

Лабораторная работа 3. Полная вероятность. Формула Байеса

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЙ

В результате освоения содержания занятий обучающийся должен знать:

- понятия условной вероятности и гипотезы;
- формулы полной вероятности и Байеса;

уметь:


- по условию задачи выделять возможные гипотезы и само интересующее событие;
- применять формулы полной вероятности и Байеса к решению практических задач.

ХОД ЗАНЯТИЯ

ПОСТАНОВКА ЦЕЛИ

Студенты и преподаватель совместно формулируют цель мини-проекта, исходя из общих целей курса и специфики темы.

Цель мини-проекта: освоить математические методы вычисления полной вероятности и вероятности гипотезы, при условии, что данное событие уже произошло.

Учебная задача:  Составьте проектное задание не менее чем из 10 задач. При этом в задание должно входить одинаковое количество задач на формулу полной вероятности и формулу Байеса. Предложите и обоснуйте свой вариант отбора задач из списка либо по таблице, либо другой вариант (раздаточный материал 1). В заданиях разных групп допускаются не более трёх совпадающих задач.

ПЛАНИРОВАНИЕ

При составлении плана преподаватель обращает внимание студентов на важность сбора информации, категориями которой являются определения, формулы, теоремы, информация о функциях редактора Excel, примеры с решениями, схемы, скриншоты.

РЕАЛИЗАЦИЯ

При выполнении мини-проекта студентам предоставляется по запросу информационно-справочный материал (раздаточный материал 2). Важным элементом реализации плана проекта является

контроль работы: проверка верности решения задач. Первичная проверка – это принципиальная возможность решения:

- с точки зрения определений конкретных математических величин (например, вероятность p всегда находится в пределах от 0 до 1, а получилось – 1,24);
- с позиций соответствия условию задачи (из условия задачи вытекает, что практически все детали, выпускаемые на заводах качественные, вероятность брака мала, а при решении она получилась 0,56).

Выполняя более детальную проверку можно отслеживать правильность каждого шага решения. Надёжной проверкой является решение задачи другим исполнителем (студентом), не знакомым с найденным ранее ответом или решение задачи другим способом.

ОБСУЖДЕНИЕ (КОРРЕКТИРОВКА, ЗАВЕРШЕНИЕ, ОЦЕНКА)

В обсуждении результатов мини-проекта могут участвовать и студенты других групп уже завершивших выполнение своего задания. Лабораторная работа зачтена, если решено шесть задач проектного задания.

ПОРТФОЛИО ПРОЕКТА (внеаудиторная работа)

Обдумайте и опишите возможности использования методов, освоенных на лабораторной работе в вашем проекте. Выполняйте проектные работы в соответствии с планом. Продолжайте заполнять рубрики портфолио проекта.

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 1

Задания для студентов

Ответы записываются десятичной дробью с четырьмя знаками после запятой.

1. Заготовки деталей поступают из двух цехов предприятия: 60% из первого и 40% из второго. Заготовки первого цеха содержат 5% брака, а второго – 3%. Найти вероятность того, что наугад взятая заготовка будет без дефекта.

2. В одном ящике 6 синих и 11 зелёных шаров, а в другом – 7 синих и 9 зелёных шаров. Из каждого ящика взяли по одному шару. Найти вероятность того, что только один из двух шаров синий.

3. В группе из 25 стрелков имеются 5 отличных, 15 хороших и 5 посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна: 0,95 для отличного стрелка, 0,75 для хороше-

го, 0,5 для посредственного. Два стрелка из группы стреляют по одному разу. Найти вероятность того, что цель будет поражена.

4. В партии стаканов 95% отвечают стандарту. Контроль признаёт пригодным стандартный стакан с вероятностью 0,98 и нестандартный стакан с вероятностью 0,03. Определить вероятность того, что стакан, прошедший контроль, отвечает стандарту.

5. Имеются две партии стульев по 25 и 48 штук, причём в первой партии 2 стула ниже других, а во второй – четыре. Один наугад выбранный стул из первой партии переставлен во вторую партию. Покупатель купил стул из второй партии. Найти вероятность того, что он купил стандартный стул.

6. Устройства сигнализации производятся тремя фирмами. Устройства первой фирмы установлены на 43% машин; устройства второй фирмы – на 28%; устройства третьей фирмы – на 29%. Вероятность успешной работы в течение года устройства, изготовленного первой фирмой, равна 0,9; второй – 0,8; третьей – 0,85. Найти вероятность успешной работы в течение года наугад взятого устройства.

7. На опытной станции имеется запас семян сосны, полученных из двух лесничеств. Среди них 30% семян заготовлены в первом лесничестве, а 70% – во втором. Известно, что всхожесть семян из первого лесничества составляет 90%, а семян из второго лесничества – 80%. Определить вероятность того, что наугад посаженное семечко взойдёт.

8. В ателье работают три портнихи. Первая выполняет 40% всех заказов; вторая – 35%, а третья – 25%. При изготовлении костюмов процент брака у каждой из портних составляет 2, 3 и 5% соответственно. Найти вероятность дефекта у случайно выбранного костюма.

9. В одном мешке лежат 15 синих перчаток и 18 зелёных, а в другом – 21 синяя перчатка и 17 зелёных. Из одного мешка наугад взято две перчатки. Найти вероятность того, что обе перчатки будут одного цвета.

10. На двух станках изготавливаются детали для стульев и складываются в общую тару. Вероятность получения детали нестандартного типа на первом станке равна 0,086, а на втором –

0,065. Производительность второго станка втрое больше, чем первого. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь нестандартная.

11. Даны два ящика. В первом ящике четыре белых и три чёрных шара, во втором – пять белых и семь чёрных шаров. Из первого и второго ящика перекалывают по одному шару в третий ящик. Наугад из третьего ящика взят один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

12. На склад поступает продукция трёх фабрик. Причём продукция первой фабрики составляет 20%; второй – 46%; третьей – 34%. Известно также, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 1%; для второй – 3%, а для третьей – 1,5%. Вычислить вероятность того, что, наугад взятое изделие окажется стандартным.

13. Среди восьми винтовок пристрелянными являются только три. Вероятность попадания из пристрелянной винтовки равна 0,9, а из непристрелянной – 0,5. Выстрелом из одной наугад взятой винтовки цель поражена. Определить вероятность того, что взята пристрелянная винтовка.

14. С первого склада на сборку поступает 35% деталей; со второго – 22%; с третьего – 25%; с четвертого – 18%. Вероятность получить с первого склада бракованную деталь равна 0,01; со второго – 0,003; с третьего – 0,005; с четвертого – 0,001. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь бракованная.

15. В магазин поступило 5 ящиков с кружками. В первом, втором и третьем ящиках находится по 5 белых и 7 синих кружек, в четвертом и пятом – по 6 белых и 6 синих кружек. Из случайно выбранного ящика наугад взята кружка. Найти вероятность того, что эта кружка синяя.

16. Первой бригадой производится в четыре раза больше деталей, чем второй. Вероятность того, что деталь окажется стандартной для первой бригады 0,88; для второй – 0,93. Определить вероятность того, что взятая наугад деталь будет стандартной.

17. Для посева заготовлены семена 4 видов клёна: 1-го вида 22% семян; 33% – 2-го вида; 32% – 3-го вида; 13% – 4-го вида. Вероятность всхожести для семян первого вида равна 0,69; для второ-

го – 0,74; для третьего – 0,43; для четвёртого – 0,38. Найти вероятность того, что наугад взятое семечко взойдёт.

18. В группе спортсменов 19 прыгунов, 17 бегунов и 12 метателей снарядов. Вероятность выполнить квалификационную норму для прыгуна равна 0,71; для бегуна – 0,89; для метателя снаряда – 0,73. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наугад, выполнит норму.

19. При попытке угона машины сигнализация первого вида подаёт сигнал тревоги с вероятностью 0,84, а сигнализация второго вида – с вероятностью 0,99. Вероятность того, что машина оборудована сигнализацией первого или второго вида соответственно равна 0,7 и 0,3. Найти вероятность подачи сигнала тревоги на случайно выбранной машине.

20. В соревнованиях участвуют 7 спортсменов из Москвы, 9 из Поволжья, 13 из Сибири. Спортсмен из Москвы попадает в сборную с вероятностью 0,9; из Поволжья – 0,7; а из Сибири – 0,85. Найти вероятность попадания в сборную наугад выбранного спортсмена.

21. Браконьер, убегая от лесника, вышел на поляну, от которой в разные стороны идут пять дорог. Если идти по первой дороге, то вероятность выхода из леса в течение часа составляет 0,7; по второй – 0,4; по третьей – 0,3; по четвёртой – 0,2; по пятой – 0,6. Через час браконьер вышел из леса. Найти вероятность того, что он пошёл по первой дороге.

22. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле у трёх охотников равна, соответственно, 0,8; 0,6; 0,7. При одновременном выстреле всех трёх охотников зафиксировано одно попадание. Найти вероятность того, что попал первый стрелок.

23. Соревнования на стрельбище происходят следующим образом. Один из трёх спортсменов вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле для первого стрелка равна 0,2; для второго – 0,4; для третьего – 0,7. Мишень не была поражена стрелком. Найти вероятность того, что на линию огня вызывался второй стрелок.

24. Для сдачи экзамена по правилам дорожного движения слушателям нужно было выучить 45 билетов. Из 30 слушателей 15

выучили все билеты; 8 – 30 билетов; 6 – 20 билетов и 1 – 10 билетов. Слушатель сдал экзамен. Найти вероятность того, что он знал всего 20 билетов.

25. Среди абитуриентов, подавших документы в приёмную комиссию, 60% закончили обучение в текущем году, 30% – не более трёх лет назад и 10% более трёх лет назад. Вероятность поступления из этих групп абитуриентов равна 0,88, 0,73 и 0,45 соответственно. Найти вероятность того, что успешно сдавший экзамены абитуриент закончил обучение более трёх лет назад.

26. В лесхозе 50% посадок составляет сосна; 40% береза и 10% ель. Вероятность поражения грибковыми заболеваниями для этих деревьев составляет 0,3; 0,6 и 0,8 соответственно. При санитарном осмотре было выбраковано дерево. Найти вероятность того, что это ель.

27. На склад поступает продукция трёх фабрик: с первой фабрики 26%; со второй – 40%; с третьей – 34%. Средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 1%; для второй – 3%; а для третьей – 1,5%. Вычислить вероятность того, что, наугад взятое изделие произведено на первой фабрике, если оно оказалось нестандартным.

28. В гимназии 67% учащихся девочки. 89% девочек и 78% мальчиков имеют билеты в театр. В учительскую принесли кем-то потерянный билет. Найти вероятность того, что билет принадлежит девочке.

29. В группе из 30 стрелков 7 отличных, 11 хороших, 10 посредственных и 2 плохих. При одном выстреле отличный стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,98; хороший – с вероятностью 0,9; посредственный – с вероятностью 0,75; а плохой – с вероятностью 0,4. Наугад выбранный стрелок выстрелил дважды, при этом зафиксировано одно попадание и один промах. Каким стрелком вероятнее всего были произведены выстрелы?

30. В цеху изготавливается 40% овощных соков и 60% фруктово-ягодных. В среднем 9 пакетов овощных соков из 1000 оказываются с недоливом, а среди 500 пакетов фруктово-ягодных соков в 2 пакетах встречается недолив. Случайно выбранный пакет с соком оказался неполным. Найти вероятность того, что это пакет с овощ-

ным соком.

31. При исследовании жирности молока лосих всё стадо было разбито на три группы. В первой группе оказалось 50%; во второй 33% и в третьей 17% всех лосих. Вероятность того, что молоко, полученное от отдельной лосихи, имеет не менее 4% жирности, для каждой группы лосих соответственно равна 0,7; 0,45 и 0,2. Взятая наугад лосиха даёт молоко жирностью 4%. Найти вероятность того, что эта лосиха из первой группы.

32. Имеется 5 ящиков с кружками. В первом, втором и третьем находится по 6 белых и 8 синих кружек, в четвёртом и пятом ящиках по 4 белых и 6 синих кружек. Из наугад выбранного ящика взята одна кружка. Найти вероятность того, что был выбран четвёртый или пятый ящик, если эта кружка оказалась белой.

33. Первая бригада производит в четыре раза больше деталей, чем вторая. Вероятность того, что деталь окажется стандартной для первой бригады 0,88; для второй – 0,93. Взятая наугад деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она сделана первой бригадой.

34. Для контроля влажности воздуха в музее установлены четыре датчика. Вероятности ошибки в их показаниях равны 0,01 для первого, 0,013 для второго, 0,011 для третьего и 0,009 для четвертого. Контролёр наугад снимает показания с одного из датчиков и записывает его показания в контрольный журнал. Найти вероятность того, что были сняты показания со второго датчика, если они оказались ошибочными.

35. В собранной электрической цепи могут быть поставлены предохранители 3 типов. Вероятности постановки предохранителя первого, второго или третьего типов равны 0,17; 0,62 и 0,21. Вероятности перегорания при перегрузке цепи для предохранителей первого, второго и третьего типов равны 0,98; 0,87 и 0,84 соответственно. Найти вероятность того, что поставлен предохранитель первого или второго типа, если предохранитель перегорел.

36. На мебельной фабрике выпускаются столы: 24% – "под орех"; 37% – "под сосну"; 39% – "под дуб". При этом в течение месяца продается 99% выпускаемых столов "под орех"; 95% – "под сосну"; 90% – "под дуб". Найти вероятность того, что проданный

сегодня утром стол имеет окраску "под орех".

37. Три пассажира вышли из вагона метро на станции "Киевская". Вероятности того, что они сделают пересадку, равны 0,89; 0,73 и 0,92, соответственно, для первого, второго и третьего пассажиров. Двое из пассажиров вышли к Киевскому вокзалу. Найти вероятность того, что среди них был второй пассажир.

38. Агентство по страхованию автомобилей разделяет водителей по 3 классам: K_1 (практически не рискует), K_2 (мало рискует), K_3 (всегда рискует). Анализ застрахованных водителей предыдущих периодов показал, что 24% водителей принадлежит классу K_1 ; 48% – классу K_2 и 28% – классу K_3 . Вероятность попасть в течение года в аварию для водителей класса K_1 равна 0,01; класса K_2 – 0,015; класса K_3 – 0,024. Найти вероятность того, что водитель, ни разу не попавший за год в аварию, из класса K_1 .

39. На одной яблоне привиты три сорта яблок, а на второй два из них. В этом году с первой яблони собрали 30 яблок сорта анис, 42 яблока сорта грушовка и 32 яблока сорта пепин шафранный, а со второй яблони – 43 яблока сорта анис и 54 яблока сорта пепин шафранный. Хозяин угостил мальчика яблоком сорта пепин шафранный. Найти вероятность того, что это яблоко росло на второй яблоне.

40. Туристы могут пообедать в трёх ресторанах города. Вероятность того, что они направятся к первому ресторану – $1/3$; ко второму – $1/5$; к третьему – $7/15$. Вероятность того, что эти рестораны уже закрыты на обслуживание какой-то другой группы туристов, для первого ресторана равна 0,5; для второго – 0,127; для третьего – 0,333. Туристы пообедали в том ресторане, куда они пришли. Найти вероятность того, что это был второй ресторан.

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 2

Пусть событие A может наступить только при условии появления одной из гипотез H_1, H_2, \dots, H_k , образующих полную группу. Тогда вероятность события A вычисляется по *формуле полной вероятности*:

$$P(A) = P_{H_1}(A) \cdot P(H_1) + P_{H_2}(A) \cdot P(H_2) + \dots + P_{H_k}(A) \cdot P(H_k),$$

где через $P_{H_1}(A), P_{H_2}(A), \dots, P_{H_k}(A)$ обозначены условные веро-

ятности события A для различных гипотез.

Если событие A уже произошло, то среди всех таких испытаний можно найти вероятность осуществления гипотезы H_i , где $i = 1, 2, \dots, k$. Для этого служит *формула Байеса*:

$$P_A(H_i) = \frac{P_{H_i}(A) \cdot P(H_i)}{P_{H_1}(A) \cdot P(H_1) + P_{H_2}(A) \cdot P(H_2) + \dots + P_{H_k}(A) \cdot P(H_k)}.$$

Задача 3.1. Даны три урны. В первой находятся 5 белых и 3 чёрных шара, во второй – 4 белых и 4 чёрных, в третьей – 8 белых. Из какой-то урны наугад извлекается шар. Найти вероятность того, что он окажется чёрным (событие A).

Решение. Шар может быть взят из первой урны (гипотеза H_1), либо из второй (H_2), либо из третьей (H_3). Так как шансы выбрать любую из урн равны, то $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3 \approx 0,3333$. Достаточно набрать $1/3$ в ячейке В3, а затем протящить правый нижний угол ячейки до В5. При этом вероятности H_2 и H_3 появятся автоматически.

Далее следует записать в ячейках С3-С5 число чёрных шаров в каждой урне и делением на 8 определить вероятности события A для каждой из гипотез H_1, H_2, H_3 в ячейках D3-D5.

Для подсчёта по формуле полной вероятности удобнее всего вначале сосчи-

тать слагаемые в ячейках Е3-Е5 и затем суммированием получить ответ в ячейке F3. Окончательно получится:

$$\begin{aligned} P(A) &= P_{H1}(A)P(H_1) + P_{H2}(A)P(H_2) + P_{H3}(A)P(H_3) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{0}{8} = \frac{7}{24} \approx 0,2917. \blacksquare \end{aligned}$$

Задача 3.2. Детали производятся на трёх станках: на первом 30%, на втором 25%, а остальные – на третьем станке. На первом

D3				f_x	=C3/8
	A	B	C	D	
1	Лаб. 3				
2	Задача 3.1		Ч.шаров	Вероятн	
3	Первая	0,333333	3	0,375	
4	Вторая	0,333333	4	0,5	
5	Третья	0,333333	0	0	

E3						f_x	=B3*D3
	A	B	C	D	E	F	
1	Лаб. 3						
2	Задача 3.1		Ч.шаров	Вероятн		Ответы:	
3	H1	0,333333	3	0,375	0,125	0,291667	
4	H2	0,333333	4	0,5	0,166666667		
5	H3	0,333333	0	0	0		

станке получается 1% брака произведенных на нём деталей, на втором – 1,5%, на третьем – 2%. Наугад выбранная деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она произведена на первом станке.

Решение. Можно ввести обозначения для событий: A – деталь бракованная; H_1 – деталь произведена на первом станке; H_2 – на втором станке; H_3 – на третьем станке. Тогда:

$$P(H_1) = 0,30, P(H_2) = 0,25, P(H_3) = 0,45,$$

$$P_{H_1}(A) = 0,01, P_{H_2}(A) = 0,0015, P_{H_3}(A) = 0,02;$$

$$P(A) = 0,01 \cdot 0,30 + 0,0015 \cdot 0,25 + 0,02 \cdot 0,45 = 0,015;$$

$$P_A(H_1) = \frac{0,01 \cdot 0,30}{0,015} = 0,20.$$

Таким образом, из всех бракованных деталей 20% изготовлены на первом станке. ■

Задача 3.3. При обследовании больного имеется подозрение на одно из двух заболеваний H_1 и H_2 . Их вероятности в данных условиях: $P(H_1) = 0,6$, $P(H_2) = 0,4$. Для уточнения диагноза проводится анализ, результатом которого является положительная или отрицательная реакция. В случае болезни H_1 вероятность положительной реакции равна 0,9, а отрицательной – 0,1; в случае болезни H_2 положительная и отрицательная реакции равновероятны. Анализ произведен дважды, и оба раза реакция оказалась отрицательной (событие A). Найти вероятность каждого заболевания после проведенных анализов.

Решение. В случае заболевания H_1 событие A происходит с вероятностью $0,1 \cdot 0,1 = 0,01$, а в случае заболевания H_2 – с вероятностью $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$. Следовательно, по формуле Байеса получится:

$$P_A(H_1) = \frac{0,01 \cdot 0,6}{0,01 \cdot 0,6 + 0,25 \cdot 0,4} \approx 0,06, P_A(H_2) = \frac{0,25 \cdot 0,4}{0,01 \cdot 0,6 + 0,25 \cdot 0,4} \approx 0,94.$$

Отсюда видно, что полученные результаты анализов дают веские основания предполагать болезнь H_2 . ■