סיכומי הרצאות ⁻ מתמטיקה בדידה

מיכאל פרבר ברודסקי

2 איחוד וחיתוך בין כל כמות של קבוצות. 3 זוגות סדורים. 3.1 יהי סדורה. 3.2 הוכחה באינדוקציה. 3.3 מכפלה קרטזית. 3.5 מכפלה קרטזית. 3.6 מונקציות. 3.7 מונקציות. 3.8 מנקציות. 3.9 מונקציות. 3.9 מונקציות. 3.9 מונקציות מ־A ל־B מ-B מ-B מידרות לגבי פונקציות מ־A ל־B מונקציות מ־B מידרות לגבי פונקציות מ־B מידרות לגבי פונקציות מ־B מידרות לגבי פונקציות מ־B מידרות לגבי פונקציות מ־B מידרות מידר מידרות מידר מידרות מידר מידרות לגבי מונקציות מידר 3.6 מחלקות שקילות. 3.6 מחלקות מידרות מיד		1	עניינים	וכן	תו
1.2 תלות בבחירת הנציגים 1.3 משפט האינדוקציה 1.3 משפט האינדוקציה 1.3 משפט האינדוקציה 1.3 משפט האינדוקציה 1.3 מיחיד וחיתוך בין כל כמות של קבוצות 2 איחוד וחיתוך בין כל כמות של קבוצות 3 איחוד וחיתוך בין כל כמות של קבוצות 3 איחוד מיחיד 2 איח סידורה 2 הוכחה באינדוקציה 3.5 מכפלה קרטזית 3.3 מכפלה קרטזית 3.5 מונקציות 3.5 מונקציות 3.5 מונקציות 3.5 מנוקציות 3.5 מגדות לגבי פונקציות מר 4 ל־8 מונקציות מר 4 ל־8 מונקציות מר 4 ל־8 מונקציות מר 3.5.5 מונקציות מר 4 ל־8 מונקציות מר 3.5.5 מונקציות מר 3.5.5 מונקציות מר 3.5.5 מונקציות מר 3.5.5 מונקציות מר 3.5.6 מונקציה מותלית 3.5.6 מונקציה מותלית 3.5.7 מחלקות שקילות 3.6.1 מחלקות שקילות 3.6.1 מוערכת נצינים 3.6.6 מוערכת נצינים 3.6.1 מוערכת 3.6	3		שונות	1	
1.3 משפט האינדוקציה. 1.3 3 קבוצות 1 מרוירים 1 איחוד וחיתוך בין כל כמות של קבוצות 2 איחוד וחיתוך בין כל כמות של קבוצות 3 איחוד וחיתוך בין כל כמות של קבוצות 3 איחוד וחיתוך בין כל כמות של קבוצות 3 איח סדורים 1.5 הוכחה באינדוקציה 1.5 מכפלה קרטזית. 1.5 מכפלה קרטזית. 1.5 מכפלה קרטזית. 1.5 מכפלה קרטזית. 1.5 מכפלה קרטזית 1.5 מכפלה קרטזית 1.5 מכפלה קרטזית 1.5 מכפלה קרטזית מר.5 מכפלה מרוים 1.5 מכפלה קרטזית מר.6 מכפלה מרוים 1.5 מ	3	יוטא	1.1		
 קבוצות אות וחיתוך בין כל כמות של קבוצות. זוגות סדורים. זוגות סדורים. זוגות סדורים. מרסח באינדוקציה. מספלה קרטזית. מספלה קרטזית. מוקציות. מוקציות. מוקציות. מוקציות. הגדרות לגבי פונקציות. מולה הגדרות לגבי פונקציות מ־A ל־B. מולה הגדרות לגבי פונקציות מ"A ל־B. מולה איבר־איבר. ממונה איבר־איבר. ממונה איבר־איבר. ממונה איבר־איבר. ממולות. מחלקות שקילות. מרסת נציגים. מרסת נציגים. מרסת נציגים. מרסת נציגים. מרכת נציגים. מרכת נציגים. מחלים סדר. קושמות. א הקדמה לעוצמות. הגדרות. נוצמות. עוצמות. הגדרות. הגדרות. א הקדמה לעוצמות. הגדרות. שנות בסיסיות. לוב. הגדרות. טענות בסיסיות. נוצה שנות לגבי קבוצות שוות עוצמות. לוב. שנות בסיסיות. לוב. שנות לגבי קבוצות שוות עוצמות. לוב. שנות לגבי קבוצות שוות עוצמות. 	3	תלות בבחירת הנציגים	1.2		
2 איחוד וחיתוך בין כל כמות של קבוצות. 3 זוגות סדורים. 3.1 יהי סדורה 3.2 הוכחה באינדוקציה 3.3 מכפלה קרטזית. 3.5 מכפלה קרטזית. 3.6 מוקציות 3.7 מוקציות 3.8 מנקציות 3.9 מוקציות 3.5 מנקציות 3.5 מנקציות 3.5 מבדרות לגבי פונקציות מ־A ל־B 3.5 קבוצת הפונקציות מ־A ל־B 3.5 סענות לגבי פונקציות מ־A ל־B 3.5 מונק איבר־איבר 3.6 מונקציה מותלית 3.7 מונק איבר־איבר 3.8 מולן 3.8 מצום 3.9 מחלקות שקילות 3.6 מחלקות שקילות 3.7 מחלים סדר 3.7 מוצמות 3.8 הקדמה לעוצמות 3.9 מונת לגבי קבוצות שוות עוצמות 4.1 הגדרות 4.1 טענות בסיסיות 4.1. טענות בסיסיות 4.1. טענות לגבי קבוצות שוות עוצמות 4.1.	3	משפט האינדוקציהמשפט האינדוקציה	1.3		
3 אוגות סדורים 3.1 מיה סדורה 3.1 3.2 3.2 3.2 3.2 3.2 3.2 3.2 3.2 3.2 3.2 3.3 3.4 3.5 3.	3		נוצות	קנ	Ι
3.1 מיה סדורה 3.2 3.2 6.2	3	וחיתוך בין כל כמות של קבוצות	איחוד	2	
3.2 הוכחה באינדוקציה 3.3 3.5 מכפלה קרטזית 3.5 3.6 מרסים 3.6 3.6 3.6 3.6 3.6 3.6 3.6 3.6 3.5	4	זדורים	זוגות כ	3	
55 מכפלה קרטזית. 3.4 66 יחסים. 3.5 6 פונקציות. 3.5 6 הגדרות לגבי פונקציות. 3.5.2 6 הגדרות לגבי פונקציות מ־A ל־B 3.5.3 7 סענות לגבי פונקציות מ־A ל־B 8 ממונה איבר־איבר 7 נונקציה מותלית. 7 צמצום. 8 יחסי שקילות. 8 מחלקות שקילות. 8 מערכת נציגים 8 מערכת נציגים 9 ז.סדר. 10 עוצמות. 10 הקדמה לעוצמות. 10 הגדרות. 10 הגדרות. 10 טענות בסיסיות. 10 טענות לגבי קבוצות שוות עוצמות. 10 טענות לגבי קבוצות שוות עוצמות.	4	nיה סדורה n	3.1		
3.4 יחסים 3.5 פונקציות 3.5 6 פונקציות 3.5. הגדרות לגבי יחסים 3.5. 6 הגדרות לגבי יחסים 3.5. 6 הגדרות לגבי פונקציות 3.5. 6 6 8.5 קבוצת הפונקציות מ־A ל־B 3.5. 6 5.5 קבוצת הפונקציות מ־A ל־B 3.5. 6 0.5	4	הוכחה באינדוקציה	3.2		
3.5 פונקציות 3.5 הגדרות לגבי יחסים 3.5 הגדרות לגבי יחסים 3.5. הגדרות לגבי פונקציות 3.5. הגדרות לגבי פונקציות 3.5. 5.3 קבוצת הפונקציות 3.5 6 7. 7. 7. 7. 7. 7. 7.	5	מכפלה קרטזית	3.3		
6 הגדרות לגבי יחסים 3.5.1 6 הגדרות לגבי פונקציות מ־A ל־B 3.5.2 6 קבוצת הפונקציות מ־A ל־B 3.5.3 7 3.5.4 3.5.5 8 ממונה איבר־איבר 3.6 7 צמצום 3.6 7 צמצום 3.6 7 יחסי שקילות 3.6.2 8 מחלקות שקילות 3.6.3 8 מערכת נציגים 3.6.4 9 יחסי סדר 3.7 10 הגדרות 4 10 הגדרות 4.1 10 טענות בסיסיות 4.1.2	5		3.4		
6 3.5.2 6 3.5.3 3.5.3 3.5.3 3.5.5 5.5.4 3.5.6 2.5.5 7 2.5.6 8 2.5.7 8 2.5.7 9 3.6.1 10 3.6.2 10 3.6.2 10 3.6.2 10 3.6.2 10 3.6.3 10 3.6.4 10 3.6.7 10 3.6.7 10 3.6.7 10 3.6.9 10 3.6.9 10 3.6.9 10 3.6.9 10 3.6.9 10 3.6.9 10 3.6.9 10 3.6.9 10 3.6.9 10 3.6.9 10 3.6.9 10 3.6.9 10 3.6.9 10 3.6.9 10 3.6.9 10 3.6.9 10 3.6.9	6	פונקציות	3.5		
3.5.3 קבוצת הפונקציות מ־A ל־B 3.5.5 קבוצת הפונקציות מ־A 3.5.5 מענות לגבי פונקציות 3.5.5 תמונה איבר־איבר 3.5.6 מונה איבר־איבר 3.5.7 2.5 צמצום 3.5.7 3.6 3.7 3.7 3.7 3.7 3.8 3.	6	הגדרות לגבי יחסים			
7 3.5.4 7 3.5.5 7 3.5.6 8 2.5.7 8 2.6.1 8 2.6.2 8 3.6.1 8 3.6.2 8 3.6.3 8 3.6.3 8 3.6.4 9 3.7 10 3.6 10 4.1 10 1.1. 4 1.1. 4 1.1. 4 1.1. 4 1.1. 7 2.5 8 3.6.2 8 3.6.3 8 3.6.4 9 3.6 10 3.7 10 3.6 10 3.6 10 3.6 10 3.6 10 3.6 10 3.6 10 3.6 10 3.6 10 3.6 10 3.6 10 3.6 </td <td>6</td> <td>3.5.2 הגדרות לגבי פונקציות</td> <td></td> <td></td> <td></td>	6	3.5.2 הגדרות לגבי פונקציות			
7	6	Aל־מ A ל־מ קבוצת הפונקציות מ־ A ל־3.5.3			
7 3.5.6 פונקציה מותלית 7 3.5.7 7 יחסי שקילות 3.6.1 8 8 3.6.2 8 3.6.3 8 3.6.3 8 0 9 3.6.4 9 3.7 To var or contact the contact of	7	טענות לגבי פונקציות			
7 צמצום 3.5.7 7 יחסי שקילות 3.6. 8 הגדרות לגבי יחסים 3.6.2 8 מחלקות שקילות 3.6.3 8 מערכת נציגים 3.6.4 9 10 3.7 10 עוצמות 3.7 10 הגדרות 4.1 10 הגדרות 4.1 10 טענות בסיסיות 4.1 10 4.1.1 10 4.1.2	7	תמונה איבר־איבר 3.5.5			
7 יחסי שקילות 3.6. הגדרות לגבי יחסים 3.6. הגדרות לגבי יחסים 3.6.2 8 3.6.3 8 3.6.3 8 8 3.6.4 9 3.6.7 יחסי סדר 3.7	7	3.5.6 פונקציה מותלית			
7 הגדרות לגבי יחסים 3.6.1 מחלקות שקילות 3.6.2 מחלקות שקילות 3.6.3 מערכת נציגים 3.6.4 3.6.4 3.6.4 3.7	7	צמצום			
8 מחלקות שקילות 3.6.2 מערכת נציגים 3.6.3 3.6.3 8 חלוקה 9 3.7 10 דומה לעוצמות 10 הגדרות 10 4.1 10 4.1 10 4.1 10 4.1.1 10 0 4.1.1 0 4.1.2 4.1.2	7	יחסי שקילות	3.6		
8 3.6.3 8 3.6.4 9 3.7 10 II 4 6 10 10 10 10 10 10 10 11 10 11 10 11 10 11 10 11 10 11 2 4.1.1 3 4.1.2	7	הגדרות לגבי יחסים			
8 חלוקה 3.6.4 חלוקה 3.6.4 מיחסי סדר 3.7 מחסי סדר 3.7 II עוצמות 10 מוע מות 4 הקדמה לעוצמות 4.1 מות 4.1 מענות בסיסיות 4.1.1 טענות בסיסיות 4.1.1 טענות לגבי קבוצות שוות עוצמות 4.1.2 מענות לגבי קבוצות שוות עוצמות 4.1.2 4.1.2	8	מחלקות שקילות			
9 יחסי סדר 3.7 10 עוצמות II 10 . הקדמה לעוצמות 4 10 . הגדרות 4.1 10 . טענות בסיסיות 4.1 טענות לגבי קבוצות שוות עוצמות 4.1.2	8	מערכת נציגים 3.6.3			
10 עוצמות II 10 4 10 4.1 10 6.1 11 5 10 4.1.1 10 0 4.1.1 0 4.1.2 4.1.2	8	חלוקה 3.6.4			
10	9	יחסי סדר	3.7		
10	10		מאמו	١,	TT
10 הגדרות 4.1 10 טענות בסיסיות 4.1.1 10 טענות לגבי קבוצות שוות עוצמות 4.1.2		: לוווטמות		-	11
 טענות בסיסיות בסיסיות 4.1.1 טענות לגבי קבוצות שוות עוצמות 4.1.2 			,	7	
טענות לגבי קבוצות שוות עוצמות			7.1		
,		·			
11 משפט הוטור־שרדך־ברנשטייו 4.1.3	11	4.1.3 משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין			

11	עוצמות סופיות	5
11	הגדרות 5.1	
11	משפטים	
11		6
11		
12		
12	6.2 עוצמות שאינן בנות מניה	
12	חשבון עוצמות	7
	,	
4.4		
14	ומבינטוריקה	•
14	קומבינטוריקה בסיסית	8
14	2.1 בינום, מולטינום,	
14	סדרת הפרשים	
14	8.3 הוכחות קומבינטוריות	
14	הבינום של ניוטון	
14	8.4.1 המקדם המולטינומי	
15	8.4.2 המקדם הבינומי הכללי	
15	8.4.3 נוסחת הבינום השלילי	
15	8.5 הכלה והדחה	
15	8.6 עקרון שובך היונים	
16	$\ldots \ldots \ldots \ldots$ מספרי קטלן C_n מספרי קטלן 8.7	
16	פונקציות יוצרות	9
16	נוסחאות 9.1	
17	9.2 פירוק לשברים חלקיים	
17	נוסחאות נסיגה	10
17		
17		
17		
18	פתרון נוסחאות נסיגה לינאריות	
18	פתרון נוסחאות נסיגה לינאריות באמצעות פונקציות יוצרות 10.2.1	
	פתרון נוסחאות נסיגה לינאריות הומוגניות באמצעות פולינום 10.2.2	
18		
	10.2.3 מעבר מפתרון יחיד של נוסחת נסיגה לא הומוגנית לקבוצת	
19	הפתרונות	
19	טדרות עזר 10.3	
19	ורת הגרפים	ז IV
19	הגדרות בסיסיות	11
19		
20	קשירות 11.2	
21	עצים	12
21	12.1 קידוד פרופר	
22	איזומורפיזםאיזומורפיזם	13
22	נוסחאות	14

שונות 1

יוטא 1.1

. יחס חד מקומיP(x) יחס חד

 $.\iota x\in A.arphi\left(x
ight)=arphi\left(a
ight)$ המקיים את המקיים A o a

 $.\iota x \in \mathbb{N}.x \in \mathbb{N}_{even} \wedge \mathbf{x}$ למשל = 2

 $arphi\left(a
ight)$ את הטענה $a\in A$ ויחיד שקיים לוודא אריך לוודא צריך אריך אריך באשר מגדירים את אריך לוודא

 $.min = \lambda x \in P(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} . in \in x. \forall m \in x. n \leq m$ למשל

1.2 תלות בבחירת הנציגים

נגדיר $\mathbb{Z}/S_n = \left\{[0]_{S_n},\ldots,[n-1]_{S_n}
ight\}$ אם כך $S_n = \left\{\langle x,y
angle \in \mathbb{Z}^2 \mid n \mid x-y
ight\}$ נמצא . $f: \mathbb{Z}/S_n o \mathbb{Z}$

הבעיה נמצאת ב־k רק אין רק k יחיד שמייצג. הבעיה נמצאת ב-k היחיד שמייצג הבעיה נמצאת ביזה איזה איזה א נבחר.

כדי להוכיח שאין תלות בבחירת הנציגים, נוכיח חד ערכיות.

משפט האינדוקציה 1.3

חלק I

קבוצות

2 איחוד וחיתוך בין כל כמות של קבוצות

כתיב כללי

תהא F קבוצה של קבוצות.

 $\bigcup F = \{x \mid \exists y \in F. x \in y\}$ 1.2 הגדרה

Fב ביחוד קבוצה איבר איבר ביחוד כל האיברים ביק, צריך שתהיה קבוצה x כלומר, כדי שאיבר כלומר, איבר באיחוד כל $x \in y$ שיר כל כדי בית כל כדי איבר בית כל איבר בית כל איבר בית היה לבית בית כל איבר בית היה איבר בית היה לבית בית היה לבית היה לבית היה לבית בית היה לבית היה לבית

 $\bigcap F = \{x \mid \forall y \in F. x \in y\}$ 2.2 הגדרה

לכל שייך יהיה איבר ב-F, צריך שהוא יהיה איבר בחיתוך כל האיברים ב-F, צריך שהוא יהיה שייך לכל האיברים ב-F.

כתיב אלטרנטיבי

תהא קבוצות של קבוצה $F = \{A_i \mid i \in I\}$ תהא 3.2 הגדרה

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I.x \in A_i\}$$
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I.x \in A_i\}$$

כתיב בסיסי

4.2 הגדרה

$$\bigcup_{i=1}^{100} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_{100}$$

$$\bigcap_{i=1}^{100} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_{100}$$

זוגות סדורים

יש דרכים רבות להגדיר זוגות סדורים. הדרך שאנחנו נשתמש בה היא הדרך הזו:

$$\langle a,b \rangle = \{\{a\}\,,\{a,b\}\}$$
 1.3 הגדרה

כדי שדרך לכתיבת זוג סדור תהיה נכונה, צריך שתמיד תתקיים התכונה הבאה של זוגות סדורים:

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \iff a = c \land b = d$$

חיה סדורה n

:נגדיר nיה סדורה כך

$$\langle a, b, c \rangle = \langle a, \langle b, c \rangle \rangle$$
$$\langle a, b, c, d \rangle = \langle a, \langle b, c, d \rangle \rangle$$

3.2 הוכחה באינדוקציה

- (בסיס האינדוקציה) נוכיח עבור ה־n הרלוונטי הראשון
- (הנחת האינדוקציה) ביוקחים n כללי, מניחים שהטענה נכונה לגביוn
- (צעד האינדוקציה) מוכיחים עבור n+1 ומסתמכים על בסיס אינדוקציה) 3.

נוכיח את התכונה המרכזית לגבי nיה סדורה, שהיא

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle b_1, \dots b_n \rangle \iff a_1 = b_1 \wedge \dots \wedge a_n = b_n$$

 a_1 בסיס האינדוקציה ב $a_1=b_1 \wedge a_2=b_2$ נניח כי זה מתקיים עבור $\langle a_1,a_2 \rangle = \langle b_1,b_2 \rangle \iff a_1=b_1 \wedge a_2=b_2$ נוכיח כי זה מתקיים עבור $(a_1,\ldots a_{n+1})=\langle a_1,\langle a_2,\ldots a_{n+1}\rangle\rangle$ נגדיר: $(a_1,\ldots a_{n+1})$ הטענה המרכזית מתקיימת כי כל האיברים שווים בזוגות הסדורים.

$$A \times B = \{\langle a,b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$$
 הגדרה 2.3 יהיו A ו־B קבוצות.

$$\{1,2\} imes \{1,3\} = \{\langle 1,1 \rangle\,, \langle 1,3 \rangle\,, \langle 2,1 \rangle\,, \langle 2,3 \rangle\}$$
 דוגמא:

הגדרה 3.3

$$A^1 = A$$
$$A^{n+1} = A \times A^n$$

המישור הממשי הוא $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (כל זוג של שני מספרים ממשיים זה כל נקודה בדו מימד). $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ בשים לב לקשר עם nיה סדורה כאשר נגדיר $\{\langle a,b,c\rangle\mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$

3.4 יחסים

 $R\subseteq A imes B\iff A,B$ יהיו A ו־B קבוצות. B נקרא יחס מעל B ו־B יהיו A יהיו B דוגמות: $\{\langle 1,7\rangle,\langle 2,7\rangle\}$ יחס מעל

$$<_{\mathbb{N}} = \left\{ \langle n, m \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid \exists k \in \mathbb{N}_+, n+k=m \right\}$$

$$\leq_{\mathbb{N}} = \left\{ \langle n, m \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid \exists k \in \mathbb{N}, n+k=m \right\}$$

$$(=_{\mathbb{N}}) = Id_{\mathbb{N}} = \left\{ \langle n, n \rangle \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$f(x) = 2x = \left\{ \langle x, 2x \rangle \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

הגדרה 3.3 יהי R יחס מעל R יהי R יחס מעל R יהי R יהי R יהי הגדרה 3.3 יהי R יחס מעל R יחס מעל R יחס מעל R

 $Dom\left(R\right)=\left\{ a\in A\mid\exists b\in B.aRb
ight\}$ התחום של התחום לדוגמא,

$$Dom\left(\left\{\left\langle 1,7\right\rangle ,\left\langle 2,7\right\rangle \right\}\right)=\left\{ 1,2\right\}$$

$$Dom\left(<_{\mathbb{N}}\right)=\mathbb{N}$$

 $Im\left(R
ight)=\{b\in B\mid\exists a\in A.aRb\}$ התמונה של R התמונה לדוגמא.

$$Im\left(\left\{\left\langle 1,7\right\rangle ,\left\langle 2,7\right\rangle \right\}\right)=\left\{ 7\right\}$$
$$Im\left(<_{\mathbb{N}}\right)=\mathbb{N}_{+}$$

- $Id_A = \{\langle a, a \rangle \mid a \in A\} \bullet$
- $R^{-1}=\{\langle b,a\rangle\mid \langle a,b\rangle\in R\}$ היחס ההופכי של היחס הופכי לדוגמא,

$$\{\langle 1,7\rangle,\langle 2,7\rangle\}^{-1} = \{\langle 7,1\rangle,\langle 7,2\rangle\}$$

- $S\circ R=\{\langle a,c\rangle\in A\times C\mid\exists b\in B.\ \langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in S\}$ נגדיר נגדיר $S\subseteq B\times C$ ו $R\subseteq A\times B$ ימני ב־B מורכב על B. זה כל זוגות האיברים שניתן "לחבר", כלומר ה־B כאשר B ימני ב־B ושמאלי ב־B B אינו ביחס ההרכבה).
- $\mbox{,}R\subseteq B\times C$, T $\subseteq A\times B$ עבור $(S\circ R)\circ T=S\circ (R\circ T)$ ר ההרכבה - $S\subseteq C\times D$

$$S \subseteq C \times D$$

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1} - (R^{-1})^{-1} = R - Id_B \circ R = R - R \circ Id_A = R$$

 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) -$

3.5.1 הגדרות לגבי יחסים

פונקציות

R נקרא:

3.5

- יש $a\in A$ יחיד $b\in B$ יש $a\in A$ לככל (לכל $a\in A. \forall b_1,b_2\in B. \langle a,b_1\rangle\in R \wedge \langle a,b_2\rangle\in R \to b_1=b_2$ יחיד ($\langle a,b\rangle\in R$
 - (לכל $a \in A$ יש $a \in A$ מתאים) $\forall a \in A. \exists b \in B. \langle a,b \rangle \in R$:A מלא ב־A מתאים
- יים אם A יחס חד ערכי ומלא. באופן שקול, B באופן שקול, A יחס חד ערכי ומלא. באופן יחס חד ערכי ומלא. ניחיד).
 - "**פונקציה חלקית**": יחס חד ערכי שאינו מלא.

3.5.2 הגדרות לגבי פונקציות

תהא $f:A \to B$ תהא

- . אה שקול לכך ש f^{-1} חד ערכית. $\forall a_1, a_2 \in A. f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$ חד ערכית.
 - . אס מלא. f^{-1} יחס מלא. $\forall b \in B. \exists a \in A. f\left(a\right) = b$
 - . איווג: אם f יחס חד־חד־ערכי ועל. נקרא גם חחע"ל או פונקציה הפיכה f
 - כך ש: q:B o A כן ש: q:B o A כן ש: -

$$f \circ g = id_B \wedge g \circ f = id_A$$

Bל־ל Aכוצת הפונקציות מ־A ל־3.5.3

 $.B^A$ או A o B

הגדרה 6.3

$$A \to B = \{ f \in P (A \times B) \mid f \text{ is a function} \}$$

 $f:A \to B$:הככה: אם פונקציה f מעל

3.5.4 טענות לגבי פונקציות

$$dom(f) = A$$
 .1

$$range(f) = B$$
 .2

$$im(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$$
 .3

 $f=g\iff dom\left(f
ight)=dom\left(g
ight)\wedge orall x\in$ אזי אזי f,g פונקציות: יהיו אויון של פונקציות: יהיו אויון של פונקציות: יהיו אויון של פונקציות: יהיו אויים פונקציות: יהיו

הפונקציה **אינה** מוגדרת ע"פ הנוסחה.

3.5.5 תמונה איבר־איבר

יר: נגדיר: $f:A \rightarrow B$ תהא

:f י"ע x של איבר־איבר איבר x

$$f[x] = \{f(a) \mid a \in x\} \subseteq B$$

f י"ע y של ע"י g •

$$f^{-1}[y] = \{a \in A \mid f(a) \in y\} \subseteq A$$

3.5.6 פונקציה מותלית

נכתוב פונקציה מותלית כך:

$$\lambda x \in \mathbb{R}. \begin{cases} 2 & x = 1 \\ 4 & x = 2 \\ x & else \end{cases}$$

. "מחזירה" אומר בא שומר כך שאר המקרים. משמאל else אומר אומר כך שאר המקרים. משמאל אה שהפונקציה

מצום 3.5.7

 $f_{\mid C} = C imes B \cap f$, f: A o B מסומן: אבל היוטא הפוכה. אבל היוטא אבל היוטא

3.6 יחסי שקילות

A יחסי שקילות הם תמיד יחסים מעל

3.6.1 הגדרות לגבי יחסים

:יחס R נקרא

- $.id_A\subseteq R$ ים שקול ל־. $\forall x\in A.\,\langle x,x
 angle\in R$ רפלקסיבי
- אנטי־רפלקסיבי. בנוסף אנטי־רלפקסיבי. למשל היחס אלטי־רפלקסיבי. בנוסף אנטי־רלפקסיבי אז יחס א לא אנטי־רפלקסיבי אז יחס א רפלקסיבי רפלקסיבי אז יחס א רפלקסיבי רפלקסיבי
 - . ביחס אז b,a אז אומר שאם a,b ביחס. $\forall a,b \in A. \langle a,b \rangle \in R \implies \langle b,a \rangle \in R$

- $\forall x,y \in A. \ (\langle x,y \rangle \in R \land \langle y,x \rangle \in R) \implies x=y$ אנטי־סימטרי חלש –
- אנטי סימטרי חזק . $\forall x,y \in A. \ \langle x,y \rangle \in R \implies \langle y,x \rangle \notin R$ הטים אנטי־סימטרי אנטי־רפלקסיבי. או הסיבה שקיים אנטי־סימטרי חלש.
 - . אה כמו כלל המעבר. $\forall a,b,c\in A.\ \langle a,b\rangle\in R \wedge \langle b,c\rangle\in R \implies \langle a,c\rangle\in R$ זה כמו כלל המעבר.
 - יחס שקילות ⁻ יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי. למשל היחס
- יחס סדר חלש יחס רפלקסיבי + טרנזטיבי + אנטי־סימטרי חלש. למשל היחס ביחס סדר חלש יחס רפלקסיבי + טרנזטיבי + אנטי־סימטרי חלש יחס רפלקסיבי + \leq, \leq
 - $<,\subset$ יחס סדר חזק יחס טרנזטיבי + אנטי־סימטרי חזק. למשל היחס -
- יחס קווי/לינארי/טוטאלי/מלא a=b . למשל היחס b=a. למשל היחס b=a. למשל היחס b=a. למשל היחס b=a יולא "התפצלויות" בסינגלטונים שאינם מוכלים זה בזה ולא שווים זה לזה.

3.6.2 מחלקות שקילות

הגדרה 7.3 מחלקת השקילות של a מוגדרת להיות a מוגדרת היות a מחלקת השקילות היא כל האיברים a ששקולים ל-a ביחס השקילות a.

 $a,b \in A$ יהי B יחס שקילות ב־A. לכל

- $[a]_B = [b]_B \vee [a]_B \cap [b]_B = \emptyset \bullet$
- $aRb\iff$ מתקיים $[a]_R=[b]_R$ $\lnot(aRb)\iff$ מתקיים $[a]_R\cap[b]_R=\emptyset$

מערכת נציגים 3.6.3

ים אם: $A'\subseteq A$ נקראת מערכת נציגים אם:

- (כל שני איברים שונים ב־ A^{\dagger} לא נמצאים ביחס) ל $a,b \in A'.a \neq b \implies \neg (aRb)$
 - (Aבם ביבר שקול לכל איבר שיבר יש איבר במערכת (במערכת במערכת לכל $\forall a \in A. \exists b \in A'. aRb$

3.6.4 חלוקה

הגדרה של A אם: $\Pi \subseteq P(A)$ אם:

- $\emptyset \notin \Pi$.1
- (כל האיברים בחלוקה זרים) $\forall x,y \in \Pi. x \neq y \implies x \cap y = \emptyset$.2
 - (כל איברי A נמצאים בחלוקה) $\bigcup \Pi = A$.3

משפט 10.3 יהי $A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$ מתקיים כי $A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$ (קבוצת המנה) היא חלוקה של A/R.

הגדרה מהחלוקה" שנסמן ב־ R_Π כז (גדיר את היחס מושרה מהחלוקה שנסמן ב- R_Π כז תהא חלוקה שנסמן ב- $\bigcup\limits_{y \in \Pi} y imes y$

12.3 משפט

- . יחס שקילות R_{Π}
 - $A/R_{\Pi} = \Pi \bullet$

 $R_{(A/R)} = R \bullet$

משפט 13.3 יהי R יחס שקילות ב־A ותהא שקילות ביר. אם מתקיים כי:

- ו־A וד חלוקה של T
- $\forall a,b \in A.aRb \iff \exists t \in T.a,b \in t \ \bullet$

A/R = T ንየእ

יחסי סדר 3.7

A יחס סדר חלש על A יחס סדר חלש על אימון: \prec יחס סדר חלש על

 $a \prec b \lor a = b$:A בהינתן $A \lor a = b$ ניתן להגדיר יחס סדר חלש על

 $.a \preceq b \wedge a \neq b$: A איז חזק סדר יחס להגדיר ניתן להגדיר להגדיר בהינתן און ל

:גדיר

- יקרא איבר קטן ביותר $x\in X$. $\forall y\in X.y\preceq x$ אם איבר קטן ביותר $x\in X$ יקרא האיבר גדול ביותר ב־ $\forall y\in X.x\preceq y$ אם איבר קטן ביותר (מינימלי)
- (מינימום): איבר איבר איבר (מינימום) ב־X אם אס (מינימום) איבר מירבי (מינימום): $x \in X$. $\forall y \in X. \neg (y \prec x)$
- לדוגמה . $\forall y \in X.y \preceq x$ אם עליון ל־X אם עליון ל $x \in A$. לדוגמה . לדוגמה און (מלעל/מלמעלה). או כל מספר אחר שגדול או שווה ל־1. יש גם חסם תחתון . $X = [0,1], A = \mathbb{R}$
 - עליון. נקראת הסומה מלמעלה אם קיים חסם עליון. חסומה מלמטה אם קיים חסם תחתון חסומה אם X הסומה אם X הסומה אם אם המלמטה ומלמעלה.
 - . נקרא סופרמום של X אם אם העליון הקטן $x \in A$
 - X^{-} חסם עליון לx
 - $\forall y \in A.y$ hasam elion le $X \to x \leq y$ –
 - אם: אינפימום התחתון הקטן ביותר) אם: $x \in A$
 - Xרסם תחתון ל־x
 - $\forall y \in A.y$ hasam tahton le $X \to y \leq x$ –

:טענה

- Xאיבר מרבי ב־א x איבר ביותר ב־ל איבר מרבי x
- $x = sup\left(X
 ight)$ אם $x \in A$ אם אם עליון קטן ביותר של $x \in A$ אם $x \in A$
 - $x=max\left(X
 ight)$ ומסמנים $x=sup\left(x
 ight)$ איבר גדול ביותר אז $x\in X$
 - . איבר גדול פיותר x איבר מירבי ב־x אז איבר גדול ביותר α

יחס סדר את מקיים את מקיים את יחס סדר חזק וקווי על A מקיים את יחס סדר R

$$\forall X \subseteq A.x \neq \emptyset \implies \exists x \in X. \forall y \in X.x \leq_A y$$

. כלומר לכל תת קבוצה של A שאינה \emptyset יש איבר מינימלי.

 \mathbb{N} צל \mathbb{N}

עקרון הסדר הטוב: לכל קבוצה A קיים סדר טוב.

משפט 14.3 אקסיומת הבחירה שקולה לעקרון הסדר הטוב.

חלק II

עוצמות

הקדמה לעוצמות

4.1 הגדרות

- . זיווגf:A o B קיימת $\Leftrightarrow |A| = |B|$
- ע. $f:A \to B$ קיימת $f:A \to B$ חח"ע.
- עוות צריך להוכיח שעוצמות כדי להוכיח כדי להוכיח אלא $|A| \neq |B| \wedge |A| \leq |B| \iff |A| < |B|$ קיים זיווג.

טענות בסיסיות 4.1.1

- $|A|=|Im\left(f
 ight)|$ אם f:A o B אם \bullet
 - |A| = |B| לגבי
 - |A| = |A| רפלקסיביות:
- $|B| = |A| \iff |A| = |B|$ סימטריה
- $|A|=|B|\wedge |B|=|C|\implies |A|=|C|$ טרנזיטיביות:
 - $:|A| \leq |B|$ לגבי

$$|A| = |B| \implies A \le B$$

$$|A| \le |B| \land |B| \le |C| \implies |A| \le |C|$$

$$A \subseteq B \implies |A| \le |B| -$$

$$|A| \leq |B|$$
 קיימת f על מ־ B ל־ A אמ"ם $-$

|A| < |B| • לגבי

$$|A| < |C| \implies |A| < |B| = |C|$$

$$|A| = |B| < |C| \implies |A| < |C|$$

4.1.2 טענות לגבי קבוצות שוות עוצמות

 $|A| = |A'| \wedge |B| = |B'|$ יהיו $|A| = |A'| \wedge |B| = |B'|$ אזי:

- $|A \times B| = |A' \times B'| \bullet$
- $|A \rightarrow B| = |A' \rightarrow B'| \bullet$
 - $|P(A)| = |P(A')| \bullet$
- $|A' \uplus B'| = |A \uplus B|$ זרות: A', B' זרות A, B •

משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין 4.1.3

משפט זה אומר ש:

$$|A| \le |B| \land |B| \le |A| \iff |A| = |B|$$

עוצמות סופיות 5

5.1 הגדרות

 $[n] = \{0, \dots, n-1\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$, $[0] = \emptyset$ לחלק הזה, נסמן:

A קבוצה A נקראת סופית אם קיים (הוא גם יחיד) $n\in\mathbb{N}$ כך שרוA נקראת סופית אם ליים (הוא גם יחיד) איננה סופית אם A איננה סופית.

 $=_{\mathbb{N}},<_{\mathbb{N}}$ נסמן הזה כחלק ההגבלה, לשם ההגבלה עבור תואר עבור גם מתואר אבל החלק הזה נסמן $=,<,\leq$

בשפטים 5.2

- |[n]|<|[m]| אז $n<_{\mathbb{N}}m$ נניח כי $n,m\in\mathbb{N}$ אז וו $n,m\in\mathbb{N}$
 - עסופית אז א סופית או $Y\subseteq X$ סופית. •
 - |X|<|Y| אם $X \subsetneq Y$ סופיות אז $X \subsetneq Y$ אם •
- על. $f\iff y$ חח"ע אז f:X o Yו, ו־X+Y=|Y| אום אם X,Y

הגדרה: עבור |A| = |[n]| עבור ה־n היחידי כך ש־|A| = n (אותו הדבר לגבי |A| = n). אותו הדבר לגבי ($|A| < n, |A| \le n$

|A|=n, |B|=mמסקנה: יהיו A,B קבוצות כך

- $|A| = |B| \iff n =_{\mathbb{N}} m \bullet$
- $|A| \leq |B| \iff n \leq_{\mathbb{N}} m \bullet$
- $|A| < |B| \iff n <_{\mathbb{N}} m \bullet$

עוצמות אינסופיות 6

6.1 עוצמות בנות מניה

משפט: העוצמה של קבוצות בנות מניה מסומנת ב־ \aleph_0 . הקבוצות הבאות בנות מניה:

- \mathbb{N} •
- \mathbb{Z} ullet
- $\forall n \in \mathbb{N}^+ . |\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}| \bullet$

שיטת הלכסון 6.1.1

 $|\mathbb{N}|<|\mathbb{N}
ightarrow\{0,1\}|$ משפט האלכסון של קנטור:

 $|A \rightarrow \{0,1\}| = 2^{|A|}$, הגדרה: או $|A \rightarrow \{0,1\}| = 2^{\aleph_0} = |A \rightarrow \{0,1\}|$. (באופן כללי יותר,

הוכחה לדוגמה של משפט האלכסון של קנטור: $|\{1,0\} \in \mathbb{N}| > |\mathbb{N}|$: ראינו. נוכיח כי $\neq |\mathbb{N}|$ זיווג. $F\in\mathbb{N}\to(\mathbb{N}\to\{0,1\})$. נניח בשלילה כי $|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}\to\{0,1\}|$, כלומר קיימת $F\in\mathbb{N}\to\{0,1\}$ נוכיח שקיים איבר בטווח $F(n) \neq q$, $n \in \mathbb{N}$ כלומר לכל $q \in \mathbb{N} \to \{0,1\}$. אם כך על. Fי ש־ $q \notin Im(F)$

נמצא את g (אנחנו מחפשים איזשהו g ששונה מכל דבר ב- $Im\left(F\right)$, וכדי לעשות זאת כל איבר יסתור את השוויון לאחד מהם).

לכסון:

$$F(0) = \left\langle \overbrace{(F(0))(0)}^{x}, (F(0))(1), (F(0))(2), \dots \right\rangle$$

$$F(1) = \left\langle (F(1))(0), \overbrace{(F(1))(1)}^{y}, (F(1))(2), \dots \right\rangle$$

$$\dots$$

$$F(n) = \left\langle (F(n))(0), (F(n))(1), (F(n))(2), \dots \right\rangle$$

$$g = \left\langle 1 - x, 1 - y, \dots \right\rangle$$

$$g = \lambda n \in \mathbb{N}.1 - (F(n))(n)$$

 $q \neq F(n)$, $n \in \mathbb{N}$ ולכל $q \in \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$ צ"ל:

עוצמות שאינן בנות מניה

הרצף את השערת הרצף (CH): לא קיימת עוצמה בין א ל־ \aleph_0 ל־ \aleph_0 ל־א. הוכח את השערת הרצף $(\aleph_0 \leq |A| < \aleph) \implies |A| = 1$ ואי אפשר להפריך את השערת הרצף. בקורס שלנו לא נכון להגיד כי $.\aleph_0$

משפטים:

- $|A| < 2^{|A|} \bullet$
- . ביותר, און עוצמה אין ולכן אין א $0 < 2^{\aleph_0} < 2^{\left(2^{\aleph_0}\right)} < 2^{\left(2^{\left(2^{\aleph_0}\right)}\right)} < \dots$
 - $|\mathbb{R}| = \aleph = 2^{\aleph_0}$ •
 - $\forall n \in \mathbb{N}^+ . |\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}| \bullet$
- $|\alpha,\beta|=|\alpha,\beta|=|\alpha,\beta|=|\alpha,\beta|=|\alpha,\beta|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\infty|=|\alpha,\infty|=|\alpha,\infty|=|\alpha,\infty|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,\alpha|=|\alpha,$

7 חשבון עוצמות

יהיו A,B קבוצות. נגדיר:

- $|A| + |B| = |A \times \{0\} \uplus B \times \{1\}| \bullet$
 - $|A| \cdot |B| = |A \times B| \bullet$
 - $|A|^{|B|} = |B \to A| \bullet$

חוקים בסיסיים:

:לכל a,b,c עוצמות מתקיים

- a+b=b+a :קומוטטיביות
 - $a \cdot b = b \cdot a$:קומוטטיביות
- a+(b+c)=(a+b)+c אסוציאטיביות:
 - $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ אסוציאטיביות: •
 - $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ חוק הפילוג:
 - a+0=a •
 - $a \cdot 1 = a \bullet$
 - $a \cdot 0 = 0 \bullet$
 - $a^1 = a \bullet$
 - $a^0 = 1 \bullet$
 - $0^a = \begin{cases} 0 & a \neq 0 \\ 1 & a = 0 \end{cases} \bullet$
 - אז: $a \leq b, c \leq d$ אז: מונוטוניות: אם

$$a+c \leq b+d$$
 -

$$a \cdot c < b \cdot d$$
 —

$$a^c < b^c$$
 –

$$a^c \le a^d$$
 –

משפט:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \bullet$$

$$\aleph + \aleph = \aleph \cdot \aleph = \aleph + \aleph$$

$$\aleph_0 \cdot \aleph = \aleph_0 + \aleph = \aleph$$
 •

חוקי חזקות:

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c} \bullet$$

$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c \quad \bullet$$

$$(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c \bullet$$

 $a+leph_0=a$ אם אינסופית אינסופית a אם 1.7 טענה

 $. \forall n \in \mathbb{N}. a + n = a$ אז א $0 \leq a$ אם 2.7 מסקנה

משפט 3.7 איחוד לכל היותר בן מניה של קבוצות לכל היותר בנות מניה הוא לכל היותר בן מניה: $\exists A \mid \exists A \mid \exists$

משפט 4.7 $\Rightarrow x\cap y=\emptyset$ וגם $|A|=\aleph_0$ וגם פרבוצה של קבוצה של קבוצה של אזי איז $|A|=\aleph_0$ וגם $|A|=\aleph_0$ וגם $|A|=\aleph_0$ אזי $|A|=\aleph_0$ אזי $|A|=\aleph_0$

חלק III

קומבינטוריקה

קומבינטוריקה בסיסית

בינום, מולטינום, ...

בינום $^{m{n}}$ מקדם בינומי: יהיו $n\geq k\geq 0$. נגדיר: $n\geq k\geq 0$. זה שווה למספר האפשרויות לבחור קבוצה של k ילדים מתוך n ילדים (ללא חשיבות לסדר).

k בגודל המיכה, עם החזרה) המולטי קבוצות (בלי חשיבות לסדר, עם החזרה) בגודל אחלוקה לתאים: בתור $\{1,2,\ldots,n\}$, שזה שקול לחלוקת לכדורים היים ל- $\{1,2,\ldots,n\}$

$$S\left(n,k\right) = \binom{n+k-1}{k}$$

זהויות חשובות:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
 .1

2. זהות מסקל: $\{1,\dots,n\}$ זה מתוך הקבוצה k מתוך כי לבחור זה נכון מי $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k-1}$ האפשרויות אם לא נבחר את 1 (שזה $\binom{n-1}{k}$) ועוד כמות האפשרויות אם נבחר את $\binom{n}{k}$

סדרת הפרשים 8.2

ברך נפוצה לפתור בעיות של ספירת סדרות. עבור סדרה a, סדרת ההפרשים y מוגדרת כך: $a_1,a_2-a_1,a_3-a_2,\ldots$ במילים אחרות סדרת במילים $y_1=a_1,y_{i+1}=a_{i+1}-a_i$

הוכחות קומבינטוריות 8.3

דרך להוכיח כי שני ביטויים שווים. נמצא בעיה ששני הצדדים בשוויון פותרים ואז נוכיח ששני הצדדים פותרים את אותה הבעיה.

הבינום של ניוטון 8.4

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

 $n \in \mathbb{N}$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$ לכל

8.4.1 המקדם המולטינומי

נגדיר את המקדם המולטינומי: עבור $k_1+\dots+k_m=n$ כך שיר $k_1+\dots+k_m=n$ נגדיר את המקדם לנגדיר את המקדם המולטינומי המולטינומי:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}$$

הינו מספר $k_1+\cdots+k_m=n$ עבור עבור ($\binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_m}$) הינו מספר המקדם המקדם המקדם המלטינומי \ldots בים, k_2 נים, k_1 עם בדיוק k_1 עם באורך k_2 מעל א"ב $\{1,\ldots,m\}$ מעל א"ב $\{1,\ldots,m\}$

 $\binom{n}{k_1}\cdot\binom{n-k_1}{k_2}\cdot\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdot\cdots\cdot\binom{k_m}{k_m}$ יה שווה ל־נוסת המולטינום:

$$(x_1 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} \binom{n}{k_1, \dots, k_m} x^{k_1} \cdot x^{k_2} \cdot \dots \cdot x^{k_m}$$

8.4.2 המקדם הבינומי הכללי

$$olimits_{k}, n^{\overline{n}} = n!$$
 $olimits_{k}, n^{\overline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ בנוסף $olimits_{k}, r \in \mathbb{R}$ בנוסף $olimits_{k}, n^{\overline{k}} = n!$ בנוסף $olimits_{k}, n^{\overline{k}} = n!$

 $r=r^{rac{k}{k!}}=rac{r^{rac{k}{k!}}}{k!}=rac{r(r-1)\cdots (r-k+1)}{k!}$ לכל 1.8 לכל את הבינום השלילי להיות $r\in\mathbb{R},k\in\mathbb{N}$

8.4.3 נוסחת הבינום השלילי

 $r, x, y \in \mathbb{R}$ עבור

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$$

הכלה והדחה 8.5

נוסחת ההכלה וההדחה: יהיו A_1,\dots,A_n קבוצות סופוית.

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_{i} \right| = |A_{1}| + |A_{2}| + \dots + |A_{n}|$$

$$- |A_{1} \cap A_{2}| - |A_{1} \cap A_{3}| - \dots - |A_{i} \cap A_{j}| - \dots$$

$$+ |A_{1} \cap A_{2} \cap A_{3}| + |A_{1} \cap A_{2} \cap A_{4}| + \dots + |A_{i} \cap A_{j} \cap A_{k}| + \dots$$

$$- \dots$$

$$+ \dots$$

בנוסחה זו יש 2^n-1 מחוברים (כל תתי הקבוצות חוץ מהקבוצה הריקה). הנוסחה הזו רלוונטית אם הרבה מהמחוברים הם 0.

המקרה הסימטרי (בכל שורה בנוסחת ההכלה וההדחה, הגורמים יוצאים שווים): הגודל של חיתוך המאורעות אינו תלוי באילו מאורעות אנו חותכים, אלא רק בכמות המאורעות. במקרה זה נפשט את הנוסחה להיות:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \cdot |A_1 \cap \dots \cap A_k|$$

8.6 עקרון שובך היונים

אם מחלקים m יונים ל־n שובכים, אז קיים שובך עם לפחות m יונים.

C_n מספרי קטלן 8.7

הגדרה: הפתרון לבעיות הבאות:

- כת שמתחילים בנקודה (0,0) ומסתיימים בי(n,n) יש כך שבכל שלב קופצים ullety=x צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה, ואסור לעבור את צעד אחד ימינה או צעד אחד אחד למעלה, ואסור לעבור את
- עולה על מספר האפסים אל באורך 2n יש כך שלכל $k \leq 2n$ יש כך באורך 2n באורך ו־1 באורך \bullet מספר האחדים עד המקום ה־k ויש בדיוק n אפסים ו־n אחדים?
- (())() משהו משהו n=3 למשל עבור n=3 משהו כמו סוגריים ורn=3 משהו כמו סוגריים י נחשב לחוקי)

 $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n} \binom{2n}{n}$ נוסחת נסיגה: עבור $n \geq 1$

$$C_n = \sum_{i=1}^n C_{i-1} \cdot C_{n-i}$$

פונקציות יוצרות

 $f\left(x
ight)=$ סדרת מספרים. הפונקציה היוצרת את הסדרה $\overline{a}=\lambda n\in\mathbb{N}.a_n$ תהא הפונקציה סדרת מספרים. בכיוון ההפוך, בהינתן פונקציה f שניתן לפתח לטור חזקות). בכיוון ההפוך, בהינתן פונקציה f שניתן לבטא על ידי בכיוון החסדרה המקדמים $f\left(x
ight)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ נקראת הסדרה הנוצרת. שניתן לבטא על ידי $f\left(x
ight)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

נוסחאות 9.1

:מדיר טור: נגדיר נגדיר מספרים סדרת (a_n) $_{n=0}^{\infty}$ תהא

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$$

רשימת נוסחאות:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} S(m,n) x^n$$

 $\lambda n \in \mathbb{N}. \alpha a_n \pm \beta b_n$ הפונקציה $\alpha f\left(x\right) \pm \beta g\left(x\right)$ יוצרת את הסדרה $\lambda n \in \mathbb{N}.c^n \cdot a_n$ הסדרה את יוצרת $f\left(cx\right)$ הפונקציה

 $.\lambda n \in \mathbb{N}. \begin{cases} 0 & n < m \\ a_{n-m} & n \geq m \end{cases}$ הפונקציה $x^m \cdot f\left(x\right)$ יוצרת את הסדרה

 $a_0\cdot b_n+a_1\cdot b_{n-1}+\cdots+a_n\cdot b_0$ $\lambda n\in\mathbb{N}.$ $\sum_{k=0}^n a_k\cdot b_{n-k}$:וצרת את הקונבולוציה של הסדרות: $f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)$

 $\lambda n \in \mathbb{N}. \sum_{k=0}^n a_k$ פרטי של או סדרת הסכומים את יוצרת את יוצרת יוצרת אל יוצרת של א

9.2 פירוק לשברים חלקיים

הסיבה שאנחנו עושים פירוק לשברים חלקיים היא שהפונקציה $\alpha f\left(x\right)\pm\beta g\left(x\right)$ נוצרת מהסדרה מסיבה שאנחנו עושים פירוק לנו למצוא פונקציה יוצרת לסכום של כמה שברים מאשר שבר $\lambda n\in\mathbb{N}.\alpha a_n\pm\beta b_n$ אחד גדול.

הפירוק לשברים חלקיים הכי פשוט הוא כאשר כל הגורמים במכנה שונים. למשל:

$$\frac{x+3}{x^2-3x-40} = \frac{x+3}{(x-8)(x+5)} = \frac{A}{x-8} + \frac{B}{x+5}$$
$$x+3 = A(x+5) + B(x-8)$$

ואז מוצאים את A,B לפי המשוואה. אם יש ביטוי שאינו פריק במכנה, למשל:

$$\frac{10x^2 + 12x + 20}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 4}$$

עבור כל גורם ממעלה שנייה נוסיף מונה מהצורה .ax+b מונה מהצורה נוסיף מונה ממעלה שנייה לפתור. .ax+b שאותה בריך לפתור. .ax+b שאותה בריך לפתור.

אם יש גורמים שחוזרים על עצמם במכנה, למשל:

$$\frac{P(x)}{(x+2)(x^2+1)^5} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^3} + \frac{Hx+I}{(x^2+1)^4} + \frac{Jx+K}{(x^2+1)^5}$$

אז נסכום את הגורם שחוזר על עצמו מ־1 עד המעריך של החזקה.

10 נוסחאות נסיגה

הגדרה 1.10 נוסחת נסיגה היא ביטוי של איבר בסדרה באמצעות איברים קודמים בסדרה.

 $a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. דוגמא: פיבונאצ'י

לנוסחת נסיגה יש משמעות רק החל מ־n מסוים (כי היא דורשת מספרים קודמים שלא קיימים קודם לכו).

הגדרה: עומק הרקורסיה הוא כמות האינדקסים שצריך לנסוג (לחזור אחורה) על מנת לחשב את האיבר בסדרה.

תנאי a_0,\dots,a_{k-1} השמה של a_0,\dots,a_{k-1} היא תנאי התחלה: השמה נתונה במשוואת הרקורסיה מעומק

.התחלה: נוסחה רקורסיבית מעומק k ותנאי התחלה.

פתרון של בעיית התחלה: סדרה $\lambda n \in \mathbb{N}.a_n$ נקראת פתרון לבעיית התחלה אם הסדרה מקיימת את כל תנאי ההתחלה ואת המשוואה הרקורסיבית לכל n שעבורו יש משמעות למשוואה. לבעיית התחלה תמיד יש פתרון יחיד.

פתרון לנוסחת נסיגה: כל סדרה $\lambda n \in \mathbb{N}$ המקיימת את המשוואה לכל n עבורו יש משמעות למשוואה.

10.1 נוסחאות נסיגה לינאריות

10.1.1 נוסחאות נסיגה לינאריות הומוגניות

 $a_1,\ldots,lpha_k\in\mathbb{R}$ נוסחאות נסיגה מהצורה $a_k:a_{n-1}+\cdots+lpha_k:a_{n-k}$ נוסחאות נסיגה מהצורה

10.1.2 נוסחאות נסיגה לינאריות לא הומוגניות

נוסחאות נסיגה מהצורה $\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta\in\mathbb{R}$ כאשר $a_n=\alpha_1a_{n-1}+\cdots+\alpha_ka_{n-k}+\beta$ ניתן לעבור נסיגה נסיגה מנוסחת נסיגה לינארית (למשל $a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}+5$ לנוסחת נסיגה לינארית לא הומוגנית (למשל

ונקבל: נוסיף את משני אגפי המשוואה ונקבל: נוסיף את מוסיף הבא: נוסיף את הומוגנית באופן הבא: נוסיף את

$$a_n + 2a_{n-2} + 3a_{n-3} + 5 = 3a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5$$

 $a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2} - 3a_{n-3}$

10.2 פתרון נוסחאות נסיגה לינאריות

10.2.1 פתרון נוסחאות נסיגה לינאריות באמצעות פונקציות יוצרות

למשל: $a_{n+1}=(1.1)\,a_n+1000$. נסמן ב־ $a_{n+1}=(1.1)\,a_n+1000$ למשל: היוצרת של איזשהו פתרון. ננסה להבין מתנאי הנסיגה מהי

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (1.1 \cdot a_{n-1} + 1000) x^n = a_0 + (1.1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + 1000 \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x \cdot f(x)\right) = a_0 + 1.1x \cdot f(x) + \frac{1000x}{1-x}$$

$$f(x) \cdot (1 - 1.1x) = \frac{a_0 (1 - x) + 1000x}{1 - x}$$

$$f(x) = \frac{a_0 (1 - x) + 1000x}{(1 - x) (1 - 1.1x)}$$

ומכאן מוצאים את הסדרה שהפונקציה יוצרת.

10.2.2 פתרון נוסחאות נסיגה לינאריות הומוגניות באמצעות פולינום אופייני

 $\overbrace{a_{n+1}}^{x^2}-\overbrace{a_n}^{x^1}-\overbrace{a_{n-1}}^{x_0}=:$ עבור נוסחה $a_{n+1}=a_n+a_{n-1},a_0=0,a_1=1$ עבור נוסחה $a_{n+1}=a_n+a_{n-1},a_0=0,a_1=1$ אם כך הפתרונות $a_{n+1}=a_n+a_{n-1},a_0=0,a_1=1$

$$a_n = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

 $A=rac{1}{\sqrt{5}}, B=-rac{1}{\sqrt{5}}$ כי נמצא את תנאי ההתחלה תנאי באמצעות באמצעות את

פירוט על פתרונות בסיסיים:

- . אם אין שורשים ממשיים, כרגע אנחנו לא יודעים מה לעשות.
 - :2 אם עומק הרקורסיה הוא \bullet
- ויש שני שורשים שונים λ_1,λ_2 אז הפתרונות הבסיסיים הם כפי שעשינו בתרגיל הזה אורשים שונים $\lambda n\in\mathbb{N}.\left(\lambda_1\right)^n,\lambda n\in\mathbb{N}.\left(\lambda_2\right)^n$ שזה
 - $\lambda n \in \mathbb{N}.\lambda_1^n, \lambda n \in \mathbb{N}.n \cdot \lambda_1^n$ הבסיסיים הבסיסיים אז הפתרונות הבסיסיים
 - :3 אם עומק הרקורסיה הוא
- $\lambda n\in\mathbb{N}.\lambda_1^n,\lambda n\in\mathbb{N}.\lambda_1^n,\lambda n$ הפתרונות הבסיסיים הם אז הפתרונות הבסיסיים שונים . $\mathbb{N}.\lambda_2^n,\lambda n\in\mathbb{N}.\lambda_3^n$
- $\lambda n\in\mathbb{N}.\lambda_1^n,\lambda n\in\mathbb{N}.\lambda_1^n$, אז הפתרונות הבסיסיים הם אז הפתרונות הבסיסיים הם אז הפתרונות $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$ הוא הפתרונות $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$ הוא הפתרונות הבסיסיים הם אז הפתרונות הבסיסיים הם הבסיסיים הם הבסיסיים הם הבסיסיים הבסיסיים הם הבסיסיים הבסיסים הבסי
- $\lambda n \in \mathbb{N}$. $\lambda_1^n, \lambda n \in \mathbb{N}. n \cdot \lambda_1^n, \lambda n \in \mathbb{N}. n^2 \cdot \lambda_1^n$ הבסיסיים הבסיסיים אז הפתרונות הבסיסיים -
 - ...וכך הלאה.. •

10.2.3 מעבר מפתרון יחיד של נוסחת נסיגה לא הומוגנית לקבוצת הפתרונות

נשתמש במשפט הבא:

$$\{\lambda n \in \mathbb{N}. a_n + x_n \mid \text{solution for } a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \dots + \alpha_k a_{n-k}\} = \{f \in \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \dots + \alpha_k a_{n-k} + \beta\}$$

כאשר $a_n=\alpha_1a_{n-1}+\cdots+\alpha_ka_{n-k}+\beta$ כאשר נתון אחד למשוואה אחד למשוואה מיתן נתון אחד לנוסחת נסיגה לא הומוגנית ניתן למצוא את כל הפתרונות באמצעות פתרון נוסחת הנסיגה ההומוגנית.

10.3 סדרות עזר

שיטה שימושית לפתרון נוסחאות נסיגה. נגדיר סדרות עזר (סדרות שאנחנו לא צריכים לחשב) שיתבטלו בנוסחה הסופית, אך עוזרות להגדיר את הקשרים בין הנוסחאות. למשל, כמה מחרוזות שיתבטלו בנוסחה הסופית, אך עוזרות להגדיר את הקשרים בין הנוסחאות. נסמן ב־ a_n את מעל א"ב $\{A,B,C\}$ ללא הרצפים BB,CC הפתרון הוא a_n נסמן ב־ a_n את אלה שנגמרות ב־ a_n את אלה שנגמרות ב־ a_n את אלה שנגמרות ב־ a_n את המחרוזות שמסתיימות ב־ a_n את המחרוזות שנגמרות ב־ a_n את אלה שנגמרות ב־ a_n את המחרוזות שנצא קשרים בין הנוסחאות:

$$x_n=a_n+b_n+c_n=x_{n-1}+b_n+c_n=x_{n-1}+2b_n$$

$$a_n=x_{n-1}$$

$$b_n=a_{n-1}+c_{n-1}=x_{n-2}+c_{n-1}$$

$$c_n=b_n$$

$$.x_n=2x_{n-1}+x_{n-2}$$
 כלומר
$$\frac{x_n-x_{n-1}}{2}=b_n=x_{n-2}+\frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{2}$$
 ונקבל כי

חלק IV

תורת הגרפים

11 הגדרות בסיסיות

 $.E\subseteq P_2\left(V
ight)=\{X\subseteq V\mid |X|=2\}$, כאשר V זה הצמתים ו־ $G=\langle V,E
angle$

השכנים. $N \, (v \in V) = \{u \in V \mid \{v,u\} \in E\}$ זה קבוצת השכנים.

הדרגה. $d_G \, (v \in V) = |\{e \in E \mid v \in e\}|$ או הדרגה.

 $E'\subseteq P_2\left(V'\right)$ נוגם $E'\subseteq E'$ וואס $G'=\langle V',E'\rangle$ כך ש־ל $G'=\langle V',E'\rangle$ וואס G וואס $G'=\langle V',E'\rangle$ כי אחרת זה לא גרף).

תת גרף של $G[K] = \langle K, P_2(K) \cap E \rangle$ מסומן אידי על ידי הגרף הנפרש $K \subseteq V$ יהי 4.11 יהי $K \subseteq V$ יהי $G[K] = \langle K, P_2(K) \cap E \rangle$

 $.\overline{G}=\langle V,P_{2}\left(V
ight)\setminus E
angle$ הינו הגרף המשלים המשלים 5.11 הגדרה

11.1 מסלול, טיול, וכל הדברים האלה

- לא . $\{a_i,a_{i+1}\}\in E$, $1\leq i\leq n-1$ כך שלכל $\langle a_1,\dots,a_n\rangle\in V^n$ כיול הוא סדרת קודקודים סיול היים טיול ריק.
 - . מסלול הוא טיול $\langle a_1,\dots,a_n \rangle$ כך שאין קשת סיול
 - מעגל הוא מסלול שמתחיל ונגמר באותה הנקודה.

- מסלול פשוט הוא מסלול חסר מעגלים, כלומר מסלול שלא חוזר על קודקוד פעמיים.
- מעגל פשוט הוא מעגל $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ כך ש־ $\langle a_1,\dots,a_n,a_1\rangle$ הוא מסלול פשוט. כלומר הפעם היחידה שהמעגל הזה חוזר על נקודה זה בנקודת ההתחלה.
 - מסלול אוילר הוא מסלול שעובר בכל קשת בדיוק פעם אחת.
 - מעגל אוילר הוא מעגל שעובר בכל קשת בדיוק פעם אחת.
 - . ב־G יש מעגל אוילר \iff דרגת כל הקודקודים היא זוגית –
 - . יש מסלול אוילר \iff יש מסלול אוילר אוילר אוילר G יש האי זוגית.
 - מסלול המילטון הוא מסלול שעובר בכל קודקוד בדיוק פעם אחת.
 - מעגל המילטון הוא מעגל פשוט שעובר על כל הקודקודים.

vמשפט wיש מסלול פשוט מ־v אזי יש טיול מיv ל־v אזי יש מסלול פשוט מי $G=\langle V,E
angle$ יהי היי היי $G=\langle V,E
angle$ יהי ל־u.

11.2 קשירות

יהי $v_1,v_2\in V$ אפשר להגדיר יחס שקילות ("יחס הקשירות"): עבור $v_1,v_2\in V$ נגדיר כי $v_1,v_2\in V$ אפשר להגדיר יחס שקילות ("יחס הקשירות"): עבור על אפשר להגדיר יחס להגדיר יחס שקילות ($v_1,v_2\in V$) אפשר להגדיר יחס שקילות ($v_1,v_2\in V$) נגדיר כי $v_1,v_2\in V$

הגדרה 7.11 כל מחלקת שקילות ביחס הקשירות נקראת "רכיב קשירות".

הגדרה אחד. או באופן שקול אם בין כל בדיוק הכיב קשירות אחד. או באופן שקול אם בין כל G גרף G גרף $v_1.v_2 \in V$ קיים טיול.

G משפט 9.11 יהיG יהי גרף ונניח כי k_1,\ldots,k_n כי ונניח כי גרף ונניח כי

- G הינו תת־גרף קשיר של 1. לכל $G[k_i]$, $1 \le i \le n$
- 2. אין קשתות בין קודקודים מרכיבי קשירות שונים.
- רכיבי הקשירות אז בגרף $u\in k_1$ וי $v\in k_1$ קשת בין קודקוד רכיבי הקשירות 3. $k_1\cup k_2, k_3, k_4, \ldots, k_n$ יהיו
- 4. אם מוסיפים לגרף G קשת בין שני קודקודים באותו רכיב הקשירות, רכיבי הקשירות לא משתנים.

 $|V| - |E| \le G$ מסקנה 10.11 לכל גרף G, מספר רכיבי הקשירות ב

.מסקנה 11.11 אם |E| > |E| אז G לא קשיר

 $|E| \geq |V| - 1$ אם G קשיר אז **12.11** מסקנה

הגדרה 13.11 צביעות של גרפים: צביעה היא פונקציה. יש שתי סוגים של צביעות:

- .1 נקראת צביעת קודקודים. $f:V \to C$
- ערעת צביעת קשתות. f הצבעים. $f:E\to C$, $G=\langle V,E\rangle$. נקראת גביעת 2. ביעת קשתות ב־C בעים. קשתות ב־C בעים.
- טונים (הצבעים הערט) אונים (הצבעים אם היקודים אם היקודים ל $f:A\to C$ הצבעים אונים בין קודקודים שכנים). בין קודקודים שכנים).
 - 4. אין חוק דומה לצביעת קשתות.

הצבעים מספר הינו מספר $\chi(G)$ מסומן $G=\langle V,E\rangle$ הינו מספר הצבעים הגדרה 14.11 הינו מספר הצבעים הקטן ביותר הדרוש על מנת לצבוע את G בצביעת קודקודים חוקית.

:1 כן: $\chi(G) \leq |V|$ יתר על כן:

$$\chi(g) = |V| \iff G = K_V$$
 .1

$$\chi(g) = 1 \iff E = \emptyset$$
 .2

הגדרה 15.11 נאמר כי גרף G הוא G הוא ה־צביע אם קיימת צביעת קודקודים חוקית ב־n צבעים. אוא ה־ח הקטן ביותר כש ש־n הוא ה־n הוא ה־n הוא ה־n

עצים 12

הגדרה 1.12 עץ הינו גרף קשיר וחסר מעגלים.

הגדרה 2.12 יער הינו גרף חסר מעגלים.

מסקנה 3.12 ביער מספר הקשתות קטן ממספר הקודקודים.

מסקנה 4.12 רכיבי הקשירות של יער הם עצים.

|E|=|V|-1 אם $G=\langle V,E
angle$ אם 5.12 משפט

: יהי $G=\langle V,E
angle$ יהי משפט האפיון (משפט מרכזי בקורס): יהי משפט 6.12 משפט

- .עץG .1
- |E| = |V| 1 קשיר וגם G .2
- .|E| = |V| 1חסר מעגלים ו־G .3
- .4 קשיר מינימלי (כלומר אם נחסיר קשת מ־G נקבל גרף לא קשיר).
- .5 חסר מעגלים מקסימלי (כלומר כל קשת חדשה שנוסיף ל־G תסגור מעגל כלשהו).
 - .6. בין כל שני קודקודים $v_1,v_2\in V$ קיים מסלול פשוט יחיד.

עץ. $G=\langle V,E' \rangle=T$ יהי ער, גרף של פורש של $G=\langle V,E' \rangle$ איל ער, גרף איז $G=\langle V,E' \rangle$ יהי 7.12 יהי

משפט 8.12 לכל גרף קשיר קיים עץ פורש.

12.1 קידוד פרופר

הגדרה 9.12 קידוד פרופר: ישנה התאמה חח"ע ועל בין קבוצת הקודקודים $\{1,\dots,n\}$ לבין מחרוזות באורך n-2 מעל א"ב $\{1,\dots,n\}$. ההתאמה לוקחת עץ, ומקודדת אותו כמחרוזת. הקידוד מוגדר באופן הבא:

טענה 10.12 עבור כל קודקוד, מספר המופעים במחרוזת שווה לדרגת הקודקוד פחות אחד.

בכל שלב מבצעים את הפעולות הבאות כל עוד מספר הקודקודים גדול מ־2.

- 1. בודקים מהי קבוצת העלים.
- .xב בוחרים את העלה בעל הערך המספרי המינימלי. נסמנו ב-.x
- x מוסיפים את הקודקוד היחיד אליו x מחובר למחרוזת. נסמנו ב-y נקרא האב של x נקרא ילד של y נקרא ילד של x

 $\{x,y\}$ נמחק את x ואת הקשת היחידה 4

הגדרה 11.12 קידוד פרופר ההפוך: בהנתן מחרוזת הקידוד ההפוך משחזר את העץ. הקידוד ההפוך מתבצע באופן הבא:

- . אורך המחרוזת הינו n-2 ולכן מספר הקודקודים בגרף הינו אורך המחרוזת ועוד שתיים. 1
 - 2. אנו בונים את העץ מעלים לכיוון השורש, בכל שלב נבצע את הפעולות הבאות:
 - (א) נמצא את קבוצת העלים ע"י איתור של כל התווים שלא מופיעים במחרוזת.
 - (ב) את העלה בעל הערך הקטן ביותר, נחבר לתו השמאלי ביותר במחרוזת.
- (ג) נמחק את העלה שחובר מרשימת העלים, ונמחק את התו השמאלי ביותר מהמחרוזת.
 - n את העלה האחרון מחברים לקודקוד (ד)

13 איזומורפיזם

יהיו גרפים של גרפים איזומורפיזם $f:V_1 o V_2$ פונקציה $G_2 = \langle V_2, E_2
angle$, $G_1 = \langle V_1, E_1
angle$ יהיו

- .1 חח"ע ועל.
- $\forall v, u \in V_1. \{v, u\} \in E_1 \iff \{f(v), f(u)\} \in E_2$.2

 $(f:V_1 o V_2$ י"ע) $G_1\simeq G_2$ אם 1.13 משפט

- $|V_1| = |V_2| \wedge |E_1| = |E_2|$.1
 - $d_{G_{1}}(v) = d_{G_{2}}(f(v))$.2
- G_2 אותו הדבר ב- $\langle f\left(v_1
 ight),\ldots,f\left(v_n
 ight)
 angle$ אז הדבר ב- $\langle v_1,\ldots,v_n
 angle$ אותו הדבר ב-3.
 - . מספר רכיבי הקשירות ב־ G_1 ו־ G_2 זהה.
 - .אץ $G_2 \iff$ עץ G_1 .5

 $Graph\left(\{1,\ldots,n\}
ight)=$ אם נקבע את הקודקודים להיות $\{1,\ldots,n\}$, אז על קבוצת הגרפים הקודקודים להיות אם נקבע את הקודקודים להיות \simeq הוא יחס שקילות.

.הגדרה 2.13 אה גרף לא מסומן, כלומר גרף בלי שמות לקודקודים $[G]_{\sim}$

14 נוסחאות

נוסחת לחיצות הידיים: לכל גרף $G = \langle V, E \rangle$ מתקיים:

$$2\left|E\right| = \sum_{v \in V} d\left(v\right)$$

|E| < |V| אזי (G^- אזי אף מעגל ב משפט 1.14 גרף חסר מעגלים אזי $G = \langle V, E
angle$ יהי

מסקנה 2.14 אם $|V| \leq |E|$ אז ב־C יש מעגל. מספר העצים על $\{1,\dots,n\}$ הוא