סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

1 דברים חשובים מלינארית 1

1.1 מטריצות דומות

יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{F})$, נאמר כי A ו־B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש־$A=P^{-1}\cdot B\cdot P$.

משפט: נתון $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ ריבועיות, הבאים שקולים:

1. A,B דומות.
2. קיימת $T:V\to V$ ובסיסים C,C' של V כך ש־$[T]_C=A,[T]_{C'}=B$.
3. לכל $T:V\to V$, אם קיים בסיס C של V כך ש־$[T]_C=A$, אז קיים בסיס C' של V כך ש־$[T]_{C'}=B$.

ואם A,B דומות אז:

1. $\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}(B)\,,\mathrm{Rank}(A)=\mathrm{Rank}(B)$.
2. $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$ כאשר $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}(A)_{i,i}$.
3. $\det(A)=\det(B)$.

2 לכסון

נגדיר <u>מטריצה אלכסונית</u> להיות מטריצה ריבועית $A\in M_n(\mathbb{F})$ שבה עבור $i\neq j$, $A_{i,j}=0$. נסמן אותן בתור $\mathrm{Diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.

<u>מטריצה לכסינה</u> היא מטריצה שדומה למטריצה אלכסונית, ו<u>העתקה לכסינה</u> היא העתקה לינארית כך שקיים בסיס B כך ש־$[T]_B^B$ אלכסונית.

אם T העתקה לכסינה (כלומר מטריצה מייצגת כלשהי לכסינה) אז כל מטריצה מייצגת שלה היא לכסינה.

2.1 וקטורים עצמיים

נגדיר <u>וקטור עצמי של A לערך עצמי λ</u> להיות $\bar{v}$ כך ש־$A\bar{v}=\lambda\bar{v}$. באופן הפוך, <u>ערך עצמי של A</u> הוא λ כך שקיים וקטור עצמי <u>$\bar{v}\neq\bar{0}$</u> של A לערך עצמי λ.

הערכים העצמיים הם האיברים שנמצאים על האלכסון במטריצה האלכסונית שדומה ל־A, עד כדי סידורם על האלכסון.

המרחב של הוקטורים העצמיים הוא $V_\lambda=\{\bar{v}\in V\mid A\bar{v}=\lambda\bar{v}\}$, שזה שווה בעצם ל־$\mathrm{Sols}(A-\lambda I)$. זה תמ"ו של V.

הסכום של ה־V_λ השונים הוא סכום ישר.

משפט 1.2 A לכסינה $\iff$ קיים בסיס $B\subseteq\mathbb{F}^n$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A.

3 פולינום אופייני

נסמן ב־$P_A(\lambda)=|\lambda I-A|$ את <u>הפולינום האופייני של A</u>. מתקיים:

- זה פולינום מתוקן, כלומר המקדם המוביל הוא 1.

- λ ערך עצמי של A $\iff$ λ שורש של $P_A(\lambda)$.
- אם A, B דומות אז $P_A = P_B$.
- עבור מטריצת בלוקים אלכסונית $A = \mathrm{Diag}(A_1, \dots, A_n)$, $P_A = P_{A_1} \cdot \dots \cdot P_{A_n}$.

משפט 1.3 המשפט המרכזי: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$.
נגדיר את הריבוי האלגברי של α, ρ_α (רו), להיות כמות הפעמים ש־$(\lambda - \alpha)$ מופיע בפולינום $P_A(\lambda)$. כלומר אם הפולינום הוא $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$ אז $\rho_1 = 1, \rho_3 = 2$.

בנוסף נגדיר את הריבוי הגיאומטרי של α, μ_λ, להיות $\dim(V_\lambda)$.
A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אמ"ם:

1. $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$.
2. לכל ערך עצמי λ של A, $\rho_\lambda = \mu_\lambda$.

משפט 2.3 לכל ערך עצמי λ, $\mu_\lambda \leq \rho_\lambda$.

משפט 3.3 עבור $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ הערכים העצמיים, $\rho_{\lambda_1} + \dots + \rho_{\lambda_k} \leq n$, ואם $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים אז גם $\rho_{\lambda_1} + \dots + \rho_{\lambda_k} = n$.

4 אינווריאנטיות

תהא $T : V \to V$ העתקה לינארית, תת מרחב $U \subseteq V$ נקרא T־אינווריאנטי (T־שמור) אם $T[U] \subseteq U$, או באופן שקול אם T מצומצם ל־U ט"ל.

דוגמאות למרחבים T־אינווריאנטים הן $\ker(T), Im(T)$ ו־V_λ לכל λ.

בנוסף נגדיר תת מרחב $U \subseteq V$ אי פריק להיות תת מרחב T־אינווריאנטי כך שלא קיימים $W_1, W_2 \neq \{\bar{0}\}$ T־אינווריאנטים שמקיימים $U = W_1 \oplus W_2$.

מטריצה מייצגת: אם $U \subseteq V$ T־אינווריאנטי, יהי B בסיס של U. יהי C השלמה לבסיס של V. אז $[T]_{B \frown C} = \left(\begin{array}{c|c} [T\lceil_U]_B & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$. זה כי המקדמים שלמטה לא מופיעים ב־U ולכן גם לא בתמונה של U (כי היא מוכלת ב־U).
ואם $V = U_1 \oplus U_2$ כאשר U_1, U_2 T־אינווריאנטיים אז $[T]_{B_1 \frown B_2} = \left(\begin{array}{c|c} [T\lceil_U]_{B_1} & 0 \\ \hline 0 & [T\lceil_U]_{B_2} \end{array}\right)$.
אזי הפולינום $P_{T\lceil_U}$ מחלק את P_T, ואם $V = U_1 \oplus U_2$ עבור U_1, U_2 T־אינווריאנטיים אז $P_T = P_{T\lceil_{U_1}} \cdot P_{T\lceil_{U_2}}$.
בנוסף באופן מוכלל אם $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ כאשר כל V_i הוא T־אינווריאנטי אז יהי הבסיס $B = \bigvee_{i=1}^{n} B_i$, מתקיים $[T]_B = \mathrm{Diag}\left([T\lceil_{V_1}]_{B_1}, \dots, [T\lceil_{V_n}]_{B_n}\right)$, ו־$P_T = \prod_{i=1}^{n} P_{T\lceil_{U_i}}$.

5 מרחב מנה

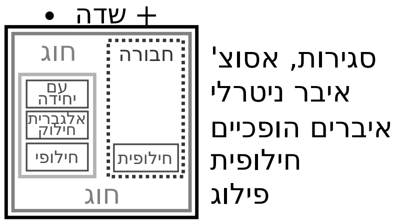
נגדיר את יחס השקילות הבא: $v \sim u \iff v - u \in W$ עבור $u, v \in V$ ו־W כלשהו.

את קבוצת המנה, V/W, שהיא הקבוצה של $[v] = \{u \in V \mid u \sim v\}$ לכל v, ניתן בעצם להגדיר לפי פעולת חיבור $[v] + [u] = [v + u]$ וכפל בסקלר $\lambda \cdot [v] = [\lambda \cdot v]$.

זה יוצא מרחב וקטורי, שמקיים גם $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$.

6 חוגים

6.1 הגדרות מלינארית 1



6.1.1 חבורה

$\langle G,*\rangle$ נקראת חבורה אם:

1. G סגורה לפעולה $*$.
2. $*$ פעולה אסוצייטיבית.
3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר $\exists e\in G.\forall g\in G.e*g=g*e=g$. האיבר הזה יחיד ומסומן e_G.
4. קיים איבר הופכי, כלומר $\forall g\in G.\exists h\in G.g*h=h*g=e$ כאשר e איבר יחידה. האיבר ההופכי של g מסומן g^{-1}.

6.1.2 חוג

$\langle R,*,+\rangle$ נקראת חוג אם:

1. $\langle R,+\rangle$ חבורה חילופית.
2. $*$ פעולה אסוצייטיבית על R.
3. מתקיים חוג הפילוג:

$$\forall a,b,c\in R.a*(b+c)=a*b+a*c$$
$$(b+c)*a=b*a+c*a$$

בנוסף יש חוג חילופי, (הכפל חילופי), חוג עם יחידה (קיים איבר ניטרלי לכפל), ותחום שלמות הוא חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0.

6.1.3 שדה

חוג חילופי עם יחידה כך ש־$\langle R\setminus\{0\},*\rangle$ חבורה חילופית. שדה הוא תחום שלמות, ותחום שלמות סופי הוא שדה.

6.2 הגדרות חדשות מלינארית 2

6.2.1 חוגי הפולינומים, המטריצות והעתקות

נגדיר את חוג הפולינומים מעל חוג R להיות $R[x] \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. נגדיר בנוסף $\deg(0) = \infty, \deg(p) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \neq 0\}$.

- מתקיימת נוסחת המעלות: $\deg(p+q) \leq \max(\deg(p), \deg(q)), \deg(p \cdot q) \leq \deg(p) + \deg(q)$.
  אם R תחום שלמות אז $\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$.
- אם R תחום שלמות אז $R[x]$ תחום ראשי.
- **חילוק בחוג הפולינומים:** יהי R חוג חילופי, ו־$f, g \in R[x]$ פולינומים כך שהמקדם המוביל של g הפיך ב־R. אז קיימים ויחידים $q, r \in R[x]$ כך ש־$f = q \cdot g + r$.
- ב־$R[x]$ ההפיכים היחידים הם הפולינומים הקבועים של ההפיכים מ־R.

נגדיר את חוג המטריצות הריבועיות להיות $M_n(R)$ כאשר R חוג, לפי פעולות כפל וחיבור של מטריצות. זה חוג לא חילופי.

נגדיר את חוג ההעתקות ממרחב לעצמו להיות $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$ יחד עם הרכבה ועם חיבור פונקציות. זה חוג לא חילופי עם יחידה Id_V.

השילובים הנפוצים הם $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)[x], M_n(R)[x], M_n(R[x])$.

משפט: כל פולינום בשדה ניתן לכתוב בתור מכפלה של אי־פריקים. תהא $\{q_i \mid i \in I\}$ קבוצת כל הפולינומים הא"פ המתוקנים מעל $\mathbb{F}[x]$ באשר $\mathbb{F}$ שדה. כל פולינום $0 \neq p \in \mathbb{F}[x]$ ניתן לרשום באופן יחיד $p = c \cdot \prod_{i \in I} q_i^{n_i}$ באשר $c \in \mathbb{F}^x = \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

6.2.2 הומומורפיזמים

הומומורפיזם של חוגים זו פונקציה $\varphi : R_1 \to R_2$ כך ש־$\varphi(1_{R_1}) = 1_{R_2}$, ו־$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ ו־$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ (ולכן גם $\varphi(0_{R_1}) = 0_{R_2}$).

יש למשל הומומורפיזם בין $M_n(R)[x]$ לבין $M_n(R[x])$.

6.2.3 חילוק בחוגים

יהי R חוג. יהיו $a, b \in R$, נאמר כי $a \mid b$ אם $\exists c \in R. b = a \cdot c$.

בנוסף נקרא ל־$a \in R$ הפיך ב־R אם קיים $b \in R$ כך ש־$a \cdot b = 1 = b \cdot a$. בנוסף ההופכי יסומן $b = a^{-1}$ והוא יחיד.

ונסמן את קבוצת האיברים ההפיכים ב־R בסימון R^x. לדוגמה ב־$\mathbb{Z}$ האיברים ההפיכים היחידים הם ± 1.

טענה: בתחום שלמות, אם $a = bu$ ו־$b = av$ אז u, v הפיכים, ובפרט $u \cdot v = 1$ (כלומר $u = v^{-1}$).

6.2.4 חברים

נאמר ש־a, b חברים אם קיים $u \in R^x$ כך ש־$a = ub$. זה יחס שקילות.

6.3 אידאלים

יהי R חוג חילופי עם יחידה, $I\subseteq R$ נקרא אידאל אם:

1. $I\neq\emptyset$.
2. I סגור לחיבור.
3. I סגור לכפל באיבר מ־R.

או באופן שקול I תת מרחב וקטורי של מרחב ה־nיות R^1. דוגמה לאידאל היא $\mathbb{Z}_{even}$.
האידאל שנוצר ע"י $X\subseteq R$ הוא $\mathrm{sp}\left(X\right)$ ־ והוא תמיד אידאל כי זה מרחב וקטורי ב־R^1.
אידאל ראשי הוא אידאל של איבר אחד ־ $\mathrm{sp}\left(a\right)=\left\{ ab\mid b\in R\right\}$.
מתקיים:

- $a\mid b\iff\mathrm{sp}\left(b\right)\subseteq\mathrm{sp}\left(a\right)$
- $a,b\iff\mathrm{sp}\left(a\right)=\mathrm{sp}\left(b\right)$ חברים.
- a הפיך $\iff\mathrm{sp}\left(a\right)=R$, בפרט $\mathrm{sp}\left(1\right)=R$.
- $I\subseteq R$
- אידאל $\iff$ קיים הומומורפיזם $\varphi:R\to S$ (S חוג) כך ש־$\ker\varphi=I$.

6.3.1 אידאל מאפס

האידאל המאפס של מטריצה $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ הוא האידאל הבא: $Z\left(A\right)=\left\{ p\in\mathbb{F}\left[x\right]\mid p\left(A\right)=0\right\}$.
זה אידאל כי $\ker\left(\varphi_{A}\right)=Z\left(A\right)$ כאשר $\varphi_{A}:\mathbb{F}\left[x\right]\to M_{n}\left(A\right)$ העתקת ההצבה. לכל A,

- $Z\left(A\right)\neq\left\{ 0\right\}$.
- הפולינום האופייני תמיד ב־$Z\left(A\right)$.

נסמן את הפולינום המינימלי של A ב־$m_{A}\in\mathbb{F}\left[x\right]$, להיות הפולינום המתוקן היחידי כך ש־$Z\left(A\right)=\mathrm{sp}\left(m_{A}\right)$.
מתקיים:

- $m_{A}\left(A\right)=0$.
- $m_{A}\mid P_{A}$ הפולינום האופייני.
- לכל $q\in\mathbb{F}\left[x\right]$ א"פ, $q\mid m_{T}\iff q\mid P_{T}$.

לכן אם $P_{T}=\prod_{i\in I}q_{i}^{m_{i}}$ (q_{i} אי פריקים) אז $m_{T}=\prod_{i\in I}q_{i}^{r_{i}}$ כאשר $1\leq m_{i}\implies1\leq r_{i}\leq m_{i}$.

6.4 תחום שלמות

תחום שלמות הוא חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0.
בחוג חילופי עם יחידה (לא דרוש שאין מחלקי 0) מתקיים:

- $0\neq a\in R$ יקרא ראשוני $\iff\left(a\mid b\cdot c\implies\left(a\mid c\vee a\mid b\right)\right)$
- $a\in R$ יקרא אי־פריק $\iff\left(a=b\cdot c\implies b\in R^{x}\vee c\in R^{x}\right)$

בתחום שלמות מתקיים:

- אם $a\in R$ ראשוני אז a אי־פריק.

6.5 תחום ראשי

תחום שלמות R נקרא <u>תחום ראשי</u> אם כל אידאל $I \subseteq R$ נוצר על ידי איבר, כלומר קיים לו $a \in R$ כך ש־$I = \operatorname{sp}(a)$.

נגדיר לתחום ראשי R ואיברים $r_1, \ldots, r_k \in R$:

$$\gcd(r_1, \ldots, r_k) = \{d \in R \mid \operatorname{sp}(d) = \operatorname{sp}(r_1, \ldots, r_k)\}$$

בנוסף מתקיים:

- עבור d כלשהו ב־$\gcd(r_1, \ldots, r_k)$, $\gcd(r_1, \ldots, r_k) = \{d \cdot u \mid u \in R^x\}$
- $d \in \gcd(r_1, \ldots, r_k) \iff (\forall 1 \leq i \leq k . d \mid r_i) \wedge (q \mid r_1, \ldots, r_k \implies q \mid d)$
- $a, b \in R$ יקראו <u>זרים</u> אם $\gcd(a, b) = 1$ או באופן שקול 1 צירוף לינארי של a, b.
- $a \in R$ אי־פריק $\iff$ ראשוני.

נגדיר בנוסף $\operatorname{lcm}(r_1, \ldots, r_k) = \{d \in R \mid \operatorname{sp}(d) = \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{sp}(r_i)\}$, lowest common multiplier. אידאל מינימלי.

7 קבוצת הפולינומים

אם $T : V \to V$ מעל שדה $\mathbb{F}$ ו־$p \in \mathbb{F}[x]$ הגדרנו $p(T) \in \operatorname{Hom}(V, V)$.

אם $A \in M_n(\mathbb{F})$ ו־$p \in \mathbb{F}[x]$ אז $p(A)$ זו מטריצה $p(A) \in M_n(\mathbb{F})$.

הקשר בין $[T]_B$ ל־$[p(T)]_B$ הוא ש־$p([T]_B) = [p(T)]_B$.

מתקיים בנוסף:

- אם λ ערך עצמי של A אז $p(\lambda)$ ערך עצמי של $p(A)$.
- אם A, B דומות אז $p(A)$ ו־$p(B)$ דומות, ליתר דיוק, $p(QAQ^{-1}) = Qp(A)Q^{-1}$.