

# סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 1

מיכאל פרבר ברודסקי

## תוכן עניינים

<b>2</b>	<b>I מונואידים, חבורות, חוגים ושדות</b>	
2	הגדרות	1
2	תכונות של פעולות	1.1
2	מונואיד	1.2
2	חבורה	1.3
2	חוג	1.4
3	שדה	1.5
<b>3</b>	<b>II מרוכבים</b>	
3	הגדרות בסיסיות	2
3	הצגה פולארית	3

## חלק I

## מונואידים, חבורות, חוגים ושדות

## 1 הגדרות

## 1.1 תכונות של פעולות

תהא  $*$  פעולה בינארית על  $A$  (כלומר ה־ $\text{domain}$  הוא  $A \times A$ ).

1.  $*$  אסוציאטיבית:  $\forall a, b, c \in A. (a * b) * c = a * (b * c)$ .

2.  $*$  חילופית:  $\forall a, b. a * b = b * a$ .

3. קבוצה  $A$  סגורה לפעולה  $*$ :  $*$  :  $A \times A \rightarrow A$ .

## 1.2 מונואיד

מונואיד הוא זוג  $\langle G, * \rangle$  כאשר  $G$  קבוצה כלשהי ו־ $*$  פעולה בינארית על  $G$ , כך ש:

1.  $G$  סגורה לפעולה  $*$ .

2.  $*$  פעולה אסוציאטיבית.

3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר  $\exists e \in G. \forall g \in G. e * g = g * e = g$ . האיבר הזה יחיד ומסומן  $e_G$ .

## 1.3 חבורה

מקרה פרטי של מונואיד שמקיימת גם:

4. קיים איבר הופכי, כלומר  $\forall g \in G. \exists h \in G. g * h = h * g = e$  כאשר  $e$  איבר יחידה. האיבר ההופכי של  $g$  מסומן  $g^{-1}$ .

## 1.4 חוג

שלשה  $\langle R, +, * \rangle$  נקראת חוג אם:

1.  $\langle R, + \rangle$  חבורה חילופית, כלומר  $\forall a, b \in R. a + b = b + a$ .

2.  $*$  היא פעולה בינארית על  $R$  ו־ $R$  סגורה לפעולה  $*$ .

3. חוק הפילוג:

$$\forall a, b, c \in R. a * (b + c) = a * b + a * c \\ (b + c) * a = b * a + c * a$$

חוג חילופי - אם  $*$  פעולה חילופית (כלומר  $a * b = b * a$ ).

חוג עם יחידה - אם  $\langle R, * \rangle$  מונואיד.

סימונים:  $0_R$  ניטרלי לחיבור,  $1_R$  ניטרלי לכפל אם קיים.

מחלק 0 - איבר  $a \in R, a \neq 0_R$  נקרא "מחלק 0" אם יש  $b \neq 0_R$  כך ש־ $a * b = 0_R$ . בממשיים אין מחלק 0.

חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0 נקרא תחום שלמות. הוא מקיים את חוק הצמצום (לכל  $a, b, c \in R$ , אם  $a * b = c * b$  אז  $a = c$ )

## 1.5 שדה

$\langle F, +, * \rangle$  מקרה פרטי של חוג שמקיים גם:

1.  $\langle F \setminus \{0_F\}, * \rangle$  חבורה חילופית.

כל שדה הוא תחום שלמות, אבל ההפך אינו נכון. תחומי שלמות סופיים הם כן שדות. הרבה פעמים בהגדרת שדה מוסיפים את הדרישה  $0_F \neq 1_F$ .

## חלק II

## מרוכבים

## 2 הגדרות בסיסיות

נסמן  $i = \sqrt{-1}$ . ההגדרה הפורמלית של מרוכבים היא:  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , כאשר המספר הראשון הוא החלק הממשי (שמסומן  $Re(c)$ ) והמספר השני הוא החלק הדמיוני (שמסומן  $Im(c)$ ).  
עובדות: עבור  $z \in \mathbb{C}$ ,

1. הגודל של  $z$ :  $||z|| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$ . כלומר המרחק של  $z$  מראשית הצירים.

2. זהות אוילר:  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ , לכן  $z = ||z|| e^{i \cdot \arg(z)}$ .

3. חיבור: מחברים את החלק הממשי והדמיוני בנפרד.

4. כפל:  $(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + da)$ . משתמשים בזה ש- $i^2 = -1$ .

5. כל שורש של פולינום מרוכב הוא מרוכב.

6. נגדיר  $\bar{z}$  להיות  $\bar{z} = a - ib$ . כלומר להפוך את החלק הדמיוני.

$$\bar{\bar{z}} = z \quad (\text{א})$$

$$z \cdot \bar{z} = ||z||^2 \quad (\text{ב})$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad (\text{ג})$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad (\text{ד})$$

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (\text{ה})$$

7.  $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$  שדה סגור אלגברית (כלומר כל שורש של כל פולינום מרוכב הוא מרוכב).

8. איבר הופכי:  $w = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$  (אם מכפילים בהופכי מקבלים 1).

## 3 הצגה פולארית

נגדיר מרוכב בתור זוג  $\langle r, \theta \rangle$  כאשר  $r$  המרחק מראשית הצירים ו- $\theta$  הזווית שהוא יוצר, שנקראת הארגומנט.

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r \cdot e^{i\theta}$$

עובדות:

1. הארגומנט של  $z$ : נסמן  $\arg(z)$  להיות הזווית שהמספר יוצר עם ציר הממשיים (לרוב נסמן כ- $\theta$ ). ניתן לחשב אותו בעזרת  $\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$  ברוב המקרים.

$$2. \quad \bar{z} = r \cdot e^{-i\theta}, z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

$$3. \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

4. להכפיל מספרים מרוכבים על הגרף נראה כמו להכפיל את האורכים זה בזה ולחבר את הזוויות.

**פתרון משוואה**  $z^n = a + ib$ . נמצא הצגה פולארית  $z^n = r e^{i\theta}$ . נשתמש בעובדה ש-  $e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2\pi k)}$  עבור  $k \in \mathbb{Z}$ . אזי:

$$z = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi \frac{k}{n}\right)}$$

עבור  $k \in \mathbb{Z}$ . ולכל  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  נקבל פתרונות שונים.