

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/221559109>

# A Multiobjective Genetic Algorithm for the Class/Teacher Timetabling Problem

Conference Paper *in* Lecture Notes in Computer Science · August 2000

DOI: 10.1007/3-540-44629-X\_1 · Source: DBLP

---

CITATIONS  
53

READS  
200

---

2 authors:



Some of the authors of this publication are also working on these related projects:

-  Vehicle and crew scheduling [View project](#)
-  Nursing staff dimensioning in hospital units [View project](#)

# Conteúdo

<b>1 O Problema de Elaboração de Horários Escolares</b>	<b>9</b>
1.1 Introdução . . . . .	9
1.2 Contextualização do problema . . . . .	14
1.3 Caracterização do PEHE . . . . .	19
<b>2 Modelos Matemáticos para o PEHE</b>	<b>24</b>
2.1 Introdução . . . . .	24
2.2 Modelo matemático de admissibilidade . . . . .	25
2.2.1 Complexidade computacional . . . . .	31
2.2.2 Modelo matemático de optimização . . . . .	35
2.3 Instâncias-teste . . . . .	41
2.3.1 Apresentação sumária . . . . .	41
2.3.2 Descrição das instâncias-teste . . . . .	45
<b>3 Revisão Bibliográfica</b>	<b>49</b>
3.1 Introdução . . . . .	49
3.2 Problema de elaboração de horários escolares para aulas . . . . .	52
3.2.1 Problema de elaboração de horários para currículos rígidos . . . . .	53
3.2.2 Problema de elaboração de horários para currículos flexíveis . . . . .	65
3.3 Problema de elaboração de calendários de exames escolares . . . . .	73
<b>4 Redes Neuronais</b>	<b>79</b>
4.1 Introdução . . . . .	79

4.2	Redes neuronais de Hopfield e Tank . . . . .	84
4.3	Rede neuronal para o PEHE . . . . .	87
4.4	Abordagem do PEHE através de uma rede de neurónios de Potts . . . . .	96
4.5	Abordagem do PEHE através de uma rede de neurónios discretos <i>winner-takes-all</i>	101
4.6	Implementação computacional . . . . .	104
<b>5</b>	<b>Algoritmos Genéticos</b>	<b>108</b>
5.1	Introdução . . . . .	108
5.2	Algoritmos genéticos . . . . .	109
5.2.1	Codificação da solução . . . . .	109
5.2.2	Etapas de um algoritmo genético . . . . .	111
5.3	Abordagem genética uni-objectivo para o PEHE . . . . .	114
5.3.1	Codificação da solução . . . . .	114
5.3.2	Função de aptidão . . . . .	117
5.3.3	Heurística reconstrutiva da admissibilidade . . . . .	120
5.3.4	População inicial . . . . .	122
5.3.5	Operadores genéticos . . . . .	123
5.4	Implementação computacional . . . . .	127
5.5	Algoritmos genéticos multi-objectivo . . . . .	137
5.6	Abordagem genética multi-objectivo para o PEHE . . . . .	138
5.6.1	Objectivos . . . . .	139
5.6.2	População secundária . . . . .	143
5.7	Implementação computacional . . . . .	145
<b>6</b>	<b>Aplicação GAHOR</b>	<b>157</b>
6.1	Contextualização . . . . .	157
6.2	Descrição da aplicação . . . . .	158
6.2.1	Algoritmos de resolução . . . . .	160
6.2.2	Dados do PEHE . . . . .	162
6.2.3	Solução e gestão de horários . . . . .	171
6.2.4	<i>Interface</i> . . . . .	172



# **Lista de Figuras**

1-1	Esquema resumo das etapas que envolvem o PEHE . . . . .	16
1-2	Esquema exemplificativo de constituição de turmas . . . . .	18
2-1	Exemplo de escalonamento para a disciplina $c_1$ . . . . .	27
2-2	Períodos horários possíveis para colocação dos blocos constituintes da aula $a_1$ . . . . .	29
2-3	Exemplo do cálculo de penalizações associadas à dispersão de aulas . . . . .	37
3-1	Problemas de horários escolares . . . . .	51
4-1	Representação simplificada de um neurónio biológico . . . . .	80
4-2	Esquema de um neurónio artificial . . . . .	81
4-3	Arquitecturas <i>feed-forward</i> a) e <i>feed-back</i> b) . . . . .	82
4-4	Função de activação sigmoidal (para $T = 0.2, 0.5$ e $1$ ) . . . . .	86
4-5	Esquema de factorização da representação neuronal . . . . .	89
4-6	Ilustração da penalização dos conflitos na ocupação de salas . . . . .	92
4-7	Algoritmo ANCP . . . . .	99
4-8	Algoritmo ANDW . . . . .	103
5-1	Esquema para um algoritmo genético . . . . .	112
5-2	Exemplo de codificação do cromossoma e mapas horários para duas turmas e professores correspondentes . . . . .	117
5-3	Fluxograma da heurística reconstrutiva . . . . .	121
5-4	Exemplo do procedimento de cruzamento . . . . .	126
5-5	Exemplo do procedimento de mutação . . . . .	127

5-6	Evolução do menor valor de penalização da população na melhor das execuções do AGUO2 para ESGHT-T1 . . . . .	135
5-7	Representação da população final admissível na melhor das 5 execuções do AGUO2 para ESGHT-T1 . . . . .	136
5-8	Esquema para o AGMO . . . . .	139
5-9	Fronteira de Pareto e níveis para os cromossomas . . . . .	141
5-10	Esquema exemplificativo de actuação da população secundária . . . . .	145
5-11	Representação da fronteira de Pareto da população final na melhor execução dos algoritmos AGUO2, AGMO1 e AGMO2 para ESGHT-T1 . . . . .	152
5-12	Exemplo de linha de aproveitamento . . . . .	153
5-13	Linhas de aproveitamento a 50% dos algoritmos e linhas de fronteira relativas aos AGUO2, AGMO2 e AGMO1 para ESGHT-T1 . . . . .	155
6-1	Estrutura modular da aplicação GAHOR . . . . .	159
6-2	Componentes da estrutura de dados da aplicação GAHOR . . . . .	163
6-3	Ecrã de introdução de dados para cursos, disciplinas e departamentos . . . . .	164
6-4	Ecrã de introdução de dados relativos aos padrões horários . . . . .	166
6-5	Ecrã de inserção de dados relativos aos professores e às turmas . . . . .	167
6-6	Ecrã de inserção de dados relativos às salas . . . . .	169
6-7	Ecrã de inserção de dados relativos às aulas . . . . .	170
6-8	Ecrã de visualização e edição dos horários . . . . .	171
6-9	Ecrã de funcionamento da aplicação durante a fase de pesquisa de soluções através do AGMO . . . . .	172

# **Lista de Tabelas**

2.1	Caracterização das instâncias . . . . .	43
2.2	Caracterização das instâncias (continuação) . . . . .	44
4.1	Resultados computacionais após 20 execuções do algoritmo ANCP . . . . .	106
4.2	Resultados computacionais após 20 execuções do algoritmo ANDW . . . . .	107
5.1	Exemplo de plano curricular global para um PEHE com duas turmas . . . . .	116
5.2	Resultados computacionais após 5 execuções para o algoritmo AGUO1 sem eliminação . . . . .	130
5.3	Resultados computacionais após 5 execuções para o algoritmo AGUO1 com eliminação . . . . .	131
5.4	Resultados computacionais após 5 execuções para o algoritmo AGUO2 sem eliminação . . . . .	133
5.5	Resultados computacionais após 5 execuções para o algoritmo AGUO2 com eliminação . . . . .	134
5.6	Resultados computacionais após 5 execuções para o algoritmo AGMO1 . . . . .	147
5.7	Resultados computacionais após 5 execuções para o algoritmo AGMO2 . . . . .	148
5.8	Caracterização das populações finais admissíveis para 5 execuções de cada algoritmo . . . . .	151
6.1	Comparação entre os valores mínimos obtidos pelos diversos algoritmos . . . . .	161

# Resumo

No contexto da actividade de gestão das instituições de ensino, os problemas que envolvem o planeamento temporal de eventos, sejam estes as aulas relativas aos currículos dos cursos oferecidos ou os exames requeridos para a sua avaliação, originam normalmente problemas complexos e de difícil resolução, bem conhecidos no domínio da Investigação Operacional. É precisamente sobre um destes problemas, denominado por problema de elaboração de horários escolares, que incide o estudo desenvolvido nesta dissertação. O problema consiste no escalonamento semanal de um conjunto de aulas (afectações de professores a disciplinas e turmas previamente definidas), sujeito a um extenso conjunto de condicionalismos obrigatórios e facultativos.

Num primeiro momento após a sua caracterização, são propostas formalizações matemáticas com variáveis binárias e estudada a sua complexidade computacional.

Constatada a inerente dificuldade computacional associada ao problema descrito procede-se ao desenvolvimento de heurísticas adaptadas à efectiva resolução do problema. Para o efeito, no contexto das redes neuronais artificiais, após a definição de uma função de energia comum adaptada ao problema em estudo, são propostos dois algoritmos. O primeiro é baseado em neurónios contínuos de Potts, enquanto que uma segunda versão recorre a neurónios discretos *winner-takes-all*.

Alternativamente, no domínio dos algoritmos genéticos, são apresentadas duas abordagens distintas para a resolução do problema. A primeira baseia-se num algoritmo genético uni-objectivo enquanto que a segunda trata o problema numa perspectiva multi-objectivo. A implementação computacional, concretizada através da resolução de um conjunto de instâncias reais e hipotéticas, permitiu avaliar e comparar o desempenho dos algoritmos propostos.

Em resultado deste estudo descreve-se uma aplicação informática desenvolvida com base nos algoritmos propostos, designada GAHOR, que permite a resolução prática de qualquer instância do problema.

# Abstract

Within the activity of teaching institution management, problems involving time-planning of events, be they lessons related to the curricula of courses available or the exams required to assess them, normally generate complex problems that are difficult to solve, and are well-known in the area of Operational Research. It is precisely on one of these problems, known as the Class/Teacher Timetabling Problem (PEHE), that the study developed in this dissertation focuses. The problem consists in a weekly scheduling of a set of classes (assignments of teachers to subjects and pre-defined classes), subject to a broad set of hard and soft constraints.

In a first phase following characterization of the issue, binary mathematical formalizations are proposed and the computational complexity is studied.

Having recognized the computational difficulty inherent to the problem described, specially adapted heuristics are developed. To this end, within the context of artificial neural networks, after defining an energy function appropriate to the problem in question, two algorithms are proposed. The first is based on Potts' continuous neurons, whereas the second version resorts to winner-takes-all discrete neurons.

Alternatively, in the field of genetic algorithms, two distinct approaches to the problem are presented. The first one uses a uni-objective genetic algorithm, whereas a second considers the problem from a multiobjective stance. Computational tests, achieved by solving a set of real and hypothetical instances, enabled evaluation and comparison of the performance of all the algorithms proposed.

As a result of this study a computer application (GAHOR) developed on the basis of the algorithms is described.

# **Capítulo 1**

## **O Problema de Elaboração de Horários Escolares**

### **1.1 Introdução**

De uma forma geral, para a maioria de nós, o quotidiano é influenciado e muito frequentemente determinado por vários tipos de condicionalismos temporais. Dos horários dos comboios ou autocarros, aos horários das mais diversas actividades incluindo os nossos próprios horários de trabalho, é um facto que a nossa vivência em sociedade consagrou a este mapa temporal - o horário - uma importante função de sincronização indispensável ao planeamento e gestão das nossas actividades.

Em particular, no domínio das instituições escolares, esta função ganha contornos adicionais. Com efeito, reconhecendo que estas instituições dispõem de um conjunto de recursos humanos, materiais e temporais limitados para desenvolver a sua actividade, é fundamental que se vise a sua eficiente gestão, especialmente quando se reconhecem insuficiências financeiras conjunturais e globais no sector educacional. O processo de elaboração de horários escolares deve assim ser considerado um instrumento importante para a gestão de todas as instituições escolares, já que, como resultado deste processo, são gerados padrões específicos de utilização dos recursos da instituição, condicionando simultaneamente toda a sua dinâmica e a vida dos seus agentes (alunos, professores e funcionários), constituindo um factor determinante para o sucesso da função educativa preconizada por estas instituições. De facto, em cenários de gestão ineficiente

desta problemática, é possível a ocorrência de diversas situações que afectam a qualidade da função educativa desenvolvida na escola. Como exemplo, apresentam-se em seguida alguns dos constrangimentos considerados mais relevantes e comuns.

- Inexistência de salas de aula ou equipamentos específicos disponíveis para a realização de aulas em determinados momentos.
- Realização de aulas em momentos não oportunos para alunos e docentes. Esta dificuldade pode assumir formas distintas.
  - Por um lado, quando se verifica um excessivo número de aulas num determinado dia ou período é provável o surgimento de dificuldades ao nível da concentração e rendimento por parte de alunos e professores. De facto, a capacidade pedagógica de um professor pode ser substancialmente afectada pelo momento e enquadramento da sua aula na actividade lectiva do dia.
  - Por outro, os dias com reduzida actividade lectiva programada ou com uma descontinuidade excessiva (existência de furos prolongados) constituem prováveis factores de desmotivação dos professores e absentismo às aulas por parte dos alunos.
  - Nos casos em que a instituição recorre a instalações geograficamente afastadas, a pontualidade dos professores e alunos às aulas é afectada caso, não se leve em consideração as deslocações destes ao longo do período de leccionação.
- Dificuldades de gestão da instituição ao nível administrativo e dos serviços. Efectivamente, com uma eficiente gestão horária das actividades lectivas é possível reduzir o período de funcionamento de alguns serviços de apoio à actividade lectiva, rentabilizando a sua actividade.
- Sobrecarga de utilização das instalações. Por exemplo, podem ocorrer períodos de sobrelocação de cantinas ou serviços de cópias em momentos pontuais do dia, evitáveis através de um planeamento prévio da actividade lectiva.
- Inadequação dos serviços de transporte. A utilização destes serviços, fornecidos normalmente por entidades externas, sofre a influência da carga lectiva existente na instituição

em cada momento. Face a situações pontuais de carga lectiva excessiva, o nível e qualidade destes serviços pode ser fortemente condicionado.

Nesta perspectiva, justifica-se pois o interesse pelo estudo do Problema de Elaboração de Horários Escolares (PEHE) e de processos que visem a sua resolução de forma eficiente. No âmbito desta tese, estudar-se-á, em particular, os PEHEs característicos da maioria das instituições nacionais de ensino básico, secundário e algumas de ensino superior. Nestas instituições a tarefa de elaborar um conjunto de horários para as actividades lectivas constitui um problema de gestão que se coloca pelo menos uma vez por ano. A sua resolução é normalmente uma tarefa morosa e pesada desenvolvida de forma maioritariamente manual, recorrendo à experiência acumulada de uma equipa constituída por funcionários e/ou docentes. Esta abordagem decorre habitualmente utilizando uma metodologia de "tentativa e erro" ou recorrendo a soluções parciais de anos anteriores, até que se encontre uma solução considerada globalmente satisfatória para a instituição no ano corrente. Refira-se, que em instituições de pequena dimensão, este método manual pode possibilitar a construção de horários de qualidade, num curto espaço de tempo. Contudo, em instituições de média e elevada dimensão, a dificuldade de elaborar a cada momento uma solução satisfatória para o problema, é significativamente maior. Para tal contribui, para além do inerente acréscimo de complexidade resultante do envolvimento de um maior número de docentes, turmas e salas com características diversas, a diversidade da oferta lectiva da instituição. Nestes casos, a abordagem manual torna-se inapropriada, essencialmente por duas razões. A primeira razão resulta do esforço associado ao registo, manipulação e actualização do conjunto de dados que constitui o problema de horários, desde o plano curricular dos cursos, ao plano de distribuição de serviço docente, às restrições horárias de docentes, alunos e salas que tornam necessária a implementação destes dados sobre um suporte informático. Por outro lado, o processo de elaboração de uma solução para o problema neste contexto é particularmente complexo e exigente para ser desenvolvido manualmente, podendo culminar na construção de uma solução de inferior qualidade ou, eventualmente, na impossibilidade de obtenção de uma solução admissível no período de tempo disponível para a finalização da tarefa. Para além destes motivos, com bastante frequência os dados relativos ao problema sofrem inúmeras actualizações e correcções durante o período de elaboração de horários o que representa uma dificuldade acrescida para a equipa de horários. Este facto, mais uma vez sugere o recurso

a processos automatizados para a tarefa de construção de horários escolares.

Face a estas considerações, o principal objectivo e central motivação desta dissertação consiste no estudo e desenvolvimento de métodos de resolução automatizados e eficientes para o PEHE. Para este fim, podem ser indicados sumariamente os principais contributos contidos na dissertação:

- O estudo de abordagens de resolução que gozem de uma total aderência à realidade em análise e que revelem elevado grau de flexibilidade de forma a contemplar eventuais adaptações futuras a diferentes contextos reais, conduziu à proposta de dois modelos matemáticos para o PEHE que gozam destas características. Como complemento cada um dos modelos é caracterizado relativamente à inerente complexidade computacional.
- Para a resolução efectiva do PEHE são desenvolvidas heurísticas no âmbito das Redes Neuronais Artificiais e dos Algoritmos Genéticos. Em particular, no contexto das redes neuronais e da sua adaptação à resolução de PEHEs reais é surge uma abordagem neuronal baseada em neurónios discretos competitivos que evidencia um desempenho computacional superior aos tradicionais neurónios contínuos.
- No domínio dos Algoritmos Genéticos, a par de uma abordagem genética uni-objectivo para a qual foram delineados operadores particulares, é apresentado um algoritmo multi-objectivo que, recorrendo à noção de optimalidade de Pareto, permite considerar separadamente dois grupos de interesse (professores e alunos) com objectivos conflituantes e alargar significativamente o conjunto de soluções obtidas.
- Adicionalmente, outro contributo de ordem prática consiste na criação de um programa informático que, implementando as metodologias propostas, permite a gestão global do PEHE nas vertentes de inserção, armazenamento e actualização dos dados, da posterior resolução semi-automatizada ou automatizada, e da visualização, edição e impressão das soluções obtidas. Neste último ponto, considerou-se como essencial a produção de uma solução informática que fosse compatível, no mínimo, com os recursos normalmente existentes em qualquer instituição de ensino, em particular a disponibilidade de um vulgar microcomputador e de um funcionário com conhecimentos informáticos ao nível de utilizador para a inserção dos dados e operação do programa.

Após estas considerações de natureza introdutória, seguir-se-á na secção 1.2 a apresentação do PEHE. Através da contextualização da temática relativa à elaboração de horários escolares, numa perspectiva prática e processual, serão definidos os principais aspectos e noções associadas a este problema. Em seguida, o PEHE propriamente dito será devidamente caracterizado sendo descritos os condicionalismos obrigatórios e de melhoramento inerentes à sua abordagem em termos reais.

No Capítulo 2, proceder-se-á então à formalização do problema através de modelos matemáticos. Para o efeito, o problema será modelizado sob duas perspectivas distintas. A primeira, através de uma formalização linear binária de admissibilidade para o problema correspondente à pesquisa de uma solução admissível para o PEHE, enquanto que uma segunda formalização em programação não linear binária apresenta-se na perspectiva da definição de uma solução de óptima qualidade para o PEHE. Adicionalmente, efectuar-se-á um estudo da complexidade computacional dos respectivos problemas.

Adicionalmente, como requisito para o desenvolvimento e teste de métodos de resolução automatizada para o PEHE, caracteriza-se um conjunto diversificado de instâncias-teste com elevada aderência à realidade.

No Capítulo 3 apresentar-se-á uma revisão bibliográfica sobre o problema em estudo e sobre outros afins. Descreve-se uma selecção de modelos e de abordagens de resolução para cada um dos tipos de problemas de planeamento horário escolar identificados.

No Capítulo 4 será introduzida a temática das redes neurais artificiais, descrevendo-se resumidamente os fundamentos das redes neurais de Hopfield e Tank e a extensão proporcionada pelos neurónios multi-estado de Potts. Com base nestas estruturas, são propostos dois modelos neurais adaptados ao PEHE na versão de optimização, designadamente, um modelo contínuo de Potts e um discreto baseado em neurónios *winner-takes-all*. Visando a sua avaliação computacional, o conjunto de instâncias-teste é submetido a ambas as abordagens neurais sendo discutidos os resultados obtidos.

No Capítulo 5 efectuar-se-á uma introdução genérica sobre os algoritmos genéticos, incluindo os aspectos relativos ao seu funcionamento e implementação. Posteriormente, apresentar-se-á dois algoritmos genéticos adaptados ao PEHE de optimização. O primeiro, tratará o problema de elaboração de horários sob uma perspectiva uni-objectivo, enquanto que o segundo é de tipo

multi-objectivo. Proceder-se-á de igual modo à avaliação computacional dos dois algoritmos genéticos, no conjunto das instâncias-teste através da comparação de ambas as versões dos algoritmos genéticos.

No Capítulo 6 mostrar-se-á um programa informático desenvolvido, com base nos métodos descritos nesta dissertação, para o tratamento automatizado do PEHE.

Por último, apresentar-se-ão as conclusões acerca dos contributos e limitações associadas às metodologias estudadas. Indica-se, também um conjunto de possíveis orientações e desenvolvimentos futuros visando o incremento da aplicabilidade e sucesso na resolução automatizada de outros problemas de horários escolares.

## 1.2 Contextualização do problema

Para proceder à descrição das principais etapas associadas à tradução do conjunto de dados necessários à resolução do PEHE numa instituição de ensino com currículos pré-estabelecidos é conveniente definir alguns termos e conceitos associados a este contexto.

**Aula.** Evento lectivo resultante do envolvimento entre um professor e uma ou mais turmas, no qual é leccionada uma determinada área curricular ou disciplina. Cada aula realiza-se numa sala e é constituída por um ou mais blocos lectivos (ocorrendo assim durante um ou mais períodos horários).

**Disciplina.** Conjunto de aulas relativas a uma área curricular específica. Por exemplo, a disciplina de matemática para uma turma pode envolver três aulas semanais, sendo duas aulas práticas e uma teórica, requerendo professores e salas distintas.

**Período horário.** Unidade temporal que expressa a duração de cada aula. A duração de um período horário é normalmente dada pelo mínimo divisor comum entre as diferentes durações de aulas previstas no plano curricular global (definido em seguida). Por exemplo, para contemplar a realização de aulas de duração de 30, 60 e 90 minutos é apropriada a definição de períodos horários de duração de 30 minutos. O número total de períodos horários resulta da divisão inteira do intervalo temporal total disponível, normalmente com uma duração de uma semana, pela duração do período horário base.

**Bloco lectivo.** Unidade lectiva de constituição das aulas, cuja duração é igual ao período horário definido. Por exemplo, admitindo períodos horários de 30 minutos, uma aula de duas horas é formada por quatro blocos lectivos contíguos.

**Plano curricular global.** Conjunto de aulas requeridas para a realização dos planos curriculares dos cursos ou programas oferecidos pela instituição. Este plano define o número de aulas a realizar por curso e ano, bem como as respectivas durações e requisitos específicos, tais como salas e/ou equipamentos particulares.

**Plano de serviço docente.** Conjunto de afectações de professores a turmas, estabelecidas com vista à execução das aulas previstas no plano curricular global.

**Sala de aula.** Espaço físico com características específicas (em termos de dimensão, equipamentos e disponibilidade temporal) destinado à realização de aulas.

**Turma.** Conjunto de alunos reunidos para efeitos de assistência a um conjunto de aulas. Em determinadas aulas, como por exemplo aulas práticas ou de opção, é habitual a definição de subturmas ou macroturmas formadas por alunos provenientes de uma ou mais turmas.

**Horário.** Plano temporal de actividade lectiva (relativa a aulas) definido normalmente para um período semanal. Este plano pode ser representado sob três perspectivas distintas, originando horários particulares para cada professor, cada turma ou cada sala.

**Condisionalismo.** Factor limitativo que exerce, em maior ou menor grau, influência na construção da solução do PEHE. A não satisfação de um condicionalismo obrigatório corresponde em absoluto à inviabilidade global da solução. No caso de um condicionalismo de melhoramento o seu nível de violação determina apenas uma diminuição relativa da qualidade da solução. Neste caso, a noção de satisfação de um condicionalismo de melhoramento deve ser entendida numa perspectiva gradativa assumindo a natureza de medida de desempenho e valorização da solução.

**Solução do PEHE.** Conjunto de afectações de professores, a turmas, a salas e a períodos horários visando a realização de aulas, ou seja, um conjunto de horários que concretiza a realização do plano curricular global. Cada solução do PEHE para além de ter que res-

peitar os condicionalismos obrigatórios inerentes ao problema, tem um nível de qualidade associado que resulta do grau de violação dos condicionalismos de melhoramento.

De uma forma geral, os procedimentos associados à preparação e determinação de uma solução do PEHE, são descritos sinteticamente na figura 1-1.

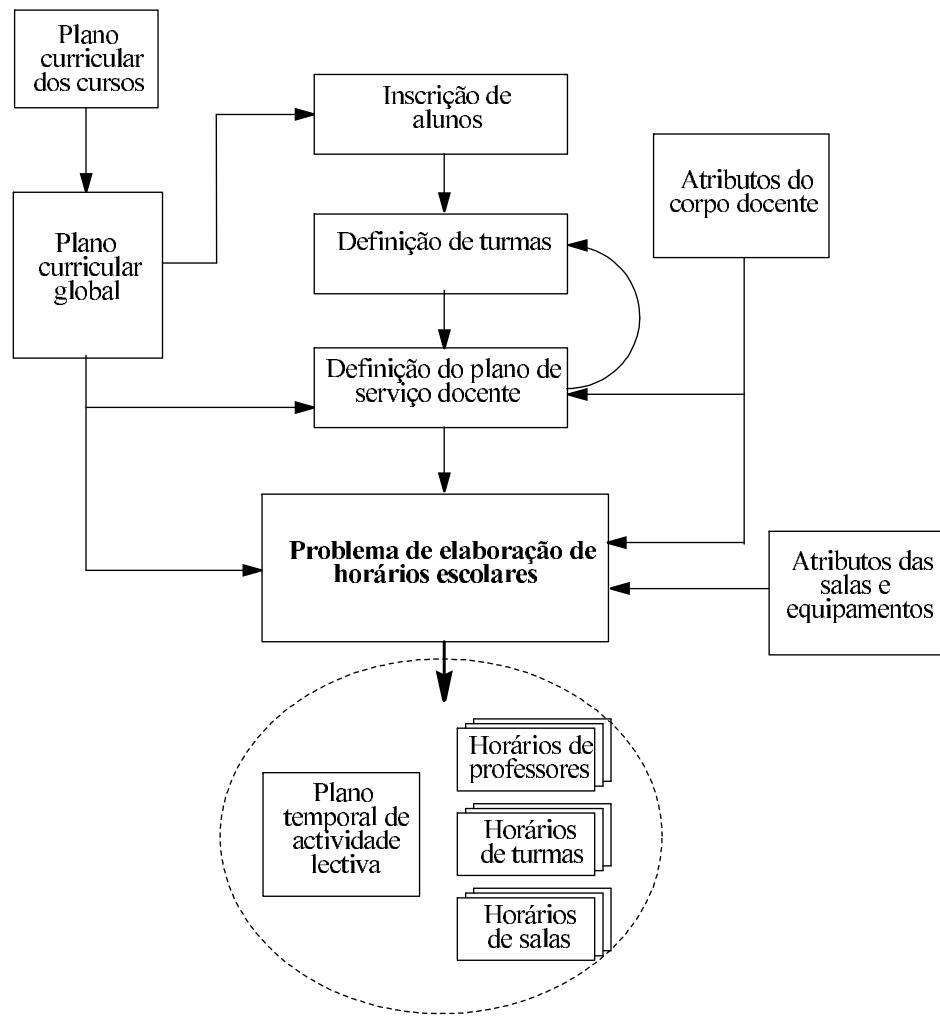


Figura 1-1: Esquema resumo das etapas que envolvem o PEHE

Admite-se, contudo, que em função do sistema de ensino e das especificidades da instituição, a metodologia geral apresentada possa diferir em algum aspecto particular. Segundo o esquema, a primeira etapa necessária para a definição da informação requerida pelo PEHE consiste

na caracterização do plano curricular global que é elaborado a partir dos planos curriculares dos cursos ou programas oferecidos na instituição escolar. Este plano estrutura toda a oferta curricular necessária ao funcionamento de cada um dos cursos de acordo com o definido pelo Ministério da Ciência e do Ensino Superior (MCES) ou pelos órgãos científicos da escola. São indicadas neste plano todas as disciplinas oferecidas a cada curso e em cada ano, bem como o número e tipo de aulas requeridas para cada uma delas.

Com base no plano curricular global, é possível prosseguir para a etapa relativa à inscrição dos alunos em cada disciplina. Esta etapa é nalguns casos simulada por necessidade de antecipação da resolução do PEHE, obrigando à sua realização num momento anterior à inscrição dos alunos que decorre normalmente próximo do início do ano lectivo. Para o efeito, utilizam-se estimativas do número de alunos inscritos em cada disciplina, calculadas com base nos dados do ano anterior, taxa médias de transição por ano e disciplina, pré-inscrições ou por indicação do MCES. Nestes casos, a solução é posteriormente ajustada, após a inscrição real dos alunos, de forma a corrigir os eventuais erros cometidos na sua previsão.

A etapa seguinte consiste na agregação por turmas dos alunos inscritos em cada disciplina. No contexto do PEHE em análise o conceito de turma tem uma natureza rígida, ou seja, os agrupamentos de alunos definem, em virtude dos planos curriculares rígidos, turmas, maioritariamente fixas por ano e curso. Neste processo formam-se turmas de alunos em função de critérios legais, institucionais, pedagógicos ou de gestão relevantes para a instituição de ensino. Por exemplo, se a capacidade máxima de um laboratório requerido para a lecionação de aulas num determinado curso for de 15 alunos, e o número de alunos matriculados na disciplina for 60, o número de turmas a definir para a disciplina não deverá ser inferior a quatro. Habitualmente, definem-se por ano e curso turmas relativamente rígidas que apenas se separam para assistência a determinadas aulas como subturmas ou para formar turmas de características opcionais.

#### ▽ Exemplo 1-1

A título de exemplo na figura 1-2 apresentam-se duas turmas base (A e B) que dão origem respectivamente a dois conjuntos de subturmas  $\{A_1, A_2, A_3\}$  e  $\{B_1, B_2\}$  para participação em aulas laboratoriais separadamente. É também ilustrada a situação resultante da assistência a uma aula de uma disciplina opcional onde, a partir das subturmas de alunos inscritos na opção (Ao e Bo), é constituída uma turma conjunta optativa designada por ABo. É ainda

frequente neste contexto a formação de macroturmas ( $A+B$ ) agregando diversas turmas base, por exemplo, para assistência a aulas teóricas em salas de grande dimensão.

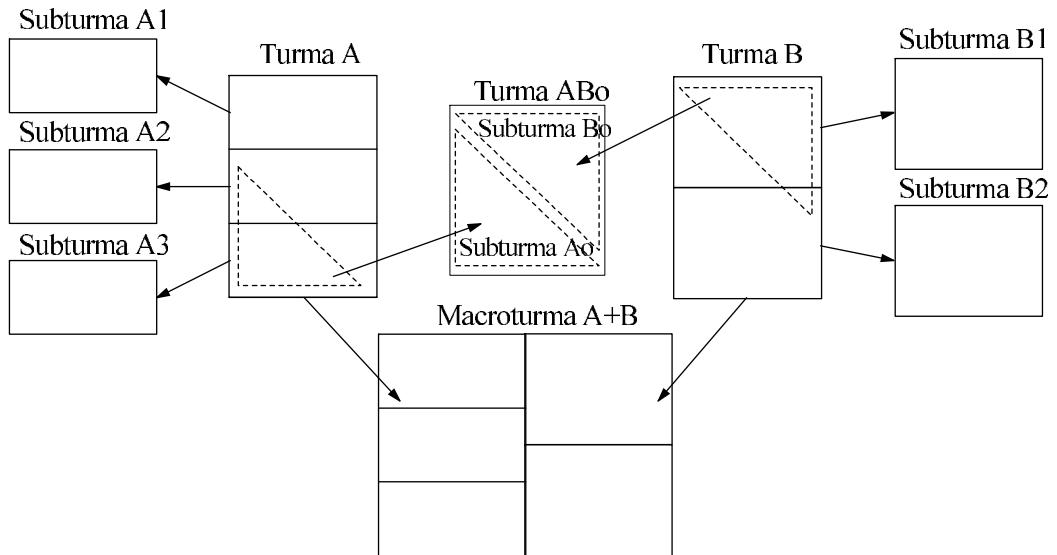


Figura 1-2: Esquema exemplificativo de constituição de turmas

Na etapa seguinte do processo que conduz à preparação dos dados para o PEHE encontra-se a definição do plano de serviço docente. Nesta fase, em função do número e tipo de aulas definidas no plano curricular, dos atributos do corpo docente em termos de áreas de docência, da sua disponibilidade e ainda com base no conjunto de turmas definido para cada disciplina, é elaborado um plano que afecta docentes a turmas de forma a que o plano curricular global seja plenamente executado. Por vezes, em resultado de um desequilíbrio entre a capacidade de oferta docente e o número de turmas para uma disciplina é necessário reajustar o número de turmas agregando-as ou separando-as de acordo com as necessidades. Por exemplo, se numa determinada área curricular o número de docentes é particularmente reduzido, pode ser necessário agregar as turmas previamente definidas para o funcionamento das aulas envolvidas nessa área, por forma a que o corpo docente disponível assegure a sua lecionação no respeito pelas cargas lectivas admitidas para cada docente.

A última etapa deste processo consiste na elaboração propriamente dita dos horários escolares. De facto, o PEHE em estudo neste projecto reside na actividade identificada nesta fase. Com base no plano de serviço docente, com o conhecimento dos requisitos necessários ao funcionamento de cada aula presente no plano curricular global, com a informação relativa aos atributos de cada sala e equipamento (em termos de características e disponibilidade) e, ainda, com dados relativos às preferências horárias do corpo docente, são elaborados os horários que regulam a actividade da instituição para o período lectivo, atendendo a condicionalismos definidos previamente.

Habitualmente, os horários produzidos resultam no planeamento das actividades lectivas sob três ópticas distintas: um conjunto de horários para o corpo docente, um conjunto de horários para os alunos agregados em turmas e ainda um conjunto de horários que define a utilização das salas e equipamentos da instituição. A informação resultante das afectações definidas nos horários conduz à elaboração de um plano temporal de actividade lectiva, que consiste numa listagem cronológica de todos os eventos lectivos planeados para o período em questão, bem como dos respectivos intervenientes. Normalmente com a duração de uma semana, este plano permite o controlo da execução da actividade lectiva planeada, através de registos relativos a cada aula, de que é exemplo a folha de sumário.

É neste contexto processual que se insere o PEHE, sendo a sua resolução periódica, como se referiu, efectuada normalmente por processos maioritariamente manuais e pouco eficientes. Assim, como forma de iniciar o estudo e desenvolvimento de abordagens de resolução mais apropriadas é necessário caracterizar detallhadamente o PEHE.

### **1.3 Caracterização do PEHE**

O PEHE pode ser definido como o problema associado à elaboração de um plano temporal de actividade lectiva concretizado através da afectação de aulas (previstas no plano curricular global e a realizar de acordo com o plano de serviço docente) às salas e períodos horários disponíveis, normalmente totalizando uma semana, procurando satisfazer diversificados condicionalismos. Em função do tipo de instituição escolar, da sua dimensão e das suas especificidades, os condicionalismos que determinam uma solução para o PEHE podem ser particularmente diversos.

No entanto, para efeitos de resolução deste problema é possível apresentar um quadro de condicionalismos comuns que permitem caracterizar, com um elevado grau de aderência à realidade, os principais aspectos e restrições. Estes condicionalismos, em função da sua importância, podem ser agrupados em dois níveis distintos: os obrigatórios e os de melhoramento.

**1. Condisionalismos obrigatórios.** Este grupo é constituído por aspectos compulsivos que determinam a admissibilidade da solução do PEHE. Desde modo a não satisfação de qualquer uma destas restrições, constitui uma violação grave dos requisitos para uma solução do PEHE e implica a não viabilidade dos horários correspondentes.

- (a) Os currículos das turmas são satisfeitos. Com efeito, o conjunto de aulas definido no plano curricular global estabelece para cada turma, por ano e curso, uma carga lectiva de aulas que deverá ser integralmente leccionada nos termos do estabelecido no plano de serviço docente.
- (b) Cada professor e cada turma estão envolvidos no máximo, numa aula e numa sala, em cada período horário. Esta é uma restrição básica no domínio dos problemas de horários escolares, que evita a ocorrência simultânea de eventos (aulas) que exijam recursos comuns, tais como docentes, alunos ou salas.

▽ Exemplo 1-2

Considerando em particular a ilustração da figura 1-2, esta restrição pretende evitar que, por exemplo, duas turmas (turma ABo e turma B) com alunos comuns (subturma Bo), sejam escalonadas no mesmo período horário. De facto, neste exemplo apenas a subturma A1 permite uma realização simultânea com a turma ABo, desde que não existam outros recursos em colisão.

△

- (c) As aulas admitem durações distintas mas fixas. Frequentemente, em instâncias reais do PEHE as aulas apresentam, durações diversas mesmo para a mesma disciplina e turma. Deste modo, por exemplo, a disciplina de matemática para uma turma pode incluir duas aulas de cariz prático com duração de 90 minutos (3 blocos lectivos de 30 minutos) e uma teórica com duração de 60 minutos (2 blocos lectivos de 30 minutos).

- (d) O número de aulas diário por disciplina é limitado. É relativamente comum, por questões pedagógicas, não admitir por via desta restrição a ocorrência, para cada turma, de aulas da mesma disciplina no mesmo dia.
- (e) As salas são adequadas às aulas. Em função do tipo de aula prevista no plano curricular global (teórica, prática ou mista), da disciplina, da dimensão das turmas envolvidas e dos requisitos dos docentes, cada aula requer a sua realização em salas com características e equipamentos apropriados. Por exemplo, uma aula prática de informática obriga à ocupação de uma sala específica com recursos informáticos. Nas aulas de duração múltipla admite-se a ocupação apenas de uma única sala.
- (f) O turno lectivo de cada turma é respeitado. Normalmente, definem-se turnos de funcionamento para cada um dos cursos a decorrer na instituição. Neste contexto, pode definir-se que, para um determinado curso e ano, as aulas devam ficar limitadas a um intervalo horário (período da manhã, tarde ou noite ou ainda em dias específicos da semana). Por exemplo, para um curso de natureza pós-laboral as aulas deverão obrigatoriamente realizar-se nos períodos horários compatíveis, frequentemente em regime nocturno.
- (g) Cada professor e cada turma devem dispor de pelo menos um período horário destinado a almoço. Igualmente com carácter obrigatório, esta restrição impõe que num subconjunto de períodos horários apropriados à realização de uma pausa para almoço, os professores e alunos tenham, pelo menos, um período horário livre para este efeito.
- (h) Os períodos de indisponibilidade de professores, turmas e salas são respeitados. Por parte do corpo docente, previamente à elaboração dos horários, são apresentados os períodos de indisponibilidade de cada professor. Este aspecto é particularmente comum junto dos docentes que colaboram com a instituição em tempo parcial e que requerem uma compatibilização horária com a sua actividade profissional no exterior. De igual modo, também as turmas podem ter períodos fixos de indisponibilidade, normalmente associados a eventos pedagógicos, de formação, associativos ou outros de igual relevância. Quanto às salas, é também comum ocorrerem períodos de indisponibilidade nas salas em resultado de eventos pré-definidos.

**2. Condicionalismos de melhoramento.** Neste grupo de condicionalismos incluem-se diversos aspectos, de natureza opcional cujo grau de satisfação contribui directamente para a qualidade final da solução do PEHE. O seu significado como medida de desempenho implica que quanto maior for o grau de satisfação global destes condicionalismos mais desejável é o conjunto de horários produzido enquanto solução admissível do PEHE.

(a) O horário elaborado para cada professor e turma deverá ser o mais compacto possível.

De facto, um dos factores que se associa com frequência à qualidade de um horário escolar consiste no grau de ocorrência de períodos horários livres entre períodos ocupados, designados normalmente por furos. Esta medida pode ser aferida quer numa perspectiva diária, quer numa perspectiva semanal.

(b) As preferências horárias de professores e turmas devem, quando possível, ser satisfeitas. Para além da indicação dos períodos de indisponibilidade total expressos através do condicionalismo obrigatório (1h), os docentes e turmas podem apresentar um conjunto facultativo de períodos de reduzida ou moderada indisponibilidade para traduzir as suas preferências horárias.

(c) O número de deslocações físicas entre locais de lecionação deverá ser minimizado.

No contexto em estudo, considerou-se igualmente como factor determinante para a qualidade final da solução, o número de movimentações entre locais de lecionação, no caso de uma instituição com instalações geograficamente afastadas. Este aspecto é tanto mais relevante quanto maior for a distância geográfica entre as referidas instalações e, consequentemente, os tempos requeridos para professores e alunos efectuarem as suas deslocações.

No processo de elaboração de uma solução, a prioridade máxima consiste em satisfazer integralmente as condições obrigatórias (1a) a (1h) de forma a garantir a **admissibilidade da solução para o PEHE**. Considerando que este requisito se verifica então procurar-se-á encontrar uma solução para o PEHE que satisfaça o mais possível os condicionalismos de melhoramento.

Na prática, nos casos em que se recorre à resolução do PEHE através de processos essencialmente manuais, obtém-se no geral, após um esforço considerável, uma solução admissível para

o PEHE. Contudo, ao nível dos aspectos de melhoramento ou qualitativos, tal solução não se encontra adequadamente explorada em virtude do elevado tempo requerido. Este facto origina frequentes solicitações por parte de docentes e alunos, posteriores à divulgação dos horários, com o objectivo de introduzir melhoramentos pontuais nos seus horários. Deste modo, exerce-se uma pressão constante no sentido da alteração e revisão dos horários produzidos, com evidentes consequências negativas para a gestão da actividade lectiva na instituição.

## **Capítulo 2**

# **Modelos Matemáticos para o PEHE**

### **2.1 Introdução**

Atendendo à caracterização do PEHE efectuada no Capítulo 1, e visando a construção de uma metodologia que possibilite a resolução automatizada deste problema complexo, proceder-se-á ao estudo de formalizações matemáticas que, em primeiro lugar, incluem os seus condicionalismos próprios e que, em segundo lugar, potenciem a implementação de algoritmos para a sua eficiente resolução no contexto das técnicas disponíveis no domínio da Investigação Operacional. Refira-se que, na maior parte das situações reais, este tipo de problema não propicia a utilização de modelos matemáticos que, à custa de abdicar de condicionalismos correntes do problema, possibilitam a resolução através de métodos eficientes. Com efeito, na prática, a utilidade de uma solução obtida para um PEHE simplificado é bastante reduzida, já que as modificações requeridas para a imposição posterior de condicionalismos são muito extensas e exigem habitualmente a reestruturação total da solução. Deste modo decidiu-se que o modelo proposto para o PEHE deve incluir, numa primeira fase, todos os condicionalismos obrigatórios, (1a) a (1h), de forma a que as soluções obtidas através deste, soluções admissíveis do PEHE, sejam em todos os casos válidas para aplicação num contexto real.

## 2.2 Modelo matemático de admissibilidade

Apresenta-se nesta subsecção uma formalização de um modelo linear binário para a obtenção de soluções admissíveis para o PEHE.

Definam-se os seguintes parâmetros:

$T$  - conjunto de turmas, subturmas e macroturmas  $\{t_1, \dots, t_{T'}\}$ ;

$P$  - conjunto de professores  $\{p_1, \dots, p_{P'}\}$ ;

$H$  - conjunto de períodos horários semanais  $\{h_1, \dots, h_{H'}\}$ ;

$B$  - conjunto de blocos lectivos  $\{b_1, \dots, b_{B'}\}$  (assume-se que os blocos lectivos de uma mesma aula são designados por índices consecutivos);

$A$  - conjunto de aulas  $\{a_1, \dots, a_{A'}\}$  constituídas sobre o conjunto de blocos lectivos  $B$ ;

$D$  - conjunto de dias disponíveis semanalmente para aulas  $\{d_1, \dots, d_{D'}\}$  (a cada dia  $d$  corresponde um conjunto não vazio e exclusivo de períodos horários  $h$ );

$C$  - conjunto de disciplinas  $\{c_1, \dots, c_{C'}\}$  que agregam as aulas de  $A$ ;

$S$  - conjunto de salas  $\{s_1, \dots, s_{S'}\}$ ;

$IT_{th}$  - elemento genérico de uma matriz binária que expressa a indisponibilidade da turma  $t$  para assistir a aulas no período horário  $h$  e também o respeito pelo turno ( $IT_{th} = 0$  indica indisponibilidade e  $IT_{th} = 1$  expressa disponibilidade);

$IP_{ph}$  - elemento genérico de uma matriz binária que expressa a indisponibilidade do professor  $p$  para leccionar no período  $h$  (para o efeito,  $IP_{th} = 0$  expressa indisponibilidade e  $IP_{ph} = 1$  indica disponibilidade);

$IS_{sh}$  - elemento genérico de uma matriz binária que expressa a indisponibilidade da sala  $s$  no período  $h$  ( $IS_{sh}$  toma o valor 0 na situação de indisponibilidade ou, no caso contrário, assume o valor 1);

$ACT(c, t)$  - conjunto de aulas da disciplina  $c$  assistidas pela turma  $t$ ;

$ATurma(t)$  - conjunto de aulas assistidas pela turma  $t$ ;

$AProf(p)$  - conjunto de aulas leccionadas pelo professor  $p$ ;

$HDia(d)$  - conjunto de períodos horários do dia  $d$ ;

$K(b, d)$  - conjunto de períodos horários do dia  $d$  admissíveis para colocação do bloco lectivo  $b$ , de acordo com a sua posição na aula respectiva (este conjunto visa permitir a formalização da relação de contiguidade entre blocos);

$BI(c, t)$  - conjunto de blocos lectivos iniciais de todas as aulas da disciplina  $c$  assistidas pela turma  $t$ ;

$BIA(a)$  - bloco lectivo inicial da aula  $a$ ;

$HDiaI(d)$  - período horário inicial do dia  $d$ ;

$HDiaF(d)$  - período horário final do dia  $d$ ;

$AlmI(d)$  - primeiro período horário do dia  $d$  compatível com a realização de almoços;

$AlmF(d)$  - último período horário do dia  $d$  compatível com a realização de almoços;

$R_a$  - carga lectiva requerida para o cumprimento curricular da aula  $a$ , expresso em número de blocos ou de períodos horários ocupados ( $B' = \sum_{a \in A} R_a$ );

$N_c$  - número máximo diário de ocorrências de aulas da disciplina  $c$ , independentemente da sua duração em termos de blocos lectivos;

$TotAT_t$  e  $TotAP_p$  - número total semanal de aulas atribuídas à turma  $t$  e ao professor  $p$ , respectivamente (estes dados resultam do plano curricular definido previamente);

$PreP_{ph}$  e  $PreT_{th}$  - expressam, respectivamente, o grau de preferência do professor  $p$  e da turma  $t$  em relação ao envolvimento numa aula a decorrer no período horário  $h$  (o grau de preferência é dado através de uma escala inteira de 0 a 5, indicando estes limites, respectivamente, o valor máximo e mínimo de preferência);

$Q_{as}$  - elemento genérico de uma matriz binária que determina a adequação das salas à realização de cada uma das aulas ( $Q_{as}$  toma o valor 0 quando existe adequação entre a aula  $a$  e a sala  $s$  e assume valor 1 no caso contrário);

$L_{aa'}$  - elemento genérico de uma matriz binária que traduz a incompatibilidade entre os locais de realização das aulas  $a$  e  $a'$  (se as aulas ocorrem no mesmo local, não originando deslocações relevantes para os indivíduos envolvidos, então  $L_{aa'}$  toma o valor 0, caso contrário  $L_{aa'}$  toma o valor 1).

A resolução do problema de horários consiste em determinar afectações de blocos lectivos, a salas e a períodos horários, expressas directamente através das variáveis binárias:

$$y_{bsh} = \begin{cases} 1 & \text{se o bloco lectivo } b \text{ decorrer na sala } s \text{ no período horário } h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{para } b \in B; s \in S; h \in H$$

sujeitas às restrições que se seguem.

$$\sum_{h=1}^{H'} \sum_{s=1}^{S'} y_{bsh} = 1 \quad \text{para } b \in B \quad (2.1)$$

Estas restrições obrigam a que cada bloco lectivo seja escalonado numa sala e período horário. Desta forma, e de acordo com a oferta lectiva definida, todo o plano curricular é cumprido (condicionalismo (1a)).

Para auxiliar a formalização, definiram-se  $A' \times S' \times H'$  variáveis binárias relativas ao escalonamento das aulas, cada uma delas representada por  $x_{ash}$  e resultante da agregação das variáveis relativas aos blocos lectivos constituintes da aula  $a$ , a decorrer na sala  $s$  e no período horário  $h$ . Assim:

$$x_{ash} = \sum_{b \in a} y_{bsh} \quad \text{para } a \in A; s \in S; h \in H \quad (2.2)$$

### ▽ Exemplo 1-3

Para ilustrar a relação entre os conjuntos  $C, A$  e  $B$ , bem como entre as variáveis  $x_{ash}$  e  $y_{bsh}$ , considere-se um exemplo. Seja uma disciplina  $c_1$  caracterizada por:

$$c_1 = a_1 \cup a_2; a_1 = \{b_1, b_2, b_3\} \text{ e } a_2 = \{b_4, b_5\}.$$

Admitindo que  $H' = 5$  e  $S' = 2$ , um possível escalonamento poderia ser o representado na figura 2-1.

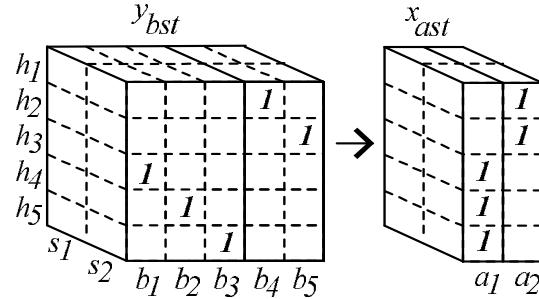


Figura 2-1: Exemplo de escalonamento para a disciplina  $c_1$

Neste caso constata-se que  $R_{a_1} = 3$  e  $R_{a_2} = 2$  e que apenas se ocupa a sala  $s_2$  com as aulas

da disciplina  $c_1$ .

△

O cumprimento do plano curricular pode ser expresso, recorrendo às variáveis  $x_{ash}$ , do seguinte modo:

$$\sum_{h=1}^{H'} \sum_{s=1}^{S'} x_{ash} = R_a \quad \text{para } a \in A \quad (2.3)$$

Refira-se que estas restrições são redundantes na presença das (2.1), e apenas são incluídas para efeitos de posterior reformulação do modelo.

Para a implementação da condição associada à existência de aulas de duração múltipla, formadas por vários blocos contíguos (condicionalismo (1c)) incluem-se as restrições (2.4) e (2.5):

$$y_{b_j,s,h} - y_{b_{j-1},s,h-1} = 0 \quad \text{para } a \in A; b_j \in a \wedge b_j \neq BIA(a); s \in S; d \in D; h \in K(b_j, d) \quad (2.4)$$

$$y_{bsh} = 0 \quad \text{para } b \in B; s \in S; d \in D; h \in (HDia(d) - K(b, d)) \quad (2.5)$$

Estas restrições obrigam ao escalonamento adjacente, na mesma sala, dos blocos lectivos que constituem uma aula.

21/12  
15:21 ▽ Exemplo 1-4

Considere-se a situação ilustrada na figura 2-2 onde, para um cenário de apenas 5 períodos horários diários, se mostram as possibilidades de colocação dos diferentes blocos lectivos ( $b_1, b_2$  e  $b_3$ ) que constituem a aula  $a_1$ . As restrições (2.4) definem uma relação de adjacência entre blocos lectivos da mesma aula que obrigam à realização contígua e na mesma sala, dos blocos lectivos ( $b_1, b_2$ ) e ( $b_2, b_3$ ), ilustrada na figura por linhas tracejadas. Adicionalmente, as restrições (2.5) recorrem aos conjuntos  $K(b, d)$ , que incluem os períodos horários admissíveis no dia  $d$  para o bloco  $b$ , para excluir os períodos  $h_4, h_5$  para o bloco  $b_1$ , os períodos  $h_1, h_5$  para o bloco  $b_2$  e os períodos  $h_1, h_2$  para o bloco  $b_3$ , como mostram os símbolos ( $\times$ ) na ilustração.

△

Para garantir o cumprimento dos turnos lectivos das turmas (condicionalismo (1f)), dos

	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$h_1$	I	X	X
$h_2$	I	I	X
$h_3$	I	I	I
$h_4$	X	I	I
$h_5$	X	X	I

Figura 2-2: Períodos horários possíveis para colocação dos blocos constituintes da aula  $a_1$

períodos de indisponibilidade das turmas (condicionalismo (1h)) e também a não afectação de uma turma a eventos lectivos simultâneos (condicionalismo (1b)) inseriram-se as restrições (2.6).

$$\sum_{a \in ATurma(t)} \sum_{s=1}^{S'} x_{ash} \leq IT_{th} \quad \text{para } h \in H; t \in T \quad (2.6)$$

De igual modo as restrições (2.7) obrigam ao cumprimento dos períodos de indisponibilidade dos professores (condicionalismo (1h)) e a não afectação de um professor a eventos lectivos simultâneos (condicionalismo (1b)).

$$\sum_{a \in AProf(p)} \sum_{s=1}^{S'} x_{ash} \leq IP_{ph} \quad \text{para } h \in H; p \in P \quad (2.7)$$

Ainda de forma idêntica, pelas seguintes restrições se garante a satisfação dos períodos de indisponibilidade das salas (condicionalismo (1h)) e a não afectação de uma sala a aulas simultâneas (condicionalismo (1b)).

$$\sum_{a=1}^{A'} x_{ash} \leq IS_{sh} \quad \text{para } h \in H; s \in S \quad (2.8)$$

Para a imposição de um limite máximo diário de aulas por disciplina (condicionalismo (1d)), define-se o conjunto de restrições (2.9).

$$\sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} \sum_{s=1}^{S'} \sum_{b \in BI(c,t)} y_{bsh} \leq N_c \quad \text{para } d \in D; t \in T; c \in C \quad (2.9)$$

As restrições (2.10), através da utilização da matriz cujo elemento genérico  $Q_{as}$  expressa a adequação da aula  $a$  à sala  $s$ , impõem a compatibilidade entre salas e aulas (condicionalismo (1e)).

$$\sum_{h=1}^{H'} \sum_{s=1}^{S'} \sum_{a=1}^{A'} Q_{as} x_{ash} = 0 \quad (2.10)$$

Por último, através dos dois sistemas de restrições seguintes é garantido que professores e alunos disponham de pelo menos um período horário destinado ao almoço de entre os possíveis para esse efeito em cada dia (condicionalismo (1g)).

$$\sum_{a \in APprof(p)} \sum_{s=1}^{S'} \sum_{h=HAlmI(d)}^{HAlmF(d)} x_{ash} \leq HAlmF(d) - HAlmI(d) \quad \text{para } d \in D; p \in P \quad (2.11)$$

$$\sum_{a \in ATurma(t)} \sum_{s=1}^{S'} \sum_{h=HAlmI(d)}^{HAlmF(d)} x_{ash} \leq HAlmF(d) - HAlmI(d) \quad \text{para } d \in D; t \in T \quad (2.12)$$

Esta formalização para o PEHE, designada por *PEHE1*, exige a definição de valores apropriados para as variáveis binárias  $x_{ash}$  e  $y_{bsh}$  satisfazendo a totalidade dos condicionalismos obrigatórios (1a) a (1h), correspondendo por isso a sua solução a um conjunto de horários admissíveis para o PEHE. Pode-se apresentar brevemente o *PEHE1* do seguinte modo:

(*PEHE1*)

determinar  $[y_{bsh}]^1$ ,

sujeito a:

(2.1) a (2.12)

$$y_{bsh} = 0, 1 \text{ para } b \in B; s \in S; h \in H \quad (2.13)$$

---

<sup>1</sup> Assume-se que  $[y_{bsh}]$  é uma representação para a matriz  $B' \times S' \times H'$  cujo elemento genérico é  $y_{bsh}$ . Idênticas representações são utilizadas ao longo de todo o texto.

onde,

$$y_{bsh} = \begin{cases} 1 & \text{se o bloco lectivo } b \text{ decorrer na sala } s \text{ no período horário } h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Uma modelização que contempla adicionalmente os condicionalismos de melhoramento será proposta na subsecção 2.2.2.

### 2.2.1 Complexidade computacional

Para estudar o grau de dificuldade associado à resolução do *PEHE1* proceder-se-á em seguida à sua classificação nos termos da teoria da complexidade computacional. Serão introduzidas particularizações no problema, com a finalidade de definir um seu caso particular que seja NP-difícil.

Para o efeito, admita-se a situação particular na qual o número de salas disponíveis  $S'$  é suficientemente elevado para a realização simultânea de quaisquer aulas e de qualquer tipo (por exemplo,  $S' = A'$  e só há um tipo de salas, precisamente o tipo exigido pelas aulas de  $A$ ). Deste modo, a escolha das salas deixa de constituir um factor relevante na resolução do problema, podendo ser omitido o índice  $s$  das variáveis na anterior formalização e as restrições (2.8) e (2.10) serão desnecessárias.

Admita-se, adicionalmente, uma duração unitária para todas as aulas, cuja constituição compreenderá apenas um único bloco lectivo, implicando a identificação entre aulas e blocos lectivos e a consequente remoção das restrições (2.4) e (2.5). Nestas condições os parâmetros  $R_a$  tomam o valor 1 e as variáveis binárias  $y_{bsh}$  deixam de ser necessárias, bem como as restrições (2.1) e (2.2). Os conjuntos  $BI(c, t)$  passam a ser de aulas, podendo o modelo ser formalizado do seguinte modo:

$(PEHE1')$

determinar  $[x_{ah}]$ ,

sujeito a:

$$\sum_{h=1}^{H'} x_{ah} = R_a \quad \text{para } a \in A \tag{2.14}$$

$$\sum_{a \in ATurma(t)} x_{ah} \leq IT_{th} \quad \text{para } h \in H; t \in T \quad (2.15)$$

$$\sum_{a \in AProf(p)} x_{ah} \leq IP_{ph} \quad \text{para } h \in H; p \in P \quad (2.16)$$

$$\sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} \sum_{a \in BI(c,t)} x_{ah} \leq N_c \quad \text{para } d \in D; t \in T; c \in C \quad (2.17)$$

$$\sum_{a \in AProf(p)} \sum_{h=HAlmI(d)}^{HAlmF(d)} x_{ah} \leq HAlmF(d) - HAlmI(d) \quad \text{para } d \in D; p \in P \quad (2.18)$$

$$\sum_{a \in ATurma(t)} \sum_{h=HAlmI(d)}^{HAlmF(d)} x_{ah} \leq HAlmF(d) - HAlmI(d) \quad \text{para } d \in D; t \in T \quad (2.19)$$

$$x_{ah} = 0, 1 \quad \text{para } a \in A; h \in H \quad (2.20)$$

onde,

$$x_{ah} = \begin{cases} 1 & \text{se a aula } a \text{ decorrer no período horário } h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Neste contexto, tome-se o caso em que o número máximo diário de ocorrências de aulas para cada uma das disciplinas é igual ou superior ao número de aulas a realizar por disciplina por semana, de tal modo que as restrições (2.17) se encontram satisfeitas numa qualquer solução admissível para as restantes restrições. Assim, as restrições (2.17) são redundantes em *PEHE1'*.

Adicionalmente, considere-se a existência de pelo menos um período horário de indisponibilidade diária destinado à pausa lectiva para almoço tanto de professores como de turmas, durante os intervalos horários eventualmente consagrados ao almoço e limitados por  $HAlmI(d)$  e  $HAlmF(d)$ . Neste caso particular, as inequações (2.18) e (2.19) são sempre verificadas numa

solução. De facto, na prática esta situação ocorre, por exemplo, quando o problema de horários apenas se reporta a um turno lectivo (manhã, tarde ou noite) para o qual os períodos de almoço são de indisponibilidade. Assim, o anterior conjunto de períodos horários disponíveis para leccionação  $H$  passa a ser considerado excluindo o(s) período(s) horário(s) fixo(s) para almoço, designando-se por  $\tilde{H}$ .

Considere-se ainda um cenário em que cada professor lecciona apenas uma única aula por semana a cada turma. Neste caso, sem perda de generalidade, é possível proceder à substituição do índice  $a$ , relativo à aula, por dois índices  $p$  e  $t$  correspondentes, respectivamente, ao professor e à turma envolvidos na aula  $a$ . Como resultado, as  $A' \times \tilde{H}'$  variáveis binárias do caso particular  $PEHE1'$  dão origem a  $(P' \times T') \times \tilde{H}'$  variáveis binárias. Assim, os parâmetros inteiros unitários  $R_a$  nas equações (2.14) dão lugar aos parâmetros  $R_{pt}$  que tomam valores binários, indicando  $R_{pt}$  o número de aulas (zero ou um) que o professor  $p$  lecciona à turma  $t$ .

O modelo anterior é então reescrito do seguinte modo, quando se verificam as referidas especificações de parâmetros:

$$(PEHE1'')$$

determinar  $[x_{pth}]$ ,

sujeito a:

$$\sum_{h=1}^{\tilde{H}'} x_{pth} = R_{pt} \quad \text{para } p \in P; t \in T \quad (2.21)$$

$$\sum_{p=1}^{P'} x_{pth} \leq IT_{th} \quad \text{para } h \in \tilde{H}; t \in T \quad (2.22)$$

$$\sum_{t=1}^{T'} x_{pth} \leq IP_{ph} \quad \text{para } h \in \tilde{H}; p \in P \quad (2.23)$$

$$x_{pth} = 0, 1 \text{ para } h \in \tilde{H}; p \in P; t \in T \quad (2.24)$$

onde,

$$x_{pth} = \begin{cases} 1 & \text{se a aula envolvendo o professor } p \text{ e a} \\ & \text{turma } t \text{ decorrer no período horário } h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Ora, Even, Itai e Shamir [35] classificaram como NP-completo, a partir de uma transformação do 3-SAT, o problema de decisão correspondente ao de admissibilidade designado por *TT*:

(*TT*)

determinar  $[x_{pth}]$ ,

sujeito a:

$$x_{pth} = 1 \Rightarrow (IP_{ph} = 1) \wedge (IT_{th} = 1) \quad \text{para } p \in P; t \in T; h \in \tilde{H} \quad (2.25)$$

$$\sum_{h=1}^{\tilde{H}'} x_{pth} = R_{pt} \quad \text{para } p \in P; t \in T \quad (2.26)$$

$$\sum_{p=1}^{P'} x_{pth} \leq 1 \quad \text{para } h \in \tilde{H}; t \in T \quad (2.27)$$

$$\sum_{t=1}^{T'} x_{pth} \leq 1 \quad \text{para } h \in \tilde{H}; p \in P \quad (2.28)$$

$$x_{pth} = 0, 1 \text{ para } h \in \tilde{H}; p \in P; t \in T \quad (2.29)$$

onde o significado dos parâmetros e variáveis é idêntico ao apresentado na definição de *PEHE1''*.

Atendendo a que as condições (2.25), (2.27) e (2.28) são equivalentes às inequações (2.22) e (2.23) logo o *PEHE1''* é equivalente ao *TT* e, por isso, é NP-difícil também.

Dado que o problema *PEHE1''* resulta de particularizações sobre o problema *PEHE1*, este último é NP-difícil [41].

Refira-se que estes problemas continuam a ser NP-Difíceis mesmo quando  $\tilde{H}' = 3$  e apenas um dos grupos (turmas ou professores) apresenta disponibilidade horária completa [35]. Posteriormente e para o mesmo nível de complexidade de Werra [27] estende o problema *TT* introduzindo pré-afectações de aulas a períodos horários, através da utilização de turmas e professores fictícios.

O *PEHE1''* já é polinomial quando não existem indisponibilidades por parte dos professores e das turmas, isto é ( $IT_{th} = 1, IP_{ph} = 1$  para  $h \in \tilde{H}; t \in T; p \in P$ ) ou, ainda, quando um dos grupos tem apenas dois períodos de disponibilidade [41].

Outro estudo da complexidade computacional inerente a PEHEs foi desenvolvido por Cooper e Kingston [24], onde se demonstra a dificuldade de resolução de problemas de horários através do estudo de cinco variantes deste problema que se provam ser NP-difíceis.

Ainda no caso da disponibilidade total de professores e alunos, Even, Itai e Shamir [35], provaram a existência de uma solução sempre que cada professor e turma não seja envolvido no total em mais do que  $\tilde{H}'$  blocos lectivos, ou seja, quando:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{T'} R_{pt} \leq \tilde{H}' & \text{para } p \in P \\ \sum_{p=1}^{P'} R_{pt} \leq \tilde{H}' & \text{para } t \in T \end{cases} \quad (2.30)$$

Em relação ao problema de obtenção da solução propriamente dita para o *PEHE1*, caso exista, esta pode ser determinada, de acordo com Cooper e Kingston [24], a um custo computacional adicional de ordem polinomial, recorrendo ao problema de decisão sobre a existência ou não de solução para o *PEHE1*. Para tal basta seleccionar a primeira aula  $a$  e tentar escaloná-la sequencialmente por todos os períodos horários e salas livres até que encontre uma posição tal que o problema de decisão resultante confirme a existência de solução. Em seguida, mantendo a afectação já feita, selecciona-se a próxima aula e repete-se o procedimento até que se produza a afectação de todas as aulas.

### 2.2.2 Modelo matemático de optimização

O modelo descrito anteriormente e formalizado por *PEHE1*, visa exclusivamente a satisfação dos condicionalismos obrigatórios necessários à obtenção de uma solução admissível. No con-

texto de resolução de PEHEs reais, para além da obrigatoriedade de satisfação destes condicionalismos essenciais é, como vimos, necessário atender aos aspectos qualitativos da solução que são expressos nos condicionalismos de melhoramento (2a), (2b) e (2c). A modelização destes condicionalismos pode ser realizada através da introdução da função (2.31):

$$f(\bar{Y}) = \beta_{2a} (f_{T2a}(\bar{Y}) + f_{P2a}(\bar{Y})) + \beta_{2b} (f_{T2b}(\bar{Y}) + f_{P2b}(\bar{Y})) + \beta_{2c} (f_{T2c}(\bar{Y}) + f_{P2c}(\bar{Y})) \quad (2.31)$$

onde  $\beta_{2a}, \beta_{2b}$  e  $\beta_{2c}$  são reais positivos e  $f_{T2a}(\bar{Y}), f_{P2a}(\bar{Y}), f_{T2b}(\bar{Y}), f_{P2b}(\bar{Y}), f_{T2c}(\bar{Y})$  e  $f_{P2c}(\bar{Y})$  são funções de  $\bar{Y}$  a apresentar de seguida.

Na expressão que define  $f(\bar{Y})$  incluem-se três parcelas base, cada uma delas associada ao nível de satisfação dos aspectos considerados nos condicionalismos de melhoramento, sendo estes avaliados separadamente para turmas e professores. O valor de cada uma destas parcelas expressa o grau de verificação por parte de uma solução relativamente ao condicionalismo correspondente, tomando o valor nulo (no caso de  $\beta_{2b} (f_{T2b}(\bar{Y}) + f_{P2b}(\bar{Y}))$  e  $\beta_{2c} (f_{T2c}(\bar{Y}) + f_{P2c}(\bar{Y}))$ ) ou o valor mínimo (no caso de  $\beta_{2a} (f_{T2a}(\bar{Y}) + f_{P2a}(\bar{Y}))$ ), aquando da sua satisfação integral. Note-se que, no caso de  $\beta_{2a} (f_{T2a}(\bar{Y}) + f_{P2a}(\bar{Y}))$  que expressa, devidamente penalizados, o número de *clusters* de aulas formados para turmas e professores, o seu valor mínimo será sempre positivo e superior ou igual a  $\beta_{2a}(T' + P')$ .

Para permitir uma formalização mais simplificada destes condicionalismos definiram-se as variáveis auxiliares  $OT_{th}$  e  $OP_{ph}$  que estabelecem, respectivamente, a ocupação da turma  $t$  e do professor  $p$  no período horário  $h$ :

$$OT_{th} = \sum_{a \in ATurma(t)} \sum_{s=1}^{S'} x_{ash} \quad , \quad OP_{ph} = \sum_{a \in AProf(p)} \sum_{s=1}^{S'} x_{ash} \quad \text{para } p \in P; t \in T; h \in H \quad (2.32)$$

O primeiro condicionalismo de melhoramento (2a) visa a compactação semanal da distribuição de aulas para turmas e professores. Para tal, constituíram-se as parcelas quadráticas (2.33) e

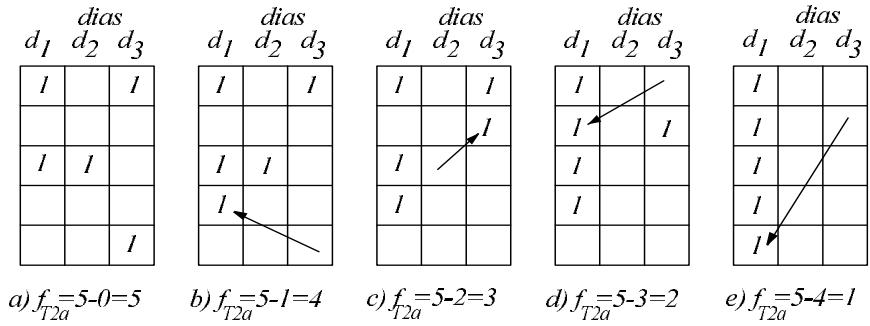


Figura 2-3: Exemplo do cálculo de penalizações associadas à dispersão de aulas

(2.34), respectivamente:

$$f_{T2a}(\bar{Y}) = \sum_{t=1}^{T'} \left( TotAT_t - \left( \sum_{d=1}^{D'} \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)-1} OT_{th} OT_{t,h+1} \right) \right) \quad (2.33)$$

$$f_{P2a}(\bar{Y}) = \sum_{p=1}^{P'} \left( TotAP_p - \left( \sum_{d=1}^{D'} \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)-1} OP_{ph} OP_{p,h+1} \right) \right) \quad (2.34)$$

Note-se que estas expressões avaliam a dispersão na colocação das aulas, favorecendo a sua concentração e promovendo a contiguidade diária das aulas. Por outro lado, se há compactação das aulas há tendência para a redução do número de dias ocupados com aulas. Nestas expressões, para cada professor e turma é determinada a diferença entre o número total de aulas por semana e número de pares de blocos escalonados de forma contígua ao longo de cada dia. De facto, o resultado final desta diferença traduz o número de *clusters* gerados na distribuição das aulas semanais.

#### ▽ Exemplo 1-5

Para ilustrar a quantificação efectuada pela função  $f_{T2a}$  face a diferentes alternativas de horários, observe-se a figura 2-3 na qual se descreve a evolução hipotética de um horário de 5 blocos lectivos dispostos por 15 períodos horários (3 dias com 5 períodos diários).

Na situação a), as 5 aulas de um bloco unitário cada encontram-se dispostas de forma totalmente descontínua originando uma penalização de valor 5 em virtude da inexistência de

pares de aulas contíguos em qualquer dos dias. Nos horários *b*) e *d*) há uma redução unitária da penalização, em relação aos horários que os antecedem, em virtude da eliminação dos furos existentes no dia 3 e no dia 1, respectivamente. Por outro lado, nos horários *c*) e *e*) verificam-se reduções da penalização, em relação aos horários precedentes, por via da libertação dos dias 2 e 3, respectivamente.

△

Com a finalidade de satisfazer as preferências horárias manifestadas por turmas e professores (condicionalismo (2b)) definiram-se, respectivamente, as seguintes funções lineares:

$$f_{T2b}(\bar{Y}) = \sum_{h=1}^{H'} \sum_{t=1}^{T'} PreT_{th} OT_{th} \quad (2.35)$$

$$f_{P2b}(\bar{Y}) = \sum_{h=1}^{H'} \sum_{p=1}^{P'} PreP_{ph} OP_{ph} \quad (2.36)$$

Em face do significado das matrizes de preferências  $[PreT_{th}]$  e  $[PreP_{ph}]$ , as expressões (2.35) e (2.36) indicam, respectivamente, o grau de predileção das turmas e dos professores em relação a cada solução: cada uma das expressões anteriores acumula, ao longo da semana, as penalizações da colocação das aulas relativamente às preferências horárias.

As últimas parcelas da expressão (2.31) correspondem à preocupação de minimizar o número de deslocações efectuadas por turmas e por professores entre locais de lecionação (condicionalismo (2c)). Para o efeito, definiu-se o seguinte par de funções quadráticas:

$$f_{T2c}(\bar{Y}) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T'} \sum_{a,a' \in ATurma(t)} L_{aa'} \sum_{d=1}^{D'} \left( \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} \sum_{s=1}^{S'} x_{ash} \right) \left( \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} \sum_{s=1}^{S'} x_{a'sh} \right) \quad (2.37)$$

$$f_{P2c}(\bar{Y}) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{P'} \sum_{a,a' \in AProf(p)} L_{aa'} \sum_{d=1}^{D'} \left( \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} \sum_{s=1}^{S'} x_{ash} \right) \left( \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} \sum_{s=1}^{S'} x_{a'sh} \right) \quad (2.38)$$

Com recurso à matriz de incompatibilidade entre locais de realização das aulas  $[L_{aa'}]$ , estas expressões quantificam o número de deslocações presentes na solução que são não desejáveis para

turmas ou professores. De facto, os somatórios  $\left( \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} \sum_{s=1}^{S'} x_{ash} \right)$  e  $\left( \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} \sum_{s=1}^{S'} x_{a'sh} \right)$  expressam o escalonamento no dia  $d$  em qualquer sala, respectivamente, das aulas  $a$  e  $a'$  cuja ocorrência diária em locais incompatíveis é penalizada por  $L_{aa'}$ . O factor  $\frac{1}{2}$  foi inserido para corrigir a duplicação de penalização originada pelos pares de aulas  $(a, a')$  e  $(a', a)$ .

Encontra-se, assim, definida na totalidade a função objectivo a minimizar, por forma a procurar soluções de qualidade para o PEHE. Note-se que na função (2.31) é possível, através do ajustamento dos ponderadores  $\beta_{2a}, \beta_{2b}$  e  $\beta_{2c}$ , atribuir pesos relativos distintos a cada um dos aspectos de melhoramento considerados.

Finalmente, a formalização completa do modelo de optimização não linear binário para o PEHE é a seguinte:

(PEHE2)

determinar  $[y_{bsh}]$ ,

que minimize (2.31)

sujeito a:

(2.1) a (2.13)

em que as funções  $f_{T2a}(\bar{Y}), f_{P2a}(\bar{Y}), f_{T2b}(\bar{Y}), f_{P2b}(\bar{Y}), f_{T2c}(\bar{Y})$  e  $f_{P2c}(\bar{Y})$  são dadas por (2.33) a (2.38), e onde,

$$y_{bsh} = \begin{cases} 1 & \text{se o bloco lectivo } b \text{ decorrer na sala } s \text{ no período horário } h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A solução óptima resultante da resolução deste problema (no caso de existir) consiste num conjunto de atribuições de valores binários às variáveis  $y_{bsh}$  e, consequentemente, às variáveis  $x_{ash}$ . Tais atribuições traduzem uma solução de óptima qualidade para o PEHE, isto é, uma solução que satisfaz todos os condicionalismos obrigatórios e minimiza o incumprimento penalizado dos condicionalismos de melhoramento, ou seja, minimiza a penalização total para professores e para turmas.

Este problema de optimização é classificado, quanto à complexidade computacional, em

função das considerações efectuadas relativamente ao problema de admissibilidade *PEHE1*. De facto, o *PEHE2* é também um problema que apenas acrescenta ao *PEHE1* a minimização da função objectivo (2.31). Sendo o *PEHE1* de tipo NP-difícil, o *PEHE2* também é NP-difícil [41]. Efectivamente, se for desenvolvido um algoritmo polinomial para o *PEHE2* este encontra uma solução óptima e, portanto, admissível para o *PEHE2* (logo solução do *PEHE1*), ou prova que o *PEHE2* é impossível (logo o *PEHE1* também é impossível).

Este aspecto contribui para que, sob a perspectiva de resolução prática do PEHE, quer na versão de admissibilidade (*PEHE1*) quer na versão de optimização (*PEHE2*), as técnicas exactas não se revelem apropriadas dado o esforço computacional que pode ser exigido quando a dimensão das instâncias é elevada. Note-se que é relativamente fácil que problemas reais originem instâncias de grande dimensão. Por exemplo, para um PEHE relativo a uma instituição escolar média, tal como a instância ESGHT-T1 descrita na próxima secção, o recurso à formalização de admissibilidade linear binária *PEHE1* ou à de optimização não linear binária *PEHE2*, gera problemas de dimensão proibitiva, envolvendo cerca de 800 000 variáveis binárias sujeitas a mais de 900 000 restrições.

Refira-se ainda que, numa perspectiva prática de resolução do PEHE, as soluções devem atender à minimização da violação dos condicionalismos de melhoramento, facto que não é realizado através do problema de admissibilidade *PEHE1* mas sim pelo *PEHE2*.

Por outro lado, a inclusão no modelo *PEHE2* de uma função objectivo que incorpora e quantifica aspectos qualitativos e subjectivos como, por exemplo, as preferências dos professores e das turmas, reduz o valor e consequente utilidade da obtenção de soluções óptimas.

Por estas razões, a aplicação de heurísticas para ao *PEHE2* é justificável e apropriada. No contexto real é consideravelmente mais importante a obtenção de soluções de qualidade elevada (provavelmente não óptimas) num curto espaço de tempo e requerendo recursos computacionais relativamente modestos, do que a determinação de soluções óptimas a custos computacionais e temporais incomportáveis. É pois, admitindo estas considerações que nos Capítulos 4 e 5 se procederá à definição e adaptação de abordagens heurísticas para o *PEHE2*.

Até ao final da dissertação sempre que se referir o PEHE, considera-se o problema na sua versão de optimização, correspondente à formalização *PEHE2*.

## 2.3 Instâncias-teste

### 2.3.1 Apresentação sumária

Com a finalidade de testar os métodos heurísticos a desenvolver nesta dissertação, nos Capítulos 4 e 5, reuniu-se um conjunto de instâncias do PEHE que descrevem um leque diverso de situações. Assim, apresentam-se nas tabelas 2.1 e 2.2, os dados relativos à caracterização de cada instância.

Nas colunas (1) a (6) da primeira tabela indica-se, respectivamente para cada instância, o número total de aulas  $A'$ , o número total de períodos horários  $H'$ , o número de dias disponíveis  $D'$ , o número total de salas  $S'$ , o número total de professores  $P'$  e ainda o número total de turmas  $T'$ . Refira-se que em todos os casos o número de períodos horários se distribuiu de igual forma por todos os dias.

As instâncias encontram-se dispostas em três grupos distintos de acordo com sua natureza. As instâncias designadas por HTTP correspondem a situações hipotéticas, por sua vez as descritas como PREAL representam casos pseudo-reais e o último grupo identificado por ESGHT corresponde a aplicações reais construídas com base no PEHE da Escola Superior de Gestão, Hotelaria e Turismo (ESGHT).

Na tabela 2.2, cada instância é caracterizada sob diversos aspectos.

- Índice de ocupação. Este índice, indicado na coluna (7), expressa o grau de ocupação dos períodos horários e salas pelas aulas programadas no plano curricular da respectiva instância. O seu cálculo foi efectuado de acordo com a seguinte expressão:

$$\text{Índice de ocupação} = \frac{A'}{H' \times S'} \times 100 \quad (2.39)$$

Normalmente, quanto mais elevado for este índice, maior será o nível de dificuldade associado à resolução da instância. No limite, um índice de ocupação de 100% corresponde a um problema totalmente constrangido, no qual não existem períodos horários e salas livres.

- Condicionalismos activos. Na coluna (8) indicam-se os diferentes condicionalismos (obrigatórios ou de melhoramento) que caracterizam cada instância, de acordo com a classifi-

cação efectuada na secção 1.3 para o PEHE.

- Minorante  $MPC2a$ . Considerando a expressão da função objectivo definida anteriormente no modelo de optimização *PEHE2* que integra os condicionalismos de melhoramento, apresenta-se na coluna (9) um minorante para o valor óptimo de penalização da instância. Este, designado por  $MPC2a$ , é determinado com base apenas no valor de penalização associado ao condicionalismo de melhoramento (2a) - relativo à formação de *clusters* de aulas para professores e alunos. Com efeito, na prática, este condicionalismo representa a maior parcela de penalização associada a uma solução admissível. O cálculo do valor do minorante é determinado através da seguinte expressão:

$$MPC2a = \sum_{p=1}^{P'} MCF(A'_p, H_p) + \sum_{t=1}^{T'} MCF(A'_t, H_t) \quad (2.40)$$

Em (2.40)  $A'_p$  e  $A'_t$  representam o número total de aulas atribuídas ao professor  $p$  e turma  $t$ , respectivamente,  $H_p$  e  $H_t$  correspondem ao conjunto de períodos horários livres para o professor  $p$  e para os alunos da turma  $t$ , atendendo às restrições impostas pelos condicionalismos obrigatórios (1f), (1g) e (1h). Os valores  $MCF(A'_p, H_p)$  e  $MCF(A'_t, H_t)$  indicam o número mínimo de *clusters* necessários ao escalonamento das  $A'_p$  e  $A'_t$  aulas pelo conjunto de períodos horários  $H_p$  e  $H_t$ , respectivamente para professores ou alunos. Genericamente e para o caso dos professores, a determinação de  $MCF(A'_p, H_p)$  faz-se contabilizando o número de *clusters* formados após uma ocupação sequencial de  $A'_p$  períodos horários  $h_p \in H_p$ . Para cada escolha de  $h_p$  são utilizados dois critérios: o primeiro é a minimização do número de *clusters* formados e o segundo é maximização do número de períodos horários livres contíguos a  $h_p$ .

Note-se que, no caso das instâncias HTTP e dado que não se encontram activos quaisquer condicionalismos de melhoramento, o valor do  $MPC2a$  associado a estes problemas é nulo, sendo qualquer solução admissível, óptima. No caso das instâncias PREAL6 e PREAL7 o valor do minorante foi determinado na própria construção da instância como se descreve mais adiante (subsecção 2.3.2).

	Instância do PEHE	$A'$ Aulas	$H'$ P.horários	$D'$ Dias	$S'$ Salas	$P'$ Prof.	$T'$ Turmas
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	HTTP4	120	30	5	4	4	4
2	HTTP5	150	30	5	5	5	5
3	HTTP6	180	30	5	6	6	6
4	HTTP7	210	30	5	7	7	7
5	HTTP8	240	30	5	8	8	8
6	PREAL1	39	12	4	4	6	6
7	PREAL2	39	12	4	4	6	6
8	PREAL3	76	25	5	4	6	5
9	PREAL4	76	25	5	4	6	5
10	PREAL5	76	25	5	4	6	5
11	PREAL6	76	25	5	4	6	5
12	PREAL7	76	25	5	4	6	5
13	ESGHT-P1	209	50	5	9	51	32
14	ESGHT-F1	417	50	5	18	79	60
15	ESGHT-T1	626	50	5	27	107	92
16	ESGHT-P2	226	50	5	8	54	34
17	ESGHT-F2	429	50	5	18	82	63
18	ESGHT-T2	652	50	5	26	113	97
19	ESGHT-P3	217	50	5	9	53	35
20	ESGHT-F3	434	50	5	18	80	64
21	ESGHT-T3	651	50	5	26	110	99

Tabela 2.1: Caracterização das instâncias

	Instância do PEHE	Índice de ocupação	Condicionalismos activos	Minorante MPC2a	Valor da solução manual
		(7)	(8)	(9)	(10)
1	HTTP4	100	1a,1b,1e	0*	-
2	HTTP5	100	1a,1b,1e	0*	-
3	HTTP6	100	1a,1b,1e	0*	-
4	HTTP7	100	1a,1b,1e	0*	-
5	HTTP8	100	1a,1b,1e	0*	-
6	PREAL1	81	1a-1f,2a	27	-
7	PREAL2	81	1a-1f,1h,2a	27	-
8	PREAL3	76	1a-1c,1e,2a	36	-
9	PREAL4	76	1a-1e,2a	36	-
10	PREAL5	76	1a-1e,1g,2a	57	-
11	PREAL6	76	1a-1h,2a	79*	-
12	PREAL7	76	1a-1h,2a	79*	-
13	ESGHT-P1	46	1a-1h,2a,2b	114	328
14	ESGHT-F1	46	1a-1h,2a,2b	232	458
15	ESGHT-T1	46	Todos	306	864
16	ESGHT-P2	57	1a-1h,2a,2b	121	331
17	ESGHT-F2	48	1a-1h,2a,2b	236	463
18	ESGHT-T2	50	Todos	313	871
19	ESGHT-P3	54	1a-1h,2a,2b	118	341
20	ESGHT-F3	48	1a-1h,2a,2b	229	459
21	ESGHT-T3	50	Todos	315	886

\* Valor de penalização da solução óptima

Tabela 2.2: Caracterização das instâncias (continuação)

- Valor da solução manual. Na coluna (10), somente para as instâncias reais ESGHT, apresenta-se o valor da função de penalização (2.31) correspondente à solução obtida para cada uma destas instâncias reais do PEHE pela equipa de elaboração de horários da ESGHT.

Em seguida descreve-se cada um dos grupos de instâncias em particular.

### **2.3.2 Descrição das instâncias-teste**

#### **Instâncias hipotéticas**

As instâncias HTTP4 a HTTP8 constituem um conjunto de problemas de horários escolares hipotéticos, extraídos do reportório de instâncias de problemas de Investigação Operacional, disponível na OR-Library<sup>2</sup>. Este grupo de instâncias visa apenas a obtenção de soluções admisíveis para o PEHE, atendendo aos condicionalismos obrigatórios (1a), (1b) e (1e). Em cada caso é considerado um conjunto de aulas que obriga à ocupação total dos períodos horários para turmas, professores e salas. Cada aula define, assim, uma afectação rígida de um professor, a uma turma e a uma sala. Esta característica torna o problema particularmente difícil dado que no contexto de total saturação dos horários dos professores e turmas, cada aula admite apenas uma única sala para a sua realização. Este grau de dificuldade é igualmente visível pelo índice de ocupação máximo que lhe está associado.

#### **Instâncias pseudo-reais**

Relativamente às instâncias PREAL1 e PREAL2, a sua concepção fez-se através da modificação de uma parte do problema real ESGHT-P1, designadamente de um conjunto de aulas para o curso nocturno de Gestão - Ramo Financeiro da ESGHT em Portimão. Para tal, efectuaram-se alterações ao nível do plano curricular e nos períodos de disponibilidade horária, considerando-se apenas quatro dias com apenas três períodos horários diários. A distinção entre as instâncias PREAL1 e PREAL2 fez-se, introduzindo na última, a obrigatoriedade de satisfação de períodos de indisponibilidade de professores e alunos (condicionalismo (1h)).

---

<sup>2</sup>A OR-Library está acessível a partir do endereço <http://mscmga.ms.ic.ac.uk/info.html>.

Quanto às restantes instâncias pseudo-reais, considere-se como ponto de partida a PREAL7 cuja estrutura é a base das PREAL3 a PREAL6. Em todas estas, partindo do número de professores, turmas e salas utilizadas em PREAL1 e PREAL2, aumentou-se o número de períodos horários semanais de 12 para 25 (e de 4 para 5 dias).

A finalidade subjacente à concepção da PREAL7 foi a necessidade de constituição de um caso do PEHE que incluisse o máximo de condicionalismos obrigatórios e de melhoramento e para o qual, à semelhança do que sucede com as instâncias hipotéticas HTTPs, se conhecesse à partida a existência de uma solução óptima. Para o efeito, inverteu-se o processo habitual de construção de uma solução, recorrendo a um procedimento que englobou os passos que se referem de seguida.

Etapa 1 Escolhe uma turma e um professor com o menor número de aulas atribuídas. Em caso de empate a escolha é efectuada aleatoriamente.

Etapa 2 Seleciona um período horário e uma sala disponível que minimize o acréscimo total provocado na expressão que avalia a formação de *clusters* de aulas, para professores e alunos, e pressupondo o cumprimento dos condicionalismos obrigatórios (1b), (1c), (1d) e (1g).

Etapa 3 Insere a aula definida pela afectação (professor, turma, sala) no plano curricular da instância e respectivo registo no horário do professor, da turma e da sala.

Repetição das etapas 1 a 3 enquanto for possível a inserção de aulas adicionais.

Etapa 4 Considera períodos de indisponibilidade horária, nos termos do condicionalismo obrigatório (1h), os períodos horários não utilizados por cada professor e turma, registando o valor de penalização associado à solução produzida.

Esta orientação promoveu a colocação de aulas em localizações contíguas aos grupos de aulas já escalonados nos horários de professores e alunos, sujeitas ao cumprimento dos condicionalismos obrigatórios referidos. Por recurso a este procedimento foi possível definir uma instância constituída por 76 aulas, envolvendo 6 professores, 5 turmas e 4 salas, para a qual se conhece uma solução óptima de valor de penalização igual a 79 (com  $\beta_{2a} = 1$ ) e satisfazendo os

diversos condicionalismos obrigatórios. De facto a solução encontrada, para além de admissível, corresponde a um conjunto de horários que, em função do número de aulas atribuído a cada professor e turma, apresentam configurações que minimizam o valor de penalização expresso pelo único condicionalismo de melhoramento activo (2a).

Quanto à instância PREAL6, a sua estrutura é idêntica à PREAL7 diferenciando-se apenas no número de salas alternativas para cada aula. Enquanto que em PREAL7 cada aula permite a sua realização em apenas uma sala, em PREAL6 o número de salas alternativas foi alargado para três, tornando assim o caso mais flexível. Em virtude da solução encontrada para PREAL7 definir uma colocação que minimiza a formação de *clusters* de aulas, o valor de penalização da solução óptima de PREAL6 é igualmente 79. No caso de PREAL3 a PREAL5 apenas se diferenciou o número de condicionalismos obrigatórios activos.

### **Instâncias reais**

As instâncias reais apresentadas resultaram dos PEHEs ocorridos na ESGHT em três momentos distintos.

Esta instituição escolar encontra-se presente em duas cidades distintas, Faro e Portimão, originando dois problemas de horários separados geograficamente mas dependentes de recursos comuns.

Na prática, numa primeira fase, a equipa de elaboração de horários da ESGHT, produz manualmente soluções para cada um dos problemas individuais. Nesta fase, os recursos comuns, que se limitam apenas a uma parcela de cerca de 15% do número total de docentes, são considerados afectos separadamente, nas proporções estabelecidas pelo plano curricular global, a cada um dos locais de actividade. Após ter sido elaborada uma solução satisfatória para cada um destes sub-problemas, a equipa de horários procura, numa segunda fase, eliminar os conflitos originados nos condicionalismos obrigatórios para os docentes comuns aos dois locais de ensino. É neste contexto que se atende ao condicionalismo de melhoramento (2c) - relativo à minimização das deslocações entre locais de lecionação - produzindo-se então a solução final e global para o PEHE da instituição.

Extraídas a partir deste contexto real, apresentam-se as instâncias geradas isoladamente para cada um dos locais, nomeadamente, ESGHT-F para os dados correspondentes a Faro e

ESGHT-P para a versão relativa a Portimão, pressupondo a divisão dos docentes comuns por ambos os locais. O caso global é apresentado sob a designação de ESGHT-T. Mostram-se para três momentos distintos os PEHEs reais associados a cada uma destas versões obtidas, respectivamente, nas situações relativas aos primeiros semestres dos anos lectivos de 1997/1998, 1999/2000 e 2001/2002.

# **Capítulo 3**

## **Revisão Bibliográfica**

### **3.1 Introdução**

A problemática relativa ao planeamento horário de actividades escolares, não é recente. De facto, desde que se constituíram instituições escolares de média ou elevada dimensão cujos recursos limitados (professores, alunos, salas, etc.) obrigam a uma intensa e eficiente gestão ao longo de um período de tempo finito, esta categoria de problemas sempre esteve presente, pelo menos de forma implícita.

A extensa diversidade de requisitos e características das instituições escolares resultante dos diferentes níveis de ensino (básico, secundário ou superior), das particularidades impostas pelo sistema educativo de cada país, ou ainda, das especificidades próprias de cada instituição, reflecte-se determinantemente numa profusão de problemas de horários escolares distintos. Esta é aliás, uma das razões que explica a inexistência de um modelo genérico para apoiar a resolução para esta classe de problemas, resultando assim num contínuo e renovado interesse por parte da comunidade da Investigação Operacional sobre esta temática. Constituindo um factor de motivação adicional para o estudo destes problemas, refira-se o facto de estes assumirem, normalmente, características críticas ao nível da complexidade e dimensão que dificultam a sua resolução prática. Também neste sentido contribui, em parte, a elevada adaptação de cada técnica a cada problema específico em estudo e que, nessa perspectiva de análise, pode ser considerado único. Compreende-se, por estas razões, que neste domínio os escassos estudos comparativos entre técnicas de resolução alternativas não conduzam a conclusões objectivas e

globais sobre a eficácia de cada abordagem relativamente às demais.

Os primeiros trabalhos desenvolvidos sobre o planeamento horário de actividades escolares (designado genericamente pelo termo anglo-saxónico *timetabling*) datam do início da década de 60, embora se possam encontrar referências afins durante as duas décadas anteriores. Destaque-se a este propósito a extensa e exaustiva revisão bibliográfica sobre os artigos relacionados com a construção de horários escolares anteriores a 1979, elaborada por Schmidt e Strohlein [92]. Até à actualidade imensos contributos têm sido produzidos, reflectindo-se também na constituição de uma comunidade orientada para o estudo desta temática. Como exemplo, refiram-se alguns grupos de investigação focados sobre a problemática da elaboração de horários escolares:

- *ASAP-Automated Scheduling, Optimization & Planning Research Group*<sup>1</sup>
- *EURO WATT-Working Group on Automated Timetabling*<sup>2</sup>
- *ET-Evolutionary Timetabling*<sup>3</sup>
- *ORSOT-Operation Research, Scheduling, Optimization & Timetabling Scientific Group*<sup>4</sup>

Destaque-se igualmente a série de conferências *Practice and Theory of Automated Timetabling* realizadas, respectivamente, em Edinburgh (1995), Toronto (1997), Konstanz (2001) e Ghent (2002). Salientem-se ainda as *EURO WATT workshops* decorridas em Barcelona (1997), Bruxelas (1998), Pequim (1999) e Roterdão (2001).

Em relação ao problema descrito e formalizado nos Capítulos 1 e 2, e ao qual se atribuiu a denominação de PEHE, dada a sua importância como objecto de estudo ao longo desta dissertação, proceder-se-á neste capítulo ao seu enquadramento no contexto de *timetabling* e à caracterização dos demais problemas afins.

O domínio genérico que se define sob o termo de Problemas de Planeamento Temporal de Actividades Escolares (PPTAE) é caracterizado pela existência de uma extensa diversidade de problemas, na qual se distinguem numa primeira análise dois tipos, tal como se ilustra na figura 3-1.

---

<sup>1</sup>[www.asap.cs.nott.ac.uk](http://www.asap.cs.nott.ac.uk)

<sup>2</sup>[www.asap.cd.nott.ac.uk/watt](http://www.asap.cd.nott.ac.uk/watt)

<sup>3</sup>[www.dai.ed.ac.uk/homes/emmah/et](http://www.dai.ed.ac.uk/homes/emmah/et)

<sup>4</sup>[www.kcn.ru/tat\\_en/university/departments/vmk/orsot](http://www.kcn.ru/tat_en/university/departments/vmk/orsot)

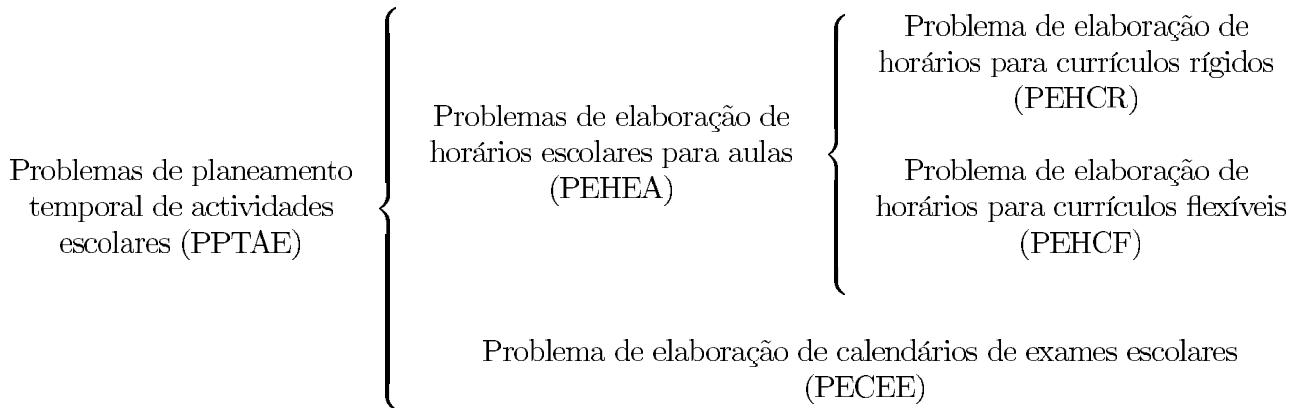


Figura 3-1: Problemas de horários escolares

Como aspecto comum a ambos refira-se o seu objectivo genérico. A finalidade comum é a definição de um plano temporal de afectações de eventos ou actividades escolares (aulas ou exames) aos recursos disponíveis na instituição (professores, alunos, salas ou equipamentos) o qual se estende ao longo de um intervalo de tempo limitado. A principal distinção entre ambos consiste no facto do primeiro problema, designado por problema de elaboração de horários escolares para aulas (PEHEA) compreender o escalonamento durante um período fixo, cuja duração é habitualmente uma semana, de um conjunto de aulas (afectações de professores, a turmas, disciplinas e salas) requerido para o cumprimento dos currículos dos alunos ou turmas. Neste problema pretende-se a definição de planos horários concentrados para alunos e professores, satisfazendo um conjunto de condicionalismos específicos. Por sua vez, o problema de elaboração de calendário de exames (PECEE), visa a construção de um plano de realização de exames para todas as disciplinas, a executar durante um intervalo temporal finito de dias. Este plano pode incluir a especificação dos vigilantes (habitualmente professores), das salas necessárias em função do número de alunos envolvidos e de outros requisitos particulares para cada exame. O principal propósito presente no PECEE é garantir a todos os alunos, em função dos exames nos quais cada um está inscrito, a menor sobreposição de provas possível e uma distribuição dispersa, potenciando a preparação para cada exame.

Refira-se ainda a existência de um número reduzido de problemas que, não sendo normalmente incluídos no domínio dos PPTAE, revelam uma afinidade significativa com estes. A este respeito, mencionem-se os problemas de elaboração de programa de conferências ou seminários, estudados por exemplo por Eglese e Rand [32] ou por Sampson, Elliott e Weiss [88], e o proble-

ma de construção de calendários de eventos desportivos, abordado por Ferland e Fleurent [37], Wright [108] ou Trick [100].

Com vista à definição de cada um dos tipos de PPTAE identificados e para apresentação das metodologias de resolução alternativas propostas na literatura, segue-se uma selecção das referências bibliográficas consideradas mais relevantes, agrupadas por modelo ou método de resolução.

### **3.2 Problema de elaboração de horários escolares para aulas**

No grupo de PEHEA identificam-se dois problemas: o problema de elaboração de horários para currículos rígidos (PEHCR) e o problema de elaboração de horários para currículos flexíveis (PEHCF). A distinção entre ambos faz-se essencialmente em função do grau de flexibilidade permitido na definição do currículo para cada aluno. Como exemplo, considere-se as diferenças neste aspecto, existentes entre a elaboração de horários nos níveis de ensino básico/secundário e no sistema superior.

No primeiro caso, o currículo estabelecido para cada aluno é maioritariamente rígido e obrigatório, dando origem à formação de turmas fixas distribuídas habitualmente por anos lectivos. Neste contexto, os horários produzidos satisfazem o princípio da não sobreposição entre quaisquer aulas estabelecidas no currículo da turma. Em virtude do problema em estudo nesta dissertação, o PEHE, se classificar precisamente nesta tipologia, a revisão bibliográfica incidirá preferencialmente sobre esta.

Em contrapartida, na generalidade do ensino superior e, em particular, no sistema universitário americano, os currículos dos alunos são flexíveis, sendo determinados essencialmente pela escolha de disciplinas opcionais, de um ou mais cursos, nas quais os alunos se inscrevem individualmente. Neste contexto, o problema de horários visa a minimização das sobreposições entre as aulas das diversas disciplinas escolhidas pelos alunos. Note-se porém, que no sistema de ensino superior português e em geral no ensino superior europeu existem ainda instituições que optam por utilizar o sistema curricular maioritariamente rígido, típico dos níveis de ensino precedentes.

Existem contudo algumas situações, mencionadas em seguida, que configuram situações de

aproximação entre os dois tipos de problemas descritos. Na prática, apesar da prévia fixação do plano curricular dos alunos, em alguns PEHCR existe a possibilidade de escolha por parte dos alunos de opções curriculares (por exemplo, no ensino básico/secundário, as disciplinas de línguas). Para tal, os alunos manifestam previamente um conjunto hierarquizado de opções para que, posteriormente, a equipa de elaboração de horários estabeleça horários não coincidentes para algumas dessas opções.

No mesmo sentido, outra situação que contribui na prática para a semelhança de ambos os problemas é o tratamento dado, nos sistemas rígidos, às aulas das disciplinas extra-curriculares e às disciplinas em atraso para alguns alunos. Nestes casos, procura-se minimizar, caso seja possível, as sobreposições entre as aulas obrigatórias e as restantes não obrigatórias.

Por seu turno, em alguns PEHCF existem circunstâncias que reduzem de alguma forma a liberdade de escolha dos alunos, aproximando-os da versão de currículos rígidos. Por exemplo, refira-se as instituições que publicam previamente os horários das aulas para cada uma das disciplinas opcionais e solicitam individualmente aos alunos a escolha de um conjunto de opções sujeitas a um critério de não sobreposição.

São várias as publicações que descrevem modelos e aplicações relativas à elaboração de horários escolares. Refiram-se a propósito três levantamentos bibliográficos. Em [58] Junginger descreve, retrospectivamente, a resolução prática deste problema na Alemanha, apresentando referências ao *software* e *hardware* utilizado. Por seu turno, num outro trabalho Bardadym [6] refere-se à evolução na resolução dos problemas de horários escolares procedendo à sua classificação por tipo, estrutura de representação e método de resolução. De forma muito completa e sistematizada, Schaerf [91] apresenta uma exaustiva caracterização dos diversos problemas associados à temática dos horários escolares, das suas variantes e principais técnicas de resolução.

Após estas considerações, caracterizar-se-ão seguidamente cada um dos grupos de problemas mencionados.

### **3.2.1 Problema de elaboração de horários para currículos rígidos**

O problema de elaboração de horários para currículos rígidos, habitualmente designado por *school timetabling problem* ou *class-teacher timetabling problem*, exige a elaboração de horários

semanais isentos de sobreposições horárias para turmas, professores e salas, para um conjunto de aulas, definido por currículos pré-establecidos. Simultaneamente, devem ser satisfeitos diversos condicionalismos com diferentes níveis de importância.

Numa perspectiva de resolução do PEHCR, procede-se em seguida à apresentação de uma selecção das diversas abordagens propostas, dispostas por analogia entre os modelos ou métodos de resolução.

### Grafos e redes

Even, Itai e Shamir [35] e de Werra [27] apresentam uma modelização básica para o PEHCR que visa obter somente uma solução admissível para o PEHCR e se traduz na seguinte formalização:

determinar  $[x_{pth}]$ ,

sujeito a:

$$x_{pth} = 1 \Rightarrow (IP_{ph} = 1) \wedge (IT_{th} = 1) \quad \text{para } p \in P; t \in T \quad (3.1)$$

$$\sum_{h=1}^{H'} x_{pth} = R_{pt} \quad \text{para } p \in P; t \in T \quad (3.2)$$

$$\sum_{p=1}^{P'} x_{pth} \leq 1 \quad \text{para } h \in H; t \in T \quad (3.3)$$

$$\sum_{t=1}^{T'} x_{pth} \leq 1 \quad \text{para } h \in H; p \in P \quad (3.4)$$

$$x_{pth} = 0, 1 \quad \text{para } p \in P; t \in T; h \in H \quad (3.5)$$

onde,  $P'$  é o número de professores,  $T'$  é o número de turmas,  $H'$  o número de períodos horários e  $R_{pt}$  é o número de aulas dado pelo professor  $p$  e assistidas pela turma  $t$ .

Segue-se o significado das variáveis neste modelo:

$$x_{pth} = \begin{cases} 1 & \text{se a aula envolvendo o professor } p \text{ e a turma } t \text{ decorrer no período horário } h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

As restrições (3.1), (3.3), (3.4) podem ser reescritas através de dois sistemas de desigualdades utilizando duas matrizes binárias  $[IT_{th}]$  e  $[IP_{ph}]$ , cujos elementos genéricos tomam valor 1 no caso da turma  $t$ , ou do professor  $p$ , respectivamente, estar disponível no período horário  $h$ .

Recorde-se que um caso particular do problema assim formalizado ( $R_{pt}$  binários) foi usado na classificação de complexidade efectuada no Capítulo 2. Para uma situação de total disponibilidade horária de professores e turmas, de Werra [27] associou este problema à coloração de arestas de um multigrafo bipartido caracterizado, assim, como polinomial. Através de uma ligação de cada período horário  $h$  a uma cor, a solução do problema consiste na determinação do esquema de coloração das arestas. Reflectindo a impossibilidade de afectação simultânea de recursos comuns, é requerido que, durante o processo de coloração, a arestas adjacentes não seja atribuída cor idêntica.

## Programação matemática

No domínio da programação matemática o primeiro estudo de que temos referência relativamente à definição de um método para a construção de horários escolares pertence a Gotlieb [48]. Neste trabalho é também abordada formalmente a questão relativa às condições necessárias para a existência de uma solução admissível para o problema.

Em 1965, Carlson e Nemhauser [14], descrevem uma metodologia simplificada aplicável a problemas de elaboração de horários genéricos, com ou sem currículo rígido, formalizados através de problemas de optimização quadrática. Nesta situação, um conjunto de actividades (aulas) disputam um conjunto de recursos (períodos horários), existindo um custo associado à afectação simultânea de cada par de aulas. O modelo proposto apresenta a seguinte formalização:

determinar  $[x_{ah}]$ ,

que minimize:

$$\sum_{h=1}^{H'} \sum_{a=1}^{A'} \sum_{a'=1}^{A'} g_{aa'} x_{ah} x_{a'h} \quad (3.6)$$

sujeito a:

$$\sum_{h=1}^{H'} x_{ah} = 1 \quad \text{para } a \in A \quad (3.7)$$

$$x_{ah} = 0, 1 \quad \text{para } a \in A; h \in H \quad (3.8)$$

onde  $A'$  é o número de aulas,  $H'$  é número de períodos horários e  $g_{aa'}$  é o custo associado à realização simultânea das aulas  $a$  e  $a'$ , sendo,

$$x_{ah} = \begin{cases} 1 & \text{se a aula } a \text{ decorrer no período horário } h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A restrição (3.7) obriga cada aula a ocupar um único período horário. Os autores sugerem ainda que o custo  $g_{aa'}$  possa ser atribuído em função do número de alunos envolvidos nas aulas  $a$  e  $a'$  correspondentes.

Uma formalização matemática mais completa e coerente com o contexto prático do PEHCR, é proposta por Junginger [58] e resulta da transformação, através da introdução de uma função objectivo no problema de admissibilidade de Even, Itai e Shamir [35] (condições (3.1) a (3.5)), num problema problema de optimização:

determinar  $[x_{pth}]$ ,

que minimize:

$$\sum_{p=1}^{P'} \sum_{t=1}^{T'} \sum_{h=1}^{H'} g_{pth} x_{pth} \quad (3.9)$$

sujeito a:

$$\sum_{h=1}^{H'} x_{pth} = R_{pt} \quad \text{para } p \in P; t \in T \quad (3.10)$$

$$\sum_{p=1}^{P'} x_{pth} \leq IT_{th} \quad \text{para } h \in H; t \in T \quad (3.11)$$

$$\sum_{t=1}^{T'} x_{pth} \leq IP_{ph} \quad \text{para } p \in P; h \in H \quad (3.12)$$

$$x_{pth} = 0, 1 \quad \text{para } p \in P; t \in T; h \in H \quad (3.13)$$

onde um valor elevado para a penalização  $g_{pth}$  exprime uma situação em que a afectação da turma  $t$  ao professor  $p$ , no período  $h$ , é considerada indesejável. Sendo, neste problema,

$$x_{pth} = \begin{cases} 1 & \text{se a aula envolvendo o professor } p \text{ e} \\ & \text{a turma } t \text{ ocorre no período horário } h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Por último, uma outra abordagem com elevado grau de aderência à realidade, é a proposta por Birbas, Daskalaki e Housos [7], na qual se apresenta uma extensa formalização em programação linear binária destinada à resolução óptima de um problema real típico existente numa escola secundária grega de reduzida dimensão. Refira-se contudo que neste estudo é excluída a dimensão relativa à gestão das salas. A formalização recorre à definição de variáveis binárias  $x_{dhtpc}$  que tomam o valor 1 quando ocorre uma aula no dia  $d$ , no período horário diário  $h$ , com a turma  $t$ , com professor  $p$  e na disciplina  $c$ , tomando o valor 0 no caso contrário. A função objectivo descrita é análoga à apresentada em (3.9), tal como se mostra em seguida:

$$\text{minimizar} \sum_{d=1}^{D'} \sum_{h=1}^{H'} \sum_{t=1}^{T'} \sum_{p=1}^{P'} \sum_{c=1}^{C'} g_{dhtpc} x_{dhtpc} \quad (3.14)$$

onde  $gdhtpc$  expressa o custo relativo à combinação simultânea dos factores  $d, h, t, p$  e  $c$ . Relativamente aos condicionalismos do problema é definido um sistema de restrições lineares nas referidas variáveis que implementam as condições de admissibilidade, assegurando que:

- os currículos das turmas são cumpridos, em termos de aulas, disciplinas e períodos horários ocupados;
- cada professor cumpre o plano de serviço docente previamente definido;
- cada professor lecciona no máximo uma aula em cada período horário;
- o número máximo de períodos horários lectivos por docente não é excedido;
- o número total de períodos horários ocupados por cada turma é fixo;
- cada professor possui pelo menos um período horário ocupado nos dias de disponibilidade.

São ainda incluídas restrições cuja finalidade é a satisfação dos aspectos associados à qualidade da solução produzida, designadamente:

- os períodos horários ocupados para cada disciplina distribuem-se regularmente ao longo da semana;
- o número de aulas atribuído diariamente a cada turma não difere em mais do que uma unidade da média diária;
- certas disciplinas não devem ser escalonadas no final do dia;
- os horários das turmas não devem conter furos;
- os professores podem apresentar períodos de indisponibilidade.

Dois aspectos qualitativos adicionais, referentes ao escalonamento preferencial de algumas aulas no início do dia e à minimização dos furos nos horários dos professores, são introduzidos de uma forma indirecta através de penalizações apropriadas na função objectivo. Finalmente, a solução óptima para uma instância real com cerca de 200 alunos é determinada utilizando o *software* de optimização CPLEX.

## Redes neurais

No contexto da aplicação de heurísticas baseadas em redes neurais artificiais para a resolução de problemas de PEHCR, refira-se primeiramente o trabalho original de Gislén, Peterson e Söderberg [44]. Neste estudo, através de uma extensão ao modelo inicial proposto por Hopfield e Tank [54] para a resolução de problemas de optimização combinatória, os neurónios de Hopfield são substituídos por neurónios multi-estado de Potts, de acordo com os desenvolvimentos no domínio da *mean field theory*.

No modelo inicial, proposto por estes autores, é constituída uma rede neuronal na qual se associa o estado final binário de cada neurónio às alternativas de afectação entre um conjunto de aulas (representadas por associações prévias de professores a turmas) e um conjunto de localizações no espaço e tempo (afectações de salas a períodos horários). Assim, o estado final do neurónio  $V_{pt,sh}$  é descrito por:

$$V_{pt,sh} = \begin{cases} 1 & \text{se a aula definida pelo par professor/turma } pt \text{ ocorre na localização } sh \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.15)$$

Com base nesta estrutura neuronal são implementadas duas categorias diferenciadas de restrições. As primeiras, de carácter obrigatório, salvaguardam o cumprimento dos aspectos relativos à admissibilidade da solução, enquanto que numa segunda categoria são reunidos os aspectos facultativos relativos à melhoria da qualidade final da solução.

Esta abordagem neuronal é particularmente detalhada ao nível do tratamento dos principais condicionalismos normalmente presentes em instâncias reais deste problema, permitindo a obtenção de uma solução satisfatória para uma instância real do problema de elaboração de horários escolares para currículos rígidos numa escola secundária de média dimensão com cerca de 1000 alunos agrupados por 34 turmas, na Suécia (Tensta).

Saliente-se a propósito que esta metodologia e a sua posterior extensão descrita pelos mesmos autores no artigo [45] constituiu uma motivação para utilização da abordagem neuronal nesta dissertação sendo apresentada em detalhe no capítulo seguinte.

Igualmente descrevendo uma aplicação de redes neurais artificiais de Hopfield e Tank ao

problema em questão, refiram-se os trabalhos desenvolvidos por Carrasco [15], [16] e Pato e Carrasco [79]. Nestes estudos, é proposta uma formalização em programação não linear binária para o PEHCR característico das instituições de ensino secundário portuguesas. Descreve-se em seguida o procedimento necessário para a sua implementação em termos de uma estrutura neuronal, baseada em neurónios contínuos de Hopfield e Tank. De um modo geral, a abordagem permite a incorporação de diferentes níveis de importância de restrições satisfazendo os principais requisitos necessários à construção de soluções válidas num contexto real. Note-se contudo, que a parametrização do modelo se revelou difícil, assim como pouco flexível na introdução de novos condicionalismos. Como validação da aplicabilidade da heurística neuronal o autor apresenta ainda resultados satisfatórios obtidos na resolução de um conjunto de instâncias pseudo-reais de média dimensão com 120 aulas, 13 professores, 9 turmas e 7 salas.

Refira-se ainda um estudo alternativo no domínio das redes neuronais artificiais apresentado por Kovacic [64] no qual se recorre a uma rede neuronal Markoviana para a resolução de uma instância do PEHCR com 202 aulas, 37 professores e 18 turmas.

### **Algoritmos genéticos**

No campo dos algoritmos genéticos, cuja introdução se fará no Capítulo 5, uma das aplicações iniciais e mais relevantes para um PEHCR é descrita por Colomni, Dorigo e Maniezzo [23]. Nesse trabalho, os autores tratam o problema de elaboração de horários numa perspectiva de optimização, utilizando uma matriz  $[C_{ph}]$  para representar uma solução para o problema de horários (cromossoma). Nesta matriz cada linha  $p$  é relativa ao horário de um professor, cada coluna  $h$  a um período horário e cada elemento da matriz contém uma designação que identifica a turma envolvida na aula lecionada pelo professor  $p$ , no período horário  $h$ . Assim, cada linha constitui um horário individual completo para um professor, sendo satisfeitas directamente as restrições de admissibilidade relativas aos professores. Porém, nos períodos horários são geradas situações de não admissibilidade que são tendencialmente eliminadas recorrendo à função de aptidão e ao conjunto de operadores genéticos concebidos.

Para o efeito é utilizada uma função objectivo para avaliar cada solução, penalizando distintamente as violações ocorridas nos três níveis de importância que se seguem, apresentados por ordem decrescente de importância.

Nível 1 - Condições de admissibilidade. Neste nível são penalizadas severamente as violações graves existentes na solução, que a tornam não aceitável para publicação sob a forma de horários, de que é exemplo a situação em que uma turma tem duas aulas em simultâneo, com dois professores distintos.

Nível 2 - Condições de gestão. Neste contexto é atribuído o mesmo peso a dois tipos de violações:

- aos requisitos didácticos, de que é exemplo o limite máximo de aulas diárias por professor ou a colocação sistemática do mesmo professor no último período horário de cada dia;
- aos requisitos organizacionais, tal como a imposição de um limite mínimo diário de horas lectivas para cada professor.

Nível 3 - Preferências individuais dos professores. Neste nível é determinado o custo associado à violação das preferências expressas por cada professor em termos de disponibilidade horária.

Para permitir a evolução de uma população de 15 soluções geradas aleatoriamente é definida uma função de aptidão normalizada que avalia cada solução com base no seu valor de penalização e descrevem-se ainda operadores genéticos apropriados. O operador de cruzamento, após a selecção de duas soluções progenitoras  $\bar{C}_1$  e  $\bar{C}_2$ , determina para cada linha (professor) de  $\bar{C}_1$  o respectivo valor parcial de aptidão, calculado com base no valor parcial da função objectivo para o respectivo professor. Em seguida, estas são ordenadas por ordem decrescente de aptidão, extraindo-se as melhores  $k$  linhas para formar o primeiro descendente, sendo as restantes  $p - k$  linhas copiadas de  $\bar{C}_2$ . Por sua vez, o segundo descendente é constituído directamente pelas linhas não utilizadas anteriormente de  $\bar{C}_1$  e  $\bar{C}_2$ .

Quanto ao operador de mutação foram incluídas duas variantes: a primeira consiste na escolha aleatória de um conjunto de genes contíguos de uma linha e na troca dos seus alelos por outros distintos também contíguos, enquanto que a segunda efectua trocas aleatórias relativas à actividade diária total de um professor. Adicionalmente, é concebido um operador de pesquisa local e de filtragem com a finalidade de eliminar as violações de admissibilidade provocadas pelo

cruzamento e pela mutação. Por último, refira-se que este algoritmo foi aplicado com sucesso na resolução de uma instância real de uma escola secundária italiana com 20 professores e 10 turmas (Milão).

Uma proposta distinta apoiada, igualmente, em algoritmos genéticos é feita por Erben e Keppler [33]. Recorrendo exclusivamente a uma população de 25 soluções admissíveis, os autores definem uma função de aptidão determinada com base na penalização global obtida pela soma ponderada das violações registadas sobre um diversificado leque de condicionalismos de melhoramento. Para o efeito, a solução é suportada numa matriz binária multi-dimensional (cromossoma) na qual o elemento genérico  $c_{tapsh}$  toma o valor 1 quando ocorre uma combinação da turma  $t$ , na aula  $a$ , com o professor  $p$ , na sala  $s$  e durante o período horário  $h$ , assumindo o valor 0 nas situações contrárias.

No que respeita aos operadores genéticos, são descritos procedimentos de mutação e cruzamento que produzem sempre soluções admissíveis. Como tal, o operador de mutação segue o seguinte procedimento. Após a escolha aleatória de um subconjunto  $\hat{H}$  de períodos horários (*time window*) identificam-se as aulas contidas em  $\hat{H}$ . A mutação consiste na atribuição de novos períodos horários ou salas admissíveis a esse conjunto de aulas. Quanto ao operador de cruzamento, este incorpora um mecanismo complexo de ciclos, constituídos em função das turmas, períodos horários e par de soluções progenitoras, cuja finalidade é permitir a combinação admissível das afectações contidas num par de soluções progenitoras.

A produção da população inicial, avaliação das soluções e implementação dos operadores genéticos foi efectuada recorrendo à linguagem de alto nível PROLOG. Finalmente, os resultados obtidos a partir da aplicação a uma instância real (para a qual os autores não especificam a dimensão) indicaram um comportamento satisfatório deste algoritmo genético.

Refira-se por último, dois outros trabalhos nesta área. O primeiro, proposto por Agostinho e Caldeira [13], apresenta um método com semelhanças ao anterior aplicado com sucesso a uma pequena instância hipotética com 4 professores, 4 turmas e 50 períodos horários. O segundo, de Abramson e Abela [2] descreve uma paralelização de um algoritmo genético aplicado a 9 instâncias hipotéticas do PEHCR de dimensão máxima de 300 aulas, 15 professores e 15 turmas.

## Pesquisa tabu

No domínio da aplicação desta heurística, proposta por Glover [46] e Hansen [49], ao problema em estudo destacam-se os trabalhos de Costa [25] e Schaerf [90].

O primeiro descreve o PEHCR detalhadamente, incluindo o mais extenso conjunto de restrições apresentado nos artigos já referenciados, considerando dois grupos distintos (restrições essenciais e restrições relaxadas). A função objectivo a minimizar penaliza a violação a cada uma das diferentes restrições ponderada por um coeficiente que expressa a sua importância relativa. Como movimento básico de pesquisa de soluções o autor admite apenas a alteração de aulas isoladas e em conflito, de um período horário para outro distinto. Para evitar a repetida avaliação dos mesmos movimentos, são utilizadas duas listas tabu independentes. A primeira, memoriza as aulas movimentadas impedindo-as de voltar a ser modificadas durante um número fixo de iterações. A segunda lista tabu, regista os pares (aula, período horário) evitando que aulas movimentadas recentemente ocupem novamente os mesmos períodos horários. Para o efeito, a dimensão da segunda lista tabu é sempre superior à primeira. Adicionalmente, como estratégia de diversificação do esforço de pesquisa é introduzido um mecanismo que reduz significativamente os coeficientes de penalização associados às restrições essenciais. Este é activado assim que decorra um número pré-definido de iterações do algoritmo sem redução no valor da função objectivo. O algoritmo descrito foi programado em Pascal e utilizado para determinar, com sucesso, soluções para duas instâncias reais de média e grande dimensão retiradas de duas escolas secundárias suíças. A primeira com 355 aulas, 24 professores e 12 turmas e a segunda com 780 aulas, 65 professores e 32 turmas.

Por seu turno, Schaerf descreve um algoritmo de pesquisa tabu recorrendo a uma representação da solução do problema já referida em [23]. Como tal, cada elemento da matriz  $[x_{ph}]$  identifica a turma a lecionar pelo professor  $p$  no período horário  $h$ . São definidos dois tipos de movimentos para pesquisa, o primeiro consiste em trocar simplesmente as aulas de um professor (troca de elementos numa mesma linha). Dado que este movimento pode originar sobreposições de aulas para as turmas, um segundo movimento é definido consistindo na eliminação das sobreposições através da alteração das aulas em conflito. A função objectivo, a exemplo das referências anteriores, é constituída pela soma ponderada de diversos aspectos obrigatórios e de melhoramento calculados para professores e turmas. Ao contrário do algoritmo anterior, é

utilizada uma lista tabu de dimensão variável que conjuntamente com cada movimento realizado introduz um número de iterações aleatório durante as quais o movimento será interdito. O autor apresenta igualmente os resultados da aplicação do algoritmo a um conjunto de três escolas secundárias italianas com as seguintes dimensões: a menor com 96 aulas, 13 professores e 3 turmas; a intermédia com cerca 620 aulas, 44 professores e 20 turmas e a maior com cerca de 1100 aulas, 44 professores e 20 turmas.

### **Simulated annealing**

Proposto no âmbito da optimização, por Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi [61], o método designado por *simulated annealing* corresponde a uma técnica de pesquisa local probabilística na qual, em termos simplificados, se aceitam com probabilidade decrescente movimentos que degradam o valor da função objectivo do problema. Uma referência elucidativa da aplicação desta técnica ao PEHCR é apresentada por Abramson [1]. De acordo com este autor, um problema de horários desta classe envolve a afectação de todas as aulas (com respectivos pré-requisitos, professor, turma, sala, frequência) a um conjunto de períodos horários, de modo a que cada aula não ocupe mais do que um período horário. Nestes termos, partindo de uma solução particular, a escolha de uma solução vizinha faz-se seleccionando aleatoriamente um período horário ocupado e alterando a respectiva aula para outro período horário de destino diferente, também escolhido de forma aleatória. Para a necessária determinação do custo associado a cada um destes movimentos, mais uma vez se recorre a uma função objectivo que atendendo a um conjunto diverso de aspectos obrigatórios e facultativos, reflecte o número ponderado de violações ocorridas ao nível das turmas, professores e salas. O objectivo é minimizar esta função, obtendo assim um horário global de custo nulo. O processo de *annealing* inicia-se a partir de uma solução gerada aleatoriamente, efectuando-se iterações sucessivas para valores progressivamente inferiores de temperatura. O autor apresenta resultados computacionais relativos a um conjunto de instâncias obtidas aleatoriamente e discute ainda a implementação do *simulated annealing* através de algoritmos sequenciais e paralelos.

Neste âmbito refira-se ainda o artigo de Melício, Caldeira e Rosa [69] que descreve a aplicação de um mecanismo de *simulated annealing* análogo ao anterior e que foi testado satisfatoriamente em instâncias reais do PEHCR de escola secundária portuguesa com 32 turmas, 73 professores

e 46 salas.

## Outros métodos

Nesta categoria inclui-se um vasto reportório de métodos desenvolvidos para o PEHCR. Assim, referem-se seguidamente, sem critério de ordem, alguns desses.

No contexto das abordagens híbridas, refira-se o método proposto por Valdés, Martin e Tamarit [102] que contempla três fases distintas: obtenção da solução inicial, admissibilização da solução e melhoramento da mesma. Neste método sequencial, suportado na resolução de diversos subproblemas, o autor recorre a várias heurísticas para problemas de grafos procedendo ainda à sua integração num mecanismo de pesquisa tabu. O resultado final é uma aplicação informática destinada à resolução de problemas reais de escolas secundárias em Espanha.

Refira-se também, uma metodologia desenvolvida no domínio da Inteligência Artificial - a programação lógica de restrições ou na terminologia anglo-saxónica *constraint logic programming* - e que no artigo de Azevedo e Barahona [5] é experimentada com sucesso a uma instância real do problema de horários num departamento de uma universidade portuguesa (com 10 salas, 25 professores e 60 períodos semanais).

Por último, Wright [109] apresenta também um método para este problema que foi aplicado com resultados muitos favoráveis na elaboração de horários para uma escola secundária inglesa com mais de 1400 alunos e 80 professores. O modelo é baseado num procedimento de 6 fases que combina mecanismos de pesquisa local automática com a interacção do utilizador.

### 3.2.2 Problema de elaboração de horários para currículos flexíveis

O problema de elaboração de horários para currículos flexíveis, denominado tradicionalmente pelos termos anglo-saxónicos *course timetabling* ou *university course timetabling*, é particularmente comum nas instituições de ensino superior. Ao contrário do caso anterior no qual o currículo de cada aluno é rígido, no PEHCF as escolhas curriculares são maioritariamente opcionais e determinadas por parte dos estudantes. Como tal, este problema admite como solução um conjunto de horários para as aulas das disciplinas que, em resultado do processo de escolha dos alunos, são assistidas por alunos comuns que formam turmas não disjuntas. O objectivo aqui é a minimização do número de conflitos inerentes aos horários das disciplinas que têm

alunos comuns.

Descrevem-se em seguida, organizadas por modelo ou por abordagem de resolução, uma selecção de referências bibliográficas que incidem sobre este tema.

### Grafos e redes

No contexto da Teoria dos Grafos existe uma associação directa entre o PEHCF e o problema de coloração dos nodos de um grafo. Explorando esta ligação, Kiaer e Yellen [60] definem um nodo por cada aula das disciplinas a escalonar e criam arcos entre os nodos (aulas) que geram conflitos nos respectivos grupos de alunos inscritos. O seu problema consiste, pois, em determinar o esquema de coloração dos nodos do grafo com um mínimo de cores, satisfazendo a restrição que obriga a que nodos adjacentes possuam cores distintas. Assim, um horário admissível contendo  $H'$  períodos horários implica que o número cromático do grafo seja inferior ou igual a  $H'$ . Refira-se a propósito que o problema de decisão relativo à possibilidade de coloração de um grafo com  $p$  cores é um problema classificado como NP-completo (Garey e Jonhson [41]). Neste artigo de Kiaer e Yellen é reconhecida a dificuldade de determinar soluções isentas de conflitos para todos dos períodos horários normalmente disponíveis. Nestas condições, a resolução exacta do problema de coloração dos nodos de um grafo não é apropriada para a construção de uma solução do PEHCF, pelo que os autores sugerem uma heurística em alternativa. Para o efeito, é construído um grafo modificado que atribui a cada arco um peso calculado com base no grau de conflituosidade associado à realização simultânea das aulas expressas nos nodos adjacentes. É proposta, então, uma heurística de coloração que atribui cor aos nodos em função do respectivo grau de dificuldade de coloração. Este valor é determinado tomando em consideração os custos relativos ao nodo, a totalidade dos pesos dos nodos adjacentes e, ainda, as cores já atribuídas em nodos adjacentes. No final, para o problema de coloração, é produzida uma solução com um custo global associado. Por último, são testadas e comparadas diferentes configurações para a função de selecção do nodo a colorir e o método é aplicado com sucesso a uma instância real de reduzida dimensão (com 64 aulas).

Num outro artigo, Mulvey [74] sugere que se procure adaptar algoritmos para problemas de optimização em redes a problemas de horários propondo uma metodologia genérica para esse efeito. Como resultado, e estendendo o modelo matemático proposto inicialmente por

Knauer [62], é apresentada uma modelização aplicável ao PEHCF, descrevendo um problema de determinação de um fluxo numa rede na qual as combinações professor/turma e sala/periódio horário são representadas por nodos de origem e destino, respectivamente.

A finalidade desse problema é,

determinar  $[x_{ij}]$ ,

que maximize:

$$\sum_{i=1}^{PT'} \sum_{j=1}^{SH'} g_{ij} x_{ij} \quad (3.16)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{PT'} x_{ij} = 1 \quad \text{para } i \in SH \quad (3.17)$$

$$\sum_{i=1}^{SH'} k_i x_{ij} \leq f_j \quad \text{para } j \in PT \quad (3.18)$$

$$\sum_{i \in A_p} \sum_{j \in S_h} x_{ij} \leq 1 \quad \text{para } p \in P; h \in H \quad (3.19)$$

$$\sum_{i \in A_r} \sum_{j \in S_h} x_{ij} \leq 1 \quad \text{para } r \in T; h \in H \quad (3.20)$$

$$x_{ij} = 0, 1 \quad \text{para } i \in PT; j \in SH \quad (3.21)$$

onde  $P'$  é o número de professores,  $T'$  é o número de turmas,  $H'$  o número de períodos horários,  $PT$  é o conjunto de nodos professor/turma e  $PT'$  a respectiva cardinalidade,  $SH$  é o conjunto de nodos professor/turma e  $SH'$  o seu respectivo número,  $A_r$  é o subconjunto de aulas que envolve a turma  $t$  e  $A_p$  o subconjunto de aulas que envolve a turma  $p$ . Definem-se ainda,  $S_h$  como o conjunto de nodos sala/periódio horário que ocorrem no período horário  $h$ ,  $g_{ij}$  como o

número de lugares ocupados pela afectação da aula  $i$  ao nodo  $j$ ,  $k_i$  para o número de alunos da turma  $t$  e  $f_j$  como a capacidade de lugares na sala  $j$ .

O significado das variáveis é o seguinte:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o nodo } i \text{ (professor/turma) é afecto ao nodo } j \text{ (sala/periódio horário)} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

De acordo com esta formalização, cada arco entre os nodos professor/turma e sala/periódio horário estabelece um fluxo entre os respectivos recursos, definindo-se uma solução completa quando cada nodo de origem efectuar um transferência de fluxo para um nodo de destino. Neste trabalho apresentam-se ainda reformulações ao modelo descrito e sugere-se um procedimento para integração da metodologia num ambiente de resolução semi-automatizado, requerendo a interacção com o decisior para adaptar as soluções produzidas às preferências e condicionalismos não implementados no modelo.

### Programação matemática

Para o mesmo problema, de Werra [27], apresenta uma formalização que configura o seguinte problema de optimização:

determinar  $[x_{ih}]$ ,

que maximize:

$$\sum_{i=1}^Q \sum_{h=1}^{H'} g_{ih} x_{ih} \quad (3.22)$$

sujeito a:

$$\sum_{h=1}^{H'} x_{ih} = k_i \quad \text{para } i \in Q \quad (3.23)$$

$$\sum_{i=1}^Q x_{ih} \leq l_h \quad \text{para } h \in H \quad (3.24)$$

$$\sum_{i \in S_l} x_{ih} \leq 1 \quad \text{para } l \in R; h \in H \quad (3.25)$$

$$x_{ih} = 0, 1 \quad \text{para } i \in Q; h \in H \quad (3.26)$$

Para o efeito o autor considera  $Q$  disciplinas, tais que em cada disciplina estão contidas  $k_i$  aulas. Assume-se a formação de  $R$  currículos  $S_1, \dots, S_R$  representando as disciplinas com alunos comuns e que  $l_h$  representa o número máximo de aulas que pode ser realizado no período horário  $h$  (normalmente definido pelo número máximo de salas disponíveis). Para o número total de períodos horários, igual a  $H$ , e tomando uma matriz  $[g_{ih}]$  que expressa o grau de conveniência da afectação de uma aula da disciplina  $q_i$  ao período horário  $h$ , a solução do problema é produzida nas variáveis binárias  $x_{ih}$  assim interpretadas:

$$x_{ih} = \begin{cases} 1 & \text{se uma aula da disciplina } q_i \text{ é afecta ao período horário } h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Utilizando esta formalização Tripathy [101] procedeu à resolução efectiva de um PEHCF de dimensão elevada, com cerca de 900 disciplinas. Para o efeito, a autora propõe técnicas baseadas em relaxação lagrangeana descrevendo várias alternativas de relaxamento das restrições. Os métodos são adaptados aos problemas relaxados resultantes e recorrem para a sua resolução, designadamente, a heurísticas especializadas, a optimização pelo subgradiente, ao algoritmo *out-of-kilter* e a um *branch and bound*.

### Redes neurais

Uma diferente metodologia de resolução para o PEHCF, é a apresentada por Yu [110] utilizando uma rede neuronal artificial. Neste estudo, numa primeira etapa, o problema de elaboração de horários é associado ao problema de partição de um grafo. Para tal, por cada ocorrência de uma disciplina (aula), são criados nodos que correspondem às alternativas de afectação da aula nos períodos horários. Em seguida, entre os nodos representantes de aulas que não podem ser realizadas no mesmo período horário, por exemplo, pelo facto de partilharem recursos comuns, são criados arcos que expressam esses conflitos. Neste contexto, a resolução do problema da

partição do respectivo grafo conduz a uma distribuição equilibrada das aulas pelos períodos horários e, simultaneamente, à minimização dos conflitos subjacentes.

Tal como o autor indica, a estrutura descrita pode ser codificada por intermédio de uma rede de neurónios binários de Hopfield. Assim, cada aula é representada por um neurónio que através do seu estado binário indica a qual dos períodos horários alternativos é afecta a aula. De forma similar ao modelo de coloração, são estabelecidas ligações sinápticas entre os neurónios que identificam aulas em conflito, sendo o seu peso atribuído em função do grau de conflituosidade associado ao respectivo par de aulas. É, ainda, referida pelo autor a necessidade de proceder a uma decomposição binária do número de períodos horários sempre que este seja superior a dois. Quanto à simulação da rede neuronal, o processo requer a definição de uma função de energia que expressa o nível de cumprimento dos condicionalismos relativos ao problema e a sua posterior minimização através de um esquema de actualização aleatório e assíncrono do estado dos neurónios. No final deste processo iterativo, a rede neuronal evolui para uma configuração estável na qual o estado de cada neurónio traduz a solução do problema. Adicionalmente, é introduzido um mecanismo de *annealing* que visa reduzir a convergência prematura do algoritmo para soluções óptimas locais de qualidade reduzida. Por fim, apresentam-se considerações acerca da decomposição binária requerida para a aplicação desta metodologia a instâncias do problema contendo diferentes números de períodos horários (superior a dois). Neste artigo não é referida nenhuma aplicação real.

### Algoritmos genéticos

Alternativamente, Ueda, Ouchi, Takahashi e Miyahara [56] descrevem um método para a resolução de um PEHCF, através de um algoritmo genético de duas fases. Apoiando-se na evolução de duas populações distintas contendo, respectivamente, soluções para o problema de horários das turmas e para o problema de afectação das salas, o algoritmo permite incluir dois conjuntos diversos de restrições, destinadas a salvaguardar os aspectos relativos à admissibilidade e ao melhoramento das soluções. Para o problema de elaboração dos horários das turmas é definida uma representação da solução em lista que inclui os horários completos para cada turma, ou seja, a sequência de períodos horários com a indicação das respectivas aulas a realizar. O algoritmo procede à selecção de cada par de soluções progenitoras através de um procedimento de roleta

clássico. Em seguida, um operador de cruzamento uni-ponto combina as soluções actuando apenas sobre horários completos de turmas e originando, consequentemente, soluções descendentes que podem conter conflitos nas aulas assistidas por múltiplas turmas. Por seu turno, o operador de mutação para esta população consiste na troca aleatória dos períodos horários afectos às aulas. Dado que a actuação destes operadores dá origem a conflitos na solução, é aplicado, posteriormente, um operador de reparação que visa a eliminação das sobreposições de turmas através de um procedimento de recolocação das aulas em conflito.

Em relação ao problema de afectação das salas, os autores voltam a utilizar uma representação da solução baseada numa lista de afectações de aulas a salas. Neste caso, os operadores genéticos utilizados são semelhantes aos anteriores, à excepção do operador de mutação que consiste num procedimento de alteração do tipo de sala a atribuir à aula, sempre que nessa ocorra uma mutação. Também é usado um procedimento elitista que impede as melhores soluções de cada população de serem modificadas pelos operadores genéticos.

Na fase de avaliação do algoritmo genético, um número idêntico de indivíduos de ambas as populações é seleccionado de acordo com o valor de aptidão corrente. No momento seguinte, as respectivas soluções parciais, provenientes do problema de horários das turmas e do problema de afectação das salas, são combinadas, produzindo soluções para o problema global. Após a avaliação, em termos dos conflitos de salas gerados e do nível de violação das restantes restrições do problema, a aptidão de cada solução é determinada. Note-se, por fim, que este algoritmo foi testado com resultados favoráveis para um problema real com 97 professores e 12 turmas na Hiroshima City University.

Ainda no âmbito do desenvolvimento de algoritmos genéticos para o PEHCF refira-se o trabalho de Rich [84] relativo a um algoritmo genético que atribui a aptidão a cada cromossoma de acordo com uma função de penalização dinâmica. Usando, igualmente, operadores genéticos dinâmicos e heurísticas *greedy* auxiliares o autor obtém resultados favoráveis numa instância com 101 turmas, 56 professores, 9 salas e 55 períodos horários.

### **Pesquisa tabu**

Outro processo heurístico de resolução para este problema é o proposto por Hertz [50], baseado em pesquisa tabu. Para o efeito, o autor recorre a uma formalização, sugerida inicialmente por

Aubin e Ferland [4], na qual o PEHCF é decomposto em dois subproblemas distintos.

O primeiro, designado por subproblema de geração de horários, consiste na afectação de períodos horários a cada aula das disciplinas constituídas na instituição escolar. Como tal, a sua resolução visa a minimização dos conflitos presentes nos horários produzidos, pressupondo um agrupamento pré-definido dos alunos pelas aulas. Neste subproblema a definição de solução admissível foi alargada sendo permitida a pesquisa de soluções contendo dois tipos de conflitos para professores e alunos: sobreposição horária de aulas e colocação horária de aulas não observando o tempo necessário para a deslocação entre os respectivos edifícios. Para a eliminação destes conflitos recorre-se à definição de uma função objectivo que penaliza o grau de incumprimento destes aspectos de forma diferenciada. Segundo o autor, esta perspectiva mais relaxada do espaço de soluções tem o intuito de aumentar o reduzido número de soluções admissíveis normalmente existente em instâncias reais do problema, permitindo assim uma exploração mais eficiente do espaço de soluções por parte do mecanismo de pesquisa tabu. Neste caso, a geração de uma vizinhança para cada solução faz-se alterando o período horário inicial de cada uma das aulas.

Um segundo subproblema, denominado por problema de agrupamento dos alunos, parte da anterior solução do problema de geração de horários e pretende definir novos agrupamentos dos alunos pelas diferentes aulas, tendo como critério o número de conflitos horários gerados. Aqui, a definição de vizinhança de uma solução, faz-se procedendo a dois tipos de trocas: a primeira efectuada entre os períodos horários de início de cada aula e, a segunda, sobre os alunos comuns a duas aulas. Em ambos os subproblemas foram utilizadas listas tabu de dimensão fixa que registam os elementos modificados em cada solução. Enquanto for possível a melhoria da solução de um dos subproblemas, a solução do problema global é actualizada sequencialmente, fixando a cada iteração a melhor solução encontrada para um subproblema e resolvendo o outro. Por fim, o autor refere a aplicação com sucesso desta abordagem a uma instância real do problema com 288 disciplinas, 143 professores e 1729 alunos, na Faculdade de Economia da Universidade de Génova.

### **Outros métodos**

Refiram-se ainda outras metodologias que permitiram resolver satisfatoriamente o PEHCF e que não se enquadram directamente nas categorias anteriores.

No campo da programação lógica de restrições, Fahrion e Dollansky [36] descrevem a implementação de um sistema suportado pela linguagem de programação PROLOG que, recorrendo à definição de uma medida de prioridade de escalonamento da aula, apresenta bons resultados. Ainda neste domínio, Deris, Omatsu, Ohta e Samat [30] descrevem uma abordagem que, partindo da formalização do problema de elaboração de horários como um problema de satisfação de restrições, procede à sua resolução através de uma técnica específica. Os resultados obtidos pela aplicação do processo proposto a uma instância real do problema na Faculdade de Ciências da Computação e Sistemas de Informação da Universiti Tecknologi Malaysia com 536 aulas, 154 professores e 21 salas, evidenciam vantagens de várias ordens quando a metodologia é comparada com o procedimento de geração manual.

Por sua vez, Carter [20] apresenta uma sistema híbrido para a elaboração de horários que tem sido aplicado com sucesso há mais de uma década na Universidade de Waterloo que atingiu em 2000 cerca de 20000 alunos e uma oferta curricular de 1400 disciplinas. O sistema pressupõe a decomposição do problema global em subproblemas tratados sequencialmente utilizando algoritmos de grafos, heurísticas de natureza *greedy* e relaxação lagrangeana. O autor descreve, ainda, a inclusão no sistema de procedimentos de interacção com o decisor.

### **3.3 Problema de elaboração de calendários de exames escolares**

Por definição o problema de elaboração de calendários de exames escolares (PECEE) consiste na construção de um calendário de realização de exames para cada uma das disciplinas do plano curricular da instituição, a executar ao longo de um conjunto finito de períodos horários. Como se comprehende, na sua versão mais simplificada, este problema tem um elevado grau de semelhança com o problema anterior. De facto, numa análise superficial ambos os problemas visam a definição de um conjunto de afectações de eventos (num caso aulas e noutra exames) a períodos horários. Contudo, numa observação mais detalhada é possível sublinhar diferenças entre ambos.

- Na elaboração de horários para aulas é comum a inclusão de condicionalismos que visam concentrar os períodos de actividade lectiva para alunos e professores. No problema de calendarização de exames a preocupação essencial é a distribuição uniforme dos exames ao longo do período de avaliação.
- Ao contrário das aulas, os exames ocorrem apenas uma vez por disciplina.
- No escalonamento de exames é aconselhável e corrente a afectação de várias salas e vigentes a um único exame. As aulas consideram-se leccionadas por um só docente.
- No problema de calendarização de exames não é admissível a colocação de mais do que um evento (exame) no mesmo dia para um aluno, ao contrário do problema de elaboração de horários para aulas onde tal situação é desejável.
- O intervalo temporal para afectação dos exames é normalmente variável de acordo com a instituição, ao contrário do intervalo temporal utilizado para a afectação de aulas que é fixo, usualmente com uma duração semanal.

Na prática, também este problema surge descrito na literatura sob diversas versões e incluindo diferentes especificações de condicionalismos, adaptados em função da instituição. A este propósito refiram-se alguns trabalhos que abordam exclusivamente esta temática. Num artigo de Carter e Laporte [21] são descritas as características mais comuns dos PECEEs e os respectivos métodos de resolução, com indicação do seu estado de implementação. Seguindo uma outra perspectiva de análise Burke, Elliman, Ford e Weare [9] apresentam os resultados de um inquérito sobre a resolução do PECEE em quase uma centena de universidades do Reino Unido. Este estudo aborda o assunto sob três eixos distintos: caracterização do problema real, tipo de método de resolução utilizado e requisitos ideais de uma solução para o problema.

À semelhança dos problemas anteriores, segue-se a apresentação de uma selecção de referências bibliográficas para este problema, organizadas por modelos ou por métodos de resolução.

## Grafos e redes

Tal como nos problemas anteriores, na sua versão mais simplificada o problema de calendarização de exames admite uma codificação directa através do problema de coloração de um grafo,

tal como preconizado por Metha [68]. Neste contexto, é constituído um grafo no qual cada exame é representado por um nodo. Para expressar o conflito decorrente da realização simultânea entre dois ou mais exames, são criados arcos entre os respectivos nodos. Podem ser assim incluídas as restrições relativas à não atribuição de dois exames simultâneos para cada aluno ou para qualquer outro recurso, tal como salas ou vigilantes. Após a resolução do problema de coloração do grafo, a cada cor distinta corresponde um período horário, sendo indicado pelo número cromático do grafo o número mínimo de períodos horários necessários para efectuar uma completa calendarização dos exames, isenta de conflitos. Porém, na prática, esta opção de resolução pelo problema de coloração de um grafo revela-se insuficiente nos casos em que o número de períodos horários disponíveis é inferior ao número cromático do grafo ou, ainda, quando existe a necessidade de englobar condicionalismos adicionais que são determinantes na qualidade das soluções reais para este problema. A este nível refira-se, por exemplo, a necessidade de evitar que um aluno realize dois exames em períodos horários contíguos ou no mesmo dia. Nestes casos, através de um grafo modificado que inclui informação associada aos arcos acerca do grau de conflituosidade entre os exames, a autora propõe uma compactação dos exames no intervalo temporal disponível. Posteriormente, o calendário de exames produzido é sujeito a um procedimento de trocas que procura minimizar a ocorrência de situações indesejáveis relativas à proximidade dos exames a realizar por cada aluno. Neste estudo refere-se, ainda, a aplicação deste método na calendarização de exames na Cedar Crest College nos Estados Unidos da América, numa instância com 84 exames em 12 períodos horários.

### Programação matemática

Atendendo à referida estrutura do PECEE e à sua analogia com o PEHCF, é possível, como refere Scharf [91], formular o seguinte modelo:

determinar  $[x_{ih}]$ ,

que minimize:

$$\sum_{h=1}^{H'-1} \sum_{l=1}^R \sum_{i,j \in S_l} x_{ih} x_{j,h+1} \quad (3.27)$$

sujeito a:

$$\sum_{h=1}^{H'} x_{ih} = 1 \quad \text{para } i \in Q \quad (3.28)$$

$$\sum_{i=1}^{Q'} x_{ih} \leq l_h \quad \text{para } h \in H \quad (3.29)$$

$$\sum_{i \in S_l} x_{ih} \leq 1 \quad \text{para } l \in R; h \in H \quad (3.30)$$

$$x_{ih} = 0, 1 \quad \text{para } i \in Q; h \in H \quad (3.31)$$

onde  $Q$  é o conjunto de exames a realizar (ou seja, um por cada disciplina) sendo  $Q'$  o seu número. Neste problema, admite-se a formação de  $R$  grupos de exames com alunos comuns,  $S_1, \dots, S_R$ , sendo o conjunto de períodos horários dado por  $H$  e o seu número do  $H'$ . Por último,  $l_h$  é o número máximo de exames que se pode realizar no período  $h$ . Sendo as variáveis  $x_{ih}$ :

$$x_{ih} = \begin{cases} 1 & \text{se o exame } i \text{ é escalonado no período horário } h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note-se que a função objectivo se destina à minimização apenas de ocorrências consecutivas de exames dentro de cada grupo de exames, sendo possível ampliar esta função para incluir um maior número de condicionalismos, tal como sugerem Laporte e Desroches [66] ou Mehta [68].

Outras formalizações em programação matemática mais detalhadas foram, igualmente, propostas por outros autores. Refira-se, como exemplo, o artigo de Jonhson [57] que configura um modelo de programação linear inteira tomando em consideração a acomodação dos alunos nas salas e a amplitude do intervalo temporal entre os exames realizados por cada aluno. Dada a dimensão da instância resultante de um caso real (cerca de 200 exames em 20 períodos), o autor opta por uma resolução heurística.

## **Algoritmos genéticos**

No contexto da aplicação de algoritmos genéticos ao PECEE, refira-se o trabalho Ergül [34] que resultou no desenvolvimento e implementação de um sistema automático de calendarização de exames (GUNES) na Middle East Technical University, na Turquia. Este sistema é suportado por um algoritmo genético que recorre a uma representação directa da solução na qual cada gene refere o período horário de realização de cada exame e à implementação de operadores genéticos de selecção com elitismo, cruzamento, inversão e mutação, não necessitando pois de informação específica sobre o domínio do problema. É também definida uma função de aptidão que avalia cada cromossoma com base em três aspectos: penalizações pré-definidas para cada tipo de conflito, número de alunos envolvidos no conflito e ainda numa matriz de proximidade entre os exames. O autor discute também algumas opções que visam melhorar o desempenho do algoritmo e apresenta uma comparação dos resultados obtidos com a solução gerada por processos manuais, para duas instâncias com 682 e 1449 exames, e 13 e 39 períodos, respectivamente.

Neste domínio, refira-se ainda o artigo de Paquete e Fonseca [78] no qual, sobre uma codificação directa da solução, é utilizada uma abordagem multi-objectivo que considera objectivos distintos de acordo com o tipo de cada restrição violada. Neste artigo é ainda desenvolvido um estudo experimental de diversas variantes do algoritmo sobre uma instância real com 249 exames e 30 períodos horários.

Burke, Elliman e Weare [10] descrevem a aplicação de um algoritmo evolucionário ao PECEE que, através da utilização de dois operadores de mutação distintos e uma heurística de pesquisa local, obtém resultados satisfatórios numa instância real com 805 exames e 32 períodos horários.

## **Pesquisa tabu**

Por sua vez, Gaspero e Schaerf [42] aplicam várias versões de procedimentos de pesquisa tabu a um conjunto de problemas reais existentes na literatura com até 2419 exames em 30 períodos e efectuam uma comparação com os resultados obtidos por outros autores. A partir da definição de um espaço de soluções que apenas obriga à satisfação das restrições relativas a eventuais afectações prévias de exames a períodos horários ou à existência de períodos horários não disponíveis, a pesquisa tabu é orientada por uma função de penalização. Para este efeito,

é definida uma combinação linear que penaliza a violação de cada um dos aspectos considerados (obrigatórios ou de melhoramento), através de um esquema de ponderadores dinâmico. Considerando como movimento base a alteração do período horário afecto a cada exame, são implementadas estratégias distintas de selecção do movimento a efectuar, suportadas por listas de violações produzidas pelo conjunto de movimentos candidatos. Adicionalmente, com o objectivo de avaliar o contributo de diferentes opções dos procedimentos de pesquisa tabu, o algoritmo foi testado e comparado para essas configurações.

### ***Simulated annealing***

Neste domínio, mencione-se o trabalho de Thompson e Downslan [99] que propõem um método em duas fases baseado num mecanismo de *simulated annealing*. Para tal, numa primeira fase procede-se à pesquisa de uma solução admissível para o PECEE, a qual é posteriormente submetida, numa segunda fase, a melhoramento através de um procedimento de *annealing*. Para o efeito é estabelecida uma definição de vizinhança condicionada a movimentos que continuem a satisfazer as restrições de admissibilidade impostas na definição do PECEE. De acordo com os autores, dado que esta resolução faseada reduz significativamente o espaço de soluções, foram introduzidas técnicas para promover a diversificação da pesquisa, designadamente a reinicialização da pesquisa em zonas distintas do espaço de soluções e a alteração da estrutura da vizinhança.

## **Outros métodos**

Propondo um procedimento interativo com o decisior, Romero [85] descreve um método genérico implementado computacionalmente que, através de etapas sucessivas exigindo a participação do decisior, permite resolver o problema de exames de uma escola em Espanha com cerca de 4000 alunos.

Noutro campo ainda, Reis e Oliveira [83], recorrem a técnicas de programação lógica de restrições na resolução favorável de uma instância real do PECEE com 314 exames, 66 períodos de tempo e 35 salas.

# Capítulo 4

## Redes Neuronais

### 4.1 Introdução

Desde sempre o cérebro humano tem exercido um fascínio no Homem, especialmente no que respeita ao seu elevado potencial de computação e adaptabilidade a novos contextos e problemas. Parte deste interesse é motivado pelo paradigma relativo à evidente superioridade de processamento dos actuais computadores digitais baseados em arquitecturas sequenciais sustentadas na teoria de von Neuman, mas que contudo demonstram um desempenho muito limitado na simulação de tarefas básicas facilmente realizadas por simples cérebros biológicos. Apesar deste interesse e dos avanços científicos efectuados nos domínios da Neurofisiologia e da Ciência da Computação, actualmente o conhecimento acerca do funcionamento computacional do cérebro humano é relativamente reduzido.

Na actualidade, reconhece-se que quer a morfologia quer a actividade do cérebro humano são imensamente complexas, estimando-se que na constituição de um cérebro humano existam no total cerca de  $10^{12}$  neurónios de diferentes tipos e funções com uma conectividade média de  $10^3$  conexões por neurónio, representando para um cérebro humano médio uma rede neuronal com cerca de  $10^{15}$  ligações sinápticas. Cada um destes neurónios apresenta simplificadamente uma estrutura semelhante ao neurónio da figura 4-1.

Um neurónio biológico é, em termos básicos, constituído por um corpo de célula, axónio, por dendrites e por sinapses. A sua actividade decorre do seguinte modo: a cada momento os impulsos eléctricos provenientes de outros neurónios percorrem as sinapses e são recebidos no

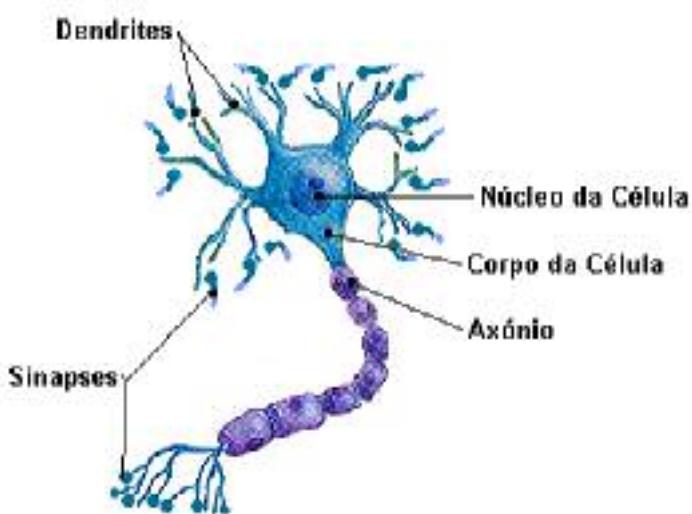


Figura 4-1: Representação simplificada de um neurónio biológico

neurónio através das dendrites. Estes impulsos vão sendo acumulados de uma forma aproximadamente linear até que, quando ultrapassado um determinado potencial limite, o neurónio é activado produzindo um impulso eléctrico que é transmitido através do axónio propagando-se através das sinapses para os restantes neurónios.

As sinapses têm um papel fundamental nesta arquitectura na medida em que, constituindo contactos de ligação entre neurónios, podem actuar como inibidoras (peso negativo) ou amplificadoras (peso positivo) dos sinais transmitidos. A natureza das sinapses é dinâmica, adaptando-se em função da tarefa a desenvolver. Nesta característica dinâmica reside a capacidade de adaptação e o potencial de aprendizagem das redes neuronais em geral. É nas sinapses que se supõe que esteja armazenado, de uma forma massivamente distribuída, toda a informação contida num cérebro biológico.

O potencial de computação do cérebro biológico resulta directamente desta rede de neurónios biológicos densamente inter-conectada e da sua actividade inherentemente paralela e distribuída.

As redes neuronais artificiais (RNAs) procuram, de uma forma muito simplificada, reproduzir os mecanismos básicos de computação inherentes às redes neuronais biológicas recorrendo a modelos matemáticos de neurónios artificiais, com o objectivo de desenvolver algoritmos computacionalmente eficientes baseados numa filosofia de processamento paralelo e distribuído, em

contraste com os algoritmos convencionais assentes num processamento sequencial.

O contributo inicial para o estudo matemático de um neurónio biológico surge com McCulloch e Pitts [67] que apresentam em 1943 um modelo matemático simplificado de neurónio artificial.

Durante as duas décadas seguintes, em paralelo com o progressivo desenvolvimento dos computadores cresce o interesse pela área reflectindo-se quer em avanços teóricos no domínio das RNAs quer no campo da sua simulação e aplicação prática. Contudo, em 1969, quando Minsky e Papert [72] demonstram a existência de limitações teóricas na capacidade de aprendizagem das RNAs, o entusiasmo anterior decresce consideravelmente.

Somente no início da década de 80, suportado pelo desenvolvimento dos computadores pessoais que se verificou após os anos 70, o campo das aplicações das RNAs assistiu a um verdadeiro ressurgimento que se estendeu até ao presente.

O esquema básico de um neurónio artificial é apresentado na figura 4-2.

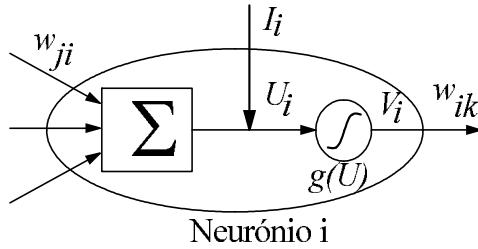


Figura 4-2: Esquema de um neurónio artificial

O neurónio artificial  $i$  é uma unidade de processamento que pode assumir estados de saída  $V_i$  distintos. Em cada momento de processamento é efectuada a soma dos estados provenientes dos restantes neurónios  $j$ , sujeitos aos efeitos de amplificação ou inibição das sinapses através de pesos  $w_{ji}$ , positivos ou negativos, respectivamente. Em seguida, esta soma ponderada é adicionada a uma polarização externa  $I_i$  e o resultado que se designa por estado interno  $U_i$  é submetido a uma função de activação ou transferência  $g$ , determinando o estado de saída do neurónio  $i$ , dado por  $V_i = g(U_i)$ , correspondente, pelo menos na etapa final, à sua activação ou desactivação. Este estado propaga-se a cada um dos  $k$  restantes neurónios usando os pesos  $w_{ik}$ .

Relativamente à disposição e natureza das ligações entre os neurónios de uma RNA, podem

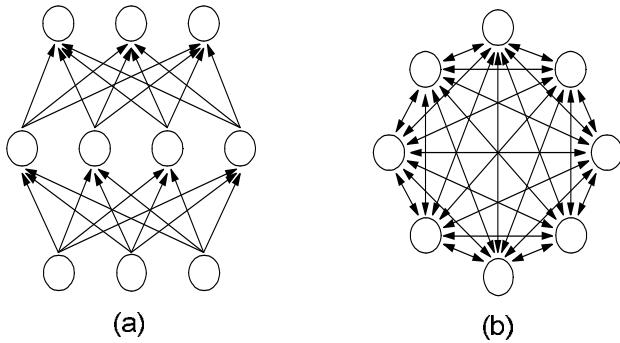


Figura 4-3: Arquitecturas *feed-forward* a) e *feed-back* b)

ser distinguidas genericamente duas arquitecturas distintas: *feed-forward* e *feed-back*. Nas redes neuronais de arquitectura *feed-forward* os neurónios encontram-se dispostos em duas ou mais camadas, conectadas por ligações sinápticas unidireccionais entre camadas adjacentes tal como se ilustra na figura 4-3 a). Nesta arquitectura cada neurónio processa individualmente com base nos estímulos provenientes dos neurónios da camada anterior, propagando o seu estado de saída para os neurónios da camada seguinte. Este tipo de redes requer um período de aprendizagem prévio, durante o qual as ligações sinápticas vão sendo de modo sequencial adaptadas, por forma a induzir gradualmente um determinado padrão de resposta da rede neuronal face a um conjunto de dados de treino. As aplicações mais frequentes desta tipologia de rede encontram-se no domínio da previsão, reconhecimento de padrões, classificação e modelização, sendo menos relevantes no contexto da optimização combinatória.

Em contraste, na arquitectura *feed-back*, representada na figura 4-3 b), não existem camadas e os neurónios encontram-se massivamente interconectados por ligações sinápticas bidireccionais. Outra das principais distinções relativamente à arquitectura anterior consiste no facto dos pesos das ligações sinápticas permanecerem, geralmente, fixos durante todo o período de actividade da rede neuronal. Nesta estrutura de rede os estados dos neurónios são actualizados até que o nível de activação global da rede neuronal alcance um ponto de estabilidade. O recurso a esta arquitectura, nomeadamente através da utilização de redes de Hopfield e Tank (apresentadas em detalhe na secção 4.2), tem sido usual no domínio da optimização combinatória.

No contexto da Gestão e da Investigação Operacional o campo de aplicação das redes neurais é consideravelmente extenso, dividindo-se basicamente nas duas referidas áreas: por um lado, aplicações de reconhecimento de padrões, classificação, correlação e previsão sobre dados de natureza complexa e, por outro, a resolução de difíceis problemas de optimização combinatória. No primeiro caso, as características evidenciadas pelas RNAs, nomeadamente a capacidade de adaptação a ambientes de elevada complexidade e a velocidade de processamento resultante do inerente potencial de paralelização desta abordagem, confirmam-nas como um potente instrumento neste contexto. Como resultado, uma extensa diversidade de aplicações pode ser consultada num levantamento bibliográfico publicado por Sharda [93]. Burke e Ignizio [12] apresentam também um visão generalizada sobre a utilização das RNAs na Investigação Operacional. No domínio da optimização combinatória a utilização das RNAs como modelo de suporte para técnicas de resolução teve início com Hopfield e Tank que no artigo de 1985 [54] desenvolveram uma arquitectura de RNA (seguidamente designada por rede de Hopfield e Tank) adaptada ao problema do caixeiro viajante que foi mais tarde, por estes autores, generalizada para problemas de programação linear [98]. Apesar da notoriedade inicial destes artigos, Wilson e Pawley [106] demonstram a existência de limitações na abordagem de Hopfield e Tank, nomeadamente no que respeita à difícil parametrização e à qualidade das soluções obtidas. Posteriormente, vários têm sido os contributos para a resolução das limitações inerentes ao modelo inicial de Hopfield e Tank [8], [43]. Como resultado, as técnicas baseadas em RNAs têm gradualmente revelado um considerável potencial para competir com as restantes meta-heurísticas na resolução não exacta de diversos problemas de optimização combinatória, facto que pode ser constatado em detalhe nos estudos bibliográficos [95], [77].

De uma forma geral, na resolução de problemas de optimização combinatória através de RNAs são aplicadas basicamente duas estruturas distintas: as redes neurais auto-organizáveis e as Redes Neuronais de Hopfield e Tank. Na primeira incluem-se os mapas de Kohonen [63] e as redes elásticas [31] que, utilizando um processo adaptativo dos pesos das sinapses, promovem a progressiva competição entre os diferentes neurónios até que, no final do processo, os neurónios activos representam a solução do problema em estudo. A aplicação desta técnica encontra-se quase exclusivamente centrada sobre problemas de optimização combinatória com representação no espaço euclideano, em particular sobre o problema do caixeiro viajante. Recentemente,

foi descrita por Smith, Palaniswami e Krishnamoorthy [96] uma modificação que permite a generalização a outras classes de problemas formalizáveis com variáveis binárias. Relativamente às redes neurais de Hopfield e Tank, dada a sua relevância no âmbito desta dissertação, é apresentada na secção 4.2 uma descrição das suas principais características. No contexto da optimização com recurso a este tipo de arquitectura neuronal, a definição da função de energia neuronal adquire um papel central cuja discussão e adaptação ao PEHE será desenvolvida na secção 4.3. Na secção 4.4 irá ser particularizada para o PEHE uma extensão ao modelo de Hopfield baseada em neurónios contínuos de Potts. Uma versão alternativa discreta e mais eficiente é proposta na secção 4.5, sendo apresentados os respectivos resultados computacionais na secção 4.6 em conjunto com uma análise comparativa das duas abordagens neurais.

## 4.2 Redes neurais de Hopfield e Tank

Para o efeito de optimização, uma rede neuronal de Hopfield e Tank é constituída por uma rede de  $N$  unidades completamente interconectadas, designadas por neurónios artificiais, dispostas segundo uma arquitectura do tipo *feed-back*. O funcionamento destes neurónios será de seguida exposto.

Considerando uma rede formada por neurónios artificiais idênticos ao representado na figura 4-2, cada neurónio admite um de entre dois estados finais de saída discretos e o processo de actualização dos estados dos neurónios decorre, habitualmente, de forma aleatória e assíncrona. O modelo neuronal de Hopfield e Tank, tradicionalmente aplicado na resolução de problemas de optimização combinatória admite duas variantes: uma discreta [52] e outra contínua [54].

Na versão discreta, os estados de saída assumem apenas valores binários (activo e inactivo) durante todo o processo de simulação (alternativamente, o modelo pode ser expresso em termos de valores de saída -1 e 1). Neste contexto, o estado de entrada de cada neurónio, seja o neurónio  $i$ , é dado por:

$$U_i = \sum_{j=1}^N w_{ji}V_j + I_i \quad (4.1)$$

Hopfield [53] demonstrou que para uma matriz de ligações sinápticas  $[w_{ij}]$  simétrica e com

elementos diagonais não negativos, a actualização do estado de saída  $V_i$  do neurónio  $i$ , de acordo com a função de activação  $g^d$ :

$$V_i = g^d(U_i) = \begin{cases} 1 \text{ (activo)} & \text{para } U_i > 0 \\ 0 \text{ (inactivo)} & \text{para } U_i \leq 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

conduz o sistema neuronal para uma configuração estável correspondente a um mínimo local da seguinte função quadrática, designada por função de energia neuronal:

$$E^d(\bar{V}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N w_{ij} V_i V_j - \sum_{i=1}^N V_i I_i \quad (4.3)$$

A função de energia neuronal assume assim um papel fundamental, já que é por seu intermédio que um problema de optimização combinatória é codificado e implementado na rede neuronal. Efectivamente, estes podem ser formalizados com variáveis binárias estabelecendo-se uma correspondência directa entre cada uma das suas variáveis e o estado de saída final do respectivo neurónio. Adicionalmente, é necessário elaborar a função quadrática para modelizar os condicionalismos do problema de optimização expressos através da função objectivo e das restrições. O processo de elaboração de uma função de energia neuronal para um problema de optimização particular obriga, pois, à definição de uma função quadrática cujo valor mínimo corresponda a uma solução óptima do problema de optimização. Normalmente, esta função de energia incorpora, com recurso a um conjunto de ponderadores, parcelas distintas associadas à função objectivo do problema de optimização em estudo e às suas diversas restrições.

Uma simulação mais realista dos sistemas computacionais biológicos é proporcionada pela versão contínua do modelo de Hopfield e Tank, na qual o estado de saída  $V_i$  de cada neurónio  $i$ , pertencente ao intervalo  $[0, 1]$ , é determinado através da aplicação de uma função de activação definida por:

$$V_i = g^c(U_i) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \tanh\left(\frac{U_i}{T}\right) \right] \quad (4.4)$$

A função de activação assume a forma de uma função não linear, de tipo sigmoidal (ver figura 4-4) que pretende simular o padrão de resposta de um neurónio biológico face a um estímulo.

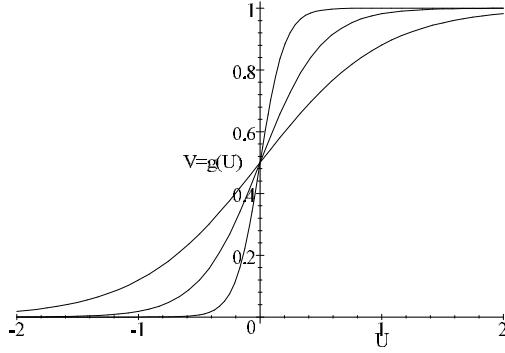


Figura 4-4: Função de activação sigmoidal (para  $T = 0.2, 0.5$  e  $1$ )

Assim, para valores de  $U_i > 0$  a função converge assintoticamente para  $V_i = 1$ , correspondendo ao estado de activação do neurónio  $i$ , e para valores de  $U_i < 0$  a resposta é aproximadamente dada por um estado de desactivação do neurónio, ou seja,  $V_i = 0$ . O parâmetro real positivo<sup>1</sup>  $T$  exerce um papel de controlo do ganho da função de activação permitindo, através do seu ajustamento, alterar o declive da função na origem e, consequentemente, a sensibilidade de resposta do neurónio aos estímulos recebidos.

De acordo com Hopfield e Tank, o estado de entrada  $U_i$  de cada neurónio  $i$  é, por sua vez, calculado recorrendo à seguinte equação diferencial:

$$\frac{dU_i}{dt} = -\frac{U_i}{\tau} + \sum_{j=1}^N w_{ji}V_j + I_i \quad (4.5)$$

na qual  $\tau$  representa uma constante de tempo que assume, habitualmente, valor unitário, para efeitos de simulação do modelo neuronal.

A função de energia associada ao modelo neuronal contínuo é dada por:

$$E^c(\bar{V}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_{ij}V_iV_j - \sum_{i=1}^N V_iI_i + \frac{1}{R_i} \int_0^{V_i} (g^c)^{-1}(\bar{V})d\bar{V} \quad (4.6)$$

---

<sup>1</sup>Note-se que, embora  $T$  designe o conjunto de turmas do PEHE, se optou por manter a representação habitual deste parâmetro por  $T$ , dado que se associa a uma temperatura.

onde  $R_i$  é um parâmetro real positivo que designa a resistência de entrada para o neurónio  $i$ .

Admitindo que a matriz das ligações sinápticas  $[w_{ij}]$  é simétrica com elementos diagonais não negativos, garante-se, através da resolução iterativa das equações (4.4) e (4.5), a convergência do sistema neuronal para estados finais estáveis associados a um mínimo local desta função de energia [53].

Dado que, em virtude das suas características analógicas, este sistema de equações tende a convergir para mínimos locais de qualidade inferior, várias técnicas foram desenvolvidas para atenuar este efeito. Para uma descrição detalhada destas alternativas vide Cichocki e Unbehauen [22] ou ainda Smith [94]. Um dos processos mais comuns envolve a resolução sucessiva das equações (4.4) e (4.5) para níveis decrescentes de  $T$ . Este processo, que se designa por *annealing*, potencia a convergência do sistema neuronal para configurações finais estáveis que correspondem a óptimos locais de melhor qualidade [8].

Note-se que quando  $T \rightarrow 0$  a dinâmica do modelo contínuo de Hopfield reproduz o comportamento da versão discreta. Nesta circunstância, a função de activação transforma-se numa função em escada e as expressões  $E^c$  e  $E^d$  tendem a ser equivalentes, em virtude da última parcela de  $E^c$ ,  $\frac{1}{R_i} \int_0^{V_i} (g^c)^{-1}(\bar{V}) dV$ , se tornar negligenciável [53]. Neste caso tem-se  $U_i = -\frac{\partial E(\bar{V})}{\partial V_i}$ .

A simulação da versão contínua é pois mais exigente e lenta em termos computacionais quando comparada com a inherente simplicidade associada à implementação do modelo discreto de Hopfield e Tank. Estes dois aspectos serão posteriormente explorados através das abordagens de resolução propostas nas secções 4.4 e 4.5. Em seguida, será apresentada uma função de energia adaptada à resolução do PEHE e discutidos aspectos relativos à sua concepção.

### 4.3 Rede neuronal para o PEHE

A primeira etapa na utilização de uma rede neuronal para efeitos de optimização consiste na definição de um esquema de representação das variáveis do problema em termos de estados de saída dos neurónios artificiais. Para tal, o facto do estado de saída dos neurónios artificiais no final do processo neuronal apresentar uma natureza tendencialmente binária, permite uma associação directa às variáveis binárias frequentemente utilizadas na formalização de um vasto conjunto de problemas de optimização combinatória, em particular do PEHE. A escolha do

esquema de codificação do problema numa estrutura neuronal deve considerar diferentes aspectos. Em primeiro lugar, é importante que a representação escolhida seja capaz de suportar, por intermédio da função de energia, a inclusão de todos os condicionalismos associados ao PEHE referidos no Capítulo 1. Por outro, o número total de neurónios necessários e a facilidade de manipulação e extracção da solução da rede neuronal são aspectos adicionais a considerar.

De acordo com estas observações, a representação neuronal mais directa para o PEHE, assente na formalização matemática referida no Capítulo 2 (assumindo a realização de  $A'$  aulas em  $S'$  salas e  $H'$  períodos horários), resulta na associação de  $A' \times S' \times H'$  variáveis binárias aos estados de saída de  $A' \times S' \times H'$  neurónios definidos por:

$$V_{ash} = \begin{cases} 1 & \text{se a aula } a \text{ ocorre na sala } s \text{ no período } h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.7)$$

Esta codificação, usada no estudo de Carrasco [15], tem a particularidade de facilitar a interpretação e conversão do estado final da rede neuronal para a respectiva solução do problema de optimização. Fica também simplificada a concepção de uma função de energia necessária para a implementação de todos os requisitos relativos ao PEHE, como se pode verificar em [15].

Admitindo esta representação, o número total de neurónios requeridos para a codificação do problema é de  $A' \times S' \times H'$  neurónios. Ora, considerando instâncias reais de média e grande dimensão, esta codificação pode requerer um excessivo número de neurónios impossibilitando a sua eficiente implementação e resolução computacional. De facto, em Carrasco [15] a dimensão máxima da rede neuronal simulada foi de apenas 5250 neurónios, mostrando que a abordagem de redes de dimensão superior, apesar da crescente capacidade computacional registada nos computadores pessoais (onde se pretende que este sistema seja implementado), pode ficar condicionada pela exigência computacional associada à simulação deste tipo de modelos.

Uma modelização neuronal alternativa e mais eficiente, baseada nas propostas de Gislén, Peterson e Söderberg [44], também para um problema de horários, resulta de uma codificação factorizada em duas redes neuronais distintas, uma relativa às  $S'$  salas e outra relativa aos  $H'$  períodos horários, como se ilustra na figura 4-5. Neste contexto, o estado de saída dos neurónios

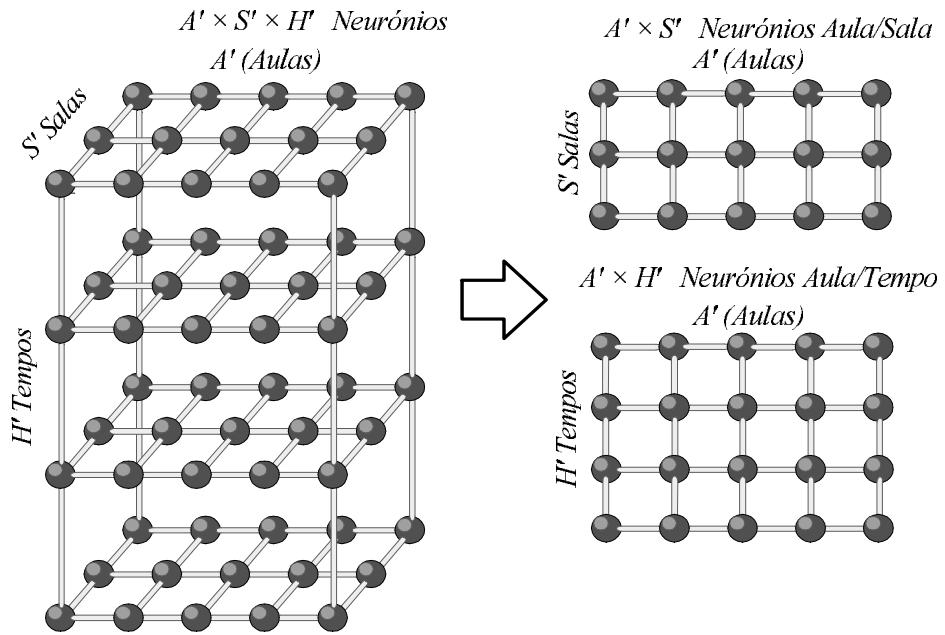


Figura 4-5: Esquema de factorização da representação neuronal

de cada uma das redes neuronais é definido como:

$$V_{as}^S = \begin{cases} 1 & \text{quando a aula } a \text{ ocorre na sala } s \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.8)$$

e

$$V_{ah}^H = \begin{cases} 1 & \text{quando a aula } a \text{ tem início no período } h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.9)$$

Após esta factorização, o número de neurónios reduz-se significativamente, de  $A' \times S' \times H'$  para  $A' \times (S' + H')$ . De facto, para problemas onde  $A' > S' > H'$  ou  $A' > H' > S'$  (situação esta que ocorre geralmente na prática) a representação factorizada permite uma redução percentual do número de neurónios expressa por  $\Delta\% = [1 - (\frac{S+H}{SH})] \times 100\%$ .

### ▽ Exemplo 3-1

A título de exemplo, considere-se a instância real ESGHT-T1 que, de acordo com a represen-

tação expressa em (4.7), requer uma rede com um total de  $568 \times 27 \times 50 = 766\,800$  neurónios<sup>2</sup>.

Após o processo de factorização em salas e períodos horários, a mesma instância requer apenas  $568 \times (27 + 50) = 43\,736$  neurónios, isto é, apenas 5.7% dos necessários inicialmente.

△

Contudo, ao nível do potencial de incorporação dos condicionalismos próprios do PEHE, esta abordagem afigura-se menos flexível, implicando a simulação de duas redes neuronais separadamente. De facto, no processo de elaboração da função de energia podem surgir algumas limitações e dificuldades decorrentes da eventual necessidade de introduzir novas restrições que liguem os dois elementos: as salas e os períodos horários.

Adoptado este último esquema de representação, os diversos condicionalismos inerentes ao PEHE, descritos anteriormente no Capítulo 1, foram inseridos de três formas distintas.

Assim, em relação aos condicionalismos obrigatórios (1e), (1f) e (1h) associados, respetivamente, à adequação das salas às aulas, cumprimento do turno lectivo de cada turma e satisfação dos períodos de indisponibilidade de professores e turmas, foram inseridos recorrendo à imobilização dos neurónios. Este procedimento consiste na fixação inicial do estado dos neurónios no valor de saída apropriado - inactivo - e na sua exclusão do processo de simulação da rede neuronal. Os restantes neurónios não fixados dizem-se não imobilizados.

▽ Exemplo 3-2

Admita-se por exemplo, que a sala  $s_1$  não permite a realização da aula  $a_1$ , então o neurónio-sala  $(a_1, s_1)$  terá o seu estado de saída  $V_{a_1, s_1}^S = 0$ , permanecendo neste estado inactivo durante toda a simulação.

△

Quanto ao condicionalismo obrigatório (1a), relativo ao cumprimento dos currículos das turmas, a sua modelização fez-se recorrendo a mecanismos inerentes à própria actualização neuronal que serão descritos em detalhe nas secções 4.4 e 4.5.

Os restantes condicionalismos obrigatórios e de melhoramento foram utilizados na elaboração da função de energia neuronal, originando, através de termos apropriados, expressões de

---

<sup>2</sup>Nesta instância, as 626 aulas de duração unitária correspondem a 568 aulas que incluem 58 de duração múltipla.

penalização associadas ao grau de violação desses condicionalismos e que penalizam as configurações não admissíveis ou não desejáveis para o PEHE.

Refira-se, contudo, que comparativamente à anterior formalização do PEHE como problema de optimização, designada por *PEHE2*, no que diz respeito aos condicionalismos obrigatórios (1d) e (1g), a formalização neuronal proposta exige a particularização dos parâmetros  $N_c = 1$  para  $c \in C$  e  $HAlmF(d) - HAlmI(d) = 1$  para  $d \in D$ . De facto, estes parâmetros descrevem uma situação comum que é compatível com todas as instâncias-teste estudadas e que, do ponto de vista da rede neuronal escolhida, se tornam imprescindíveis.

Neste âmbito, para evitar a ocorrência de conflitos na ocupação de salas e simultaneamente possibilitar a existência de aulas de duração distinta (condicionalismos (1b) e (1c)) foi incluído o seguinte termo na função de energia:

$$f_{S1bc}(\overline{V^H}, \overline{V^S}) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{H'} \sum_{s=1}^{S'} \sum_{\substack{a, a' = 1 \\ a \neq a'}}^{A'} V_{as}^S V_{a's}^S C_{ah} C_{a'h} \quad (4.10)$$

onde  $C_{ah} = \sum_{k=0 \wedge h-k \geq 1}^{R_a-1} V_{a,h-k}^H$  expressa a eventual ocupação do período horário  $h$  pela aula  $a$ , cuja duração é dada por  $R_a$  em termos de períodos horários.

A definição da soma  $C_{ah}$  permite, ao longo desta formalização, a imposição do condicionalismo obrigatório (1c), relativo à existência de aulas de duração múltipla. Neste caso, permite a verificação de sobreposição na mesma sala de aulas de duração distinta. Deste modo, a função de penalização  $f_{S1bc}$  tomará o valor correspondente ao número de períodos horários em colisão na mesma sala de aula. O factor  $\frac{1}{2}$  surge para compensar a duplicação resultante da penalização dos pares de aulas  $(a, a')$  e  $(a', a)$ .

### ▽ Exemplo 3-3

Observe-se, como exemplo as duas situações expostas na figura 4-6.

Na situação *a*) as duas aulas consideradas,  $a_1$  e  $a_2$ , ambas de duração unitária, estão escalonadas para a sala  $s_1$  ( $V_{a_1 s_1}^S = V_{a_2 s_1}^S = 1$ ) com início nos períodos  $h_3$  e  $h_1$ , respectivamente, ( $V_{a_1 h_3}^H = 1$ ,  $V_{a_2 h_1}^H = 1$ ). Não existe por isso sobreposição de ocupação de salas sendo nulo o termo  $f_{S1bc}$ . Já na situação *b*), na qual a aula  $a_2$  tem uma duração de três períodos horários, surge um conflito de valor unitário associado à parcela  $V_{a_1 s_1}^S V_{a_2 s_1}^S C_{a_1 h_3} C_{a_2 h_3} = 1 \times 1 \times 1 \times 1$ .

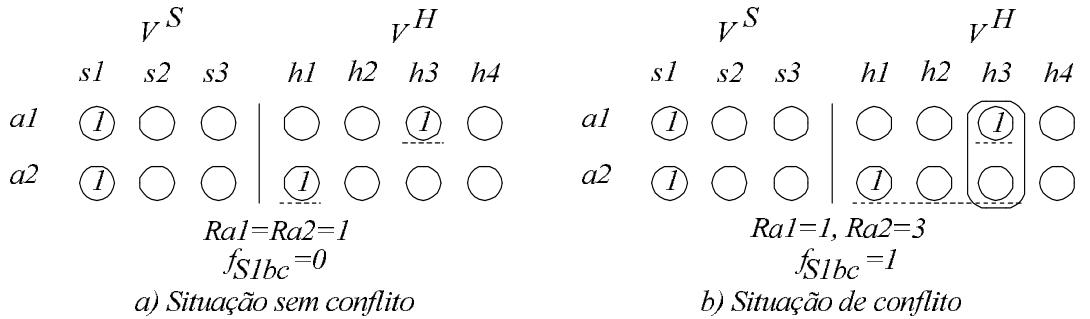


Figura 4-6: Ilustração da penalização dos conflitos na ocupação de salas

Quanto ao condicionalismo obrigatório (1b), relativo à eliminação de eventuais conflitos horários para professores e turmas, a sua implementação é feita através da componente de energia  $f_{PT1b}$ , definida como:

$$f_{PT1b}(\overline{V^H}) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{H'} \sum_{\substack{a,a'=1 \\ a \neq a'}}^{A'} Q_{aa'}^{pt} C_{ah} C_{a'h} \quad (4.11)$$

$$\text{onde } Q_{aa'}^{pt} = \begin{cases} 2 & \text{se as aulas } a \text{ e } a' \text{ partilham o professor } p \text{ e a turma } t \\ 1 & \text{se as aulas } a \text{ e } a' \text{ partilham o professor } p \text{ ou a turma } t \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para  $p$  e  $t$  fixos,  $\left[Q_{aa'}^{pt}\right]$  é uma matriz quadrada que estabelece penalizações associadas à realização simultânea de todos os pares de aulas  $(a, a')$  em função do envolvimento do professor  $p$  e da turma  $t$ . A componente  $f_{PT1b}$  atribui uma penalização unitária no caso de um dos recursos (professor ou turma) ser comum em  $a$  e  $a'$ . No caso em que ambos os recursos são comuns, a penalização duplica.

Para o cumprimento do condicionalismo (1d), que obriga à não repetição de aulas da mesma disciplina no mesmo dia no caso de  $N_c = 1$ , foi introduzido o termo penalizador  $f_{T1d}$ , cuja

definição é a seguinte:

$$f_{T1d}(\overline{V^H}) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T'} \sum_{\substack{a,a' \in ATurma(t) \\ a \neq a'}} Q_{aa'}^{dis} \sum_{d=1}^{D'} \left( \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} C_{ah} \right) \left( \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} C_{a'h} \right) \quad (4.12)$$

onde  $ATurma(t)$  é, retomando as definições efectuadas no Capítulo 2, o conjunto de aulas assistidas pela turma  $t$ ,  $HDiaI(d)$  e  $HDiaF(d)$  representam, respectivamente, o primeiro e último períodos horários do dia  $d$  e a matriz  $[Q_{aa'}^{dis}]$  é uma matriz quadrada que atribui uma penalização a todos os pares de aulas pertencentes à mesma disciplina:

$$Q_{aa'}^{dis} = \begin{cases} 1 & \text{se as aulas } a \text{ e } a' \text{ pertencem à mesma disciplina} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note-se que os somatórios  $\sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} C_{ah}$  e  $\sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} C_{a'h}$  expressam, respectivamente, a ocorrência ou não das aulas  $a$  e  $a'$  durante o dia  $d$ . Na circunstância de  $a$  e  $a'$  pertencerem à mesma disciplina, o parâmetro  $Q_{aa'}^{dis} = 1$ , o que resulta no incremento da penalização incluída em  $f_{T1d}$ .

Para impor a existência de um período horário destinado ao almoço para professores e alunos, condicionalismo obrigatório (1g), dois novos grupos de variáveis auxiliares foram definidos de forma análoga ao exposto nas equações (2.32). Estas expressam, respectivamente, a ocupação da turma  $t$  e do professor  $p$  ao longo dos  $H'$  períodos horários semanais:

$$OT_{th} = \sum_{a \in ATurma(t)} C_{ah} , \quad OP_{ph} = \sum_{a \in AProf(p)} C_{ah} \quad \text{para } p \in P; t \in T; h \in H \quad (4.13)$$

onde  $AProf(p)$  e  $ATurma(t)$  representam, respectivamente, o conjunto de aulas leccionadas pelo professor  $p$  e o conjunto de aulas assistidas pela turma  $t$ .

Com base nestas variáveis, o termo de energia  $f_{PT1g}$  assegura a formação de um período horário livre no conjunto de períodos passíveis de serem ocupados com almoço do dia  $d$ , delimitados por  $HAlmI(d)$  e  $HAlmF(d)$ :

$$f_{PT1g}(\overline{V^H}) = \sum_{d=1}^{D'} \left[ \sum_{t=1}^{T'} \left( \prod_{h=HalmI(d)}^{HalmF(d)} OT_{th} \right) + \sum_{p=1}^{P'} \left( \prod_{h=HalmI(d)}^{HalmF(d)} OP_{ph} \right) \right] \quad (4.14)$$

Os seguintes termos da função de energia são relativos aos condicionalismos de melhoramento do PEHE. Para cada um dos aspectos que reflectem a ocorrência das situações não desejáveis numa solução, associadas aos condicionalismos (2a), (2b) e (2c), foram retomadas as expressões (2.33) a (2.38) definidas anteriormente. Assim, admitindo uma solução  $\overline{Y}$  admissível para o problema de optimização *PEHE2* e definindo em conformidade o vector  $\overline{V}$  de estados de saída dos neurónios, a formalização utilizada para inserção dos condicionalismos de melhoramento na função de energia é tal que  $f_w(\overline{V^H}) = f_w(\overline{Y})$ , onde  $w$  representa cada uma das componentes dos condicionalismos de melhoramento<sup>3</sup>. Ou seja, para uma determinada solução admissível do PEHE o modelo neuronal e o modelo de optimização *PEHE2* expressam o mesmo nível de penalização.

O primeiro condicionalismo de melhoramento, referido por (2a), pretende concentrar a distribuição das aulas para professores e turmas. Para isso foram adicionadas à função de energia as seguintes parcelas:

$$\begin{aligned} f_{T2a}(\overline{V^H}) + f_{P2a}(\overline{V^H}) &= \sum_{t=1}^{T'} \left( TotAT_t - \left( \sum_{d=1}^{D'} \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)-1} OT_{th}OT_{t,h+1} \right) \right) + \\ &+ \sum_{p=1}^{P'} \left( TotAP_p - \left( \sum_{d=1}^{D'} \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)-1} OP_{ph}OP_{p,h+1} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde  $TotAT_t$  e  $TotAP_p$  representam o número total semanal de aulas atribuídas no plano curricular global à turma  $t$  e ao professor  $p$ , respectivamente.

Recorde-se que esta expressão promove a compactação das aulas de professores e turmas no menor número de *clusters* por semana.

Recorrendo às matrizes  $[PreP_{ph}]$  e  $[PreT_{th}]$ , as preferências horárias manifestadas por professores e turmas (condicionalismo (2b)) foram inseridas na função energia do modelo neuronal,

---

<sup>3</sup>Note-se que se utiliza uma notação idêntica para funções diferentes porque para correspondentes argumentos estas tomam o mesmo valor.

reescrevendo as expressões (2.35) e (2.36):

$$f_{T2b}(\overline{V^H}) + f_{P2b}(\overline{V^H}) = \sum_{h=1}^{H'} \sum_{t=1}^{T'} PreT_{th}OT_{th} + \sum_{h=1}^{H'} \sum_{p=1}^{P'} PreP_{ph}OP_{ph} \quad (4.16)$$

O último termo da função de energia, relativo ao condicionalismo de melhoramento (2c) e que visa a minimização do número de deslocações efectuadas por professores e turmas entre locais de lecionação, é implementado através da agregação das expressões (2.37) e (2.38), assumindo a seguinte forma:

$$\begin{aligned} f_{T2c}(\overline{V^H}) + f_{P2c}(\overline{V^H}) &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T'} \sum_{a,a' \in ATurm(t)} L_{aa'} \sum_{d=1}^{D'} \left( \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} C_{ah} \right) \left( \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} C_{a'h} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{P'} \sum_{a,a' \in AProf(p)} L_{aa'} \sum_{d=1}^{D'} \left( \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} C_{ah} \right) \left( \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} C_{a'h} \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

recordando-se que  $L_{aa'} = \begin{cases} 0 & \text{se as aulas } a \text{ e } a' \text{ ocorrem no mesmo local} \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Finalmente, a função de energia completa, adaptada à satisfação dos condicionalismos que caracterizam o PEHE na sua versão de optimização que já havia sido formalizado através do modelo de programação não linear binária *PEHE2* (com uma particularização no número máximo diário de aulas para cada disciplina e no número de períodos de almoço), assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} E(\overline{V^H}, \overline{V^S}) &= \alpha \left( f_{S1bc}(\overline{V^H}, \overline{V^S}) + f_{PT1b}(\overline{V^H}) + f_{T1d}(\overline{V^H}) + f_{PT1g}(\overline{V^H}) \right) + \\ &+ \beta \left( \left( f_{T2a}(\overline{V^H}) + f_{P2a}(\overline{V^H}) \right) + \left( f_{T2b}(\overline{V^H}) + f_{P2b}(\overline{V^H}) \right) + \left( f_{T2c}(\overline{V^H}) + f_{P2c}(\overline{V^H}) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros reais positivos.

Para controlo da diferenciação do grau de importância entre os condicionalismos obrigatórios (associados à admissibilidade da solução) e os condicionalismos de melhoramento (relativos à qualidade final da solução) recorreu-se à utilização dos factores de ponderação  $\alpha$  e  $\beta$  distintos. Para o efeito o parâmetro  $\alpha$  fixou-se num valor significativamente superior ao parâmetro  $\beta$ .

Através de processos de simulação apropriados para a alteração dos estados finais dos

neurónios,  $\overline{V^H}$  e  $\overline{V^S}$ , pretende-se conduzir a rede neuronal a configurações finais estáveis de baixo valor da função de energia, ou seja, horários para o PEHE de baixo conflito (cumprindo todos os condicionalismos obrigatórios) e elevada qualidade (satisfazendo o máximo de condicionalismos de melhoramento). Dado que cada parcela da função de energia neuronal é constituída por expressões que tomam o valor nulo ou mínimo no caso  $f_{T2a}$  e  $f_{P2a}$ , quando ocorre a satisfação total do condicionalismo correspondente, a solução que minimiza  $E(\overline{V^H}, \overline{V^S})$  traduz igualmente a solução óptima para o PEHE.

Com base na função de energia proposta descrever-se-ão nas secções 4.4 e 4.5 duas abordagens alternativas para a simulação desta rede neuronal configurada para o PEHE.

#### 4.4 Abordagem do PEHE através de uma rede de neurónios de Potts

Quando Hopfield em 1982 [52] referiu existirem semelhanças entre os modelos de redes neuronais e o modelo de partículas de Ising, revelava os primeiros sinais de que podiam ser implementados modelos de redes neuronais em analogia com os processos estudados no domínio da Mecânica Estatística [80]. Posteriormente, e também com origem neste campo, uma generalização do modelo de Ising, designada por modelo de Potts, viria a demonstrar potencial para aplicação a problemas de optimização combinatória [59].

Assim, enquanto que na versão de Ising o *spin* ou neurónio assume apenas dois estados de saída finais distintos, o *spin* de Potts ou multi-neurónio de Potts pode assumir  $K$  estados mutuamente exclusivos. Esta característica multi-estado confere particular relevância ao modelo permitindo, de forma natural e directa, a implementação de restrições que impõem que a soma de determinadas variáveis seja igual a um [75], [65], [76].

Neste contexto, para a simulação da rede neuronal utiliza-se um esquema de redução gradual de um parâmetro de temperatura  $T$  e substitui-se a função de activação sigmoidal de Hopfield e Tank por uma função de activação multi-dimensional que determina os  $K$  estados do multi-neurónio de Potts  $i$ . De acordo com Peterson e Söderberg [81], através da actualização iterada das equações seguintes (4.19) e (4.20), a rede neuronal é conduzida para configurações estáveis, expressas através do vector dos estados dos neurónios  $\overline{V} = [V_{ik}]$ , correspondentes a mínimos

locais da função de energia  $E^c(\bar{V})$ .

$$V_{ik} = \frac{e^{\frac{U_{ik}}{T}}}{\sum_{j=1}^K e^{\frac{U_{ij}}{T}}} \quad \text{para } i \in I; k \in K \quad (4.19)$$

onde,

$$U_{ik} = -\frac{\partial E^c(\bar{V})}{\partial V_{ik}} \quad (4.20)$$

sendo  $I$  o conjunto de multi-neurónios de Potts e  $K$  o conjunto de estados.

Esta actualização supõe um processo de normalização sobre cada neurónio multi-estado  $i$ , obrigando à verificação da igualdade  $\sum_{k=1}^K V_{ik} = 1$ . Note-se que para  $K = 2$  esta rede neuronal é equivalente à de Hopfield e Tank contínua [80].

Retome-se agora a função de energia neuronal para o PEHE, descrita na secção 4.3:

$$\begin{aligned}
E(\overline{V^H}, \overline{V^S}) &= \frac{\alpha}{2} \sum_{h=1}^{H'} \sum_{s=1}^{S'} \sum_{\substack{a,a'=1 \\ a \neq a'}}^{A'} V_{as}^S V_{a's}^S C_{ah} C_{a'h} + \frac{\alpha}{2} \sum_{h=1}^{H'} \sum_{\substack{a,a'=1 \\ a \neq a'}}^{A'} Q_{aa'}^{pt} C_{ah} C_{a'h} + \\
&+ \frac{\alpha}{2} \sum_{t=1}^{T'} \sum_{\substack{a,a' \in ATurma(t) \\ a \neq a'}} Q_{aa'}^{dis} \sum_{d=1}^{D'} \left( \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} C_{ah} \right) \left( \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} C_{a'h} \right) + \\
&+ \alpha \sum_{d=1}^{D'} \left[ \sum_{t=1}^{T'} \left( \prod_{h=HALmI(d)}^{HALmF(d)} OT_{th} \right) + \sum_{p=1}^{P'} \left( \prod_{h=HALmI(d)}^{HALmF(d)} OP_{ph} \right) \right] + \\
&+ \beta \sum_{t=1}^{T'} \left( TotAT_t - \left( \sum_{d=1}^{D'} \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)-1} OT_{th} OT_{t,h+1} \right) \right) + \quad (4.21) \\
&+ \beta \sum_{p=1}^{P'} \left( TotAP_p - \left( \sum_{d=1}^{D'} \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)-1} OP_{ph} OP_{p,h+1} \right) \right) + \\
&+ \beta \sum_{h=1}^{H'} \left( \sum_{t=1}^{T'} PreT_{th} OT_{th} + \sum_{p=1}^{P'} PreP_{ph} OP_{ph} \right) + \\
&+ \frac{\beta}{2} \sum_{t=1}^{T'} \sum_{a,a' \in ATurma(t)} L_{aa'} \sum_{d=1}^{D'} \left( \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} C_{ah} \right) \left( \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} C_{a'h} \right) + \\
&+ \frac{\beta}{2} \sum_{p=1}^{P'} \sum_{a,a' \in AProf(p)} L_{aa'} \sum_{d=1}^{D'} \left( \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} C_{ah} \right) \left( \sum_{h=HDiaI(d)}^{HDiaF(d)} C_{a'h} \right)
\end{aligned}$$

Tendo em consideração que  $E(\overline{V^H}, \overline{V^S})$  é uma função quadrática em  $\overline{V^H}$  tomando  $\overline{V^S}$  fixo e também quadrática em  $\overline{V^S}$  com  $\overline{V^H}$  fixo, as equações de actualização de Potts (4.19) e (4.20) para cada uma das subredes neurais traduzidas por  $\overline{V^H} = [V_{ah}^H]$  e  $\overline{V^S} = [V_{as}^S]$  são as seguintes:

$$V_{ah}^H = \frac{e^{U_{ah}^H}}{\sum_{i=1}^{H'} e^{U_{ai}^H}} \quad , \quad U_{ah}^H = -\frac{1}{T} \frac{\partial E(\overline{V^H}, \overline{V^S})}{\partial V_{ah}^H} \quad \text{para } a \in A; h \in H \quad (4.22)$$

$$V_{as}^S = \frac{e^{U_{as}^S}}{\sum_{j=1}^{S'} e^{U_{aj}^S}} \quad , \quad U_{as}^S = -\frac{1}{T} \frac{\partial E(\bar{V}^H, \bar{V}^S)}{\partial V_{as}^S} \text{ para } a \in A; s \in S \quad (4.23)$$

Para a actualização dos estados dos neurónios das duas subredes neuronais, a relativa a períodos horários e a relativa a salas, cujos estados de saída são dados por  $[V_{ah}^H]$  e  $[V_{as}^S]$ , respectivamente, foi seguido o procedimento algorítmico, designado por algoritmo neuronal contínuo de Potts (ANCP) [19] e descrito na figura 4-7.

**BEGIN**

$T = T_0; Iter = 0$

Inicializa os estados de saída dos neurónios

**WHILE** ( $Iter < MaxIter$ ) **DO**

**IF** ( $NSat^H = \frac{1}{A' \times H'} \sum_{a=1}^{A'} \sum_{i=1}^{H'} (V_{ai}^H)^2 < \phi$ ) **THEN**

Proceder à actualização de  $[V_{ah}^H]$ , através das equações (4.22) para  $T = T_{iter}$

**IF** ( $NSat^S = \frac{1}{A' \times S'} \sum_{a=1}^{A'} \sum_{j=1}^{S'} (V_{aj}^S)^2 < \phi$ ) **THEN**

Proceder à actualização de  $[V_{as}^S]$ , através das equações (4.23) para  $T = T_{iter}$

$T_{iter+1} = T_{iter} \times \theta$

$Iter = Iter + 1$

Discretizar o estado dos neurónios representados em  $[V_{ah}^H]$  e  $[V_{as}^S]$

**END**

Figura 4-7: Algoritmo ANCP

Após a inicialização dos valores para o parâmetro  $T_0$ , os estados de saída iniciais dos neurónios de ambas as redes são determinados por adição de um pequeno ruído aleatório ao valor do estado de equilíbrio. Este valor é calculado pela inversão do número de neurónios livres<sup>4</sup> em cada linha da respectiva matriz de estados [44].

---

<sup>4</sup>Esta noção refere-se a um neurónio cujo estado não se encontra imobilizado por imposição dos condicionalismos (1e), (1f) e (1g).

Em seguida, o ciclo iterativo principal do algoritmo é executado enquanto o número máximo de iterações não é atingido. Este ciclo consiste na actualização, para cada nível de temperatura, dos estados de saída dos neurónios  $[V_{ah}^H]$  e  $[V_{as}^S]$  utilizando as equações (4.22) e (4.23), segundo um processo aleatório e assíncrono que permite a cada actualização que o estado de saída actualizado de um neurónio (output) passe a estar disponível para os restantes (input) em ambas as subredes. O processo de actualização é realizado enquanto os correspondentes níveis de saturação das redes, dados por  $NSat^H$  e  $NSat^S$ , são inferiores a  $\phi$  (com  $0 \leq \phi \leq 1$ ). Esta situação ocorre, normalmente, durante a transição de um estado indefinido dos neurónios - associado a níveis de energia elevados - para o estado final definido (de aproximadamente 1 ou 0) correspondente a níveis baixos de temperatura e também de energia. Este ciclo termina com o incremento do contador de iterações  $Iter$  e com a redução da temperatura de acordo com o parâmetro  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ).

A etapa final do algoritmo força a discretização, sujeita à satisfação das equações (4.24), do estado de saída dos neurónios que, eventualmente, não se encontrem num estado binário.

Note-se que no final do processo de simulação em ambas a subredes neuronais, face ao processo de normalização associado ao cálculo dos estados dos multi-neurónios de Potts, o condicionalismo obrigatório (1a) é imposto directamente pois, por construção, as equações (4.24) se encontram sempre satisfeitas:

$$\sum_{i=1}^{H'} V_{ai}^H = 1 \text{ e } \sum_{j=1}^{S'} V_{aj}^S = 1 \quad \text{para } a \in A \quad (4.24)$$

Simultaneamente, no final da simulação, os estados de saída binários das subredes neuronais dados por  $[V_{ah}^H]$  e  $[V_{as}^S]$  permitem extrair uma solução para o PEHE que satisfaz os condicionalismos obrigatórios (1a), (1e), (1f) e (1h) e que também se espera que satisfaça prioritariamente os restantes (1b), (1c), (1d) e (1g) dada a sua associação ao parâmetro de ponderação  $\alpha$ . Simultaneamente, as violações aos condicionalismos de melhoramento (2a), (2b) e (2c), afectas ao parâmetro  $\beta$ , deverão ter sido também reduzidas.

## 4.5 Abordagem do PEHE através de uma rede de neurónios discretos *winner-takes-all*

Como se focou na secção 4.2, existe uma analogia directa entre os modelos discretos e os contínuos de Hopfield e Tank. De facto, para um nível suficientemente baixo de temperatura o modelo neuronal contínuo transita de um espaço de estados contínuo em  $[0, 1]$  para um espaço de estados discreto  $\{0, 1\}$ , apresentando ambos os modelos um comportamento dinâmico equivalente. Porém, a principal desvantagem associada à utilização do modelo discreto de Hopfield para efeitos de optimização decorre da sua reduzida capacidade para evitar a imobilização prematura em mínimos locais correspondentes a soluções de inferior qualidade. Em contrapartida, a implementação e simulação do modelo discreto é muito mais eficiente e rápida que a versão contínua.

Com base nestas considerações, a abordagem neuronal proposta neste ponto, que constitui uma alternativa ao modelo contínuo de Potts apresentado na secção anterior, utiliza como suporte neurónios discretos de natureza competitiva, designados genericamente por *winner-takes-all* (WTA) [18] e definidos, para cada uma das redes neuronais, pelas seguintes equações:

$$V_{ah}^H = \begin{cases} 1 & \text{se } U_{ah}^H = \max_{h \in H} \{U_{ah} = -\frac{\partial E(\bar{V}^H, \bar{V}^S)}{\partial V_{ah}^H}\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{para } a \in A; h \in H \quad (4.25)$$

$$V_{as}^S = \begin{cases} 1 & \text{if } U_{as}^S = \max_{s \in S} \{U_{as}^S = -\frac{\partial E(\bar{V}^H, \bar{V}^S)}{\partial V_{as}^S}\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{para } a \in A; s \in S \quad (4.26)$$

Para uma aula  $a$ , a definição dos estados de saída dos neurónios WTA impõe a activação de apenas um da respectiva linha de neurónios, o que implica que, tal como na simulação da rede anterior, os condicionalismos obrigatórios (1a) sejam automaticamente satisfeitos. Em cada procedimento de actualização dos estados dos neurónios efectuado sobre linhas das matrizes de estados de saída  $[V_{ah}^H]$  ou  $[V_{as}^S]$ , utilizando (4.25) ou (4.26), é activado o neurónio que origina o maior decréscimo da função de energia, sendo os restantes neurónios na mesma linha desactivados.

Em termos da convergência dos estados dos neurónios para minimizantes locais da função de

energia, o modelo *winner-takes-all* apresenta uma dinâmica similar à versão discreta de Hopfield e Tank [22]. Para o efeito, é possível comparar a rede neuronal com neurónios WTA a uma rede com neurónios discretos de Hopfield, na qual, cada linha de neurónios é interconectada com ligações sinápticas laterais elevadas. Neste caso, a activação do neurónio com maior estado interno força, por via das ligações sinápticas inibitórias, a desactivação dos restantes neurónios na mesma linha. Refira-se que esta dinâmica constituiu a filosofia que se tentou importar e adaptar na concepção do modelo neuronal discreto WTA.

Dado que um algoritmo discreto WTA simples, ao contrário da versão contínua de Potts, não incorpora nenhum mecanismo destinado a evitar a convergência e imobilização prematura em óptimos locais de inferior qualidade tem sempre que ser incluído um procedimento de diversificação para este fim.

A estrutura do denominado algoritmo neuronal discreto *winner-takes-all* (ANDW), é apresentada na figura 4-8.

O algoritmo tem início com a definição dos contadores *Iter* e *EConst*. Após a construção de uma solução aleatória discreta, o algoritmo começa o ciclo principal. Este consiste na actualização aleatória por linha dos estados de saída dos neurónios  $V^H$  e  $V^S$  através das equações (4.25) e (4.26), respectivamente. Note-se que, através da actualização de duas variáveis lógicas, *EstabH* e *EstabS*, são detectadas potenciais configurações de imobilização das redes. Estas são consideradas imobilizadas quando, por aplicação da respectiva equação (4.25) ou (4.26) a todas as suas linhas, não ocorrem modificações nos neurónios não imobilizados, em comparação com a iteração anterior. Em seguida, o respectivo valor da função de energia é determinado, podendo memorizar-se uma melhor solução ou, em alternativa, incrementar-se o contador *Econst*.

Nos casos em que ambas as redes se encontram estabilizadas ou em que o número máximo de iterações sem melhoramento (*MaxEconst*) é excedido, ocorrem duas acções. Em primeiro lugar, os neurónios activos que incrementam o valor da função de energia são desactivados para, em seguida, após a selecção de *AleaLin* linhas aleatórias, se proceder, ao longo de cada uma destas, a uma activação arbitrária de apenas um neurónio. Desta forma, permite-se que sejam procuradas novas configurações, eventualmente estáveis e de qualidade superior para o PEHE, definindo, assim, no algoritmo uma fase de diversificação.

```

BEGIN
  Iter = 0; EConst = 0; EMin = +∞
  Gera os estados iniciais da ambas as redes neuronais
  WHILE (Iter < MaxIter) DO
    EstabH = True; EstabS = True
    FOR i = 1 TO A' DO
      WHILE (existirem linhas por actualizar na rede neuronal de períodos horários) DO
        Selecciona aleatoriamente uma linha não actualizada a
        Actualiza os estados de saída dos neurónios da linha a,  $V_{ah}^H$  para  $h \in H$ , com (4.25)
        IF (ocorre alteração do neurónio activo na linha a) THEN EstabH = False
      WHILE (existirem linhas por actualizar na rede neuronal de salas) DO
        Selecciona aleatoriamente uma linha não actualizada a
        Actualiza os estados de saída dos neurónios da linha a,  $V_{as}^S$ , para  $s \in S$ , com (4.26)
        IF (ocorre alteração do neurónio activo na linha a) THEN EstabS = False
      Calcula a energia  $E(\bar{V}^H, \bar{V}^S)$ 
      IF  $E(\bar{V}^H, \bar{V}^S) < EMin$  THEN DO
        Guarda a melhor solução;  $EMin = E(\bar{V}^H, \bar{V}^S)$ ;  $EConst = 0$ 
      ELSE
         $EConst = EConst + 1$ 
      IF (EstabH AND EstabS) OR ( $EConst > MaxEconst$ ) THEN DO
        Desactiva neurónios com estado interno > 0
        Escolhe aleatoriamente AleaLin linhas e activa um neurónio por linha
         $EConst = 0$ 
      Iter = Iter + 1
  END

```

Figura 4-8: Algoritmo ANDW

## 4.6 Implementação computacional

A implementação computacional das heurísticas neuronais descritas nas secções 4.4 e 4.5, traduzidas, respectivamente, através dos algoritmos ANCP e ANDW foram programadas em Delphi 5.0 e executadas num computador Pentium III a 700 Mhz com 512 MB de memória RAM.

Os testes finais consistiram na realização de 20 execuções de cada algoritmo para cada uma das instâncias-teste apresentadas no Capítulo 1. No entanto, para efeito de parametrização dos algoritmos foram realizados testes experimentais prévios neste conjunto de instâncias.

Assim, após o teste de várias combinações para os parâmetros de ponderação da função de energia,  $\alpha$  e  $\beta$ , estes fixaram-se em  $\alpha = 1000$  e  $\beta = 1$ , para todas as execuções dos algoritmos.

Relativamente à versão contínua ANCP, o parâmetro de temperatura  $T_0$  foi fixado experimentalmente em  $T_0 = 1$ . Como critério de paragem definiu-se o número máximo de iterações como  $MaxIter = 100$ . Quanto aos parâmetros  $\phi$  e  $\theta$ , foram utilizados os valores indicados por Gislén, Peterson e Söderberg [44], ou seja,  $\phi = \theta = 0.9$ .

Por seu turno, o algoritmo neuronal discreto ANDW foi executado de acordo com os seguintes parâmetros. O limite máximo de iterações  $MaxIter$  e o parâmetro *AleaLin* relativo à fase de diversificação assumiram valores distintos de acordo com o tipo de instância-teste. Assim, para as instâncias HTTP, totalmente saturadas, utilizaram-se os valores  $MaxIter = 10000$  e  $AleaLin = 2$ . Para as restantes instâncias-teste (à excepção de PREAL7 para a qual se manteve a parametrização usada para as instâncias HTTP), em resultado da maior flexibilidade constatada através de testes experimentais, os valores destes parâmetros foram definidos como  $MaxIter = 1000$  e  $AleaLin = 10$ . Por último, o número máximo de iterações sem melhoramento do valor da função de energia foi definido como  $MaxEconst = 20$ .

A tabelas 4.1 e 4.2 apresentam os resultados obtidos por cada um dos algoritmos relativamente a cada instância-teste do PEHE. Nas colunas (2), (3) e (5) mostram-se, respectivamente, o menor e maior valor de energia obtido e a média destes valores após as 20 execuções de cada algoritmo. Nas colunas (4) de ambas as tabelas, referem-se os tempos, em segundos, gastos nas execuções que obtiveram os menores valores de energia. Por sua vez, as colunas (6), para ambos algoritmos, mostram a média dos tempos de execução, em segundos, após o total de 20 execuções.

A análise comparativa entre as duas versões de algoritmo neuronal permite tecer algumas considerações. De uma forma global e clara o algoritmo ANDW registou um desempenho mais eficiente do que o ANCP. Esta vantagem é evidente a dois níveis distintos.

Em primeiro lugar, os menores valores de energia para todas as instâncias-teste foram obtidos pelo algoritmo discreto, não tendo o contínuo sequer alcançado a igualdade em nenhum caso, como se constata através da comparação das colunas (2) de ambas as tabelas. Efectivamente, saliente-se a situação ocorrida nas instâncias HTTP onde o ANDW permitiu encontrar a solução óptima para todas as instâncias enquanto que o ANCP não determinou uma única solução admissível. Note-se, ainda, o facto de o ANDW ter gerado em todas as execuções soluções admissíveis para HTTP4, observável pelo valor nulo nas colunas (2) e (5). A prestação do algoritmo ANCP, é menos desfavorável quando se comparam as colunas (2) e (5) entre as tabelas 4.1 e 4.2 relativamente aos valores de energia obtidos nas instâncias reais ESGHT ou pseudo-reais PREAL. Nestas circunstâncias, apesar de inferior qualidade, as soluções obtidas pela versão contínua são admissíveis e aceitáveis, à excepção das relativas aos PREAL2 e PREAL7. Refira-se que nesta última instância, não foi determinada uma única solução admissível por nenhum dos algoritmos, apesar do esforço computacional dispendido.

Quando, através das colunas (4) e (6) das duas tabelas, se comparam os métodos em termos de tempo computacional gasto na obtenção das soluções, constata-se novamente a clara vantagem da versão discreta baseada nos neurónios WTA. Refira-se que a versão contínua consome um tempo computacional significativo, demorando, por exemplo, cerca de 20 horas (72119 seg.) para determinar a solução de valor 792 para a instância ESGHT-T3. Em alternativa, o algoritmo ANDW permitiu determinar uma solução de qualidade bastante superior (669) em cerca de um sexto do tempo, ou seja, em cerca 3 horas (10743 seg.). Atendendo aos resultados e tempos computacionais observados para o ANDW é de salientar ainda a adequabilidade desta versão à resolução de casos práticos do PEHE. Porém, a parametrização imposta sobre a formalização da função de energia a propósito dos condicionalismos obrigatórios (1d) e (1g) pode reduzir o seu potencial de aplicação a outras instâncias reais deste problema.

Instância	Resultados após 20 execuções					
	Algoritmo ANCP					
	Menor val.ener.	Maior val.ener.	Tempo obtido		Média val.ener.	Média tempo de execução (seg.)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	
HTTP4	5000	12000	457	6650	1612	
HTTP5	8000	21000	2563	11300	2418	
HTTP6	11000	32000	5012	16850	6391	
HTTP7	18000	47000	24961	21300	31414	
HTTP8	25000	61000	144051	33450	182191	
PREAL1	28	237	17047	128.2	19017	
PREAL2	1031	2012	16915	1129.1	16812	
PREAL3	39	58	27763	40.3	27843	
PREAL4	42	556	25389	295.5	25294	
PREAL5	69	2089	35683	822.3	37493	
PREAL6	81	2094	47990	947.5	51663	
PREAL7	2082	8084	69719	5072.5	82164	
ESGHT-P1	302	319	26593	308.5	27421	
ESGHT-F1	403	438	35187	414.2	36993	
ESGHT-T1	770	814	53092	791.3	53183	
ESGHT-P2	310	332	28165	319.5	27743	
ESGHT-F2	396	421	32190	407.9	37493	
ESGHT-T2	780	822	58401	802.5	62838	
ESGHT-P3	321	356	27642	343.8	29732	
ESGHT-F3	411	430	39411	421.6	40476	
ESGHT-T3	792	821	72119	807.2	65311	

Tabela 4.1: Resultados computacionais após 20 execuções do algoritmo ANCP

Instância	Resultados após 20 execuções					
	Algoritmo ANDW					
	Menor val.ener.	Maior val.ener.	Tempo obtido		Média val.ener.	Média tempo de execução (seg.)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	
HTTP4	0	0	50	0	104	
HTTP5	0	1000	323	400	311	
HTTP6	0	3000	433	1650	502	
HTTP7	0	6000	1883	2100	2047	
HTTP8	0	9000	17226	3250	18938	
PREAL1	27	31	2037	27.8	2958	
PREAL2	27	30	2843	27.6	3135	
PREAL3	36	38	3345	37.1	4173	
PREAL4	36	40	3374	37.8	4398	
PREAL5	63	74	4843	68.1	4743	
PREAL6	79	2072	5735	813.3	5874	
PREAL7	1080	5080	28473	2135.2	34893	
ESGHT-P1	272	293	4182	281.1	4364	
ESGHT-F1	382	389	5719	386.6	5837	
ESGHT-T1	641	661	8394	649.3	9385	
ESGHT-P2	294	321	3924	307.6	3912	
ESGHT-F2	377	410	5291	391.4	5473	
ESGHT-T2	664	706	9438	688.8	10364	
ESGHT-P3	289	307	3954	298.5	4152	
ESGHT-F3	398	405	5643	402.2	5603	
ESGHT-T3	669	729	10743	698.7	10836	

Tabela 4.2: Resultados computacionais após 20 execuções do algoritmo ANDW

# **Capítulo 5**

## **Algoritmos Genéticos**

### **5.1 Introdução**

A utilização de modelos de computação que mimetizam de forma simplificada os princípios da evolução natural biológica descritos por Darwin teve início durante a década de 60, sendo alvo de interesse e atenção crescente até à actualidade. Na sua essência estes sistemas evolutivos exploram a ideia base que consiste na evolução de uma população de indivíduos (soluções candidatas para um problema específico) através da aplicação de um conjunto de funções de transformação inspiradas nos processos biológicos e que se designam neste contexto por operadores genéticos. Estes operadores têm duas finalidades distintas, a primeira consiste em assegurar uma pressão selectiva sobre os indivíduos da população de forma a que, com base num critério de aptidão específico associado ao problema em estudo, os indivíduos com maior potencial sejam preferencialmente seleccionados para gerar a próxima população. A segunda finalidade explora o conceito de hereditariedade, através da utilização de operadores que recombinam os indivíduos da população, para formar descendentes potencialmente mais aptos. Na génese deste amplo conceito computacional, designado genericamente por Computação Evolucionária, encontram-se vários contributos. Assim, o trabalho de Rechenberg [82] em 1965, cuja aplicação é centrada sobre problemas de optimização numérica e nos quais é introduzido formalmente o termo ”evolução estratégica”, dá início ao ramo de investigação designado por Estratégias de Evolução. Também com origem na década de 60 surge outra linha de investigação evolucionária com o trabalho desenvolvido por Fogel, Owens e Walsh [38] onde os conceitos de selecção da

solução mais apta e mutação aleatória foram aplicados sobre *finite-state machines*. A partir deste trabalho surgiria a corrente que actualmente se designa por Programação Evolucionária. Uma terceira área, originada nos finais da década de 60 na Universidade de Michigan por John Holland, é denominada Algoritmos Genéticos. No seu livro de 1975 [51] Holland estuda os fenómenos de adaptação existentes na natureza e desenvolve formas para a sua incorporação e simulação através de modelos computacionais.

É pois, no contexto dos algoritmos genéticos e, em particular, sobre a sua aplicação na resolução de problemas de optimização que se insere o estudo desenvolvido neste capítulo, procedendo-se na secção seguinte à apresentação das características básicas dos algoritmos genéticos e à discussão das questões relacionadas com o seu funcionamento e implementação. Na secção 5.3 é apresentado um algoritmo genético uni-objectivo para o PEHE e a sua implementação computacional é discutida na secção 5.4. Estendendo a abordagem a uma perspectiva multi-objectivo, efectuar-se-á na secção 5.5 uma apresentação genérica dos algoritmos genéticos multi-objectivo, pelo que na secção 5.6 se proporá um algoritmo multi-objectivo adaptado ao PEHE. Por fim, os resultados computacionais obtidos são comparados e discutidos na última secção deste capítulo.

## 5.2 Algoritmos genéticos

Os algoritmos genéticos baseiam-se no processo evolutivo de um conjunto (população) de soluções candidatas (indivíduos) que são representadas através de cromossomas.

Pela apreciação das inúmeras aplicações e variantes preconizadas no domínio dos algoritmos genéticos é compreensível a inexistência de um consenso sobre uma definição para um algoritmo genético. Contudo, é possível identificar um conjunto de aspectos que são comuns a todos os algoritmos genéticos e que permitem a sua caracterização.

### 5.2.1 Codificação da solução

Cada indivíduo da população é caracterizado, normalmente, por um só cromossoma que, por sua vez, é constituído por genes. Assim, admitindo uma versão do genético com apenas um cromossoma, cada indivíduo distingue-se dos restantes pelo valor que pode tomar cada um dos

seus genes (designado por alelo), em cada uma das posições possíveis (locus).

A concepção de um algoritmo genético inicia-se pela escolha da codificação do cromossoma de cada indivíduo da população, ou seja, a estrutura que representa cada uma das soluções do problema em estudo. Este é na opinião de alguns autores [70], [73], [26], [47] um dos principais factores de sucesso na implementação de um algoritmo genético. Como exemplo refira-se a seguinte citação de Mitchell [73]:

*"As for any search and learning method, the way in which candidate solutions are encoded is a central, if not **the** central, factor in the success of a genetic algorithm."*

De facto, a questão da representação ideal da solução num algoritmo genético é ainda um assunto em aberto que deve ser analisado sob duas perspectivas alternativas. A tradicional codificação binária do cromossoma, proposta inicialmente por Holland e suportada teoricamente pelo *Schema Theorem*, tem originado diversos desenvolvimentos, de que são exemplo os trabalhos de Goldberg [47] e Vose [105] ou ainda o trabalho de Rudolph [86]. Neste último refere-se a necessidade de introdução num algoritmo genético específico de um procedimento elitista na selecção da população para assegurar a convergência para o óptimo global. Este tipo de codificação, pelo facto de transformar qualquer solução numa estrutura canónica (binária), apresenta a vantagem de permitir a aplicação e o estudo generalizado de operadores genéticos binários, normalmente muito eficientes do ponto de vista computacional, que podem ser directamente importados de problemas distintos. Para tal, na representação binária os operadores genéticos actuam num espaço binário que, em muitos casos, omite informações sobre as soluções originais, requerendo então a aplicação contínua de uma função que transforme os cromossomas binários em soluções, para efeitos da sua avaliação.

Em alternativa, as codificações não binárias, recorrendo a alfabetos de maior cardinalidade, apresentam-se configuradas para um problema de optimização específico. Nas circunstâncias em que a codificação binária não permite uma representação natural das soluções, a possibilidade de utilização de alfabetos específicos é considerada por diferentes autores [47], [26] como uma vantagem determinante para o sucesso da aplicação real de um algoritmo genético. Nestas situações, Antonnoise [3] defende que a utilização de alfabetos não binários, ajustados à representação natural da solução, permite desenvolver algoritmos genéticos mais eficientes do que os suportados por representações binárias indirectas. Michalewicz [70], por sua vez, defende

a mesma posição sustentada por diversos estudos empíricos comparativos entre codificações binárias e não binárias. Adicionalmente, Wolpert e Macready [107] confirmaram que a representação das soluções deve de alguma forma incorporar informação sobre o domínio e estrutura do problema para que o algoritmo se torne computacionalmente eficiente, enquanto que em [87] Rudolph generaliza condições de convergência para alfabetos não binários.

Neste sentido, a adopção de uma codificação cromossómatica natural que incorpore de uma forma natural e directa o máximo de informação sobre o problema em questão, nomeadamente sobre restrições, pode constituir um factor de diferenciação positiva do algoritmo genético. Com efeito, esta opção evita automaticamente o dispêndio de recursos computacionais requerido pelas codificações binárias para imposição dos referidos condicionalismos. Noutra perspectiva, a utilização de representações naturais permite, ainda, uma visualização e compreensão mais imediata das soluções, bem como o desenvolvimento directo de operadores genéticos específicos que incorporem informação suplementar sobre o problema. Como principal desvantagem da utilização de cromossomas não binários refira-se a dificuldade de comparação, avaliação e reutilização dos algoritmos genéticos, em virtude de se encontrarem especificamente configurados para um problema particular, quer em termos de representação, quer ao nível dos operadores genéticos.

### 5.2.2 Etapas de um algoritmo genético

Após a definição de uma representação apropriada para as soluções do problema de optimização, o algoritmo genético segue o procedimento algorítmico descrito na figura 5-1.

Numa primeira fase uma população inicial de indivíduos é gerada, frequentemente, na base de um cromossoma por indivíduo. Esta pode ser construída recorrendo a procedimentos de natureza aleatória, alguns casos utilizando também heurísticas construtivas que incorporem informação específica sobre o problema subjacente, potenciando deste modo uma convergência mais rápida do algoritmo. A dimensão da população é outro dos parâmetros definidos nesta fase. Normalmente fixada de forma experimental, a dimensão da população deve levar em consideração que uma população demasiado reduzida pode não permitir uma amostragem eficiente das soluções e originar a convergência prematura do algoritmo para uma população estagnada, isto é, com todos os indivíduos idênticos e correspondendo a soluções de fraca qualidade. Por

**BEGIN**

**Passo 1 ▷ Inicialização**

Gera uma população inicial de  $N$  cromossomas

**Passo 2 ▷ Avaliação**

Calcula o valor da função objectivo para cada cromossoma

Avalia a aptidão dos cromossomas

**Passo 3 ▷ Operadores genéticos**

Aplica os operadores de selecção, cruzamento e mutação

Actualiza os cromossomas para a próxima geração

↑**GOTO passo 2 ▷ Até atingir o número máximo de gerações**

**END (Solução ← Cromossoma com aptidão mais elevada)**

Figura 5-1: Esquema para um algoritmo genético

outro lado, a evolução de populações de dimensão muito elevada pode revelar-se proibitiva em termos do custo computacional. A vasta experiência empírica neste domínio, para uma extensa diversidade de problemas de optimização, preconiza uma dimensão da população entre 30 a 100 indivíduos.

Em seguida, no passo 2 do algoritmo, cada cromossoma da população é avaliado recorrendo a uma função de aptidão. Para o efeito, a função de aptidão atribui a cada cromossoma um valor, que reflecte o desempenho da solução nele contida no contexto do problema de optimização. Assim, a função de aptidão expressa uma relação inversa, no caso de um problema de minimização, entre o valor da solução representada num cromossoma e o nível de aptidão desse cromossoma. Isto é, as soluções que geram menor valor da função objectivo, reflectem-se nos cromossomas de mais elevada aptidão.

Nos algoritmos genéticos para problemas de optimização uni-objectivo a avaliação dos indivíduos considera apenas a optimização de uma única função objectivo podendo, quando necessário, incluir nela a combinação linear de múltiplas funções. Refira-se, contudo, que no contexto da optimização multi-objectivo outras abordagens alternativas mais apropriadas são possíveis. Este facto, motivou o desenvolvimento de duas perspectivas de resolução utilizando

algoritmos genéticos para o PEHE que serão estudadas mais adiante, nas secções 5.3 e 5.6.

Após o cálculo do valor de aptidão de cada cromossoma, a população é submetida no passo 3, ao conjunto de operadores genéticos de selecção, cruzamento e mutação.

Durante a selecção, os cromossomas são escolhidos por um procedimento aleatório que atende ao seu valor de aptidão. Pretende-se, desta forma, privilegiar os cromossomas mais aptos, ou sejam aqueles que correspondem às melhores soluções para o problema de optimização. Os escolhidos são, por sua vez, submetidos ao operador de cruzamento que, normalmente por pares, procede à combinação dos genes dos cromossomas seleccionados (progenitores). O objectivo desta fase é dar continuidade aos atributos genéticos dos indivíduos mais aptos, através de um processo de recombinação dos seus genes que resulta no nascimento de novos cromossomas (descendentes) e na substituição dos progenitores.

O operador de mutação tem como finalidade assegurar a manutenção de um nível de diversidade genética na população. De facto, após a aplicação sucessiva de operações de cruzamento sobre a população, o património genético global tende a reduzir-se por via da extinção dos cromossomas menos aptos e pela repetida reprodução dos mais aptos. Esta situação pode originar a convergência prematura do algoritmo genético para soluções de inferior qualidade, particularmente em circunstâncias onde a dimensão da população é reduzida.

Por esta razão, o operador de mutação introduz modificações aleatórias e esporádicas - mutações - nos genes dos cromossomas seleccionados. A probabilidade de actuação deste operador é, geralmente, baixa (inferior a 1%) para que as mutações inseridas nos genes dos cromossomas não actuem de uma forma excessivamente destructiva, alterando significativamente os mais aptos e tornando a pesquisa do algoritmo genético eminentemente aleatória.

Após aplicação dos operadores genéticos, o conjunto de novos cromossomas substitui a totalidade ou parte da população anterior e o procedimento retorna ao passo 2, repetindo-se enquanto um número máximo de iterações previamente definido não for alcançado. No final deste processo iterativo, a população de cromossomas que apresentava no início um nível médio de aptidão reduzido deverá ter evoluído, sob acção da simulação dos mecanismos de selecção natural, para níveis elevados de aptidão. Tal facto reflecte a existência de soluções de elevada qualidade (eventualmente, óptimas globais ou próximas) codificadas sob os cromossomas finais.

O algoritmo genérico descrito representa a estrutura clássica que é frequentemente utilizada

no contexto dos algoritmos genéticos. Naturalmente, várias extensões e modificações específicas são propostas na vasta literatura existente sobre esta temática. A este propósito mencione-se o levantamento bibliográfico efectuado por Osman e Laporte [77] que contém um ampla descrição das referências relativas a algoritmos genéticos por áreas de investigação e de aplicação. Igualmente, em [71] Michalewicz apresenta um enquadramento sistemático de estudos desenvolvidos no domínio dos algoritmos genéticos. Atendendo à particular relevância para o problema em estudo, destaquem-se os artigos [23], [33] e [56] relativos a aplicações de algoritmos genéticos na resolução do PEHE, já referidas no Capítulo 3.

### **5.3 Abordagem genética uni-objectivo para o PEHE**

O PEHE caracterizado nos Capítulos 1 e 2, constitui-se como um problema combinatório difícil, quer do ponto de vista da complexidade computacional aliada à elevada dimensão, quer pela sua estrutura intrincada que contempla a satisfação de um diversificado conjunto de condicionalismos de importância distinta (obrigatórios e de melhoramento). Tal como se evocou a propósito dos algoritmos neuronais tratados no Capítulo 4, a necessidade de obtenção de soluções de elevada qualidade, num tempo computacional compatível com o contexto das instituições escolares, torna apropriado o desenvolvimento de heurísticas para a resolução deste problema. As características inerentes às heurísticas evolutivas, em particular aos algoritmos genéticos, permitem uma facilidade de configuração destes a problemas de optimização complexos e diferenciados, como o PEHE. Assim, nesta secção estudar-se-á um algoritmo genético uni-objectivo (AGUO) para o subjacente problema de optimização *PEHE2* formalizado no Capítulo 2. No decurso da análise, propor-se-ão abordagens e opções distintas que conduzirão a implementações e testes computacionais diferenciados. Em seguida, discutir-se-á cada aspecto relativo à configuração do algoritmo genético para o PEHE.

#### **5.3.1 Codificação da solução**

Num contexto real, os mapas horários para cada um dos recursos envolvidos no PEHE, tais como professores, turmas e salas, são tradicionalmente representados de forma matricial onde num dos eixos se apresenta uma escala temporal.

Este facto e o conhecimento das vantagens relativas à importação da representação natural implícita do problema, já referidas anteriormente, sugeriu uma codificação da solução do PEHE suportada num cromossoma matricial e num alfabeto não binário apropriado.

Assim, embora na sua essência o problema em questão seja um problema de optimização naturalmente formalizável através de variáveis binárias, a estrutura da solução envolve um elevado número de variáveis binárias (especificamente  $A' \times S' \times H'$  variáveis binárias) a qual, traduzida directamente, exige um cromossoma binário com um número elevado de genes. Uma codificação não binária envolve no geral muito menos genes pois parte da informação é dada pelos alelos.

Por outro lado, o extenso leque de condicionalismos inerentes ao PEHE obriga a uma constante verificação da sua eventual satisfação, absorvendo, no caso de uma codificação binária do cromossoma, elevados recursos computacionais em procedimentos de codificação e descodificação das soluções do PEHE.

Também ao nível da manipulação, visualização e compreensão das soluções, a representação natural não binária revela evidentes vantagens comparativamente com a binária. Este facto permite ainda uma concepção facilitada de operadores genéticos adaptados ao problema, bem como, uma mais rápida e eficiente implementação de novos condicionalismos cuja importância se espera determinante no sucesso futuro da heurística genética.

Neste contexto, considere-se o número de salas e períodos horários,  $S'$  e  $H'$ , respectivamente. Admita-se ainda um alfabeto  $\tilde{A} = \{0, a_1, a_2, \dots, a_{A'}\}$  de cardinalidade igual ao número de aulas mais uma,  $A'+1$ . A estrutura de codificação do cromossoma para o PEHE consiste numa matriz  $\bar{C} = [c_{sh}]$  cujos elementos são genes com os alelos especificados no alfabeto  $\tilde{A}$ , ou seja, os genes  $c_{sh}$  vão tomar valor em  $\tilde{A}$ : alelo 0 - o gene não tem ocupação de aula ou alelo  $a_i$  - o gene está ocupado pela aula  $a_i$ .

#### $\nabla$ Exemplo 4-1

Como exemplo, se o elemento  $c_{s_1 h_2}$  desta matriz toma o valor inteiro  $a_3$ , isto significa que a sala  $s_1$  é ocupada no período  $h_2$  para realização da aula  $a_3$ . Por sua vez, o elemento 0 de  $\tilde{A}$  indica a não ocupação da localização espacial e temporal respectiva (sala/período horário).

$\Delta$

Aulas	Turmas	Professores	Duração	Disciplina	Sala requerida
M1	$t_1$ e $t_2$	$p_1$	1 período horário	Matemática	$s_2$
M2	$t_1$	$p_1$	2 períodos horários	Matemática	$s_1$ ou $s_2$
M3	$t_2$	$p_1$	2 períodos horários	Matemática	$s_1$ ou $s_2$
E1	$t_1$	$p_2$	2 períodos horários	Economia	$s_3$
E2	$t_2$	$p_2$	1 período horário	Economia	$s_3$
E3	$t_1$ e $t_2$	$p_3$	2 períodos horários	Economia	$s_2$
H1	$t_1$	$p_2$	1 período horário	História	$s_3$
H2	$t_2$	$p_2$	1 período horário	História	$s_3$
H3	$t_2$	$p_2$	1 período horário	História	$s_3$
S1	$t_1$	$p_1$	1 período horário	Estatística	$s_1$ ou $s_3$
S2	$t_2$	$p_1$	1 período horário	Estatística	$s_1$ ou $s_3$
S3	$t_1$ e $t_2$	$p_1$	1 período horário	Estatística	$s_2$

Tabela 5.1: Exemplo de plano curricular global para um PEHE com duas turmas

Em resumo, nesta representação as  $A'$  aulas constituem os alelos a afectar pelas  $S' \times H'$  localizações ou locus, podendo as aulas assumir durações distintas e diferentes requisitos.

Adicionalmente, ao incluir naturalmente no cromossoma a sinalização das localizações não ocupadas no cromossoma, tal como sucede nos mapas horários reais, a codificação facilita um acesso e pesquisa eficiente às salas e períodos horários livres.

▽ Exemplo 4-2

Como ilustração, considere-se os currículos de duas turmas que consistem nas 12 aulas apresentadas na tabela 5.1, na qual cada linha corresponde a uma aula e especifica a turma(s) e professor envolvidos, duração, disciplina e o conjunto de salas requeridas. A figura 5.2 exemplifica um cromossoma com 3 linhas (salas) e 20 colunas (períodos horários) relativo a uma solução para a instância de PEHE com o plano curricular global apresentado.

△

Esta codificação específica do cromossoma é um mapa de ocupação de salas e por isso corresponde a uma agregação dos mapas horários para professores e turmas numa única matriz, na qual todas as aulas definidas previamente são inseridas. Assim, cada cromossoma representa uma solução completa para o PEHE, ou seja, um conjunto de horários que satisfaz automaticamente o condicionalismo obrigatório (1a), relativo ao escalonamento da totalidade dos currículos

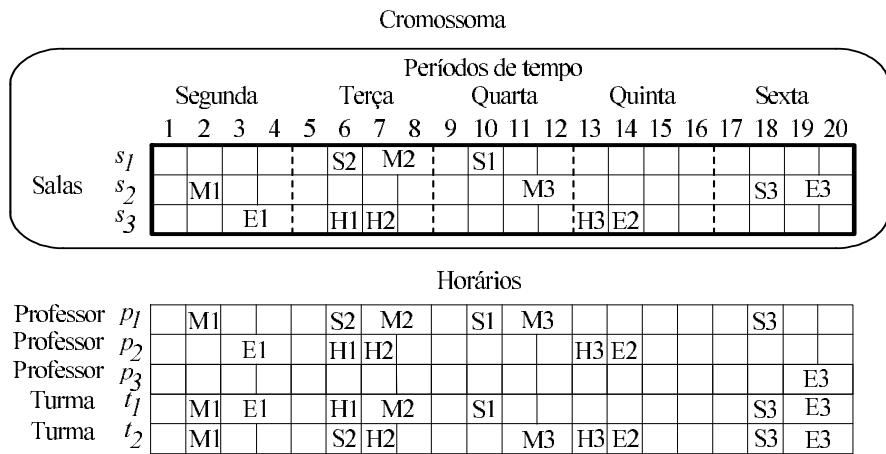


Figura 5-2: Exemplo de codificação do cromossoma e mapas horários para duas turmas e professores correspondentes

previstos no plano curricular global.

### 5.3.2 Função de aptidão

A concepção do algoritmo genético proposto tem como finalidade a pesquisa de soluções admissíveis de qualidade para o PEHE, isto é, soluções admissíveis para a formalização *PEHE2* com baixo valor na função objectivo, ou seja ainda, soluções que minimizam a ocorrência dos aspectos correspondentes aos condicionalismos de melhoramento e, simultaneamente, cumpram todos os requisitos impostos pelos condicionalismos obrigatórios. Para o efeito duas versões distintas de pesquisa no espaço de soluções foram equacionadas.

Na primeira abordagem, implementada através do algoritmo genético designado por AGUO1 a população admitirá exclusivamente soluções admissíveis. Neste caso, a evolução de cada cromossoma ocorrerá apenas quando, a partir de um cromossoma admissível, for possível encontrar outro também admissível. Como tal, esta versão restrita à admissibilidade requer que o algoritmo seja inicializado apenas com soluções admissíveis para que, em seguida e dado que os condicionalismos obrigatórios se encontram integralmente satisfeitos, apenas se calcule, para cada solução, o nível de minimização dos condicionalismos de melhoramento. Para tal é utilizada a seguinte função:

$$f^{AGUO1}(\bar{C}) = \beta (f_{P2a}(\bar{C}) + f_{P2b}(\bar{C}) + f_{P2c}(\bar{C}) + f_{T2a}(\bar{C}) + f_{T2b}(\bar{C}) + f_{T2c}(\bar{C})) \quad (5.1)$$

onde  $\beta$  é um parâmetro real positivo e  $\bar{C}$  representa um cromossoma.  $f_{P2a}(\bar{C})$  e  $f_{T2a}(\bar{C})$  são funções de contagem<sup>1</sup> relativas ao condicionalismo de melhoramento (2a) que avalia o número semanal de *clusters* de aulas formadas na solução relativas ao cromossoma  $\bar{C}$  para turmas e professores, respectivamente. Por sua vez,  $f_{P2b}(\bar{C})$  e  $f_{T2b}(\bar{C})$  são funções de penalização associadas ao condicionalismo de melhoramento (2b) que, recorrendo às matrizes de preferências [ $PreT_{th}$ ] e [ $PreP_{ph}$ ], determinam, respectivamente para turmas e professores, a penalização associada aos horários contidos no cromossoma  $\bar{C}$ . Por último,  $f_{P2c}(\bar{C})$  e  $f_{T2c}(\bar{C})$  são também, respectivamente para turmas e professores, funções de contagem para o número de ocorrências diárias de aulas em locais geograficamente distintos, de acordo com o condicionalismo de melhoramento (2c).

Quanto à função de aptidão destinada a avaliar a qualidade relativa de cada cromossoma na população, designou-se a função  $F$  definida pela seguinte expressão:

$$F^{AGUO1}(\bar{C}) = \frac{f^{AGUO1}(\bar{C})}{\sum_{i=1}^N f^{AGUO1}(\bar{C}_i)} \quad (5.2)$$

onde  $N$  é a dimensão da população. Note-se que, dada a correspondência directa entre o cromossoma de cada indivíduo da população e uma solução do PEHE, se optou neste contexto por designar os cromossomas ou as soluções da população por  $\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_N$ .

Nesta primeira versão, após a aplicação dos operadores genéticos sobre os cromossomas da população, é provável que a manipulação dos genes (que traduzem afectações das  $A'$  aulas às salas e períodos horários) efectuada pelo cruzamento e pela mutação origine soluções não admissíveis. Por essa razão, elaborou-se uma heurística reconstrutiva, descrita na secção seguinte, destinada a admissibilizar tais soluções.

Em alternativa, a segunda versão implementada através do algoritmo genético denominado

---

<sup>1</sup>Tal como no Capítulo 4, note-se que se utiliza uma notação idêntica à apresentada no Capítulo 2 para descrever os mesmos condicionalismos. De facto, embora constituam funções diferentes, as funções tomam igual valor para as mesmas soluções admissíveis.

por AGUO2 permite a inserção na população de cromossomas relativos a soluções não admissíveis para o PEHE. Neste caso, o algoritmo parte de uma qualquer solução, admissível ou não, utilizando para a sua avaliação uma função de penalização que se estende aos condicionalismos obrigatórios, dada pela expressão:

$$\begin{aligned}
f^{AGUO2}(\bar{C}) = & \alpha (f_{P1b}(\bar{C}) + f_{P1g}(\bar{C}) + f_{P1h}(\bar{C})) + \\
& + \alpha (f_{T1b}(\bar{C}) + f_{T1d}(\bar{C}) + f_{T1f}(\bar{C}) + f_{T1g}(\bar{C}) + f_{T1h}(\bar{C})) + \\
& + \alpha (f_{S1b}(\bar{C}) + f_{S1e}(\bar{C}) + f_{Sh}(\bar{C})) + \\
& + \beta (f_{P2a}(\bar{C}) + f_{P2b}(\bar{C}) + f_{P2c}(\bar{C}) + f_{T2a}(\bar{C}) + f_{T2b}(\bar{C}) + f_{T2c}(\bar{C}))
\end{aligned} \tag{5.3}$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros reais positivos. As funções de contagem  $f_{Pw}(\bar{C})$ ,  $f_{Tw}(\bar{C})$  e  $f_{Sw}(\bar{C})$  expressam o número de violações ocorridas na solução correspondente ao cromossoma  $\bar{C}$ , respectivamente, para professores, turmas, e salas, relativamente ao condicionalismo obrigatório  $w$ . O balanceamento entre os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  deve reflectir a diferença de importância entre condicionalismos obrigatórios e de melhoramento. Finalmente e de forma análoga, a função de aptidão para cada cromossoma fica definida do seguinte modo:

$$F^{AGUO2}(\bar{C}) = \frac{f^{AGUO2}(\bar{C})}{\sum_{i=1}^N f^{AGUO2}(\bar{C}_i)} \tag{5.4}$$

onde  $\bar{C}_i$  é o  $i$ -ésimo cromossoma da população de dimensão  $N$ . Em termos comparativos com o anterior, a segunda versão requer o cálculo de uma função de penalização  $f^{AGUO2}$  mais exigente do ponto de vista computacional. Esse é o resultado da necessidade de incorporação em  $f^{AGUO2}$  das parcelas que reflectem a violação dos condicionalismos obrigatórios (à excepção do condicionalismo (1a) que se encontra satisfeito directamente pela representação cromossomática adoptada), permitindo ao algoritmo genético orientar a evolução das soluções no sentido da admissibilidade. O condicionalismo obrigatório (1c), por via da actuação das heurísticas de colocação de aulas, é também automaticamente satisfeito, já que as aulas de duração múltipla são movimentadas integralmente por arrastamento dos blocos que as constituem.

Refira-se, ainda, que nesta versão do algoritmo, o facto da pesquisa se efectuar num espaço de soluções alargado dispensa a utilização da heurística reconstrutiva que pode, no contexto computacional, revelar-se bastante dispendiosa.

### 5.3.3 Heurística reconstrutiva da admissibilidade

Como se mencionou, a abordagem AGUO1, restrita ao universo das soluções admissíveis, necessita da intervenção de uma heurística de reparação dos cromossomas danificados na sua admissibilidade pela actuação dos procedimentos de cruzamento e mutação. De facto, como se verá em 5.3.5, a combinação dos genes de dois cromossomas progenitores, isto é, a fusão de dois conjuntos de horários completos distintos, provocará, muito provavelmente, a ocorrência de violações dos diversos condicionalismos subjacentes ao PEHE e a consequente perda de admissibilidade da solução representada no cromossoma. Eventualmente, também o procedimento de mutação de um cromossoma pode originar um efeito idêntico. Assim, como forma de corrigir a não admissibilidade, foi concebida a heurística reconstrutiva cuja esquema algorítmico se apresenta na figura 5-3.

Tomando como ponto de partida uma solução que inclui um conjunto  $K$  de aulas que originam violações dos condicionalismos obrigatórios, aulas não admissíveis, faz-se a inicialização de um contador de tentativas ( $Tent$ ) e do limite máximo de tentativas ( $MaxTent$ ), destinados a limitar os recursos computacionais gastos na tarefa de reparação.

Enquanto existirem aulas não admissíveis, procede-se à escolha aleatória de uma destas, seja a aula  $a$ , percorrem-se todas as  $S' \times H'$  localizações procurando uma posição admissível livre (não ocupada por outra aula) para colocação de  $a$ . Se tal posição for encontrada, a heurística procede para outra aula de  $K$ , caso contrário, são identificadas numa primeira fase todas as restantes  $K_a$  aulas que envolvem recursos comuns a  $a$  ao nível dos professores, turmas ou salas. Com efeito, estas são as aulas que interagem directamente com a aula  $a$  e que potencialmente causam a violação dos condicionalismos obrigatórios. Em seguida, analisam-se sequencialmente as trocas directas entre a localização da aula  $a$  e das aulas  $a' \in K_a$  até que se obtenha uma troca que permita uma colocação admissível para ambas as aulas.

Porém, se esta situação de não admissibilidade da solução persistir, procede-se a execução de  $R$  trocas viáveis entre pares de aulas seleccionadas de entre as aulas de  $K_a$ . Para tal, o

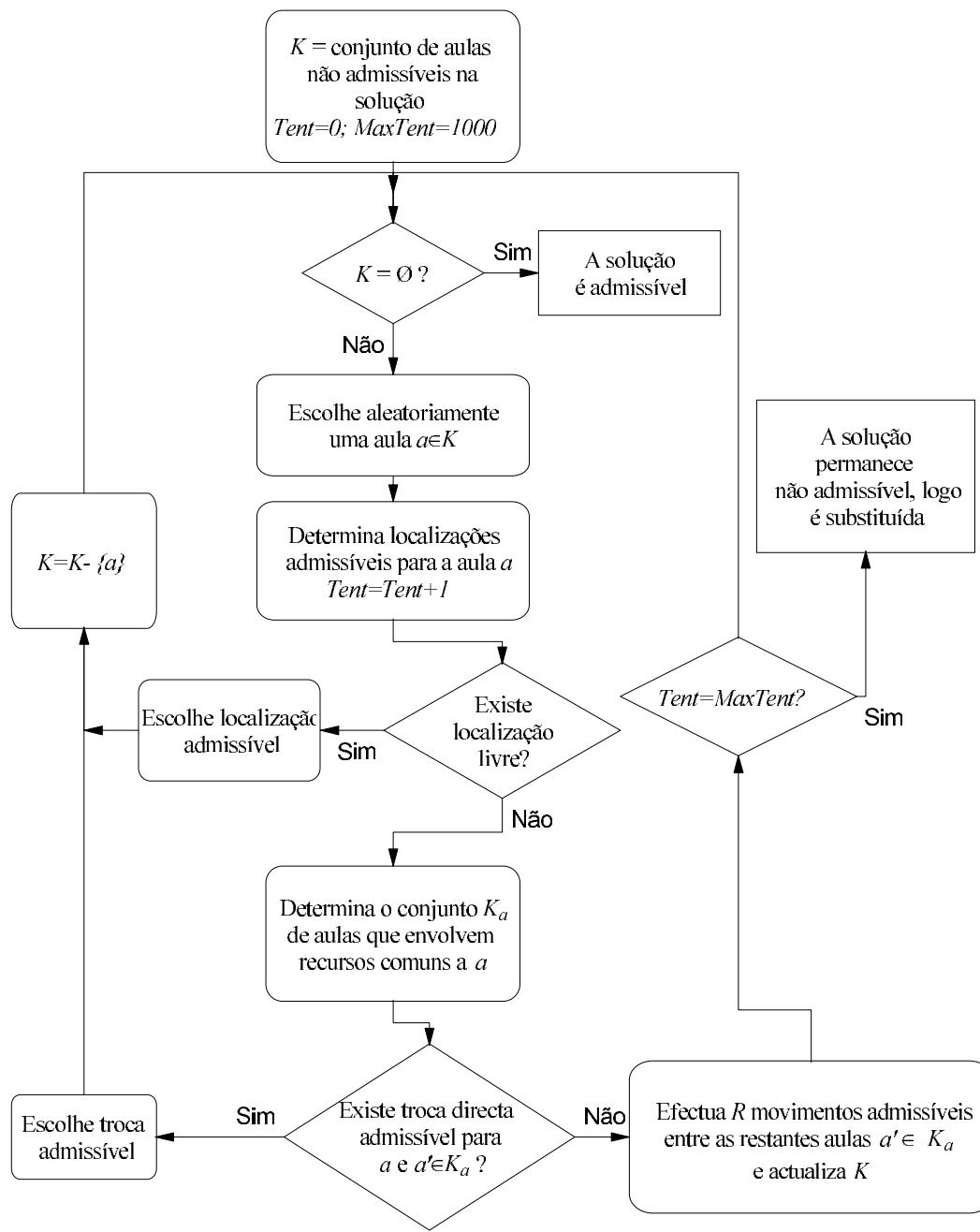


Figura 5-3: Fluxograma da heurística reconstrutiva

valor de  $R$  foi fixado experimentalmente em 5% de  $|K|$ . Este último procedimento visa uma modificação controlada e eventual libertação de localizações disponíveis, a explorar novamente pelos procedimentos anteriores enquanto o contador de tentativas o permitir. Por último, se  $Tent$  exceder  $MaxTent$  a solução permanece não admissível e é eliminada, sendo gerada outra para sua substituição através de um dos métodos descritos em seguida.

É de referir que os dois mecanismos de reparação descritos anteriormente reproduzem os procedimentos manuais típicos utilizados pela equipa de elaboração de horários da ESGHT para eliminar situações de violação dos condicionalismos obrigatórios.

#### 5.3.4 População inicial

Relativamente à dimensão da população, nos algoritmos genéticos desenvolvidos neste capítulo foram testadas experimentalmente dimensões de  $N = 50, 100$  e  $200$ , respectivamente, optando-se pelo valor intermédio ( $100$ ) dada a comparação dos resultados ter revelado que esta dimensão permitia obter soluções com um nível de qualidade idêntico à qualidade das soluções obtidas com a dimensão mais elevada, contudo com uma significativa redução no tempo computacional.

Em termos de metodologia de elaboração de um cromossoma inicial, conceberam-se dois procedimentos distintos. O primeiro, baseado numa aleatorização simples (AS), consiste na escolha aleatória de uma aula  $a$  e sua afectação a uma localização espacial e temporal livre (sala e período horário) no cromossoma. Como se comprehende, os condicionalismos obrigatórios (1a) e (1c) são os únicos automaticamente satisfeitos neste processo de geração de soluções iniciais.

O segundo método de construção para uma solução inicial encerra um procedimento mais aperfeiçoado que se designou por inicialização construtiva ordenada (ICO) que engloba duas etapas.

Etapa 1 Define um índice de dificuldade de escalonamento para cada uma das aulas de A. Para uma aula particular  $a$ , este índice  $IDE(a)$  é composto por uma selecção de diversos atributos que se julga, empiricamente, estar relacionados com grau de dificuldade da afectação da aula  $a$ . O seu cálculo é feito utilizando a seguinte expressão:

$$IDE(a) = PO(a) \times R_a \times NIncomp(a) \quad (5.5)$$

onde, a pressão de ocupação  $PO(a)$  é dada pelo quociente entre a média do número de aulas definidas nos currículos das turmas que assistem à aula  $a$  e a média de períodos horários semanais disponíveis para as mesmas turmas.  $R_a$  expressa a duração da aula  $a$  em períodos horários e  $NIncomp(a)$  é o número de aulas com as quais a aula  $a$  apresenta incompatibilidades por razões de envolvimento de professor ou turmas comuns.

Etapa 2 Ordena e coloca as aulas de  $A$ . As  $A'$  aulas são ordenadas por ordem decrescente do índice  $IDE$ , recorrendo de seguida ao seu escalonamento através do seguinte procedimento de colocação:

- (a) para cada aula  $a$ , é determinada a matriz  $[u_{sh}^a]$  de dimensão  $S' \times H'$  contendo o acréscimo provocado na função  $f^{AGUO1}(\bar{C})$  ou  $f^{AGUO2}(\bar{C})$  pela hipotética afectação de  $a$  a cada localização  $(s, h)$ ;
- (b) é escolhida a localização de mínima penalização, isto é,  $(s^*, h^*)$  tal que  $u_{s^*h^*} = \min \{u_{sh}^a\}$  e procede-se à sua afectação à aula  $a$ ;
- (c) o procedimento repete-se até que todas as aulas de  $A$  sejam colocadas.

Mais uma vez, a motivação subjacente à concepção do procedimento ICO resultou em parte da experiência adquirida no contexto da elaboração manual de soluções para o PEHE, permitindo a sistematização, extensão e implementação no procedimento proposto, de diversos conhecimentos empíricos adquiridos com a construção de uma solução inicial.

### 5.3.5 Operadores genéticos

Para proceder à pesquisa de solução de elevada qualidade para o PEHE, os operadores de selecção, cruzamento e mutação, são aplicados sobre uma população constituída por 100 cromossomas ( $N = 100$ ).

#### Seleção e elitismo

Quanto ao operador de selecção utilizado no AGUO1 e no AGUO2, e que se destina a escolher os cromossomas mais aptos (representando as melhores soluções para o PEHE) de acordo com as funções de aptidão 5.2 e 5.4, respectivamente, optou-se pelo método clássico da roleta.

Assim, após a determinação do valor de aptidão associado a cada cromossoma, a área total de uma roleta hipotética é repartida e associada aos cromossomas, proporcionalmente ao valor da sua aptidão no total de aptidão da população. Em seguida, a roleta é accionada  $N$  vezes, seleccionando com maior probabilidade os cromossomas mais aptos. Os seleccionados vão ser usados na constituição da geração seguinte.

Note-se que, para avaliar o efeito da implementação de um mecanismo elitista de evolução cujo objectivo é evitar a destruição ou não reprodução dos cromossomas mais aptos encontrados ao longo do processo de evolução, os algoritmos foram executados sem e com esta extensão visando a melhoria do seu desempenho, como apontam os estudos desenvolvidos por DeJong [29] ou Rudolph [87]. Para tal, as duas melhores soluções existentes em cada geração são copiadas directamente para a geração seguinte em substituição das duas piores soluções escolhidas pelo operador de selecção. Note-se que, sobre estas duas soluções não actuam os operadores de cruzamento e mutação.

## Cruzamento

Em virtude da adopção de uma representação natural para o cromossoma ao nível da concepção do operador genético de cruzamento, optou-se por um procedimento específico de cruzamento orientado para o PEHE. De facto, uma das vantagens referidas anteriormente a propósito da questão da escolha da codificação do cromossoma preconizava o desenvolvimento de operadores genéticos especialmente adaptados ao problema subjacente e que pudesse incorporar o máximo de informação adicional conducente a uma maior eficácia.

Uma das questões problemáticas que ocorre no momento da elaboração de horários escolares é o facto da definição de um horário orientado para a satisfação máxima dos interesses de um dos grupos, professores ou alunos, implicar frequentemente um horário de fraca qualidade para o outro grupo. Deste modo, estamos na presença de dois objectivos conflituantes que tornam difícil a tarefa de construção de horários de elevada qualidade para os diferentes grupos de interesse. Note-se que em [23] Colorni, Dorigo e Maniezzo definem uma representação do cromossoma e um operador de cruzamento que atende parcialmente a esta questão dando um tratamento preferencial à qualidade dos horários produzidos para os professores. Nos algoritmos genéticos propostos nesta dissertação, utilizou-se uma perspectiva mais ampla, concebendo um

operador de cruzamento que pretende conciliar o mais possível os interesses de professores e turmas simultaneamente. Neste sentido, criou-se um operador de cruzamento destinado a combinar o conteúdo genético de um par de cromossomas progenitores escolhidos previamente pelo operador de selecção. Para tal, a constituição destes pares fez-se sequencialmente a partir da lista de cromossomas seleccionados. Tendo escolhido na população dois cromossomas progenitores, denominados por progenitor  $\bar{C}_1$  e progenitor  $\bar{C}_2$ , dois novos cromossomas são criados, designadamente descendente  $\bar{C}'_1$  e descendente  $\bar{C}'_2$ , segundo um procedimento que segue as seguintes etapas.

Etapa 1 Define aleatoriamente um número inteiro  $A_{Transf}$  de aulas a transferir por hereditariidade do progenitor para o descendente. O intervalo de escolha deste parâmetro foi fixado, experimentalmente, entre 80 a 95% do total de aulas contidas num cromossoma, verificando-se que para valores inferiores a fusão do património genético dos progenitores originava descendentes contendo um excessivo número de aulas em localizações não admissíveis.

Etapa 2 Obtém parte do descendente  $\bar{C}'_1$  por transferência das  $A_{Transf}$  aulas que constituem os melhores horários formados para os professores. O critério de qualidade utilizado para este fim consiste no valor de penalização parcial, calculado por (5.1) ou (5.3) conforme a versão do genético, para as aulas contidas nos horários individuais de cada um dos  $P'$  professores.

Etapa 3 Coloca nas localizações indicadas pelo progenitor  $\bar{C}_2$  as restantes aulas necessárias para completar o cromossoma. Nas situações em que se originem sobreposição de aulas é feita uma recolocação destas em localizações livres, utilizando o procedimento ICO.

Para a construção do descendente  $\bar{C}'_2$ , procede-se de forma análoga ao descrito nas etapas anteriores (1 e 3) mas, neste caso, efectuando a transferência da informação genética associada aos horários que privilegiam as turmas.

Observe-se que, nesta perspectiva o descendente  $\bar{C}'_1$  é orientado para a concepção de horários que beneficiam os professores e o descendente  $\bar{C}'_2$  para turmas.

▽ Exemplo 4-3

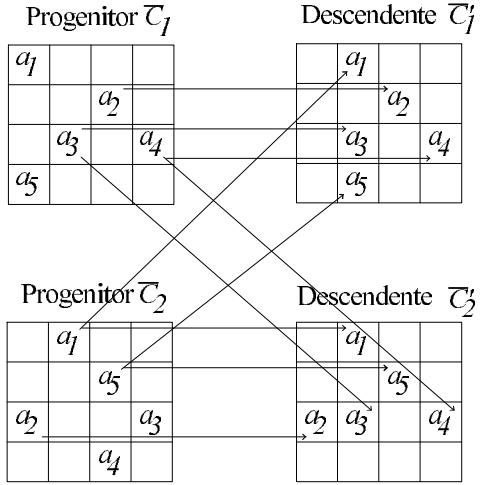


Figura 5-4: Exemplo do procedimento de cruzamento

A figura 5-4 descreve, através de um exemplo, o funcionamento do operador de cruzamento. Nesta figura, são mostrados dois cromossomas progenitores,  $\bar{C}_1$  e  $\bar{C}_2$ , seleccionados para cruzamento. O seus descendentes encontram-se designados por  $\bar{C}'_1$  e  $\bar{C}'_2$ .

Após a definição na etapa 1 do procedimento do parâmetro  $ATransf$ , isto é, do número de aulas de  $\bar{C}_1$  a transferir para  $\bar{C}'_1$  (vamos supor  $ATransf = 3$ ), as 3 aulas incluídas nos melhores horários para os professores, por exemplo,  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_4$ , são transferidas para  $\bar{C}'_1$ . Na etapa seguinte as restantes aulas que completam as cinco aulas do cromossoma, no exemplo identificadas por  $a_1$  e  $a_5$ , são colocadas nas posições indicadas por  $\bar{C}_2$ . Neste caso, dada a sobreposição de aulas é necessária a sua reafectação. Esta situação é ilustrada pela aula  $a_5$  que, em resultado de não poder ocupar no descendente  $\bar{C}'_1$  a localização expressa pelo progenitor  $\bar{C}_2$  (já ocupada por  $a_2$ ), foi sujeita a recolocação.

△

A finalidade deste operador genético de cruzamento que transfere continuamente para cada um dos descendentes uma fracção dos melhores horários parciais existentes na população, tanto para professores como turmas, é permitir um processo gradual de melhoria das solução atendendo simultaneamente à qualidade dos horários concebidos para estes dois grupos de interesse.

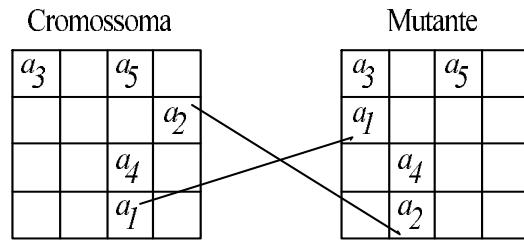


Figura 5-5: Exemplo do procedimento de mutação

### Mutação

Para garantir a manutenção de um nível de diversidade genética mínima na população, foi implementado um operador genético de mutação. De forma sequencial, sobre cada cromossoma da população (à excepção dos dois retidos pelo mecanismo elitista) é executado um procedimento de mutação cujo funcionamento de seguida se apresenta. Cada gene com ocupação de aula é sujeito com uma probabilidade dada por  $PMut$  a mutação, a qual, caso ocorra, provoca uma recolocação da respectiva aula noutra gene livre. Esta probabilidade foi testada para diferentes níveis tomando instâncias de diferentes dimensões, tendo sido fixada em  $PMut = \frac{1}{3A}$  para todas versões de algoritmos genéticos propostos nesta dissertação.

#### ▽ Exemplo 4-4

Como exemplo da actuação do operador de mutação considere-se o cromossoma ilustrado na figura 5-5.

Neste caso, os dois genes cujos alelos eram as aulas  $a_1$  e  $a_2$  sofreram mutação bem como os dois genes que receberam as aulas.

△

## 5.4 Implementação computacional

Os algoritmos genéticos descritos anteriormente, designados por AGUO1 e AGUO2, foram implementados utilizando a linguagem de programação Delphi 5.0 e executados num PC com um processador de 700 Mhz e 512 MB de memória RAM. As instâncias do PEHE apresentadas anteriormente na secção 2.3 foram tomadas repetidamente, 5 vezes, para cada versão do algo-

ritmo (AGUO1 ou AGUO2), procedimento de inicialização (AS ou ICO) e utilizando ou não elitismo na selecção. Pretende-se com esta metodologia, avaliar o efeito de cada uma das opções propostas na qualidade das soluções obtidas. O número de gerações foi fixado em 1000 para a totalidade das instâncias, à excepção das HTTP para as quais, dadas as suas características de dificuldade, se fixou este valor em 5000.

Analizando primeiramente a versão AGUO1 que actua exclusivamente no domínio das soluções admissíveis para o PEHE, observem-se as tabelas 5.2 e 5.3 que apresentam os resultados da aplicação desta versão às instâncias-teste, com e sem recurso ao mecanismo de selecção elitista e partindo dos dois métodos de geração da população inicial.

Nas colunas (2) e (3) de ambas as tabelas apresentam-se os menores valores de penalização dos cromossomas produzidos exclusivamente pelos métodos de inicialização da população AS e ICO, respectivamente.

Após as 5 execuções do algoritmo, para cada uma das populações iniciais geradas pelos dois métodos de inicialização, apenas se mostram, nas colunas (4) a (8), os resultados relativos às 5 execuções resultantes do método de inicialização mais favorável. Assim, nas duas tabelas, as colunas (4) e (5) indicam, respectivamente, o menor e maior valor de entre todos os cromossomas com menor valor de penalização obtidos nas 5 execuções do algoritmo, para o melhor método de inicialização. A média relativa ao menor valor de penalização dos cromossomas tomando, igualmente, as mesmas 5 execuções para cada instância-teste, são apresentadas nas colunas (7). De forma idêntica, as colunas (6) indicam o tempo da execução gasto para gerar o cromossoma de menor valor de penalização, enquanto que as colunas (8) apresentam, o tempo médio de obtenção do cromossoma de menor valor de penalização para as 5 execuções efectuadas, ambos expressos em segundos. Note-se que, em resultado do tempo total gasto na finalização de cada execução para cada instância apresentar um valor muito idêntico, considerou-se como tempo de referência para cada execução o momento em que se gerou o cromossoma de menor valor de penalização. Diga-se ainda que, apesar de não se mostrar os tempos totais médios de finalização das execuções estes foram muito idênticos para cada instância e não significativamente superiores (na ordem dos 4% a 17% de acréscimo) em relação aos tempos computacionais médios apresentados nas colunas (8).

Como se observa em ambas as tabelas, para as instâncias hipotéticas HTTP4 a HTTP8,

PREAL6 e PREAL7, ambos os métodos de geração da população inicial não permitiram encontrar cromossomas/soluções admissíveis, logo a execução do algoritmo ficou impossibilitada. Nas restantes instâncias foi possível constituir populações iniciais com base nos procedimentos AS e ICO recorrendo, quando necessário, à readmissibilização dos cromossomas através da heurística reconstrutiva descrita anteriormente. Como esperado, esta necessidade foi particularmente evidente nas soluções iniciais produzidas pela AS onde o processo completo de geração da população inicial nunca excedeu os trinta segundos, mas em que a qualidade dos cromossomas gerados foi substancialmente inferior aos construídos por ICO.

Quanto ao efeito dos métodos de inicialização da população no menor valor de penalização registou-se, nas colunas (4) de ambas as tabelas, que somente 17.8% (5 em 28) dos menores valores foram obtidos tendo como partida a população de cromossomas gerada pelo método AS sujeito à heurística de reparação (identificados com (b) nas tabelas).

Em resumo, a inicialização da população por ICO revelou-se mais eficaz, apesar de ser em termos computacionais mais exigente, consumindo, no pior caso, cerca do quíntuplo (140 segundos) do tempo requerido pela AS. Nas tabelas não figuram os tempos gastos nos métodos de inicialização da população dado o seu reduzido peso comparativamente ao tempo total dispendido na execução do algoritmo.

Relativamente à qualidade da soluções obtidas sem e com elitismo é possível verificar, por comparação entre as colunas (4), (5) e as colunas (7) das tabelas 5.2 e 5.3, que em termos globais a introdução do mecanismo de selecção elitista permitiu melhorar a qualidade dos cromossomas obtidos. De facto, à excepção das instâncias PREAL1 e ESGHT-P2 para as quais o menor valor foi idêntico, todas as restantes instâncias registraram reduções nesse valor na população final. Outro efeito constatado pela introdução de elitismo no algoritmo AGUO1 foi a obtenção generalizada dos melhores cromossomas mais cedo, comparativamente à abordagem sem elitismo. Esta situação é observável através da leitura das colunas (6) das duas tabelas relativas aos tempos de obtenção do menor valor de penalização que se mostra inferior para todas as instâncias à excepção de ESGHT-F2 e de ESGHT-P3.

Instância	Pop. inicial		AGUO1 após 5 execuções sem elitismo					
	AS	ICO	Menor	Maior	Tem.men.	Média	Méd.tem.men.	
			val.pen.	val.pen.	val.pen.(s)	val.pen.	val.pen.(s)	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	
HTTP4	-	-	-	-	-	-	-	
HTTP5	-	-	-	-	-	-	-	
HTTP6	-	-	-	-	-	-	-	
HTTP7	-	-	-	-	-	-	-	
HTTP8	-	-	-	-	-	-	-	
PREAL1	42 <sup>a</sup>	40	27	32	4319	29.2	5601	
PREAL2	47 <sup>a</sup>	45 <sup>a</sup>	31 <sup>b</sup>	37	7614	34.8	7819	
PREAL3	48 <sup>a</sup>	48	40	47	9963	43.2	10316	
PREAL4	56 <sup>a</sup>	53 <sup>a</sup>	42	46	16314	44.0	21998	
PREAL5	90 <sup>a</sup>	88	73	80	17431	77.4	16917	
PREAL6	-	-	-	-	-	-	-	
PREAL7	-	-	-	-	-	-	-	
ESGHT-P1	419 <sup>a</sup>	357	297	303	23915	299.6	22678	
ESGHT-F1	568 <sup>a</sup>	490	396 <sup>b</sup>	419	37618	407.2	39314	
ESGHT-T1	780 <sup>a</sup>	735 <sup>a</sup>	689	714	58991	701.8	59668	
ESGHT-P2	462 <sup>a</sup>	398	302	328	25629	315.4	24912	
ESGHT-F2	499 <sup>a</sup>	460	407	430	36001	418.6	38188	
ESGHT-T2	982 <sup>a</sup>	902 <sup>a</sup>	714	742	56814	729.0	55731	
ESGHT-P3	432 <sup>a</sup>	374	319	333	25997	325.6	26243	
ESGHT-F3	562 <sup>a</sup>	494	417	452	35461	435.0	34620	
ESGHT-T3	1017 <sup>a</sup>	883 <sup>a</sup>	741	772	58914	755.2	59318	

a - Nesta população submeteram-se cromossomas não admissíveis ao procedimento de reparação de admissibilidade

b - Resultado obtido a partir da população inicial gerada por AS.

Tabela 5.2: Resultados computacionais após 5 execuções para o algoritmo AGUO1 sem elitismo

Instância	Pop. inicial		AGUO1 após 5 execuções com elitismo					
	AS	ICO	Menor	Maior	Tem.men.	Média	Méd.tem.men.	
			val.pen.	val.pen.	val.pen.(s)	val.pen.	val.pen.(s)	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	
HTTP4	-	-	-	-	-	-	-	
HTTP5	-	-	-	-	-	-	-	
HTTP6	-	-	-	-	-	-	-	
HTTP7	-	-	-	-	-	-	-	
HTTP8	-	-	-	-	-	-	-	
PREAL1	42 <sup>a</sup>	40	27 <sup>b</sup>	32	3196	29.2	4361	
PREAL2	47 <sup>a</sup>	95 <sup>a</sup>	28 <sup>b</sup>	33	6242	31.4	6103	
PREAL3	48 <sup>a</sup>	48	36	44	7312	39.2	8615	
PREAL4	56 <sup>a</sup>	53 <sup>a</sup>	38 <sup>b</sup>	48	14631	43.2	13194	
PREAL5	90 <sup>a</sup>	88	69	78	15511	73.0	15912	
PREAL6	-	-	-	-	-	-	-	
PREAL7	-	-	-	-	-	-	-	
ESGHT-P1	419 <sup>a</sup>	357	291	309	20714	299.6	23425	
ESGHT-F1	568 <sup>a</sup>	490	389	402	34619	395.0	37461	
ESGHT-T1	780 <sup>a</sup>	535 <sup>a</sup>	680	714	50197	697.2	48972	
ESGHT-P2	462 <sup>a</sup>	398	302	310	21941	307.4	20519	
ESGHT-F2	499 <sup>a</sup>	460	390	415	36931	402.6	38271	
ESGHT-T2	982 <sup>a</sup>	902 <sup>a</sup>	704	733	52117	719.2	53702	
ESGHT-P3	432 <sup>a</sup>	374	308	322	26317	315.2	26414	
ESGHT-F3	562 <sup>a</sup>	494	411	440	35143	425.4	36140	
ESGHT-T3	1017 <sup>a</sup>	883 <sup>a</sup>	729	743	48319	735.2	48001	

a - Nesta população submeteram-se cromossomas não admissíveis ao procedimento de reparação de admissibilidade

b - Resultado obtido apartir da população inicial gerada por AS.

Tabela 5.3: Resultados computacionais após 5 execuções para o algoritmo AGUO1 com elitismo

Em seguida, observe-se os quadros 5.4 e 5.5 que descrevem os resultados alcançados pela versão do algoritmo AGUO2 que, como referido, alarga a pesquisa ao espaço das soluções não admissíveis do PEHE.

A estrutura destas é idêntica às tabelas anteriores 5.2 e 5.3, tendo sido adicionada uma coluna (9) que contém a percentagem média de cromossomas admissíveis na população final, para as 5 execuções do algoritmo realizadas sobre o método de inicialização mais favorável.

Atendendo ao método de inicialização da população aplicado foi possível verificar, novamente, que a ICO gerou a maioria das populações que permitiram evoluir para o menor valor de penalização dos cromossomas finais (78%, ou seja, 33 em 42 das instâncias que figuram nas colunas (4) de ambas as tabelas relativas ao AGUO2). Neste contexto, dado que esta versão do algoritmo permite a utilização de cromossomas não admissíveis, não foi necessário acionar a heurística reconstrutiva, traduzindo-se numa redução generalizada dos tempos computacionais em comparação com a versão AGUO1, como se observa através da comparação entre as colunas (8) das tabelas 5.2, 5.3 e as colunas (8) das tabelas 5.4 e 5.5.

Ao nível do valor das soluções, mais uma vez se registou um melhor desempenho da versão com implementação de selecção elitista, confirmado, de facto, o seu contributo na melhoria do nível de qualidade das soluções, bem como na redução global dos tempos médios de obtenção dos cromossomas de menor valor de penalização. Saliente-se o caso da instância HTTP6 para a qual apenas com esta versão se delineou uma solução óptima.

Apesar do melhor desempenho do AGUO2 em relação a AGUO1, para as instâncias HTTP7, HTTP8 e PREAL7, como se constata nas colunas (4) de ambas as tabelas relativas ao AGUO2, não foi possível encontrar cromossomas admissíveis.

Note-se, ainda, que o mecanismo de selecção elitista, ao reter as melhores soluções ao longo de cada geração, proporcionou um acréscimo relevante na percentagem média de soluções admissíveis presentes na população final, como se verifica através da leitura das colunas (9) das tabelas 5.4 e 5.5.

De acordo com os resultados teóricos de Rudolph [86] acerca do papel fundamental do elitismo para o desempenho e convergência de algoritmos genéticos específicos, os resultados experimentais obtidos indiciam a possibilidade de existência de uma teoria mais geral relativamente a esta opção.

Instância	Pop. inicial		AGUO2 após 5 execuções sem elitismo					
	AS	ICO	Menor	Maior	T.men.	Média	Méd.t.men.	%Méd.
			val.pen.	val.pen	val.pen(s)	val.pen.	val.pen.(s)	c.adm.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
HTTP4	56000	7000	0 <sup>b</sup>	1000	5142	400	6915	21
HTTP5	72000	12000	0	2000	10312	1000	7544	5
HTTP6	99000	19000	1000	3000	19476	1600	13941	0
HTTP7	125000	21000	3000	9000	32914	4600	32226	0
HTTP8	169000	33000	8000	20000	62315	11800	83941	0
PREAL1	4032	40	27 <sup>b</sup>	32	3614	29.2	4318	28
PREAL2	12041	45	28 <sup>b</sup>	33	8319	30.2	7650	19
PREAL3	5037	48	36	39	10314	37.0	11912	18
PREAL4	5045	53	38	38	12124	38.0	14314	15
PREAL5	16067	88	65 <sup>b</sup>	68	15318	65.6	18391	9
PREAL6	19085	2078	85	86	19871	85.4	23419	3
PREAL7	25076	4083	2082	2089	28314	2085.0	30710	0
ESGHT-P1	42288	3305	283 <sup>b</sup>	295	16345	289.0	18421	21
ESGHT-F1	59931	6391	379	403	27191	390.4	26140	15
ESGHT-T1	138702	10874	682	698	46397	689.0	51312	10
ESGHT-P2	51315	2321	301	328	14494	312.2	18965	24
ESGHT-F2	63655	5409	405	448	30413	421.4	32117	11
ESGHT-T2	146712	9815	691	745	51614	725.2	53001	9
ESGHT-P3	48310	4298	285	305	17019	293.6	20152	19
ESGHT-F3	55359	5428	398	457	27515	430.2	32435	16
ESGHT-T3	152692	11794	689	780	50115	736.0	55641	11

b - Resultado obtido apartir da população inicial gerada por AS.

Tabela 5.4: Resultados computacionais após 5 execuções para o algoritmo AGUO2 sem elitismo

Instância	Pop. inicial		AGUO2 após 5 execuções com elitismo						
	AS	ICO	Menor	Maior	T.men.	Média	Méd.t.men.	% Méd.	
			val.pen.	val.pen	val.pen <sub>(s)</sub>	val.pen.	val.pen. <sub>(s)</sub>	c.adm	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	
HTTP4	56000	7000	0 <sup>b</sup>	1000	3815	200	6312	24	
HTTP5	72000	12000	0 <sup>b</sup>	1000	9663	400	7341	8	
HTTP6	99000	19000	0	2000	15342	1200	12615	2	
HTTP7	125000	21000	2000	6000	12912	3200	18346	0	
HTTP8	169000	33000	5000	16000	77610	8600	83195	6	
PREAL1	4032	40	27 <sup>b</sup>	30	2364	28.4	2562	44	
PREAL2	12041	45	27	32	4310	29.2	5124	42	
PREAL3	5037	48	36 <sup>b</sup>	38	8368	37.0	7912	44	
PREAL4	5045	53	36	39	13597	37.8	15231	38	
PREAL5	16067	88	63	66	8199	64.2	11314	28	
PREAL6	19085	2078	80	85	18626	83.0	19612	9	
PREAL7	25076	4083	1080	1102	26315	1090.4	28415	0	
ESGHT-P1	42288	3305	270	283	15318	276.4	16912	32	
ESGHT-F1	59931	6391	374	394	24414	385.2	30414	28	
ESGHT-T1	138702	10874	636	647	30118	641.8	33136	18	
ESGHT-P2	51315	2321	291	313	11020	302.4	15017	37	
ESGHT-F2	63655	5409	368	404	26130	387.0	26714	29	
ESGHT-T2	146712	9815	647	716	39127	683.2	42419	19	
ESGHT-P3	48310	4298	285	295	10142	289.6	18519	29	
ESGHT-F3	55359	5428	393	433	25418	412.2	28186	39	
ESGHT-T3	152692	11794	662	721	41678	689.4	49451	25	

b - Resultado obtido apartir da população inicial gerada por AS.

Tabela 5.5: Resultados computacionais após 5 execuções para o algoritmo AGUO2 com elitismo

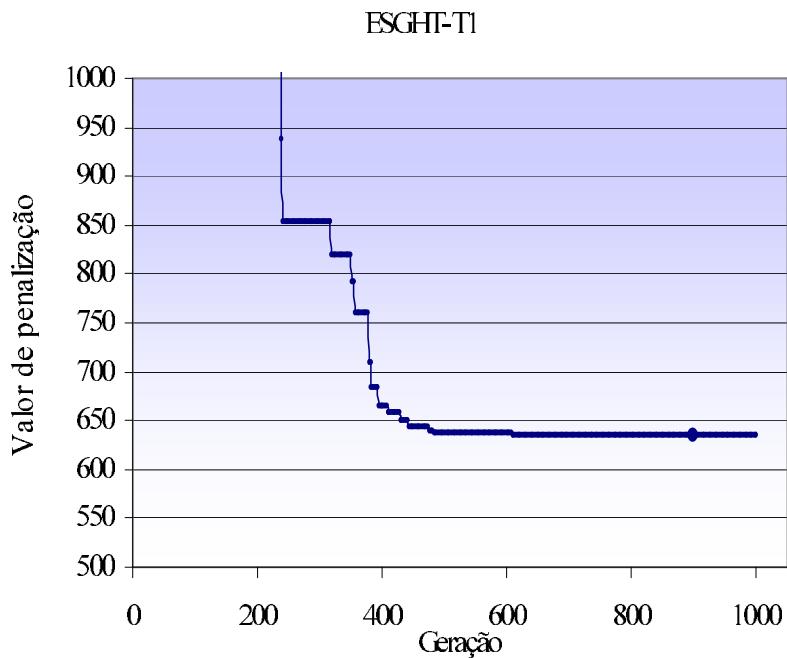


Figura 5-6: Evolução do menor valor de penalização da população na melhor das execuções do AGUO2 para ESGHT-T1

Como complemento à caracterização da implementação computacional efectuada e dos resultados obtidos pelo algoritmo genético uni-objectivo, mostra-se na figura 5-6, a título exemplificativo, a evolução da solução com menor valor de penalização, ao longo das 1000 gerações do algoritmo AGUO2, na sua melhor execução (de entre  $2 \times 5$  realizadas para os dois métodos de inicialização) para a instância real ESGHT-T1 - aquela que originou o valor de penalização de 636 indicado na coluna (4) da tabela 5.5. Assinalada na figura encontra-se também a geração na qual foi originado o menor valor de penalização nesta execução (a geração 891).

Considerando, em particular, a qualidade das soluções obtidas para todas as instâncias reais, expressa pelo valor de penalização, os resultados foram muito satisfatórios quando comparados com os valores de penalização das soluções obtidas por processos manuais pela equipa de horários (mostrados anteriormente no Capítulo 2, na tabela 2.2).

Contudo, se examinarmos a distribuição da penalização pelos dois grupos normalmente activos no contexto do PEHE - professores e turmas - constatamos que a natureza uni-objectivo

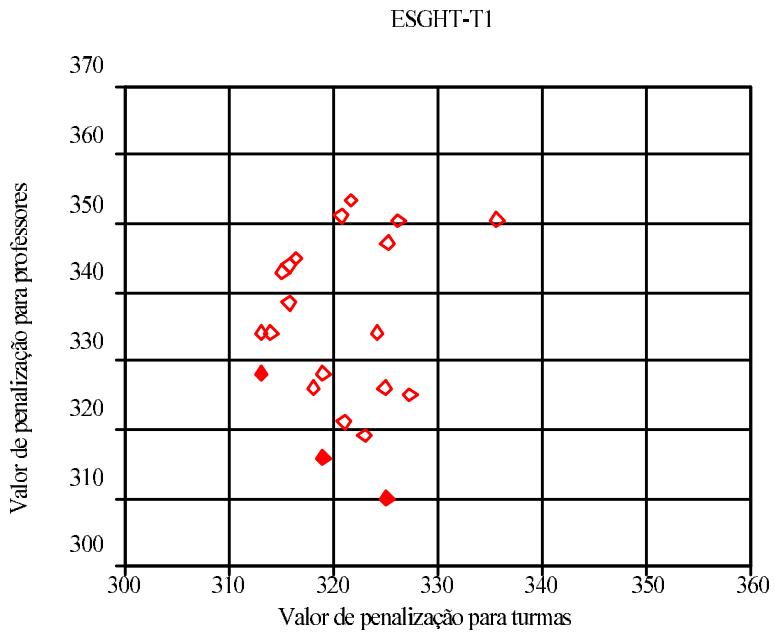


Figura 5-7: Representação da população final admissível na melhor das 5 execuções do AGUO2 para ESGHT-T1

da abordagem é limitativa neste aspecto. Para tal, observe-se o exemplo presente na figura 5-7 que mostra a população final na melhor execução do AGUO2 para a referida instância ESGHT-T1.

Note-se que, numa perspectiva prática de resolução do PEHE, admitindo que o decisor valoriza a existência de múltiplas soluções alternativas, a população que se mostra na figura inclui apenas três soluções eficientes, ou seja, que não são dominadas por alguma das restantes, podendo constituir um entrave adicional à utilização desta abordagem.

Para ultrapassar esta limitação, descreve-se em seguida um algoritmo genético multi-objectivo desenvolvido para o PEHE [17] com a finalidade de ultrapassar estas limitações.

## 5.5 Algoritmos genéticos multi-objectivo

Apesar de se poder conciliar, como vimos, os diferentes objectivos através de uma função agregada, obtida através de uma combinação linear das funções objectivo, uma outra forma de lidar com múltiplos objectivos é mais apropriada. A natureza de alguns problemas de optimização reais pode, eventualmente, tornar insuficientes as modelizações baseadas apenas num único objectivo, requerendo a utilização de abordagens directamente vocacionadas para multi-objectivos.

No campo dos algoritmos genéticos adaptados à resolução de problemas de optimização numa perspectiva multi-objectivo, várias metodologias foram propostas e desenvolvidas na última década. Como referência neste domínio, destaque-se os trabalhos de *survey* elaborados por Fonseca e Fleming [40] e Veldhuizen e Lamont [104]. Entre os algoritmos genéticos multi-objectivo, designados habitualmente por AGMO, uma das versões mais comuns é a que recorre ao conceito de dominância de Pareto para avaliar a aptidão de cada cromossoma relativamente a múltiplos objectivos, e que se aborda em seguida.

Em termos formais, considere-se o problema de minimização multi-objectivo com restrições constituído por  $m$  objectivos:

determinar  $\bar{X}$

que minimize:

$$f(\bar{X}) = (f_1(\bar{X}), \dots, f_m(\bar{X})) \quad (5.6)$$

onde,  $\bar{X}$  é um vector do espaço de soluções admissíveis e  $f_i(\bar{X})$  uma função real definida no espaço de soluções admissíveis para  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

Considerem-se dois vectores  $\bar{X}_1, \bar{X}_2$  do espaço de soluções. Diz-se que  $\bar{X}_1$  domina  $\bar{X}_2$ ,  $\bar{X}_1 \prec \bar{X}_2$ , quando:

$$f_i(\bar{X}_1) \leq f_i(\bar{X}_2) \text{ para } i \in \{1, \dots, m\} \text{ e } \exists j \in \{1, \dots, m\} : f_j(\bar{X}_1) < f_j(\bar{X}_2) \quad (5.7)$$

Assim, uma solução é não dominada se não existe outra que a domine ou, por outras palavras, se não existe outra estritamente melhor em todos os objectivos. No contexto das

soluções não dominadas, para se verificar uma melhoria num dos objectivos terá que ocorrer uma degradação no valor de pelo menos um dos restantes.

Utilizando esta noção, no AGMO proposto começa-se por classificar cada cromossoma da população em termos da dominância da respectiva solução do PEHE.

Seguidamente, determina-se a aptidão dos cromossomas com base no grau de dominância sobre as restantes soluções. Basicamente, os cromossomas que representam soluções não dominadas na população, ou seja, as que compõem a designada por fronteira de Pareto, recebem um nível de classificação máximo, expresso pelo nível 1. Em seguida, na população restante são novamente identificadas as soluções não dominadas cujos cromossomas são agora classificados com nível 2, repetindo-se o procedimento até à classificação de toda população. Por último, o valor de aptidão atribuído a cada cromossoma resulta da aplicação de uma função que descreve uma relação inversa com o nível de classificação deste.

A sugestão de definir a aptidão de um cromossoma com base no conceito de dominância de Pareto, tanto quanto é do nosso conhecimento, foi feita por Goldberg [47] em 1989. Diversas variantes de classificação foram propostas por Fonseca e Fleming [39], Veldhuizen [103], Zitzler e Thiele [111] e Sarker, Liang e Newton [89], mas todas na sua essência preconizam a atribuição de um nível de classificação idêntico máximo a todas os cromossomas relativos à fronteira de Pareto e níveis progressivamente inferiores aos restantes.

Quanto ao método apresentado nesta secção para a resolução do PEHE, optou-se por uma versão de um AGMO baseada no *Nondominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA)* proposto por Srinivas e Deb [97], [28], no qual se aplica o procedimento de classificação acima descrito em conjunto com um mecanismo de repartição da aptidão. Na figura 5-8 é descrita a estrutura algorítmica simplificada deste AGMO. Como é visível, a principal diferença existente em relação à estrutura seguida pela anterior versão uni-objectivo centra-se ao nível do passo de avaliação que se descreve em seguida, no contexto do PEHE.

## 5.6 Abordagem genética multi-objectivo para o PEHE

A comparação entre as abordagens multi-objectivo e uni-objectivo, no contexto dos algoritmos genéticos adaptados ao PEHE, revela que estes concorrem para a mesma finalidade, ou seja, a

**BEGIN**

**Passo 1 ▷ Inicialização**

Gera uma população inicial de  $N$  cromossomas

**Passo 2 ▷ Avaliação**

Calcula o valor de cada função objectivo para cada cromossoma

Actualiza a fronteira de Pareto e nível de cada cromossoma

Avalia aptidão dos cromossomas

Aplica procedimento de repartição da aptidão

**Passo 3 ▷ Operadores genéticos**

Aplica operadores de selecção, cruzamento e mutação

Actualiza a população para a próxima geração

↑ **GOTO ao passo 2 ▷ Até atingir o número máximo de gerações**

**END (Solução ← Cromossomas na fronteira de Pareto)**

Figura 5-8: Esquema para o AGMO

elaboração de soluções (horários) que satisfazem a totalidade dos condicionalismos obrigatórios e tentam minimizar as violações nos condicionalismos de melhoramento. Contudo, existem algumas diferenças assinaláveis na versão multi-objectivo. Na prática, a tentativa de elaboração de uma solução que minimize o número de ocorrências de violação dos aspectos correspondentes aos condicionalismos de melhoramento para um dos grupos (professores ou alunos) conduzirá certamente à obtenção de soluções de baixa qualidade para o outro grupo. Assim, para que este aspecto tenha um tratamento apropriado apresentam-se seguidamente as características distintivas presentes no AGMO para o PEHE.

### 5.6.1 Objectivos

Em resultado da necessidade de separação das violações dos condicionalismos do PEHE para cada um dos grupos envolvidos, dois objectivos distintos são definidos:

$$\begin{aligned}
\text{minimizar } f_P^{AGMO}(\bar{C}) = & \alpha (f_{P1b}(\bar{C}) + f_{P1g}(\bar{C}) + f_{P1h}(\bar{C})) + \\
& + \beta (f_{P2a}(\bar{C}) + f_{P2b}(\bar{C}) + f_{P2c}(\bar{C})) + \\
& + \frac{\alpha}{2} (f_{S1b}(\bar{C}) + f_{S1e}(\bar{C}) + f_{S1h}(\bar{C}))
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
\text{minimizar } f_T^{AGMO}(\bar{C}) = & \alpha (f_{T1b}(\bar{C}) + f_{T1d}(\bar{C}) + f_{T1f}(\bar{C}) + f_{T1g}(\bar{C}) + f_{T1h}(\bar{C})) + \\
& + \beta (f_{T2a}(\bar{C}) + f_{T2b}(\bar{C}) + f_{T2c}(\bar{C})) + \\
& + \frac{\alpha}{2} (f_{S1b}(\bar{C}) + f_{S1e}(\bar{C}) + f_{S1h}(\bar{C}))
\end{aligned} \tag{5.9}$$

onde, novamente,  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros reais positivos e  $f_{Pw}(\bar{C})$ ,  $f_{Tw}(\bar{C})$  e  $f_{Sw}(\bar{C})$  são funções de contagem que expressam o número de violações ocorridas na solução correspondente ao cromossoma  $\bar{C}$ , respectivamente, para turmas, professores e salas relativamente ao condicionalismo obrigatório  $w$ .

Note-se que, em comparação com a anterior formalização da função global de penalização definida em 5.3 para a versão uni-objectivo, cada uma das diversas componentes de penalização foi apropriadamente afecta aos objectivos relativos aos professores ou às turmas, respetivamente. Para tal as parcelas relativas aos condicionalismos (1b), (1g), (1h), (2a), (2b) e (2c), associados aos professores deram origem à primeira e segunda parcelas de  $f_P^{AGMO}$ .

No que respeita às turmas, os condicionalismos (1b), (1d), (1f), (1g), (1h), (2a), (2b) e (2c), que incluem aspectos de penalização relativos às turmas, foram incorporados nas duas primeiras parcelas do objectivo  $f_T^{AGMO}$ . Note-se que as penalizações ocorridas nos condicionalismos obrigatórios relativos às salas, dada a sua natureza, não são imputáveis exclusivamente a nenhum dos grupos. Este facto, levou à inclusão dos termos relativos a  $f_{Sw}(\bar{C})$  na terceira parcela de ambas as funções objectivo, através do ponderador  $\frac{\alpha}{2}$ , estabelecendo deste modo uma igualdade entre o valor da função objectivo da versão AGUO2 e a soma do valor das duas no AGMO:

$$f_P^{AGMO}(\bar{C}) + f_T^{AGMO}(\bar{C}) = f^{AGUO2}(\bar{C}) \tag{5.10}$$

Após o cálculo dos valores nos dois objectivos  $f_P^{AGMO}(\bar{C})$  e  $f_T^{AGMO}(\bar{C})$  para cada uma das

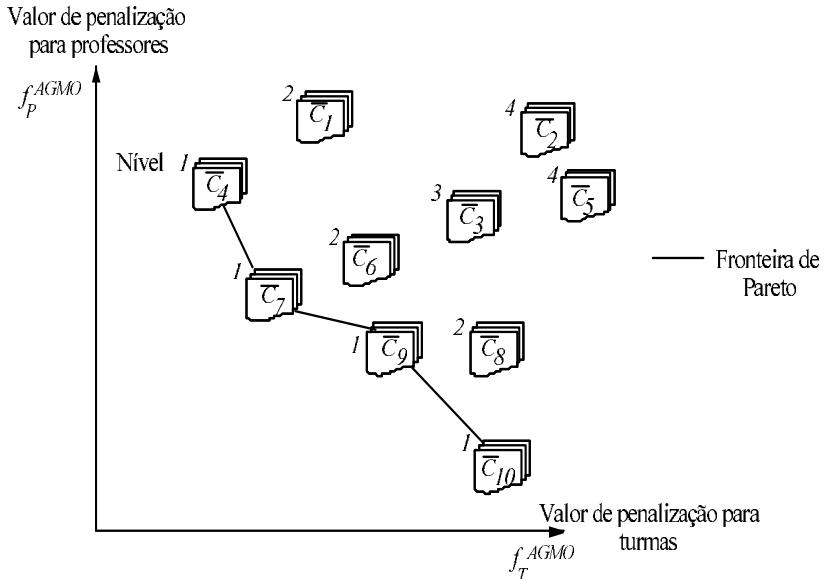


Figura 5-9: Fronteira de Pareto e níveis para os cromossomas

soluções da população (codificadas em cromossomas  $\bar{C}$ ) de uma dada iteração do algoritmo genético, a fronteira de Pareto é identificada. Nestes termos, cada cromossoma é classificado de acordo com seu nível de dominância sobre os restantes cromossomas, através do método exposto na secção anterior. Para ilustrar este procedimento considere-se um exemplo.

#### $\nabla$ Exemplo 4-5

Na figura 5-9 representa-se, tomando o espaço dos objectivos, uma população de 10 cromossomas, sejam  $\bar{C}_1$  a  $\bar{C}_{10}$ .

Os cromossomas  $\bar{C}_4$ ,  $\bar{C}_7$ ,  $\bar{C}_9$  e  $\bar{C}_{10}$  formam a fronteira de Pareto inicial sendo classificados com o nível 1. No grupo dos restantes cromossomas a fronteira de Pareto é novamente identificada, resultando nos cromossomas  $\bar{C}_1$ ,  $\bar{C}_6$ , e  $\bar{C}_8$  que são classificados com o nível 2, repetindo-se o procedimento até que toda população se encontre classificada.  $\Delta$

No final, o valor de aptidão de cada cromossoma é obtido invertendo o respectivo nível de

classificação:

$$F^{AGMO}(\bar{C}) = \frac{1}{\text{Nível de classificação de } \bar{C}} \quad (5.11)$$

Este método de atribuição de aptidão pode, eventualmente, conduzir a uma diminuição da diversidade genética da população em resultado do procedimento de selecção. De facto, na presença de múltiplas soluções com valor de penalização semelhante na fronteira de Pareto, as populações tendem a reduzir-se a um pequeno número de soluções como resultado do fenómeno designado por *genetic drift*. Para minimizar este efeito, mantendo uma fronteira de Pareto mais diversificada, o AGMO implementa um mecanismo de repartição da aptidão sugerido em [47]. Este consiste, na divisão da aptidão expressa por  $F^{AGMO}(\bar{C}_i)$  por um valor que reflecte o número de soluções similares na vizinhança de  $\bar{C}_i$ , para um mesmo nível de classificação. Assim, o valor de aptidão após repartição é dado pela expressão seguinte:

$$F_{repartida}^{AGMO}(\bar{C}_i) = \frac{F^{AGMO}(\bar{C}_i)}{\sum_{j=1}^N \theta[d(\bar{C}_i, \bar{C}_j)]} \quad (5.12)$$

sendo  $N$  a dimensão da população e  $\theta[d(\bar{C}_i, \bar{C}_j)]$  uma função que exprime, utilizando a distância entre dois cromossomas  $d(\bar{C}_i, \bar{C}_j)$ , a intensidade do procedimento de distribuição definida por:

$$\theta[d(\bar{C}_i, \bar{C}_j)] = \begin{cases} 1 - \left(\frac{d(\bar{C}_i, \bar{C}_j)}{\delta}\right)^\lambda & \text{se } d(\bar{C}_i, \bar{C}_j) < \delta \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.13)$$

onde  $\lambda, \delta$  e  $d(\bar{C}_i, \bar{C}_j)$  são apresentados seguidamente. Para o efeito  $\delta$  é um real positivo que permite identificar a fronteira da vizinhança e  $\lambda$ , real positivo, actua como um parâmetro de intensidade de repartição da aptidão. Quanto à medida de distância  $d(\bar{C}_i, \bar{C}_j)$ , esta é determinada no espaço das soluções, através da análise das semelhanças entre o par de cromossomas, com base na utilização da mesma localização para cada aula  $a$ :

$$d(\bar{C}_i, \bar{C}_j) = \frac{\sum_{a \in A} b(a, \bar{C}_i, \bar{C}_j)}{A'} \quad (5.14)$$

$$\text{na qual } b(a, \overline{C}_i, \overline{C}_j) = \begin{cases} 1 & \text{se a aula } a \text{ ocupa o mesmo locus em } \overline{C}_i \text{ e } \overline{C}_j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

No contexto da definição de distância entre soluções, várias alternativas foram ponderadas tendo levando em consideração as diversas sugestões apresentadas em [11] por Burke, Newall e Weare. Porém, em virtude da necessidade de garantir que os cromossomas contivessem soluções significativamente distintas ao nível da colocação das aulas, dado o dispêndio computacional elevado associado ao cálculo desta medida, limitou-se a avaliação das semelhanças entre soluções à eventual ocupação do mesmo locus (sala e período horário) por uma aula.

O procedimento de repartição da aptidão referido é então aplicado sucessivamente dentro de cada nível de classificação para garantir que o valor máximo de aptidão dos cromossomas no nível  $n + 1$  é, em qualquer circunstância, inferior ao mínimo registado na aptidão dos cromossomas no nível  $n$ . Para tal é calculado um valor artificial de aptidão  $F_{n+1}^*$  para o nível  $n + 1$ , a partir das aptidões dos cromossomas no nível  $n$ , assim:

$$F_{n+1}^* = F_{n+1} - \varepsilon \quad (5.15)$$

onde  $\varepsilon$  é um real positivo ( $\varepsilon = 0.001$ ) e,

$$F_{n+1} = \min F_{\text{repartida}}^{\text{AGMO}}(\overline{C} \text{ do nível } n) < F^{\text{AGMO}}(\overline{C} \text{ do nível } n) \quad (5.16)$$

Deste modo, o valor artificial de aptidão  $F_{n+1}^*$  estabelece o nível de aptidão inicial para todos os cromossomas do nível  $n + 1$  sendo, eventualmente, modificado em resultado da aplicação da repartição da aptidão preconizada por (5.12).

Para avaliar a influência do procedimento de repartição da aptidão descrito em termos das soluções do PEHE, duas versões do AGMO foram testadas utilizando ou não repartição de aptidão, tendo sido designadas por AGMO2 e AGMO1, respectivamente.

### 5.6.2 População secundária

Em função do contributo registado na melhoria do desempenho do AGUO, proporcionado pelo mecanismo de selecção elitista, proceder-se-á à introdução deste princípio na abordagem multi-

objectivo traduzida em ambas as versões do AGMO. Reforçando esta opção, refiram-se os trabalhos desenvolvidos por Horn [55], Zitzler [111] que defendem a utilização do elitismo como forma de potenciar o desempenho dos AGMO, através da redução dos efeitos negativos de natureza estocástica dos algoritmos genéticos que se podem reflectir, como vimos, na perda de soluções de qualidade durante o processo aleatório de selecção. Assim, para inserir um procedimento elitista no AGMO constituiu-se uma população secundária que evolui a par da população principal e que recorre à medida  $d(\bar{C}_i, \bar{C}_j)$ , definida em 5.14, para avaliar o grau de similitude existente entre um par de soluções. Ainda com base nesta medida é calculado um índice, para efeitos de caracterização final da população após a implementação computacional, designado por grau de semelhança médio (GSM) determinado do seguinte modo:

$$GSM = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N d(\bar{C}_i, \bar{C}_j)}{N(N-1)} \times 100 \quad (5.17)$$

O funcionamento genérico do algoritmo com base nas duas populações consiste, inicialmente, na avaliação dos cromossomas da população principal em termos da sua dominância, sendo as soluções não dominadas candidatas a entrar na população secundária desde que apresentem um grau de diferenciação significativo em relação às soluções já lá contidas. Em seguida, cada cromossoma da população secundária com as eventuais novas aquisições é avaliado em termos da dominância de Pareto sendo mantidas apenas as soluções não dominadas para a geração seguinte. Após a selecção de  $\frac{N}{2}$  pares de cromossomas, de entre a população principal e secundária, os operadores de cruzamento e mutação são aplicados gerando  $N$  novos cromossomas.

Para descrever a interacção entre a população principal e secundária considere-se o exemplo.

#### ▽ Exemplo 4-6

No início da geração  $k$  do caso representado na figura 5-10 suponha-se que a população principal é formada por 6 cromossomas  $\bar{C}_1$  a  $\bar{C}_6$ , e que a população secundária inclui 3 cromossomas  $\bar{C}_1^*$  a  $\bar{C}_3^*$ .

Após o processo de classificação de cada cromossoma e da atribuição do valor da respectiva aptidão, as soluções não dominadas (assuma-se que são  $\bar{C}_4$  a  $\bar{C}_5$ ) são candidatas a entrar na

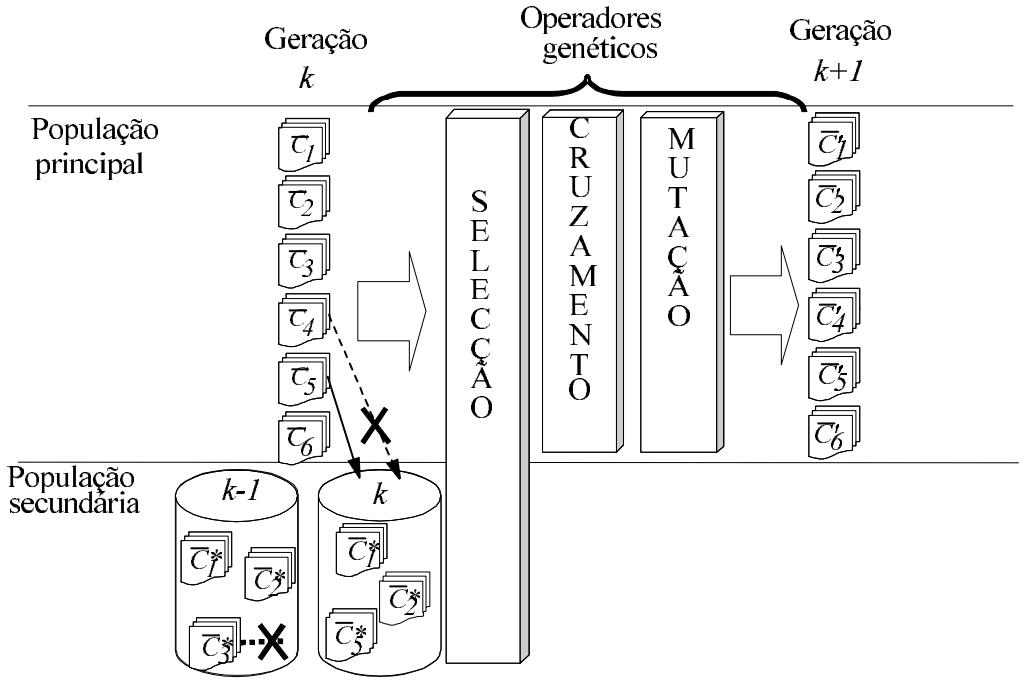


Figura 5-10: Esquema exemplificativo de actuação da população secundária

população secundária elitista. A sua introdução ocorrerá apenas se estas forem suficientemente distintas ( $d(\bar{C}_i, \bar{C}_j) < 0.75$ ) das que já se encontram na população secundária. Admita-se ainda a hipótese de que  $\bar{C}_4$  é consideravelmente semelhante a  $\bar{C}_2^*$ , logo  $\bar{C}_4$  é rejeitado.

No exemplo, com a entrada de  $\bar{C}_5$  na população secundária suponha-se que  $\bar{C}_5$  domina  $\bar{C}_3^*$ , então este facto provoca a extracção desta última da população secundária. Em seguida o operador de selecção escolhe 3 pares de cromossomas, de entre a população principal e secundária, e os operadores de cruzamento e mutação são aplicados gerando novos cromossomas que substituem  $\bar{C}_1$  a  $\bar{C}_6$  na geração  $k + 1$ .

△

## 5.7 Implementação computacional

Do mesmo modo que anteriormente, os algoritmos genéticos denominados por AGMO1 e AGMO2 foram programados utilizando a linguagem de Delphi 5.0 e também executados num PC

com um processador de 700 Mhz e 512 MB de memória RAM, efectuando-se 5 corridas com cada uma das instâncias-teste, partindo sempre do método de inicialização da população ICO. O número de gerações foi idêntico ao utilizado nas versões uni-objectivo, tal como os parâmetros relativos aos operadores genéticos de cruzamento e mutação. Para a definição dos parâmetros associados ao mecanismo de repartição de aptidão testaram-se várias combinações de parâmetros descrevendo contextos distintos de intensidade de repartição ( $\lambda$ ) e dimensão da vizinhança ( $\delta$ ) resultando na escolha dos valores  $\lambda = 1$  e  $\delta = 0.1$  para a totalidade das instâncias.

As tabelas 5.6 e 5.7 mostram os resultados computacionais obtidos para cada uma das versões do algoritmo genético multi-objectivo, AGMO1 e AGMO2, incluindo AGMO2 repartição da aptidão.

Nas colunas (2), (3) e (5) de ambas as tabelas apresentam-se para cada instância, respectivamente, o menor valor, o maior valor e a média dos menores valores de penalização agregada dos dois objectivos, para efeitos de comparação com os algoritmos anteriores. Similarmente, a coluna (4) das mesmas tabelas apresenta os tempos em segundos decorridos até à última actualização da fronteira de Pareto (tempos correspondentes à determinação dos mínimos dispostos na coluna (2)). Por sua vez, a coluna (6) mostra a média dos tempos de finalização da fronteira de Pareto no conjunto das 5 execuções efectuadas, expressa em segundos. Também neste caso, apesar de não se apresentar os tempos totais médios de finalização das execuções para cada instância, estes foram muito similares e não significativamente superiores (entre 2% a 14% de acréscimo) em relação aos tempos computacionais médios apresentados nas colunas (6).

Instância	AGMO1 após 5 execuções sem repartição de aptidão				
	Menor val. pen.agr.	Maior val. pen.agr.	Tempo finaliz. front. Pareto(s)	Média pen. agregada	Tempo méd. fin. front. Pareto(s)
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
HTTP4	0	1000	9012	400	10138
HTTP5	0	2000	10211	800	11760
HTTP6	1000	4000	17312	2000	20888
HTTP7	15000	31000	21391	20200	19315
HTTP8	26000	58000	58291	37000	78441
PREAL1	27	29	3745	27.8	3543
PREAL2	27	29	5734	28.2	6985
PREAL3	36	40	8731	37.8	8385
PREAL4	36	37	19231	36.8	17453
PREAL5	62	67	14974	64.2	14563
PREAL6	81	83	18532	82.8	20154
PREAL7	1080	1084	28318	1082.8	27139
ESGHT-P1	267	286	14501	278.6	17890
ESGHT-F1	377	389	29141	382.4	28945
ESGHT-T1	636	690	33441	664.0	40919
ESGHT-P2	292	310	17532	299.2	21235
ESGHT-F2	368	403	29901	384.4	36397
ESGHT-T2	650	725	39544	688.2	47811
ESGHT-P3	289	301	26319	293.8	24342
ESGHT-F3	391	422	33426	407.2	31032
ESGHT-T3	662	725	44054	694.6	53453

Tabela 5.6: Resultados computacionais após 5 execuções para o algoritmo AGMO1

Instância	AGMO2 após 5 execuções com repartição de aptidão				
	Men.val. pen.agr.	Maior val. pen.agr.	Tempo fin. front. Pareto(s.)	Média pen. agregada	T. méd. fin. front. Pareto(s.)
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
HTTP4	0	1000	9923	600	12441
HTTP5	2000	5000	11597	2800	12413
HTTP6	3000	9000	19266	5800	18456
HTTP7	11000	26000	22315	16200	23194
HTTP8	25000	49000	91166	33200	98014
PREAL1	27	29	4031	28.6	4005
PREAL2	27	28	5920	27.8	7011
PREAL3	36	38	9254	37.0	9712
PREAL4	37	38	24519	37.2	21424
PREAL5	63	67	26347	65.2	28432
PREAL6	79	86	24932	82.4	22894
PREAL7	1080	1091	38532	1085.6	37495
ESGHT-P1	269	287	18968	279.2	21464
ESGHT-F1	379	389	28719	384.2	33566
ESGHT-T1	636	684	39394	661.0	38474
ESGHT-P2	294	306	20424	301.2	23852
ESGHT-F2	370	393	35114	382.4	38853
ESGHT-T2	652	727	48585	690.0	49813
ESGHT-P3	286	305	28723	294.2	27234
ESGHT-F3	394	415	39383	405.6	37482
ESGHT-T3	666	720	57295	689.0	55724

Tabela 5.7: Resultados computacionais após 5 execuções para o algoritmo AGMO2

Comparando as duas versões multi-objectivo é possível constatar que a versão AGMO2, com repartição da aptidão alcançou, na maioria das instâncias, menores valores de penalização agregada ligeiramente superiores à versão sem repartição de aptidão. De facto, como se observa pelas colunas (2) das duas tabelas, o AGMO2 obteve penalizações inferiores em HTTP7, HTTP8, PREAL6 e ESGHT-P3, iguais em HTTP4, PREAL1 a PREAL3 e PREAL7, tendo nas restantes encontrado valores de penalização ligeiramente superiores. No que respeita aos tempos computacionais expressos nas colunas (4) e (6) das tabelas 5.6 e 5.7, verifica-se que o mecanismo de repartição da aptidão originou um acréscimo generalizado no tempo mínimo e médio necessário à estabilização da fronteira de Pareto.

Na comparação entre os melhores resultados de AGUO e AGMO, relativamente ao menor valor de penalização referido nas colunas (4) das tabelas 5.4 e 5.5 e nas colunas (2) das tabelas 5.6 e 5.7, verifica-se que a versão multi-objectivo apresentou resultados semelhantes à abordagem uni-objectivo. Assim, nas 21 instâncias o AGMO encontrou soluções com o mesmo valor de penalização agregada em 10 casos, permitindo ainda melhorar 4 das instâncias. Em termos médios a comparação dos valores de penalização não parece favorecer em particular nenhuma das versões.

Analizando os tempos computacionais, expressos nas colunas (6) e (8) das tabelas 5.4 e 5.5 e nas colunas (4) e (6) das tabelas 5.6 e 5.7 constata-se que abordagem multi-objectivo requer mais tempo para definir o conjunto final de soluções, na maioria das instâncias. De facto, a razão deste acréscimo pode justificar-se pelo tempo adicional gasto pela execução do código responsável pela actualização da fronteira de Pareto e gestão da população secundária elitista.

Considere-se agora a comparação sobre as características médias das populações finais de soluções admissíveis em cada um dos algoritmos genéticos (AGUO2 na versão com elitismo, AGUO AGMO1 e AGMO2), cujos dados se apresentam na tabela 5.8.

Na colunas (2) e (3) da tabela 5.8 mostram-se, respectivamente, a percentagem de soluções não dominadas existente nas melhores populações finais do algoritmo AGUO2 (obtidas com elitismo) e o grau de semelhança médio (GSM) entre essas soluções. Analogamente, nas colunas (4), (5) e (6), (7) apresenta-se a mesma informação para as versões multi-objectivo, AGMO1 e AGMO2. A última linha da tabela mostra as médias para cada coluna de dados.

Como se observa, a abordagem uni-objectivo apresenta em termos comparativos com as

abordagens multi-objectivo fronteiras de Pareto com um número reduzido de alternativas (3.6% em média, na coluna (2)) e que revelam entre si o mais elevado grau de semelhança médio (com valor médio de 21.4, presente na coluna (3)).

Em termos das versões multi-objectivo, protagonizadas por AGMO1 e AGMO2, verifica-se por leitura das colunas (4), (5) e (6), (7) que a primeira obteve o valor médio mais elevado de soluções na fronteira de Pareto (33.0%), embora com um grau de semelhança médio consideravelmente também elevado (18.8). Por último, observe-se que, por recurso à função de repartição da aptidão, a versão AGMO2 apresenta uma combinação mais equilibrada entre estes dois aspectos. Assim, a média de percentagem de soluções na fronteira de Pareto, mostrada na coluna (6), toma valor intermédio no conjunto dos algoritmos (24.2%), apresentando porém, na coluna (7), um muito menor grau de semelhança média (7.2) o que revela um significativo acréscimo na diversidade das soluções oferecidas.

Instância	AGUO		AGMO1		AGMO2		
	% Sol. f.Pareto	GSM	% Sol. f.Pareto	GSM	% Sol. f.Pareto	GSM	
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
HTTP4	- <sup>a</sup>	- <sup>a</sup>	- <sup>a</sup>	- <sup>a</sup>	- <sup>a</sup>	- <sup>a</sup>	- <sup>a</sup>
HTTP5	- <sup>a</sup>	- <sup>a</sup>	- <sup>a</sup>	- <sup>a</sup>	-	-	-
HTTP6	- <sup>a</sup>	- <sup>a</sup>	-	-	-	-	-
HTTP7	-	-	-	-	-	-	-
HTTP8	-	-	-	-	-	-	-
PREAL1	5	28	32	23	25	9	
PREAL2	6	32	41	21	32	7	
PREAL3	3	26	36	24	22	10	
PREAL4	2	24	27	19	19	8	
PREAL5	2	29	29	26	21	8	
PREAL6	3	27	4	23	2	10	
PREAL7	-	-	-	-	-	-	
ESGHT-P1	2	21	44	17	32	7	
ESGHT-F1	3	18	32	18	25	5	
ESGHT-T1	3	15	36	16	33	8	
ESGHT-P2	4	17	23	14	28	4	
ESGHT-F2	3	14	38	18	29	4	
ESGHT-T2	6	17	33	16	31	7	
ESGHT-P3	7	19	31	15	26	6	
ESGHT-F3	2	14	42	21	20	10	
ESGHT-T3	4	20	47	11	18	5	
Média	3.6	21.4	33.0	18.8	24.2	7.2	

a - não aplicável dada que o algoritmo encontrou uma solução admissível

Tabela 5.8: Caracterização das populações finais admissíveis para 5 execuções de cada algoritmo

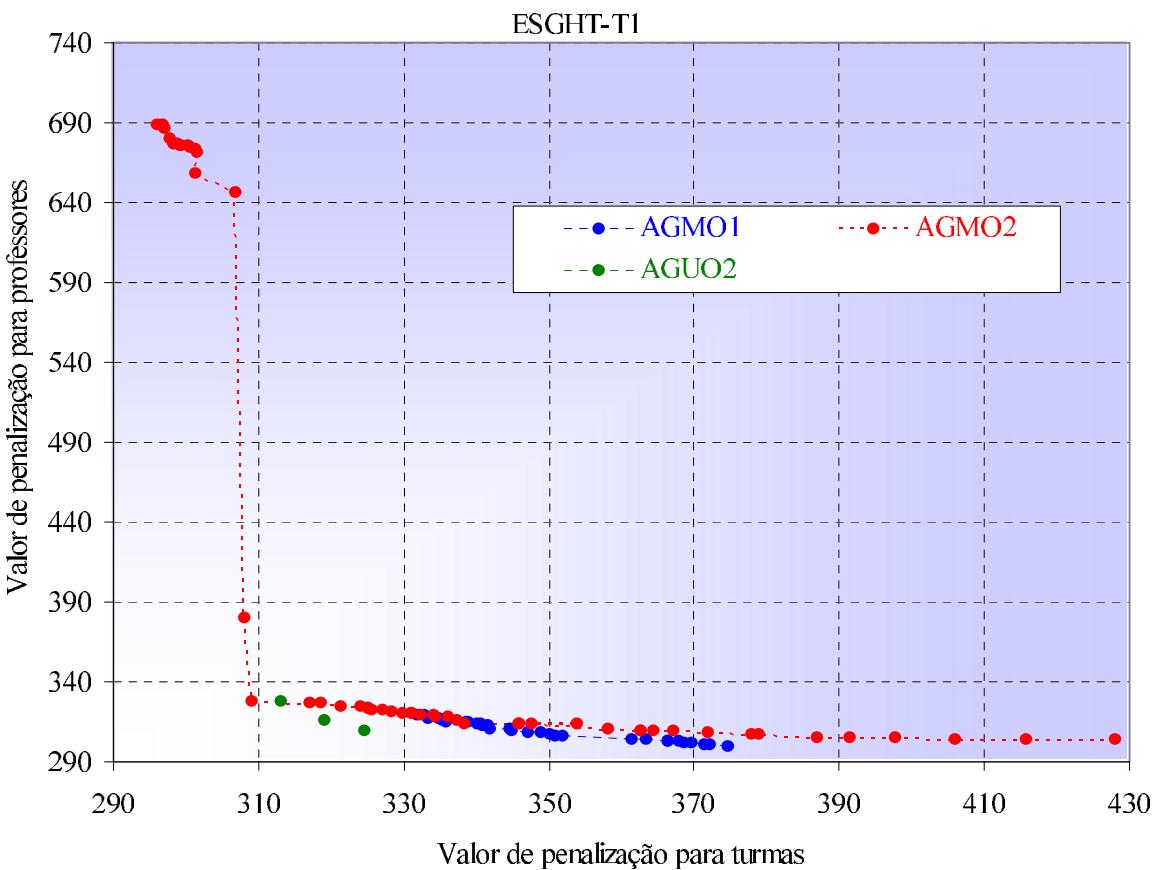


Figura 5-11: Representação da fronteira de Pareto da população final na melhor execução dos algoritmos AGUO2, AGMO1 e AGMO2 para ESGHT-T1

Para ilustrar o número de soluções não dominadas e o seu grau de diversidade observe-se a figura 5-11 que apresenta as fronteiras de Pareto finais ocorridas na melhor execução dos algoritmos AGUO2, AGMO1 e AGMO2 para a instância ESGHT-T1.

É visível na figura 5-11 a diversidade de soluções originadas pelas versões multi-objectivo face à versão uni-objectivo. Repare-se que o AGUO2 apenas forneceu 3 soluções particularmente concentradas numa região do espaço de objectivos, enquanto que as versões multi-objectivo apresentam um espectro de soluções extremamente amplo, em especial a AGMO2 potenciada pelo mecanismo de repartição de aptidão.

Um método de visualização mais apropriado para representar resultados de diversas exe-

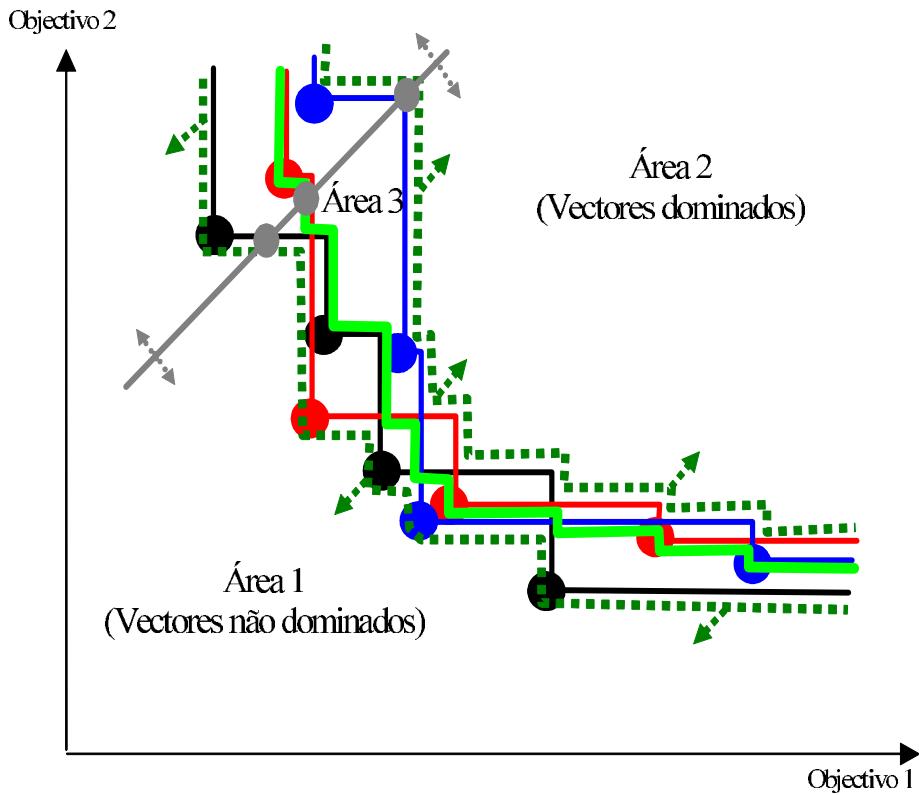


Figura 5-12: Exemplo de linha de aproveitamento

cuções de um algoritmo multi-objectivo é sugerido por Fonseca e Fleming [39] através da identificação de linhas de aproveitamento. Para ilustrar este processo observe-se a figura 5-12 na qual se encontram sobrepostos (utilizando cores distintas para cada execução) os conjuntos de vectores obtidos em 3 execuções de um algoritmo hipotético que visa a minimização de dois objectivos.

Sobre cada conjunto de vectores obtidos em cada execução é então traçada uma linha fronteira que separa os vectores do espaço de objectivos que são dominados ou iguais a pelo menos um dos vectores produzidos na respectiva execução. O resultado é, como se observa, a definição de três linhas de fronteira em escada sobre os vectores resultantes de cada execução, e representadas através de linhas contínuas na cor dos respectivos vectores.

Ao analisar a sobreposição das várias linhas de fronteira identificam-se 3 áreas distintas: a primeira, (Área 1), situada à esquerda e na zona inferior das linhas de fronteira do gráfico

inclui os vectores que não foram obtidos nem dominados por qualquer dos vectores gerados na totalidade das execuções realizadas. A segunda área, (Área 2), localizada acima e à direita das linhas de fronteira é composta pelos vectores dominados por qualquer dos vectores produzidos nas diversas execuções. Por último, a terceira área, (Área 3) corresponde ao espaço situado entre as duas áreas anteriores (separado pelas linhas tracejadas) e que reúne os vectores obtidos ou dominados apenas por uma parte das execuções.

Adicionalmente, é possível dividir esta última área de forma a identificar a linha que separa os vectores do espaço de objectivos que foram obtidos ou dominados em exactamente 50% das execuções e que se designa por linha de aproveitamento de 50% (representada pela linha verde contínua). Para tal, considere-se uma recta arbitrária não perpendicular aos eixos, como se exemplifica na figura. Os pontos de intersecção da recta com as fronteiras resultantes das execuções podem ser interpretados como amostras de uma distribuição uni-dimensional para a qual é possível determinar o valor mediano. O resultado final deste processo gera uma estimativa para o comportamento mediano do algoritmo que corresponde à linha de aproveitamento de 50%. Esta perspectiva de análise permite apreciar graficamente o comportamento global de um algoritmo multi-objectivo relativamente à sua melhor e pior prestação bem como aferir o seu desempenho mediano.

Retomando os dados relativos aos algoritmos AGUO2, AGMO1 e AGMO2 para a instância ESGHT-T1 apresentam-se no gráfico 5-13 as linhas de aproveitamento de 50% e as linhas de fronteiras relativas a cada algoritmo.

No total das execuções realizadas, o AGMO2 comparativamente aos restantes algoritmos continua a evidenciar a maior capacidade de produção de soluções, não só no aspecto qualitativo, expresso pelos valores de penalização para professores e turmas, como na diversidade de soluções apresentadas. Note-se também que, através da comparação das fronteiras superiores e inferiores dos algoritmos é sugerida uma relativa robustez do AGMO2, em particular, na zona superior esquerda onde a área entre as referidas fronteiras é significativamente estreita.

Pela análise das linhas de aproveitamento de 50% verifica-se que, novamente, o AGMO2 apresenta um desempenho significativamente mais favorável, especialmente, na redução do valor de penalização para turmas como se observa ao longo da área esquerda do gráfico 5-13. No que respeita à minimização do valor de penalização para professores, a linha de aproveitamento a

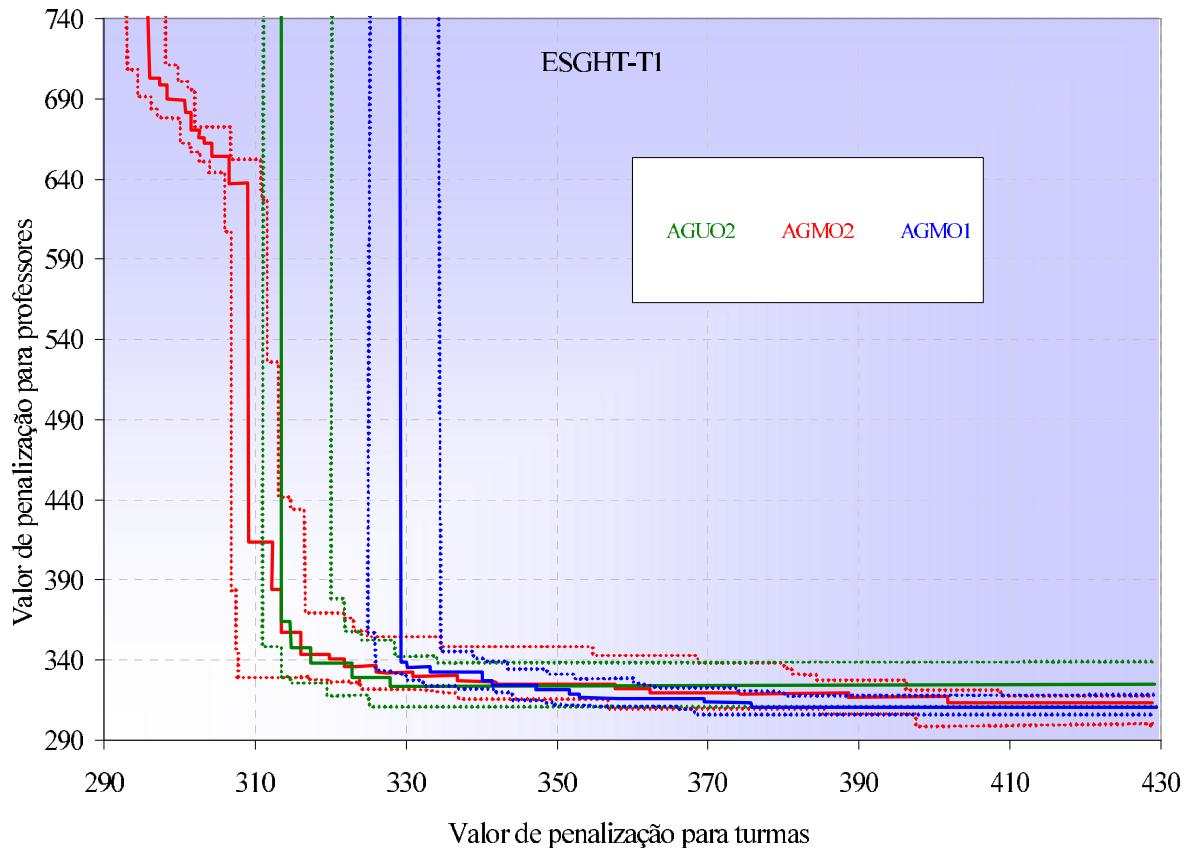


Figura 5-13: Linhas de aproveitamento a 50% dos algoritmos e linhas de fronteira relativas aos AGUO2, AGMO2 e AGMO1 para ESGHT-T1

50% relativa a AGMO1 apresenta-se ligeiramente mais propícia, como se visualiza graficamente ao longo da área inferior direita. Por último, neste aspecto, o AGUO2 apenas apresenta uma reduzida área do gráfico onde o seu comportamento é relevante e que se circunscreve à zona esquerda e inferior das linhas de aproveitamento.

Em conclusão, note-se que numa perspectiva do agente do PEHE as abordagens multi-objectivo devem ser consideradas como as mais apropriadas. De facto, considerando que o agente não tem conhecimento à priori sobre o *trade-off* possível entre o nível de satisfação das pretensões de cada um dos grupos envolvidos (professores e turmas) expressos pelas penalizações dos diferentes condicionalismos obrigatórios e de melhoramento, um elevado número de soluções alternativas distintas, amplia significativamente a sua capacidade de decisão real.

Na prática, num sistema ideal para a resolução do PEHE deve ser possível a escolha num leque diverso de soluções, observando e ponderando as particularidades de cada um dos horários correspondentes, para que se tome a decisão sobre qual a solução a adoptar com base no conhecimento detalhado das penalizações associadas a cada grupo de interesse.

## **Capítulo 6**

# **Aplicação GAHOR**

### **6.1 Contextualização**

Tal como foi referido no Capítulo 1, um dos objectivos desta dissertação comprehende o desenvolvimento de uma aplicação informática configurada para a resolução do PEHE. Para o efeito foi concebido o programa informático designado por GAHOR (Gerador Automático de HORários escolares) tomindo partido dos estudos elaborados nos capítulos Capítulos 1, 2, 4 e 5.

Na base da motivação para o desenvolvimento da aplicação GAHOR podem apontar-se dois factores essenciais.

- Em primeiro lugar, a importância que este problema assume no contexto da gestão de uma instituição escolar é, como se referiu, crucial ao nível pedagógico, administrativo ou financeiro. Como tal, este facto conduziu, em resultado do interesse manifestado por várias instituições escolares, à oportunidade de concepção de uma ferramenta informática appropriada à resolução do PEHE dessas instituições. Enquadra-se neste contexto, como exemplo, o protocolo de colaboração celebrado entre o autor e o Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa cuja finalidade é a produção de um programa destinado à resolução do problema de horários da instituição. É ainda oportuno mencionar que o desenvolvimento da respectiva aplicação se encontra em fase de conclusão, para adaptação ao novo modelo curricular a seguir pela instituição que, ao adoptar uma estrutura mais modular, vai implicar uma reconfiguração da aplicação. Um

outro exemplo de utilização prática do produto desta dissertação, suportada pela aplicação GAHOR, decorre actualmente da Escola Superior de Gestão, Hotelaria e Turismo da Universidade do Algarve, da qual, recorde-se, foram extraídas as instâncias reais utilizadas nos testes computacionais. Neste caso, já ocorreu uma implementação parcial satisfatória das soluções produzidas automaticamente e está planeada a aplicação total das soluções elaboradas pela aplicação informática, durante o próximo ano lectivo.

- A segunda motivação para o desenvolvimento da aplicação GAHOR consistiu na possibilidade de dar continuidade ao estudo deste tema numa perspectiva prática, já iniciado anteriormente pelo autor em [15] mas que, dadas as limitações do modelo estudado, não produziu resultados práticos significativos.

## 6.2 Descrição da aplicação

Desde o momento da concepção do programa e ao longo de todo o processo da sua configuração às diversas circunstâncias particulares originadas no contexto real do PEHE tais como, por exemplo, as solicitações dos indivíduos especialistas nesta tarefa, três orientações base foram constantemente tomadas em consideração.

- Facilidade de utilização da aplicação. O programa desenvolvido, deve apresentar uma *interface* intuitiva e prática, de modo que não exija do utilizador conhecimentos específicos no domínio da Investigação Operacional ou na área da Informática. Assim, procurou-se simplificar a interacção com o utilizador, reduzindo ao essencial a informação solicitada quer através da introdução de opções pré-definidas para os processos mais sensíveis, tais como a parametrização dos algoritmos, quer por recurso a procedimentos de simplificação de introdução de dados.
- Flexibilidade e potencial de evolução. A este nível a aplicação deve permitir a sua adaptação a um conjunto diverso de PEHEs, por esta razão foram mantidas as características que potenciam a utilização generalizada do programa GAHOR em outros problemas de horários com currículos rígidos. Nesta perspectiva refira-se, por exemplo, a escolha da aula como elemento base do modelo, a qual, possibilita a definição de toda uma diversidade de

potenciais afectações entre professores, turmas, salas ou locais, permitindo uma elevada adaptabilidade do modelo no contexto dos PEHEs. Ainda neste âmbito, a estrutura de dados e os algoritmos implementados devem facultar a introdução de novos condicionamentos e/ou novos componentes de dados, proporcionando condições para a actualização e evolução do sistema.

- Reduzida exigência de recursos informáticos. Os recursos informáticos disponíveis para a tarefa de elaboração de horários escolares nas instituições de ensino são escassos, consistindo, habitualmente, num ou mais vulgares microcomputadores (PC). Atendendo a esta restrição, o sistema proposto deve permitir a sua execução numa situação de recursos mínimos, por exemplo, num PC equipado com o comum sistema operativo *Microsoft Windows*.

Em resultado da análise desenvolvida nesta dissertação em torno do PEHE e, tendo como ponto de partida as anteriores orientações, concebeu-se, utilizando a linguagem de programação Delphi 5.0, a aplicação informática GAHOR. A figura 6-1 apresenta de uma forma esquemática os módulos básicos que compõem a aplicação e que serão alvo de descrição em seguida.

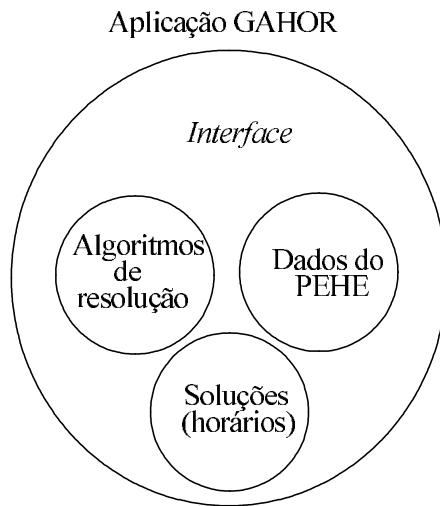


Figura 6-1: Estrutura modular da aplicação GAHOR

### **6.2.1 Algoritmos de resolução**

No que respeita aos algoritmos de resolução do PEHE introduzidos na aplicação GAHOR, optou-se por efectuar uma selecção dos métodos mais apropriados à resolução prática do problema. Na base, desta apreciação foram tomados em consideração os seguintes aspectos.

- Valor de penalização das melhores soluções obtidas para as instâncias-teste. Para a comparação do desempenho de cada um dos algoritmos, observe-se através da tabela 6.1, o valor de penalização da melhor solução obtida por cada um dos algoritmos, para o conjunto de instâncias-teste.

Na tabela mostram-se, respectivamente, nas colunas (2), (3), (4) e (5) os menores valores de penalização obtidos pelos algoritmos ANCP, ANDW, AGUO (na versão 1 e 2) e AGMO (igualmente na versão 1 e 2). Na coluna (6), apresenta-se ainda o valor de penalização correspondente às soluções obtidas manualmente para as instâncias-teste reais. Em termos comparativos, como se verifica atendendo à coluna (3), o ANDW apresentou o melhor desempenho nas instâncias hipotéticas HTTP, sendo o único a determinar soluções óptimas para todos estes casos. Contudo, ao nível das instâncias pseudo-reais e reais foram os algoritmos genéticos que permitiram encontrar a totalidade das melhores soluções, como se observa nas colunas (4) e (5) relativas a estas instâncias. Note-se neste caso, que para as instâncias reais as soluções encontradas apresentam valores de penalização significativamente inferiores aos obtidos por via manual. Relativamente ao algoritmo ANCP por análise das colunas (1) e (6), constata-se que este não obteve, qualquer solução ao nível da qualidade das soluções produzidas pelos restantes métodos, conseguindo apenas a construção de soluções com valor de penalização inferior às obtidas manualmente. Face a estes resultados, e dado que, como se observou anteriormente no Capítulo 5, os tempos computacionais registados pelos algoritmos genéticos são compatíveis com o período de tempo disponível para a resolução do PEHE, os algoritmos AGUO e AGMO sugerem uma maior viabilidade para a resolução prática do PEHE.

Instância	ANCP	ANDW	AGUO	AGMO	Valor pen.
	Men.val.pen.	Men.val.pen.	Men.val.pen.agr	Men.val.pen.agr.	sol. manual
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
HTTP4	5000	<b>0*</b>	<b>0*</b>	<b>0*</b>	-
HTTP5	8000	<b>0*</b>	<b>0*</b>	<b>0*</b>	-
HTTP6	11000	<b>0*</b>	<b>0*</b>	1000	-
HTTP7	18000	<b>0*</b>	2000	11000	-
HTTP8	25000	<b>0*</b>	5000	25000	-
PREAL1	28	<b>27*</b>	<b>27*</b>	<b>27*</b>	-
PREAL2	1031	<b>27*</b>	<b>27*</b>	<b>27*</b>	-
PREAL3	39	<b>36*</b>	<b>36*</b>	<b>36*</b>	-
PREAL4	42	<b>36*</b>	<b>36*</b>	<b>36*</b>	-
PREAL5	69	63	63	<b>62</b>	-
PREAL6	81	<b>79*</b>	80	<b>79*</b>	-
PREAL7	2082	<b>1080</b>	<b>1080</b>	<b>1080</b>	-
ESGHT-P1	302	272	270	<b>267</b>	328
ESGHT-F1	403	382	<b>374</b>	377	458
ESGHT-T1	770	641	<b>636</b>	<b>636</b>	864
ESGHT-P2	310	294	<b>291</b>	292	331
ESGHT-F2	396	377	<b>368</b>	<b>368</b>	463
ESGHT-T2	780	664	<b>647</b>	650	871
ESGHT-P3	321	289	<b>285</b>	286	341
ESGHT-F3	411	398	393	<b>391</b>	459
ESGHT-T3	792	669	<b>662</b>	<b>662</b>	886

\* Valor de penalização da solução óptima. Note-se que para as instâncias PREAL1 a PREAL4 os valores mínimos obtidos são idênticos aos valores determinados pelo minorante *MPC2a*. Os valores a bold indicam o valor de penalização mínimo obtido para cada instância.

Tabela 6.1: Comparação entre os valores mínimos obtidos pelos diversos algoritmos

- Grau de adaptabilidade do algoritmo a outras instâncias do PEHE. A comparação dos algoritmos, com base neste aspecto, uma vez mais favorece os algoritmos genéticos. De facto, em comparação com a alternativa neuronal que envolve uma formalização matemática mais rígida e limitada, os algoritmos genéticos apresentam uma estrutura mais flexível e aberta a futuras modificações. A este respeito recorde-se que os modelos neuronais requerem a inserção de novos condicionalismos adicionais através da função de energia, podendo constituir este factor uma forte limitação para a expansão destas abordagens. Refira-se ainda que neste caso se admitiu particularizações ao nível dos valores dos parâmetros que definem a aplicação dos condicionalismos obrigatórios (1d) e (1g), designadamente para  $N_c = 1$  e  $HAlmF(d) - HAlmI(d) = 1$  para  $d \in D$ .
- Relevância para o processo de decisão. Tal como se mencionou a propósito das abordagens multi-objectivo, o normal processo de decisão associado ao PEHE é favorecido pela disponibilização de um leque diverso de soluções alternativas de qualidade, permitindo ao agente do PEHE uma avaliação mais consciente e pormenorizada do seu espaço de decisão. Neste cenário que condicionou igualmente a escolha dos algoritmos de resolução a implementar, optou-se pela escolha do algoritmo multi-objectivo AGMO (em ambas as versões) como método de resolução principal na aplicação GAHOR, sendo implementada a versão uni-objectivo AGUO2 apenas como opção secundária.

### 6.2.2 Dados do PEHE

Atendendo ao elevado volume de informação envolvida na tarefa de elaboração de horários escolares, à qual já se fez referência durante a apresentação do PEHE nos Capítulos 1 e 2, o aspecto da estruturação da informação mereceu a atenção no desenvolvimento da aplicação. De facto, como se comprehende, a gestão do conjunto de dados que descreve uma instância do PEHE apresenta dois factores de dificuldade.

O primeiro resulta da elevada dimensão do conjunto de dados requeridos, o que é visível, por exemplo, através da introdução das aulas que constituem o plano curricular de vários cursos (podendo ultrapassar um milhar de aulas) ou, ainda, pela introdução das inúmeras informações referentes às disponibilidades e preferências de professores, turmas ou salas.

Por outro lado, a frequência de actualização da informação resultante da actividade de

um estabelecimento de ensino que ocorre normalmente a cada semestre, implica um esforço significativo e regular por parte da estrutura administrativa, justificando o desenvolvimento de um sistema informático para a introdução, registo e actualização dos dados.

Para o efeito, a aplicação desenvolvida distingue dois níveis de informação.

O primeiro nível corresponde à estrutura de dados que suporta o armazenamento da totalidade dos aspectos relativos ao PEHE e cujos principais componentes básicos se mostram na figura 6-2. Na figura, referem-se ainda os tipos de relação existente entre cada elemento destes componentes<sup>1</sup>. O segundo nível de informação é constituído pelas estruturas de dados definidas no modelo matemático apresentado no Capítulo 2 e que são requeridos durante a fase de resolução automatizada do problema. Consequentemente, nesta configuração o processo de elaboração automatizada de horários escolares é antecedido por uma fase de geração dos dados necessários aos métodos de resolução (parâmetros, conjuntos e matrizes) com base na informação armazenada no primeiro nível de dados.

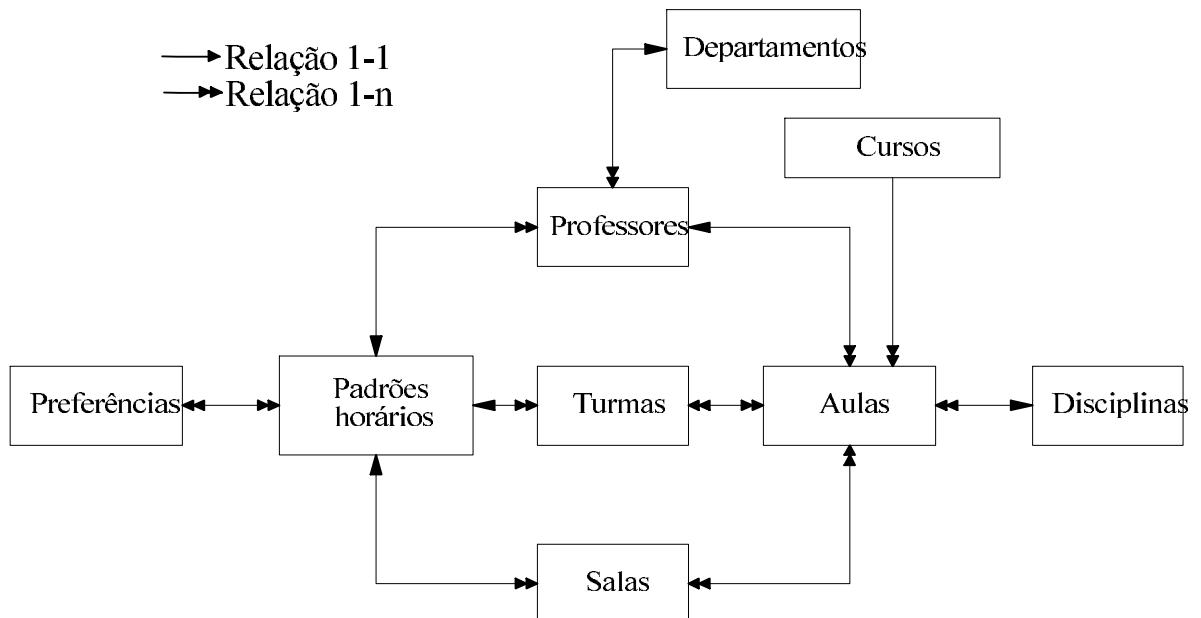


Figura 6-2: Componentes da estrutura de dados da aplicação GAHOR

<sup>1</sup> A título de exemplo refira-se a relação estabelecida entre professores e departamentos: um professor pertence a um único departamento (1-1) mas a um departamento são associados vários professores (1-n).

Como se observa na figura 6-2, ao nível da estrutura base de informação foram introduzidos alguns componentes que não têm correspondência directa no modelo matemático proposto para o PEHE, nomeadamente, os componentes Padrões horários, Departamentos e Cursos. Estas inclusões resultaram da necessidade de recolha de informação suplementar relativa ao contexto do problema e que, não sendo directamente utilizada pelos algoritmos de resolução, potenciam a estruturação, manipulação e visualização da informação, bem como, possibilitam a futura definição de outros condicionalismos.

Descreve-se em seguida o processo de inserção de dados, caracterizando cada componente e os seus elementos constituintes.

Após a execução da aplicação o utilizador é solicitado a introduzir os dados relativos aos cursos, disciplinas e departamentos da instituição. A figura 6-3 mostra a interface utilizada para a inserção e edição destes dados no caso da instância ESGHT-P1.



Figura 6-3: Ecrã de introdução de dados para cursos, disciplinas e departamentos

## Cursos

Para a definição de um curso são requeridos os seguintes dados:

*Curso (Designação do curso ; Abreviatura do curso)*

Os campos de dados Designação do curso e Abreviatura do curso constituem, como se observa, as únicas informações necessárias para a definição de um curso.

Posteriormente, na fase de definição das aulas, há lugar à associação destas aos respectivos cursos, apesar de os cursos não constituírem informação base para a resolução automatizada do PEHE. Relativamente à abreviatura, verificou-se que durante a posterior fase de publicação dos horários, na qual toda a informação é apresentada sob uma forma condensada, as instituições de ensino recorrem habitualmente a um conjunto próprio de abreviaturas definidas para vários elementos do PEHE, tais como aulas, disciplinas, turmas, salas, etc. Por este motivo constituíram-se campos para esta finalidade na maioria das componentes seguintes.

## Disciplinas

Em seguida, para cada disciplina é necessária a seguinte informação:

*Disciplina (Designação da disciplina ; Abreviatura da disciplina)*

Neste caso, requer-se uma designação para a disciplina e a respectiva abreviatura. Estes dados originam o conjunto  $C$  definido na formalização do PEHE, permitindo estabelecer posteriormente ligações com as aulas.

## Departamentos

Para a definição dos departamentos, o utilizador é solicitado a inserir a seguinte informação:

*Departamento (Designação do departamento; Abreviatura do departamento)*

Tal como os componentes anteriores, é definida uma tabela de departamentos contendo a designação do departamento e da sua abreviatura. A esta tabela será mais tarde atribuído cada um dos professores.

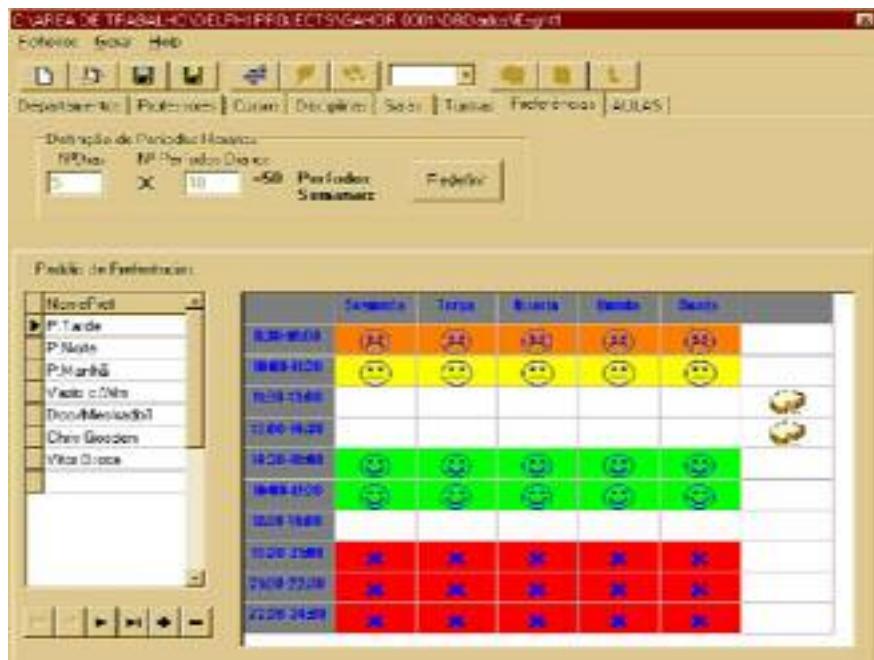


Figura 6-4: Ecrã de introdução de dados relativos aos padrões horários

**Padrões horários** Num segundo momento o utilizador é confrontado com o ecrã apresentado na figura 6-4. No ecrã de introdução mostrado na figura 6-4 é possível definir o número de dias lectivos e o número de períodos horários diários, permitindo a definição dos parâmetros  $D'$ ,  $H'$ ,  $HDiaI(d)$ ,  $HDiaF(d)$  e dos conjuntos  $D$ ,  $H$ ,  $HDia(d)$ .

Por uma questão de simplificação para o utilizador, a introdução das indisponibilidades e preferências horárias incluídas nas matrizes  $[IP_{ph}]$ ,  $[IT_{th}]$ ,  $[IS_{sh}]$ ,  $[PreP_{ph}]$  e  $[PreT_{th}]$  foi concentrada nesta fase. De facto, o conhecimento passado sobre os condicionalismos horários representados nestas matrizes mostraram que é frequente a definição de padrões de disponibilidade e preferência horária comuns entre professores, turmas ou salas.

Na aplicação GAHOR, de uma forma intuitiva e através de uma escala cromática de 6 níveis (associados aos 5 níveis de preferência, mais um para designar a indisponibilidade), o utilizador define padrões de disponibilidade e preferências horárias que podem posteriormente ser afetadas a professores, turmas ou salas, passando as respectivas matrizes a ter um preenchimento automático. A estrutura de base de dados que suporta este processo é a seguinte:

*Preferências (Período horário; Valor de preferência)*

*Padrão horário (Designação de padrão horário; Preferências [...])*

A definição destas duas tabelas permite a reutilização do mesmo padrão horário por diferentes recursos sejam eles professores, turmas ou salas. Ainda neste ecrã, são indicados quais os períodos horários destinados ao período de almoço, definindo os parâmetros  $HAlmI(d)$  e  $HAlmF(d)$  para cada dia.

Numa terceira fase é necessária a inserção dos dados relativos aos professores e às turmas, de que se mostra na figura 6-5 o respectivo ecrã de introdução e edição dos dados.



Figura 6-5: Ecrã de inserção de dados relativos aos professores e às turmas

## Professores

Assim para cada professor, devem ser introduzidos os seguintes dados:

*Professor (Nome do professor ; Abreviatura ; Departamento ; Local de residência ; Padrão horário)*

Os dados relativos aos professores que permitem a definição do conjunto  $P$ , são introduzidos

nesta tabela. Como se observa são recolhidas informações adicionais para complemento do perfil de cada docente, designadamente o seu nome abreviado, departamento a que pertence, local de residência e padrão de preferência. A informação relativa ao local de residência foi incluída por necessidade administrativa da ESGHT, e somente para efeitos de contabilização das deslocações dos docentes. Relativamente ao padrão horário de preferência, como se viu, este permite a definição das matrizes  $[IP_{ph}]$  e  $[PreP_{ph}]$  para cada professor.

## Turmas

Para a definição das turmas são requeridos os seguinte dados:

*Turma (Designação da turma ; Abreviatura ; Dimensão ; Curso ; Ano ; Padrão horário)*

Este conjunto de dados relativos às turmas permite constituir o conjunto  $T$  e o seu parâmetro de dimensão  $T'$ . A definição de uma turma implica a indicação da sua designação e abreviatura, curso, ano e padrão de preferência. Interessa referir que o pedido de informação relativa à dimensão da turma visa a implementação de um procedimento de exclusão de salas que será explicado em detalhe a propósito da introdução das aulas. Para efeito de organização e consulta dos dados, faz-se a afectação da turma a um ano e a um curso. De novo, o padrão horário de preferência associa-se à constituição das matrizes  $[IT_{th}]$  e  $[PreT_{th}]$ .

## Salas

Nesta etapa, por solicitação dos utilizadores, permite-se a agregação de salas individuais em grupos de salas tipo. Para o efeito, o procedimento de introdução, realizado sobre o ecrã apresentado na figura 6-6, solicita a informação suportada pelas seguintes tabelas:

*Sala (Designação da sala ; Abreviatura ; Capacidade ; Local ; Grupo de salas ; Padrão horário)*

*Grupo de Salas (Designação do grupo de salas ; Abreviatura)*

Por este processo, a inserção da informação respeitante às alternativas de salas para cada aula fica facilitada, sendo possível com uma única selecção atribuir várias salas alternativas a uma aula. De igual forma, para a definição de uma sala ou grupo de salas continuam a ser necessárias as respectivas designações e abreviaturas. É também solicitada a informação da

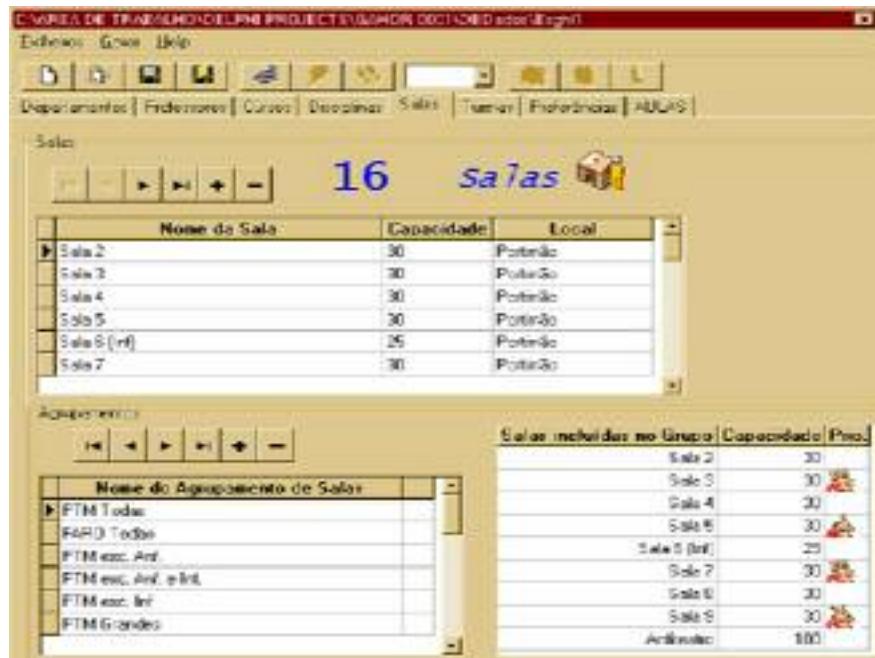


Figura 6-6: Ecrã de inserção de dados relativos às salas

capacidade, expressa em número de alunos, para cada sala para um posterior preenchimento da matriz  $[Q_{as}]$ . Para a finalidade de distinção entre locais de localização das salas é necessária a introdução do local geográfico da sala. Por último, é ainda permitido definir um padrão horário para cada sala que resultará na transferência das respectivas indisponibilidades horárias para a matriz  $[IS_{sh}]$ .

## Aulas

Para o efeito de inserção dos dados que compõem as aulas, através de um ecrã ilustrado na figura 6-7, são necessárias as seguintes informações:

*Aula ( Designação da aula ; Abreviatura de aula; Curso ; Ano ; Período; Local ; Disciplina ; Professor ; Turmas [...] ; Salas [...]; Duração ; Tipo ; Cor )*

Após a definição da designação e abreviatura da aula, são estabelecidas associações desta com as tabelas de cursos e disciplinas. Como se observa são introduzidos campos adicionais

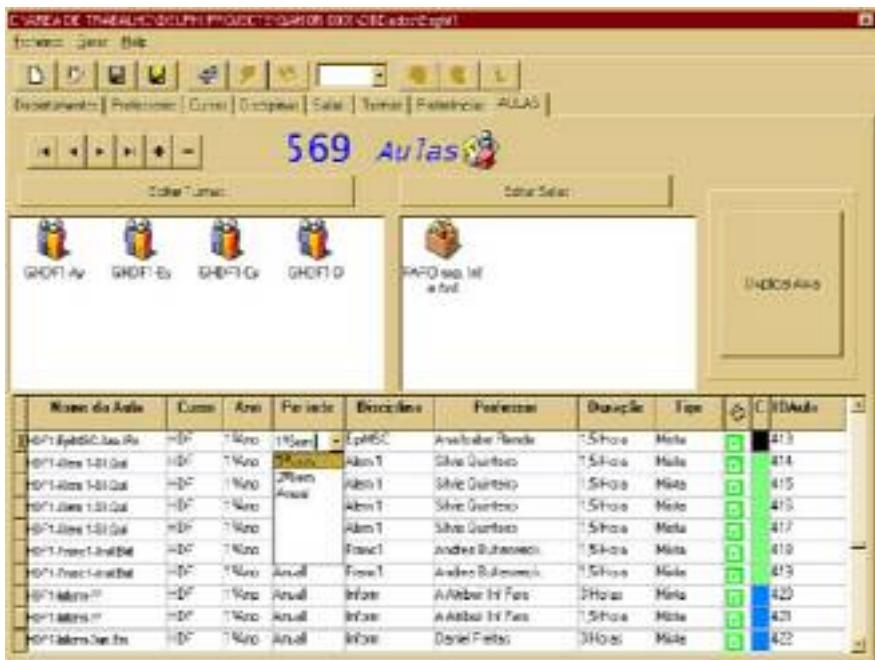


Figura 6-7: Ecrã de inserção de dados relativos às aulas

que servem para caracterizar as aulas e que actuam como critérios de selecção e visualização, nomeadamente, o ano do curso a que a aula corresponde, o período lectivo, a sua duração em períodos horários, o tipo de aula (prática ou teórica) ou, ainda, uma coloração de visualização. Também durante esta fase é realizada a necessária atribuição de um professor e de um conjunto de turmas a cada aula.

Quanto à definição das salas adequadas ao funcionamento da aula, posteriormente reflectida na matriz  $[Q_{as}]$ , o utilizador pode facilmente fazer essa selecção escolhendo salas de forma individual ou em grupos. Adicionalmente, sobre este aspecto foi definido um procedimento automático. A partir da informação recolhida acerca da dimensão das turmas e da capacidade das salas, faz-se a validação das afectações de salas a aulas de acordo com a seguinte implicação:

$$\sum_{t \in TAula(a)} Dimensão\ da\ turma\ t > Capacidade\ da\ sala\ s \Rightarrow Q_{as} = 1 \quad (6.1)$$

para  $a \in A; s \in S$  e onde  $TAula(a)$  é o conjunto de turmas que assistem à aula  $a$ .

Através deste procedimento são excluídas automaticamente, para cada aula, as salas que são insuficientes para acolher a totalidade dos alunos envolvidos.

Por último, refira-se que o campo relativo ao local, com o qual se define a matriz  $L_{aa'}$ , importa a identificação do local de realização da aula a partir da respectiva selecção de salas que como se viu inclui esta informação.

### 6.2.3 Solução e gestão de horários

Ao nível da gestão e visualização de soluções para o PEHE a aplicação GAHOR possibilita um variado leque de opções, designadamente, armazenamento, edição (modificação), visualização e impressão de horários

- Armazenamento, visualização e impressão dos horários. Tal como se ilustra na figura 6-8, os horários são apresentados diferenciando cromaticamente cada aula. É possível neste cenário a visualização e impressão dos múltiplos horários para professores, turmas ou salas.

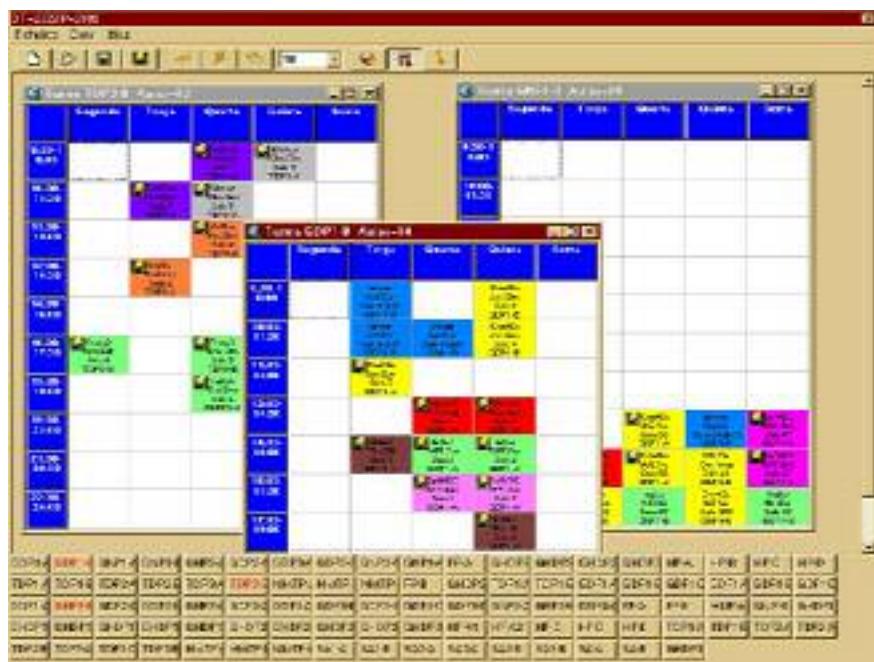


Figura 6-8: Ecrã de visualização e edição dos horários

- Edição e alteração da solução. A este nível é permitido ao utilizador que modifique qualquer das soluções já existentes ou que, eventualmente, inicie a construção de uma solução

em modo supervisionado. Para tal, o programa indica ao utilizador quais as salas e tempos disponíveis para cada aula a escalonar, calculando, adicionalmente, o correspondente acréscimo de penalização nos horários dos professores ou turmas envolvidos.

- Elaboração automática da solução. Esta opção consiste na execução propriamente dita dos algoritmos descritos anteriormente.

#### 6.2.4 Interface

Para além de todos os aspectos já ilustrados anteriormente, a aplicação GAHOR inclui uma *interface* específica para a interacção do utilizador com os algoritmos implementados. A exemplo, considere-se o ecrã contido na figura 6-9 que mostra o funcionamento da aplicação durante a fase de pesquisa de soluções através do AGMO.



Figura 6-9: Ecrã de funcionamento da aplicação durante a fase de pesquisa de soluções através do AGMO

Esta janela permite identificar alguns dos aspectos que caracterizam a resolução automatizada de instâncias do PEHE através deste programa, nomeadamente, configurações base, opções de inicialização e visualização da população corrente, listagem de soluções, etc.

- Opções pré-configuradas para parametrização dos algoritmos. Simplificando a interacção com o utilizador, diversos parâmetros podem ser limitados a intervalos, para os quais se verificou que o algoritmo teve um comportamento satisfatório. Para além disso, por defeito, o utilizador é confrontado com um conjunto de configurações base.
- Opções de inicialização da população. O utilizador pode escolher o processo de geração da população inicial através das heurísticas AS e ICO descritas no Capítulo 5, sendo ainda possível a inicialização da população através da importação de soluções manuais existentes ou produzidas automaticamente.
- Visualização da população corrente e das soluções não dominadas. Em qualquer momento o utilizador pode observar graficamente a evolução da população em termos dos valores de penalização para professores e turmas, sendo possível ampliar regiões de interesse no gráfico e analisar individualmente cada solução.
- Listagem completa das soluções da população, com os respectivos valores de penalização. Para permitir uma fácil percepção da qualidade das soluções, em termos da violação dos condicionalismos obrigatórios adicionou-se uma escala cromática que permite avaliar intuitivamente a qualidade global das soluções na população em qualquer iteração do algoritmo genético.
- Possibilidade de suspensão da execução do algoritmo e impressão das soluções. Através desta opção o utilizador pode introduzir e modificar aspectos não desejáveis nas soluções produzidas automaticamente. É ainda permitida a fixação de uma ou mais soluções particulares na população secundária, permitindo a exploração de diferentes soluções alternativas propostas pelo utilizador.

Outros aspectos que visam a melhoria da relação entre o utilizador, os dados e os algoritmos implementados encontram-se em fase de experimentação, não sendo aqui ainda expostos. Como consideração final acerca da aplicação GAHOR, refira-se que a aplicação não tem por objectivo a comercialização, continuando o principal objectivo a centrar-se no desenvolvimento de uma aplicação versátil e eficaz para a resolução automatizada do PEHE.

# **Capítulo 7**

## **Conclusão**

Ao longo desta dissertação procedeu-se ao estudo de um problema complexo e comum em instituições de ensino, designado por PEHE, e que consiste na elaboração de horários para aulas num sistema com currículos rígidos.

Com vista ao desenvolvimento de métodos que permitissem a resolução automatizada do PEHE, num primeiro momento propuseram-se dois modelos matemáticos para os quais, dada a sua complexidade, se concluiu ser apropriada a adaptação de heurísticas. Neste contexto, e após uma apreciação do enquadramento teórico/prático dado a este tipo de problemas na literatura, foram propostas duas abordagens baseadas, respectivamente, em redes neurais artificiais e em algoritmos genéticos e que permitiram resolver satisfatoriamente instâncias hipotéticas e reais de teste para o PEHE.

Como resultado, uma aplicação informática suportada parcialmente pelos algoritmos desenvolvidos foi concebida visando a resolução prática e eficiente deste problema.

Em termos específicos é possível concluir que as principais contribuições propostas nesta dissertação resultam dos factos que de seguida se expõem.

Foram apresentadas duas formalizações para o PEHE que contemplam exaustivamente todos os condicionalismos obrigatórios requeridos para a produção de soluções viáveis em situações reais. A primeira formalização descreve um modelo matemático linear binário que se expressa através de um problema de admissibilidade susceptível de gerar soluções admissíveis para o PEHE. Uma segunda formalização, mais completa, foi delineada através de um problema de optimização não linear binário que toma em consideração a minimização de um diverso conjunto

de condicionalismos de melhoramento, associados à qualidade dos horários. Complementarmente, as formalizações foram estudadas no âmbito da complexidade computacional, concluindo-se que ambas são NP-difíceis, adequando-se por isso a abordagens de resolução não exactas.

É de referir que a estrutura de parâmetros e restrições utilizada é particularmente flexível e completa, comparativamente a outras propostas na literatura. Tomando como certa a necessidade de actualização e extensão dos condicionalismos do PEHE, a estrutura dos parâmetros utilizada permitiu numa primeira fase satisfazer directamente uma diversidade de requisitos práticos do problema. No caso de novos condicionalismos não se encontrarem contemplados pelas actuais formalizações os modelos suportam facilmente a incorporação de novas restrições ou mesmo termos adicionais na função objectivo.

No domínio das redes neurais para o PEHE como problema de optimização foi proposto, a par com uma adaptação de um algoritmo neuronal com neurónios contínuos de Potts, um algoritmo neuronal discreto suportado por neurónios *winner-takes-all* que demonstrou um desempenho superior à versão contínua, quer em termos da qualidade das soluções obtidas quer em termos do tempo computacional dispendido. Note-se ainda, que ambos os algoritmos evidenciaram experimentalmente a capacidade de produzir soluções de qualidade para as instâncias-teste reais do problema em estudo.

Igualmente para o PEHE na versão de optimização, conceberam-se dois algoritmos genéticos. Para ambos foi definida uma representação natural do cromossoma, e desenvolveram-se operadores genéticos especializados para a evolução das soluções do PEHE constituintes da população. O primeiro algoritmo parte de uma perspectiva uni-objectivo para o problema, enquanto que o segundo é uma adaptação ao problema de horários de um genético de tipo multi-objectivo. Neste caso os dois objectivos distintos expressam, separadamente, a qualidade dos horários produzidos para professores e alunos, permitindo assim a conciliação de interesses normalmente antagónicos. Para ambas as versões do genético, concluiu-se experimentalmente que a introdução de mecanismos elitistas favoreceu a qualidade das soluções finais enquanto que, e especificamente para o algoritmo genético multi-objectivo, o efeito de um procedimento de repartição da aptidão aumentou a produção de soluções diferenciadas. Os testes computacionais realizados com os algoritmos sobre o conjunto de instâncias-teste permitiram concluir que as abordagens são adequadas para a resolução prática e automatizada do PEHE.

Desenvolveu-se ainda uma aplicação informática especializada para a resolução do PEHE baseada, essencialmente, no algoritmo genético multi-objectivo. Adicionalmente, o programa inclui diversos procedimentos automáticos ou semi-automáticos que contribuem para aumentar a sua versatilidade e facilidade de utilização, quer em termos da inserção e edição de dados quer do controlo do processo de geração automatizada de soluções.

Salientam-se agora aspectos que demonstraram algum tipo de limitação e que suscitam desse modo o desenvolvimento de novas orientações de investigação ou um estudo mais profundo nas áreas em questão. As limitações que decorrem dos modelos neuronais propostos, quer por via da necessidade de inserção de novos condicionalismos nas funções de energia, quer pela particular parametrização imposta para a adaptação às instâncias-teste, tornam esta abordagem pouco flexível comparativamente à alternativa genética, num contexto de resolução prática do problema. Neste sentido, o estudo de novas formalizações e estruturas de redes neuronais menos rígidas é sugerido com a finalidade de, por exemplo, permitir a utilização de funções de energia não quadráticas.

Ao nível dos algoritmos genéticos podem ser desenvolvidos novos operadores genéticos híbridos que incorporem, por exemplo, os algoritmos neuronais estudados ou outros métodos baseados em modelos de optimização de redes que potenciem a produção de soluções de qualidade para o PEHE.

Noutra perspectiva, ambos os tipos de algoritmos propostos, quer neuronais quer genéticos, dada a sua evidente relação com os modelos biológicos reais, são inherentemente paralelizáveis, pelo que a apostila no estudo futuro desta vertente poderá traduzir-se num aumento significativo do seu desempenho computacional.

No domínio da actualização da aplicação informática também diversos aspectos podem ser aperfeiçoados, nomeadamente, a introdução de mais procedimentos de geração e de melhoramento de soluções individuais com base em pesquisa local, bem como, heurísticas especializadas que recorram a informações adicionais prestadas pelo decisior.

Finalmente, a pós-optimização de soluções horárias é uma relevante possibilidade de estudo. De facto, este é um aspecto importante que não foi abordado nesta dissertação, mas que constitui uma realidade presente em todos os problemas de horários. O desenvolvimento de um sistema informático suplementar que suporte esta necessidade é também sugerido.

# Bibliografia

- [1] Abramson, D. “Constructing School Timetables Using Simulated Annealing: Sequential and Parallel Algorithms,” *Management Science*, 37(1):98–113 (1991).
- [2] Abramson, D. ; Abela, J. “A Parallel Genetic Algorithm for Solving the School Timetabling Problem”. Technical Report, Division of Information Technology, CSIRO, 1991.
- [3] Antonisse, J. “A New Interpretation of Schema Notation That Overturns the Binary Encoding Constraint.” *Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms*, editado por J. Schaffer. 86–97. San Francisco: Morgan Kaufmann, 1989.
- [4] Aubin, J. ; Ferland, J. “A Large Scale Timetabling Problem,” *Computers and Operations Research*, 16(1):67–77 (1989).
- [5] Azevedo, F. ; Barahona, P. “Timetabling in Constraint Logic Programming.” *Proceedings of 2nd World Congress on Expert Systems*. 1994.
- [6] Bardadym, V. “Computer-Aided School and University Timetabling: The New Wave.” *Practice and Theory of Automated Timetabling*, Número 1153, editado por E. Burke e P. Ross. 22–45. Berlin: Springer Verlag, 1996.
- [7] Birbas, T. ; Daskalaki, S. ; Housos, E. “Timetabling for Greek High Schools,” *Journal of the Operational Research Society*, 48:1191–1200 (1997).
- [8] Bout, V. ; Miller, T. “Improving the Performance of the Hopfield-Tank Neural Network Through Normalization and Annealing,” *Biological Cybernetics*, 62:123–139 (1989).

- [9] Burke, E. ; Elliman, D. ; Ford, P. ; Weare, R. “Examination Timetabling in British Universities - a Survey.” *Practice and Theory of Automated Timetabling*, Número 1153, editado por E. Burke e P. Ross. 76–92. Berlin: Springer Verlag, 1996.
- [10] Burke, E. ; Newall, J. ; Weare, R. “A Memetic Algorithm for University Exam Timetabling.” *Practice and Theory of Automated Timetabling*, Número 1153, editado por E. Burke e P. Ross. 241–250. Berlin: Springer Verlag, 1996.
- [11] Burke, E. ; Newall, J. ; Weare, R. “Initialization Strategies and Diversity in Evolutionary Timetabling,” *Evolutionary Computation*, 6:81–103 (1998).
- [12] Burke, L. ; Ignizio, J. “Neural Networks and Operations Research: An Overview,” *Computers and Operations Research*, 19:179–189 (1992).
- [13] Caldeira, J. ; Agostinho, C. “School Timetabling Using Genetic Search.” *Practice and Theory of Automated Timetabling II*, Número 1408, editado por E. Burke e M. Carter. 45–52. Berlin: Springer Verlag, 1998.
- [14] Carlson, R. ; Nemhauser, G. “Scheduling to Minimize Interaction Cost,” *Operations Research*, 14:52–58 (1965).
- [15] Carrasco, M. *Redes Neuronais na Elaboração de Horários Escolares*. Dissertação de Mestrado, Instituto Superior de Economia e Gestão, Universidade Técnica de Lisboa, 1995.
- [16] Carrasco, M. ; Pato, M. “Uma Heurística Neuronal para a Elaboração de Horários Escolares,” *Investigação Operacional*, 18:101–118 (1998).
- [17] Carrasco, M. ; Pato, M. “A Multiobjective Genetic Algorithm for the Class/Teacher Timetabling Problem.” *Practice and Theory of Automated Timetabling III*, Número 2079, editado por E. Burke e W. Erben. 3–17. Berlin: Springer Verlag, 2001.
- [18] Carrasco, M. ; Pato, M. “A Comparison of Discrete and Continuous Neural Network Approaches to Solve the Class/Teacher Timetabling Problem,” *em processo de publicação no European Journal of Operational Research* (2002).

- [19] Carrasco, M. ; Pato, M. “A Potts Neural Heuristic for the Class/Teacher Timetabling Problem,” *em processo de publicação em "Metaheuristics: Computer Decision-making", Kluwer Academic Publishers* (2003).
- [20] Carter, M. “A Comprehensive Course Timetabling and Student Scheduling System at the University of Waterloo.” *Practice and Theory of Automated Timetabling III*, Número 2079, editado por E. Burke e W. Erben. 64–84. Berlin: Springer Verlag, 2001.
- [21] Carter, M. ; Laporte, G. “Recent Developments in Practical Examination Timetabling.” *Practice and Theory of Automated Timetabling*, Número 1153, editado por E. Burke e P. Ross. 3–21. Berlin: Springer Verlag, 1996.
- [22] Cichocki, A ; Unbehauen, R. *Neural Networks for Optimization and Signal Processing*. Stuttgart: Wiley, 1993.
- [23] Colomni, A. ; Dorigo, M. ; Maniezzo, V. “Genetic Algorithms and Highly Constrained Problems: The Timetable Case.” *Proceedings of the First International Workshop on Parallel Problem Solving from Nature*. 55–59. Dortmund, Germany: Springer Verlag, 1991.
- [24] Cooper, T. ; Kingston, J. “The Complexity of Timetable Construction Problems.” *Practice and Theory of Automated Timetabling*. Número 1153. 283–295. Berlin: Springer Verlag, 1996.
- [25] Costa, D. “A Tabu Search Algorithm for Computing an Operational Timetable,” *European Journal of Operational Research*, 76:98–110 (1994).
- [26] Davis, L. *Handbook of Genetic Algorithms*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1991.
- [27] de Werra, D. “An Introduction to Timetabling,” *European Journal of Operational Research*, 19:151–162 (1985).
- [28] Deb, K. ; Agrawal, S. ; Pratap, A. ; Meyarivan, T. *A Fast Elitist - Non-Dominated Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization NSGAII*, 849–858. Paris: Springer Verlag, 2000.

- [29] DeJong, K. *An Analysis of the Behavior of a Class of Genetic Adaptive Systems*. PhD dissertation, University of Michigan, 1975.
- [30] Deris, S. ; Omatu, S. ; Ohta, H. ; Samat, P. “University Timetabling by Constraint-Based Reasoning,” *Journal of the Operational Research Society*, 48:1178–1190 (1997).
- [31] Durbin, R. ; Willshaw, D. “An Analogue Approach to the Travelling Salesman Problem Using an Elastic Net Method,” *Nature*, 326:689–691 (1987).
- [32] Eglese, R. ; Rand, G. “Conference Seminar Timetabling,” *Journal of the Operational Research Society*, 38(7):591–598 (1987).
- [33] Erben, W. ; Keppler, J. “A Genetic Algorithm Solving a Weekly Course Timetabling Problem.” *Practice and Theory of Automated Timetabling*, Número 1153, editado por E. Burke e P. Ross. 198–211. Berlin: Springer Verlag, 1996.
- [34] Ergül, A. “GA-Based Examination Scheduling Experience at Middle East Technical University.” *Practice and Theory of Automated Timetabling*, Número 1153, editado por E. Burke e P. Ross. 212–226. Berlin: Springer Verlag, 1996.
- [35] Even, S. ; Itai, A. ; Shamir, A. “On the Complexity of Timetabling and Multicommodity Flow Problems,” *SIAM Journal of Computation*, 5(4):691–703 (1976).
- [36] Fahrion, R. ; Dollansky, G. “Construction of University Faculty Timetables Using Logic Programming Techniques,” *Discrete Applied Mathematics*, 35(3):221–236 (1992).
- [37] Ferland, J. ; Fleurent, C. “Computer Aided Scheduling for Sport League,” *Infor*, 29:14–25 (1991).
- [38] Fogel, L. ; Owens, A. ; Walsh, M. *Artificial Intelligence Through Simulated Evolution*. New York: Wiley, 1966.
- [39] Fonseca, C. ; Fleming, P. “Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization.” *Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms*, editado por S. Forrest. 416–423. San Mateo, California: Morgan Kaufmann, 1993.

- [40] Fonseca, C. ; Fleming, P. “An Overview of Evolutionary Algorithms in Multiobjective Optimization,” *Evolutionary Computation*, 3(1):1–16 (1995).
- [41] Garey, M. ; Johnson, D. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York: W.H. Freeman Co., 1979.
- [42] Gaspero, L. ; Schaerf, A. “Tabu Search Techniques for Examination Timetabling.” *Practice and Theory of Automated Timetabling III*, Número 2079, editado por E. Burke e W. Erben. 104–117. Berlin: Springer Verlag, 2001.
- [43] Gee, A. *Problem Solving with Optimization Networks*. PhD dissertation, Queen’s College, Cambridge University, UK, 1993.
- [44] Gislén, L. ; Peterson, C. ; Söderberg, B. “Teachers and Classes with Neural Networks,” *International Journal of Neural Systems*, 1:167–176 (1989).
- [45] Gislén, L. ; Peterson, C. ; Söderberg, B. “Complex Scheduling with Potts Neural Networks,” *Neural Computation*, 4:805–831 (1992).
- [46] Glover, F. “Tabu Search,” *ORSA Journal of Computing*, 1:190–206 (1989).
- [47] Goldberg, D. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Reading: Addison-Wesley, 1989.
- [48] Gotlieb, C. “The Construction of Class-Teacher Timetables.” *Proc. IFIP Congress 62*. 73–77. Amsterdam: North Holland, 1963.
- [49] Hansen, P. “The Steepest Ascent Mildest Descent Heuristic for Combinatorial Optimization,” *Congress on Numerical Methods in Combinatorial Optimization* (1986).
- [50] Hertz, A. “Tabu Search for Large Scale Timetabling Problems,” *European Journal of Operational Research*, 54:39–47 (1991).
- [51] Holland, J. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1975.

- [52] Hopfield, J. “Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 79:2554–2558 (1982).
- [53] Hopfield, J. “Neurons with Graded Response Have Collective Computational Properties Like Those of Two-State Neurons,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1984:3088–3092 (1984).
- [54] Hopfield, J. ; Tank, D. “Neural Computation of Decisions in Optimization Problems,” *Biological Cybernetics*, 52:141–152 (1985).
- [55] Horn, J. *Multicriterion Decision Making*, 1–15. Oxford, England: Oxford University Press, 1997.
- [56] Hueda, H. ; Ouchi, D. ; Takahashi, K. ; Miyahara, T. “A Co-Evolving Timeslot/Room Assignment Genetic Algorithm Technique for the University Timetabling.” *Practice and Theory of Automated Timetabling III*, Número 2079, editado por E.K. Burke e W. Erben. 48–63. Berlin: Springer Verlag, 2001.
- [57] Johnson, D. “Timetabling University Examinations,” *Journal of the Operational Research Society*, 41(1):39–47 (1990).
- [58] Junginger, W. “Timetabling in Germany - A Survey,” *Interfaces*, 16(4):66–74 (1986).
- [59] Kanter, I. ; Sompolinsky, H. “Graph Optimization Problems and the Potts Glass,” *Journal of Physics*, 20:673–680 (1987).
- [60] Kiaer, L. ; Yellen, J. “Weighted Graphs and University Course Timetabling,” *Computers and Operations Research*, 19(1):59–67 (1992).
- [61] Kirkpatrick, S. ; Gelatt, C. ; Vecchi, M. “Optimization by Simulated Annealing,” *Science*, 220:671–680 (1983).
- [62] Knauer, B. “Solution of a Timetable Problem,” *Computers and Operations Research*, 1:363–375 (1974).

- [63] Kohonen, T. "Self-Organized Formation of Topologically Correct Feature Maps," *Biological Cybernetics*, 43:59–69 (1982).
- [64] Kovacic, M. "Timetable Construction with Markovian Neural Networks," *European Journal of Operational Research*, 69:92–96 (1993).
- [65] Lagerholm, M. ; Peterson, C. ; Söderberg, B. "Airline Crew Scheduling with Potts Neurons," *Neural Computation*, 9:1589–1599 (1997).
- [66] Laporte, G. ; Desroches, S. "The Problem of Assigning Students to Course Sections in a Large Engineering School," *Computers and Operational Research*, 13:387–394 (1986).
- [67] McCulloch, W. ; Pitts, W. "A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity," *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5:115–133 (1943).
- [68] Mehta, N. "The Application of a Graph Colouring Method to an Examination Scheduling Problem," *Interfaces*, 11(5):57–64 (1981).
- [69] Melício, F. ; Caldeira, P. ; Rosa, A. "*Solving the Timetabling Problem with Simulated Annealing*". Technical Report, LaSEEB, Lisboa, 1998.
- [70] Michalewicz, Z. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. New York: Springer-Verlag, 1992.
- [71] Michalewicz, Z. *Evolutionary Computation and Heuristics*. Boston: Kluwer, 1996.
- [72] Minsky, M. ; Papert, S. *Perceptrons*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1969.
- [73] Mitchell, M. *An Introduction to Genetic Algorithms*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1996.
- [74] Mulvey, J. "A Classroom/Time Assignment Model," *European Journal of Operational Research*, 9:64–70 (1982).
- [75] Ohlsson, M. ; Peterson, C. ; Söderberg, B. "Neural Networks for Optimization Problems with Inequality Constraints - The Knapsack Problem," *Neural Computation*, 5(2):331–339 (1993).

- [76] Ohlsson, M. ; Peterson, C. ; Söderberg, B. “An Efficient Mean Field Approach to the Set Covering Problem,” *European Journal of Operational Research*, 133:583–595 (2001).
- [77] Osman, I. ; Laporte, G. “Metaheuristics: A Bibliography,” *Annals of Operations Research*, 63:513–623 (1996).
- [78] Paquete, L. ; Fonseca, C. “A Study of Examination Timetabling with Multiobjective Evolutionary Algorithms.” *Proceedings of the 4th Metaheuristics International Conference*. 149–153. 2001.
- [79] Pato, M. ; Carrasco, M. “A Mathematical Formulation for a Secondary School Timetabling Problem,” *Estudos de Gestão*, 8(2):145–160 (1998).
- [80] Peterson, C. ; Söderberg, B. “A New Method for Mapping Optimization Problems Onto Neural Networks,” *International Journal of Neural Systems*, 1(3):3–22 (1989).
- [81] Peterson, C. ; Söderberg, B. “Artificial Neural Networks.” *Local Search in Combinatorial Optimization* editado por Emile Aarts e Jan Karel Lenstra, 173–213, Chichester, United Kingdom: John Wiley and Sons, 1997.
- [82] Rechenberg, I. *Cybernetic Solution Path of an Experimental Problem*. Ministry of Aviation, Royal Aircraft Establishment, United Kingdom, 1965.
- [83] Reis, L. ; Oliveira, E. “A Constraint Logic Approach to Examination Scheduling.” *10th Irish Conference on Artificial Intelligence and Cognitive Science*. 1999.
- [84] Rich, D. “A Smart Genetic Algorithm for University Timetabling.” *Practice and Theory of Automated Timetabling*, Número 1153, editado por E. Burke e P. Ross. 181–197. Berlin: Springer Verlag, 1996.
- [85] Romero, B. “Examination Scheduling in a Large Engineering School: A Computer-Assisted Participative Procedure,” *Interfaces*, 12(2):17–24 (1982).
- [86] Rudolph, G. “Convergence Properties of Canonical Genetic Algorithms,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, 5(1):96–101 (1994).

- [87] Rudolph, G. “Convergence of Evolutionary Algorithms in General Search Spaces,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, 50–54 (1996).
- [88] Sampson, S. ; Weiss, E. “Designing Conferences to Improve Resource Utilization and Participant Satisfaction,” *Journal of the Operational Research Society*, 47:297–314 (1996).
- [89] Sarker, R. ; Liang, K. ; Newton, C. “A New Multiobjective Evolutionary Algorithm,” *European Journal of Operational Research*, 140(1):12–23 (2002).
- [90] Schaerf, A. “Tabu Search Techniques for Large High-School Timetabling Problems.” 88 17, ISSN 0169-118X: Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI), March 1996.
- [91] Schaerf, A. “A Survey of Automated Timetabling,” *Artificial Intelligence Review*, 13:87–127 (1999).
- [92] Schmidt, G. ; Strohlein, T. “Timetabling Construction - An Annotated Bibliography,” *The Computer Journal*, 23(4):307–316 (1979).
- [93] Sharda, R. “Neural Networks for the MS/OR Analyst: An Application Bibliography,” *Interfaces*, 24:116–130 (1994).
- [94] Smith, K. *Solving Combinatorial Optimization Problems Using Neural Networks*. PhD dissertation, University of Melbourne, 1996.
- [95] Smith, K. “Neural Networks for Combinatorial Optimization: A Review of More Than a Decade of Research,” *INFORMS Journal on Computing*, 11:15–34 (1999).
- [96] Smith, K. ; Palaniswami, M. ; Krishnamoorthy, M. “Neural Techniques for Combinatorial Optimization with Applications,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9:1301–1318 (1998).
- [97] Srinivas, N. ; Deb, K. “Multiobjective Optimization Using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms,” *Evolutionary Computation*, 2(3):221–248 (1994).
- [98] Tank, D. ; Hopfield, J. “Simple ‘Neural’ Optimization Networks: an A/D Converter, Signal Decision Circuit, and a Linear Programming Circuit,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 33:533–541 (1986).

- [99] Thompson, J. ; Dowsland, K. “General Cooling Schedules for a Simulated Annealing Based Timetabling System.” *Practice and Theory of Automated Timetabling*, Número 1153, editado por E. Burke e P. Ross. 345–363. Berlin: Springer Verlag, 1996.
- [100] Trick, M. “A Schedule-Then-Break Approach to Sports Timetabling.” *Practice and Theory of Automated Timetabling III*, Número 2079, editado por E. Burke e W. Erben. 242–252. Berlin: Springer Verlag, 2001.
- [101] Tripathy, A. “School Timetabling - A Case in Large Binary Integer Linear Programming,” *Management Science*, 30(12):1473–1489 (1984).
- [102] Valdes, R. ; Martin, G. ; Tamarit, J. “Constructing Good Solutions for the Spanish School Timetabling Problem,” *Journal of the Operational Research Society*, 47:1203–1215 (1996).
- [103] Veldhuizen, D. *Multiobjective Evolutionary Algorithms: Classifications, Analyses and New Innovations*. PhD dissertation, Air Force Institute of Technology, Ohio, 1999.
- [104] Veldhuizen, D. ; Lamont, G. “Multiobjective Evolutionary Algorithms: Analyzing the State-of-the-Art,” *Evolutionary Computation*, 8(2):125–147 (2000).
- [105] Vose, M. *Modelling Simple Genetic Algorithms*. San Mateo: Morgan Kaufmann, 1993.
- [106] Wilson, G. ; Pawley, G. “On the Stability of the Travelling Salesman Problem Algorithm of Hopfield and Tank,” *Biological Cybernetics*, 58:63–70 (1988).
- [107] Wolpert, D. ; Macready, W. “No Free Lunch Theorems for Optimization,” *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1(1):67–82 (1997).
- [108] Wright, M. “Timetabling County Cricket Fixtures Using a Form of Tabu Search,” *Journal of Operational Research Society*, 45:758–770 (1994).
- [109] Wright, M. “School Timetabling Using Heuristic Search,” *Journal of the Operational Research Society*, 47:347–357 (1996).
- [110] Yu, T. “Timetable Scheduling Using Neural Network Algorithms.” *Proceedings of the International Joint Conference of Neural Networks*. 279–284. 1990.

- [111] Zitzler, E. *Evolutionary Algorithms for Multiobjective Optimization: Methods and Applications*. PhD dissertation, Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zurich, Switzerland, 1999.