סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

1 דברים חשובים מלינארית 1

1.1 מטריצות דומות

יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, נאמר כי A ו־B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש־$A = P^{-1} \cdot B \cdot P$.
משפט: נתון $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ריבועיות, הבאים שקולים:

1. A, B דומות.
2. קיימת $T : V \to V$ ובסיסים C, C' של V כך ש־$[T]_C = A, [T]_{C'} = B$.
3. לכל $T : V \to V$, אם קיים בסיס C של V כך ש־$[T]_C = A$, אז קיים בסיס C' של V כך ש־$[T]_{C'} = B$.

ואם A, B דומות אז:

1. $\mathrm{Rank}(A) = \mathrm{Rank}(B), \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$.
2. $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ כאשר $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} (A)_{i,i}$.
3. $\det(A) = \det(B)$.

2 לכסון

2.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.2 מטריצה אלכסונית: מטריצה ריבועית $A \in M_n(\mathbb{F})$ שבה עבור $i \neq j$, $A_{i,j} = 0$. נגדיר את $Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ להיות המטריצה שיש לה $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ על האלכסון.

הגדרה 2.2 מטריצה לכסינה: מטריצה ריבועית $A \in M_n(\mathbb{F})$ שדומה למטריצה אלכסונית. המטרה של מטריצות לכסינות היא שקל להעלות אותן בחזקה. עבור D מטריצה אלכסונית, קיימת P כך ש:

$$A = PDP^{-1}$$
$$A^n = \overbrace{PDP^{-1} \cdot \dots \cdot PDP^{-1}}^{n \text{ times}} = PD^nP^{-1}$$

הגדרה 3.2 העתקה לכסינה: העתקה לינארית $T : V \to V$ כך שקיים בסיס B של V כך ש־$[T]_B^B$ אלכסונית.
בנוסף, אם T העתקה לכסינה אז כל מטריצה מייצגת שלה לפי בסיס C, $[T]_C^C$, היא לכסינה.

2.1.1 ערך עצמי

הגדרה 4.2 וקטור עצמי של T לערך עצמי λ: $\overline{v}$ כך ש־$T(\overline{v}) = \lambda \overline{v}$.

הגדרה 5.2 ערך עצמי של A לערך עצמי λ: $\overline{v}$ כך ש־$A\overline{v} = \lambda \overline{v}$.

הגדרה 6.2 ערך עצמי של T: λ כך שקיים וקטור עצמי $\underline{\overline{v} \neq 0}$ של T לערך עצמי λ.

2.1.2 וקטורים עצמיים

הגדרה 7.2 מרחבים עצמיים: תהא $T : V \to V$ ה"ל, ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$. נגדיר $V_\lambda = \{\overline{v} \in V \mid T(\overline{v}) = \lambda \overline{v}\}$, כלומר קבוצת הוקטורים עם ערך עצמי λ.
λ ערך עצמי של T $\iff$ $V_\lambda \neq \{0_V\}$. בנוסף V_λ תמ"ו. ניתן גם להגדיר כך: $V_\lambda = \mathrm{Sols}(A - \lambda I) / \ker(T - \lambda \cdot Id)$.

הגדרה 8.2 פולינום אופייני: תהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, נסמן ב־$P_A(\lambda) = |A - \lambda I|$ את הפולינום האופייני של A.
טענות:

1. $P_A(\lambda)\in\mathbb{F}[\lambda]$. הוכחה:

$$P_A(\lambda)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sign}(\sigma)\cdot\prod_{i=1}^{n}\overbrace{(A-\lambda I)_{i,\sigma(i)}}^{polynomial\,in\,\mathbb{F}[\lambda]}$$

2. המקדם המוביל ב־$P_A(\lambda)$ הוא $(-1)^n$.
3. λ ערך עצמי של $A \iff \ker(T-\lambda Id)=V_\lambda\neq\{\bar{0}\} \iff \det(T-\lambda Id)=0$.
4. λ ערך עצמי של $A \iff \lambda$ שורש של $P_A(\lambda)$.
5. אם A,B דומות אז $P_A=P_B$. הוכחה:

$$\begin{aligned}P_A(\lambda)&=|A-\lambda I|=\left|PBP^{-1}-\lambda I\right|=\left|PBP^{-1}-P\lambda IP^{-1}\right|=\left|P(B-\lambda I)P^{-1}\right|\\&=|P|\,|B-\lambda I|\left|P^{-1}\right|=|B-\lambda I|=P_B(\lambda)\end{aligned}$$

6. נגדיר $P_T(\lambda)=P_{[T]_B}(\lambda)$ ־ זה לא משנה איזה B בחרנו.

הגדרה 9.2 ריבוי גיאומטרי של λ**:** נסמן ב־$\mu_\lambda^A=\mu_\lambda^T=\mu_\lambda=\dim(V_\lambda)$.

הגדרה 10.2 ריבוי אלגברי של λ**:** מסומן ρ_λ (רו), הוא הריבוי של λ בפולינום האופייני $P_A(\lambda)$, כלומר כמה פעמים הוא מופיע בפולינום.

טענות:

1. אם A מטריצה בעלת ערכים עצמיים $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ עם ריבויים אלגבריים $\rho_{\lambda_1},\ldots,\rho_{\lambda_k}$ אז $\rho_{\lambda_1}+\cdots+\rho_{\lambda_k}\leq n$.
2. אם $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים אז $\rho_{\lambda_1}+\cdots+\rho_{\lambda_k}=n$.
3. לכל ערך עצמי λ, $\mu_\lambda\leq P_\lambda$.

2.2 משפטים

1. A לכסינה $\iff$ קיים בסיס $B\subseteq\mathbb{F}^n$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A.
2. אם T לכסינה (או A לכסינה) אז על האלכסון של הצורה האלכסונית מופיעים הערכים העצמיים של T (או A). זה יחיד עד כדי הסידור של האלכסון.
3. תהא A/T עם ערכים עצמיים $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. אז הסכום $V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_n}$ הוא סכום ישר.
   לכן אם $A\in M_n(\mathbb{F})$ בעלת n ערכים עצמיים שונים, אז A לכסינה. ההפך לא בהכרח נכון.

המשפט המרכזי: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי: A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ $\iff$

1. $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינארים מעל $\mathbb{F}$.
2. לכל ע"ע λ של A, $\rho_\lambda=\mu_\lambda$.