我们观察被积函数的极限

$$\left|\frac{1-e^{iz}}{z^2}\right|\le\frac{2}{|z|^2},$$

因此大圆弧 γ_R^+ 上的积分将趋于 0

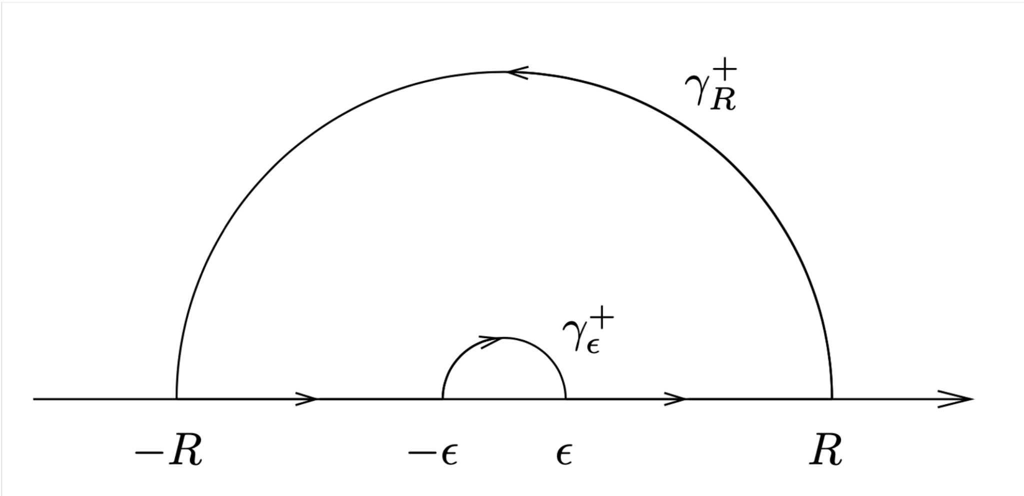

图 2.10: 积分围道

想要积分但很难积分的部分，通过柯西定理转换成了容易积分的半径趋于 0 大小圆弧：

$$\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{1-e^{ix}}{x^2}dx = -\int_{\gamma_\epsilon^+} \frac{1-e^{iz}}{z^2}dz.$$

注意到，半径趋于 0 时，$z \to 0$，小圆弧 γ_ϵ^+ 上 $z = \epsilon e^{i\theta}$ 以及 $dz = i\epsilon e^{i\theta}d\theta$.

$$f(z) = \frac{-iz}{z^2} + E(z)$$

$z \to 0$ 时 $E(z)$ 是收敛的。

因此我们有

$$\int_{\gamma_\epsilon^+} \frac{1-e^{iz}}{z^2}dz \to \int_\pi^0 (-ii)d\theta = -\pi \quad \text{as } \epsilon \to 0$$

取实部得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \pi$$

因为被积函数是偶函数，所以求得

$$I = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

例题 2.19 计算积分 $\int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} \mathrm{e}^{-az^2}\,\mathrm{d}z$ 之值 $(a>0, b>0)$.

解 分析 $(-\infty+\mathrm{i}b \to \infty+\mathrm{i}b)$ 是复平面中平行于实轴与实轴相距为 b 的无限长直线, 若取此直线上从 $-R \to R$ 的一段算积分, 则当 $R \to \infty$ 时此段积分即为题设所求. 为此, 根据上述思想, 我们考虑 e^{-az^2} 沿如图所示的围道的积分.

因为 e^{-az^2} 在图所示围道内至围道上均解析, 故由 Cauchy 定理有

$$\int_{-R+ib}^{R+ib} \mathrm{e}^{-az^2}\,\mathrm{d}z + \int_b^0 \mathrm{e}^{-a(R+\mathrm{i}y)^2}\,\mathrm{d}(\mathrm{i}y) + \int_R^{-R} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^b \mathrm{e}^{-a(-R+\mathrm{i}y)^2}\,\mathrm{d}(\mathrm{i}y) = 0$$

而

$$\left|\int_b^0 \mathrm{e}^{-a(R+\mathrm{i}y)^2}\,\mathrm{d}(\mathrm{i}y)\right| \leqslant \int_b^0 \left|\mathrm{e}^{-a(R+\mathrm{i}y)^2}\right| \mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-aR^2}\int_b^0 \mathrm{e}^{ay^2}\,\mathrm{d}y \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

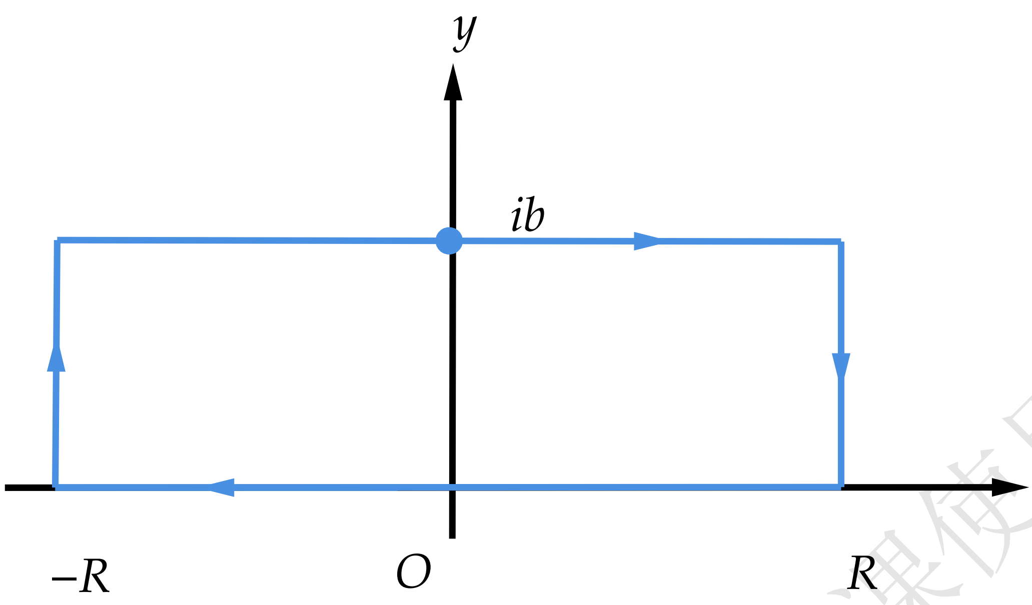

图 2.11: 矩形积分围道例子

同理

$$\int_{R}^{-R} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x \overset{R\to\infty}{=} -2\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

故当 $R\to\infty$ 时将这些结果一并代入本题 (1) 式立即可得

$$\int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} e^{-az^2}dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2}dz$$

例题 2.20 计算

$$\oint_{|z|=1} z^2 dz$$

$$\oint_{|z|=1} z dz$$

$$\oint_{|z|=1} 1 dz$$

$$\oint_{|z|=1} z^{-1} dz$$

$$\oint_{|z|=1} z^{-2} dz$$

$$\oint_{|z|=1} b_2/z^2 + b_1/z + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 dz$$

并思考一般规律

例题 2.21 对于 $\xi\in\mathbb{R}$, 我们将展示

$$e^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi} dx \tag{2.65}$$

这个结果告诉我们 $e^{-\pi x^2}$ 的 Fourier 变换就是它自己。若 $\xi = 0$, 这就是我们之前讲过的积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx \tag{2.66}$$

假设 $\xi > 0$, 考虑函数 $f(z) = e^{-\pi z^2}$, 其围道 γ_R 如图 2.12。

围道 γ_R 是顶点为 $R, R + i\xi, -R + i\xi, -R$ 的矩形，围道方向为逆时针。根据柯西定理，

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 0. \tag{2.67}$$

则实轴上的积分正好为

$$\int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2} dx \tag{2.68}$$

当 $R \to \infty$ 收敛于 I. 右侧竖直方向上的积分为

$$I(R) = \int_0^{\xi} f(R + iy) i dy = \int_0^{\xi} e^{-\pi\left(R^2 + 2iRy - y^2\right)} i dy. \tag{2.69}$$

由于 ξ 有限，这一积分在 $R \to \infty$ 时趋于 0，这一点可以从下面的不等式看出

$$|I(R)| \le Ce^{-\pi R^2}. \tag{2.70}$$

类似地，左侧竖直方向上的积分在 $R \to \infty$ 时趋于 0. 最后，矩形上边缘的积分

$$\int_{R}^{-R} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx = -e^{\pi\xi^2} \int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi} dx \tag{2.71}$$

因此，我们在 $R \to \infty$ 的极限下，可以将 (2.67) 写为

$$0 = I - e^{\pi\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi} dx \tag{2.72}$$

对于 $\xi < 0$ 的情况, 我们只需要把上半部的矩形转为下半部。

这种将实轴上的积分转为围道积分的技术，除上面的例子之外，还有许多其它应用。

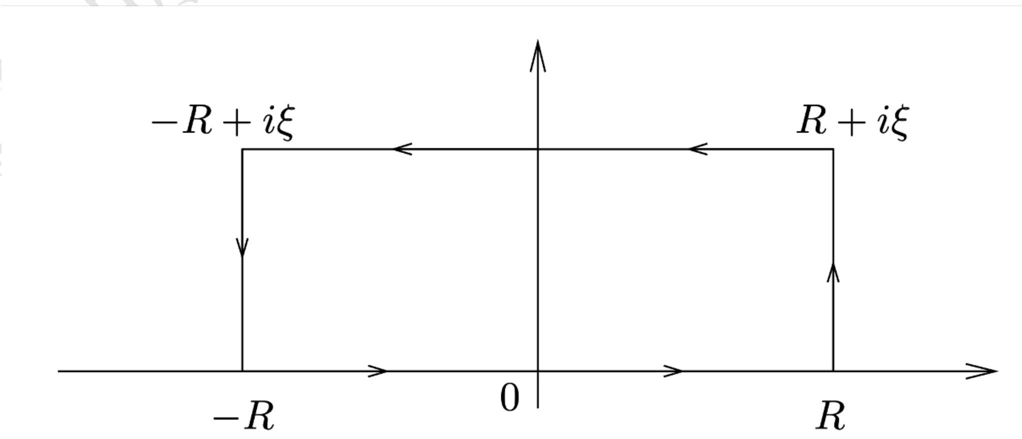

图 2.12: 常见的矩形围道

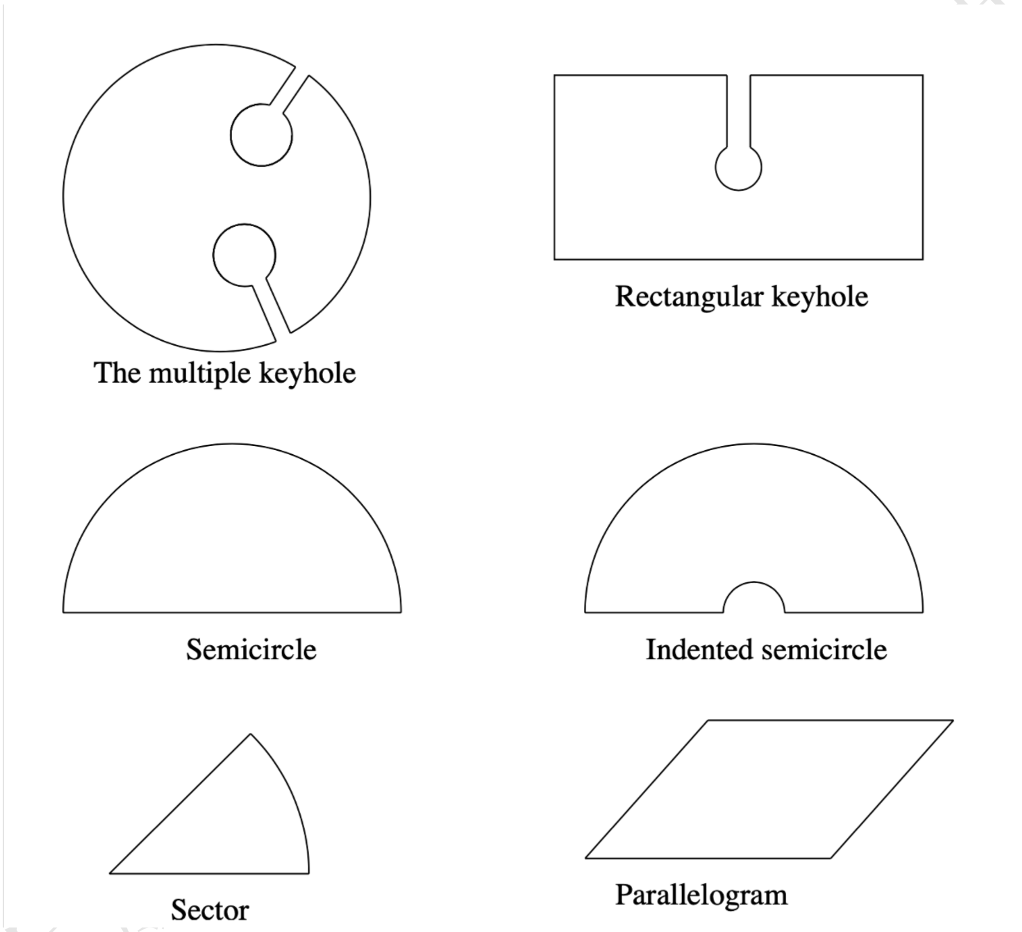

图 2.13: 常见的积分围道

利用解析函数在 $\mathbb{C}$ 上的路径无关性, 在 x 轴上的从 0 到 ∞ 的积分应与从 0 到 $\infty\xi$ 的积分相等, 其中我们取 $\xi = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (即 $\xi^2 = i$)

$$\int_0^\infty e^{iax^2} dx = \int_0^{\xi\infty} e^{iax^2} dx \tag{2.73}$$

其中 $a > 0$. 使用 Wick 变换 $x = \xi t$ 可以得到

$$= \xi \int_0^\infty e^{-at^2} dt = \frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{2.74}$$

这给出著名的 Fresnel 积分

$$\int_0^\infty e^{iax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{8a}}(1+i). \tag{2.75}$$

有一些上课和大家互动的解题提示等课堂临场发挥的内容，可能不一定会写到讲义上。

2.5.1 Application of Cauchy theorem

这个例子下节课再详细讲，后面讲到傅立叶变换时还会再讲

Find the Fourier transform of the normalized Gaussian distribution[11]

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty \tag{2.77}$$

This Gaussian distribution is centered on $x = 0$ and has a root mean square deviation $\Delta x = \sigma$.

Write down the transformation formulae

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk$$

with

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx'$$

The Fourier transform of $f(x)$ is given by

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \exp(-ikx) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}} + i\frac{k\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \exp(-\frac{k^2\sigma^2}{2}) dt \\
&= \exp(-\frac{k^2\sigma^2}{2}) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}} + i\frac{k\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2\right) dx
\end{aligned} \tag{2.78}$$

[11] The probability density function for a Gaussian distribution of a random variable X, with mean $E[X] = \mu$ and variance $V[X] = \sigma^2$, takes the form

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \tag{2.76}$$

The factor $1/\sqrt{2\pi}$ arises from the normalisation of the distribution,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

The variable transformation $y = \frac{x}{\sigma\sqrt{2}} + i\frac{k\sigma}{\sqrt{2}}$ yields $dx = dy\sqrt{2}\sigma$;

$$\widetilde{f}(k) = \exp(-\frac{k^2\sigma^2}{2})\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sqrt{2}\sigma \int_{-\infty+i\frac{k\sigma}{\sqrt{2}}}^{+\infty+i\frac{k\sigma}{\sqrt{2}}} e^{-y^2}dy \tag{2.79}$$

The *Gaussian integral* is

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi} \quad . \tag{2.80}$$

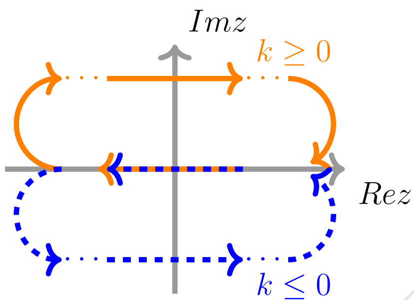

图 2.14: Integration paths to compute the Fourier transform of the Gaussian.

Let us rewrite the integration into the Gaussian integral by considering the closed paths (depending on whether ω is positive or negative) depicted in the figure. whose "left and right pieces vanish" strongly as the real part goes to (minus) infinity. Moreover, by the Cauchy's integral theorem,

$$\oint_{\mathcal{C}} dz e^{-z^2} = \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-x^2}dx + \int_{-\infty+i\frac{k\sigma}{\sqrt{2}}}^{+\infty+i\frac{k\sigma}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx = 0, \tag{2.81}$$

because e^{-z^2} is analytic in the region $0 \leq |\mathrm{Im}\, z| \leq \sigma|k|/\sqrt{2}$. Thus, by substituting

$$\int_{-\infty+i\frac{k\sigma}{\sqrt{2}}}^{+\infty+i\frac{k\sigma}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}, \tag{2.82}$$

by insertion of the value $\sqrt{\pi}$ for the *Gaussian integral*, we finally obtain

$$\widetilde{f}(k) = \exp(-\frac{k^2\sigma^2}{2})\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sqrt{2}\sigma \underbrace{\int_{-\infty+i\frac{k\sigma}{\sqrt{2}}}^{+\infty+i\frac{k\sigma}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}\ dx}_{=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}} = \exp\left(\frac{-\sigma^2k^2}{2}\right) \tag{2.83}$$

Finally,

$$\widetilde{f}(k) = \exp\left(\frac{-\sigma^2k^2}{2}\right) \tag{2.84}$$

which is another Gaussian distribution, centered on zero and with a root mean square deviation $\Delta k = 1/\sigma$.

It is interesting to note, and an important property, that the Fourier transform of a Gaussian is another Gaussian.

$$\Delta k \Delta x = 1 \tag{2.85}$$

for a Gaussian wave packet [12]

The uncertainty relations as usually expressed in quantum mechanics can be related to this if the de Broglie and Einstein relationships for momentum and energy are introduced; they are

$$p = \frac{h}{2\pi} k \quad \text{and} \quad E = \frac{h}{2\pi}\omega$$

Here $\frac{h}{2\pi}$ is Planck's constant h divided by 2π.

对于量子力学中的微观粒子 $\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar/2$

Recap:

高斯型函数的傅里叶变换还是高斯型函数

The Fourier transformation of Gaussian function is still Gaussian function.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad \widetilde{f}(k) = \exp\left(\frac{-\sigma^2 k^2}{2}\right) \tag{2.87}$$

$\Delta x = \sigma$, $\Delta k = \frac{1}{\sigma}$, $\Delta k \Delta x = 1$.

[12] In quantum mechanics, we have the Heisenberg uncertainty principle

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{4\pi} \quad \text{and} \quad \Delta p \Delta x \geq \frac{h}{4\pi} \tag{2.86}$$

This is the basic principle of microscopic physics, which is widely used in various advanced physics courses.

1. 计算 $\int_C \frac{e^{z^2}}{z-2}dz$, 积分围道如图2.15

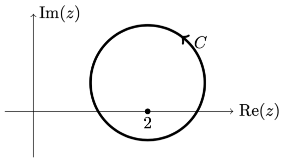

图 2.15: 题 1 的积分围道 C.

2. 计算 $\int_C \frac{e^{z^2}}{z-2}dz$, 积分围道如图2.16

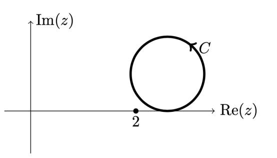

图 2.16: 题 2 的积分围道 C.

3. 计算 $\int_C \frac{e^{z^2}}{z-2}dz$, 积分围道如图2.17

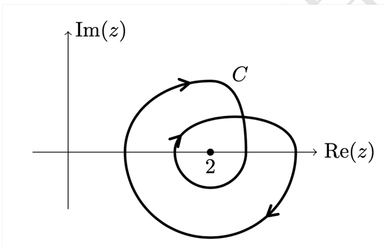

图 2.17: 题 3 的积分围道 C.

4. 计算 $I = \int_C \frac{e^{2z}}{z^4}dz$ where $C : |z| = 1$
5. 计算 $I = \int_C \frac{e^{2z}}{z^4}dz$ 围道 C 如图2.18
6. 计算 $\int_C \frac{\cos(z)}{z(z^2+8)}dz$ 围道 C 如图2.19
7. 计算 $\int_C \frac{1}{(z^2+4)^2}dz$ 围道 C 如图2.20
8. 计算 $\int_C \frac{z}{z^2+4}dz$ 围道 C 如图2.21

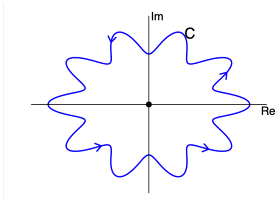

图 2.18: 题 5 的积分围道 C.

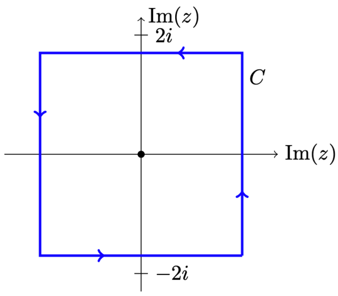

图 2.19: 题 6 的积分围道 C.

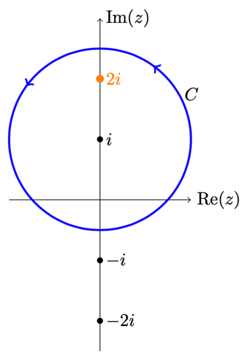

图 2.20: 题 7 的积分围道 C.

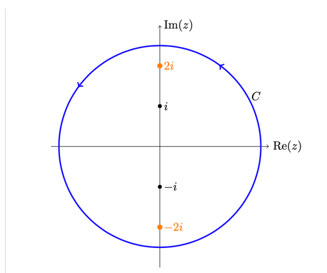

图 2.21: 题 8 的积分围道 C.

思考题

1. 从随堂练习题，思考复变函数围道积分的规律，如果把这个函数展开的话，什么项对积分有贡献。
2. 体会柯西定理和柯西积分公式对不同类积分的威力和思路

学而时习之

1. 计算
$$\oint_{|z|=3}\frac{2z^2-15z+30}{z^3-10z^2+32z-32}dz \tag{2.88}$$
2. 计算
$$\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+z+1} \tag{2.89}$$
3. 计算
$$\oint_{|z|=2}\frac{e^{iz}}{z^2+1}dz \tag{2.90}$$
4. 计算 $f(z)=z^*$ 的回路积分
$$\oint_{|z|=1} z^* dz \tag{2.91}$$
所得的结果说明了什么问题?

课程预告

- 复变函数解析性质和应用的进一步讨论；解析函数的泰勒级数展开，对应教材 4.1，5.1，5.2 节
- 课前十分钟四位同学到黑板上不看讲义计算，如果有同学觉得例题简单的话，可以做一道上面的习题代替我指定的例题——
胡天浩、黄俊皓均计算 $\int_0^\infty \frac{sinx}{x}dx$
黄伟、黄颖：均计算 $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx$