

# סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 1

מיכאל פרבר ברודסקי

## תוכן עניינים

	I	מונאידים, חבורות, חוגים ושדות	2
1	הגדרות	.....	2
1.1	תכונות של פעולות	.....	2
1.2	מונאיד	.....	2
1.3	חבורה	.....	2
1.4	חוג	.....	2
1.5	שדה	.....	3

## חלק I

## מונואידים, חבורות, חוגים ושדות

## 1 הגדרות

## 1.1 תכונות של פעולות

תהא  $*$  פעולה בינארית על  $A$  (כלומר ה־domain הוא  $A \times A$ ).

1.  $*$  אסוציאטיבית:  $\forall a, b, c \in A. (a * b) * c = a * (b * c)$ .

2.  $*$  חילופית:  $\forall a, b. a * b = b * a$ .

3. קבוצה  $A$  סגורה לפעולה  $*$ :  $*$  :  $A \times A \rightarrow A$ .

## 1.2 מונואיד

מונואיד הוא זוג  $\langle G, * \rangle$  כאשר  $G$  קבוצה כלשהי ו־ $*$  פעולה בינארית על  $G$ , כך ש:

1.  $G$  סגורה לפעולה  $*$ .

2.  $*$  פעולה אסוציאטיבית.

3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר  $\exists e \in G. \forall g \in G. e * g = g * e = g$ . האיבר הזה יחיד ומסומן  $e_G$ .

## 1.3 חבורה

מקרה פרטי של מונואיד שמקיימת גם:

4. קיים איבר הופכי, כלומר  $\forall g \in G. \exists h \in G. g * h = h * g = e$  כאשר  $e$  איבר יחידה. האיבר ההופכי של  $g$  מסומן  $g^{-1}$ .

## 1.4 חוג

שלשה  $\langle R, +, * \rangle$  נקראת חוג אם:

1.  $\langle R, + \rangle$  חבורה חילופית, כלומר  $\forall a, b \in R. a + b = b + a$ .

2.  $*$  היא פעולה בינארית על  $R$  ו־ $R$  סגורה לפעולה  $*$ .

3. חוק הפילוג:

$$\forall a, b, c \in R. a * (b + c) = a * b + a * c \\ (b + c) * a = b * a + c * a$$

חוג חילופי - אם  $*$  פעולה חילופית (כלומר  $a * b = b * a$ ).

חוג עם יחידה - אם  $\langle R, * \rangle$  מונואיד.

סימונים:  $0_R$  ניטרלי לחיבור,  $1_R$  ניטרלי לכפל אם קיים.

מחלק 0 - איבר  $a \in R, a \neq 0_R$  נקרא "מחלק 0" אם יש  $b \neq 0_R$  כך ש־ $a * b = 0_R$ . בממשיים אין מחלק 0.

חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0 נקרא תחום שלמות. הוא מקיים את חוק הצמצום (לכל  $a, b, c \in R$ , אם  $a * b = c * b$  אז  $a = c$ )

**1.5 שדה**

$\langle F, +, * \rangle$  מקרה פרטי של חוג שמקיים גם:

1.  $\langle F \setminus \{0_F\}, * \rangle$  חבורה חילופית.

כל שדה הוא תחום שלמות, אבל ההפך אינו נכון. תחומי שלמות סופיים הם כן שדות.