סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

1 דברים חשובים מלינארית 1

1.1 מטריצות דומות

יהיו $A,B\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$, נאמר כי A ו־B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש־$A=P^{-1}\cdot B\cdot P$.

משפט: נתון $A,B\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ ריבועיות, הבאים שקולים:

1. A,B דומות.
2. קיימת $T:V\to V$ ובסיסים C,C' של V כך ש־$[T]_C=A,[T]_{C'}=B$.
3. לכל $T:V\to V$, אם קיים בסיס C של V כך ש־$[T]_C=A$, אז קיים בסיס C' של V כך ש־$[T]_{C'}=B$.

ואם A,B דומות אז:

1. $\mathcal{N}\left(A\right)=\mathcal{N}\left(B\right),\mathrm{Rank}\left(A\right)=\mathrm{Rank}\left(B\right)$.
2. $\mathrm{tr}\left(A\right)=\mathrm{tr}\left(B\right)$ כאשר $\mathrm{tr}\left(A\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(A\right)_{i,i}$.
3. $\det\left(A\right)=\det\left(B\right)$.

2 לכסון

נגדיר <u>מטריצה אלכסונית</u> להיות מטריצה ריבועית $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ שבה עבור $i\neq j$, $A_{i,j}=0$. נסמן אותן בתור $\mathrm{Diag}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$.

<u>מטריצה לכסינה</u> היא מטריצה שדומה למטריצה אלכסונית, ו<u>העתקה לכסינה</u> היא העתקה לינארית כך שקיים בסיס B כך ש־$[T]_B^B$ אלכסונית.

אם T העתקה לכסינה (כלומר מטריצה מייצגת כלשהי לכסינה) אז כל מטריצה מייצגת שלה היא לכסינה.

2.1 וקטורים עצמיים

נגדיר <u>וקטור עצמי של A לערך עצמי λ</u> להיות $\bar{v}$ כך ש־$A\bar{v}=\lambda\bar{v}$. באופן הפוך, <u>ערך עצמי של A</u> הוא λ כך שקיים וקטור עצמי <u>$\bar{v}\neq\bar{0}$</u> של A לערך עצמי λ.

הערכים העצמיים הם האיברים שנמצאים על האלכסון במטריצה האלכסונית שדומה ל־A, עד כדי סידורם על האלכסון.

המרחב של הוקטורים העצמיים הוא $V_\lambda=\{\bar{v}\in V\mid A\bar{v}=\lambda\bar{v}\}$, שזה שווה בעצם ל־$\mathrm{Sols}\left(A-\lambda I\right)$. זה תמ"ו של V.

הסכום של ה־V_λ השונים הוא סכום ישר.

משפט 1.2 A לכסינה $\iff$ קיים בסיס $B\subseteq\mathbb{F}^n$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A.

3 פולינום אופייני

נסמן ב־$P_A\left(\lambda\right)=\left|\lambda I-A\right|$ את <u>הפולינום האופייני של A</u>. מתקיים:

- זה פולינום מתוקן, כלומר המקדם המוביל הוא 1.

- λ ערך עצמי של A $\iff$ λ שורש של $P_A(\lambda)$.
- אם A,B דומות אז $P_A = P_B$.
- עבור מטריצת בלוקים אלכסונית $A = \mathrm{Diag}(A_1,\dots,A_n)$, $P_A = P_{A_1}\cdot\dots\cdot P_{A_n}$.

משפט 1.3 המשפט המרכזי: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$.
נגדיר את הריבוי האלגברי של α, ρ_α (רו), להיות כמות הפעמים ש־$(\lambda-\alpha)$ מופיע בפולינום $P_A(\lambda)$. כלומר אם הפולינום הוא $P_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-3)^2$ אז $\rho_1 = 1, \rho_3 = 2$.

בנוסף נגדיר את הריבוי הגיאומטרי של α, μ_λ, להיות $\dim(V_\lambda)$.
A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אמ"ם:

1. $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$.
2. לכל ערך עצמי λ של A, $\rho_\lambda = \mu_\lambda$.

משפט 2.3 לכל ערך עצמי λ, $\mu_\lambda \le \rho_\lambda$.

משפט 3.3 עבור $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ הערכים העצמיים, $\rho_{\lambda_1}+\dots+\rho_{\lambda_k} \le n$, ואם $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים אז גם $\rho_{\lambda_1}+\dots+\rho_{\lambda_k} = n$.

4 אינווריאנטיות

תהא $T: V \to V$ העתקה לינארית, תת מרחב $U \subseteq V$ נקרא T־אינווריאנטי (T־שמור) אם $T[U] \subseteq U$, או באופן שקול אם T מצומצם ל־U ט"ל.

דוגמאות למרחבים T־אינווריאנטים הן $\ker(T), Im(T)$ ו־V_λ לכל λ.

בנוסף נגדיר תת מרחב $U \subseteq V$ אי פריק להיות תת מרחב T־אינווריאנטי כך שלא קיימים $W_1, W_2 \ne \{\bar{0}\}$ T־אינווריאנטים שמקיימים $U = W_1 \oplus W_2$.

מטריצה מייצגת: אם $U \subseteq V$ T־אינווריאנטי, יהי B בסיס של U. יהי C השלמה לבסיס של V. אז $[T]_{B\frown C} = \left(\begin{array}{c|c} [T\lceil_U]_B & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$. זה כי המקדמים שלמטה לא מופיעים ב־U ולכן גם לא בתמונה של U (כי היא מוכלת ב־U).
ואם $V = U_1 \oplus U_2$ כאשר U_1, U_2 T־אינווריאנטיים אז $[T]_{B_1\frown B_2} = \left(\begin{array}{c|c} [T\lceil_U]_{B_1} & 0 \\ \hline 0 & [T\lceil_U]_{B_2} \end{array}\right)$.
אזי הפולינום $P_{T\lceil_U}$ מחלק את P_T, ואם $V = U_1 \oplus U_2$ עבור U_1, U_2 T־אינווריאנטיים אז $P_T = P_{T\lceil_{U_1}} \cdot P_{T\lceil_{U_2}}$.
בנוסף באופן מוכלל אם $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ כאשר כל V_i הוא T־אינווריאנטי אז יהי הבסיס $B = \bigvee_{i=1}^{n} B_i$, מתקיים $[T]_B = \mathrm{Diag}\left([T\lceil_{V_1}]_{B_1},\dots,[T\lceil_{V_n}]_{B_n}\right)$, ו־$P_T = \prod_{i=1}^{n} P_{T\lceil_{U_i}}$.

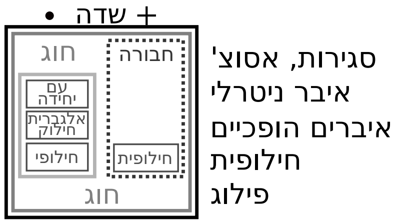
5 מרחב מנה

נגדיר את יחס השקילות הבא: $v - u \in W \iff v \sim u$ עבור $u, v \in V$ ו־W כלשהו.
את קבוצת המנה, V/W, שהיא הקבוצה של $[v] = \{u \in V \mid u \sim v\}$ לכל v, ניתן בעצם להגדיר לפי פעולת חיבור $[v]+[u] = [v+u]$ וכפל בסקלר $\lambda \cdot [v] = [\lambda \cdot v]$.

זה יוצא מרחב וקטורי, שמקיים גם $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$.

6 חוגים

6.1 הגדרות מלינארית 1



6.1.1 חבורה

$\langle G, *\rangle$ נקראת חבורה אם:

1. G סגורה לפעולה $*$.
2. $*$ פעולה אסוצייטיבית.
3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר $\exists e \in G.\forall g \in G.e * g = g * e = g$. האיבר הזה יחיד ומסומן e_G.
4. קיים איבר הופכי, כלומר $\forall g \in G.\exists h \in G.g * h = h * g = e$ כאשר e איבר יחידה. האיבר ההופכי של g מסומן g^{-1}.

6.1.2 חוג

$\langle R, *, +\rangle$ נקראת חוג אם:

1. $\langle R, +\rangle$ חבורה חילופית.
2. $*$ פעולה אסוצייטיבית על R.
3. מתקיים חוג הפילוג:

$$\forall a, b, c \in R.a * (b + c) = a * b + a * c$$
$$(b + c) * a = b * a + c * a$$

בנוסף יש <u>חוג חילופי</u>, (הכפל חילופי), <u>חוג עם יחידה</u> (קיים איבר ניטרלי לכפל), <u>ותחום שלמות</u> הוא חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0.

6.1.3 שדה

חוג חילופי עם יחידה כך ש־$\langle R \setminus \{0\}, *\rangle$ חבורה חילופית. <u>שדה הוא תחום שלמות</u>, ותחום שלמות <u>סופי</u> הוא שדה.

6.2 הגדרות חדשות מלינארית 2

6.2.1 חוגי הפולינומים, המטריצות והעתקות

נגדיר את חוג הפולינומים מעל חוג R להיות $R[x] \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. נגדיר בנוסף $\deg(0) = \infty, \deg(p) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \neq 0\}$.

- מתקיימת נוסחת המעלות: $\deg(p+q) \leq \max(\deg(p), \deg(q)), \deg(p \cdot q) \leq \deg(p) + \deg(q)$.
  אם R תחום שלמות אז $\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$.
- אם R תחום שלמות אז $R[x]$ תחום שלמות.
- **חילוק בחוג הפולינומים:** יהי R חוג חילופי, ו־$f, g \in R[x]$ פולינומים כך שהמקדם המוביל של g הפיך ב־R. אז קיימים ויחידים $q, r \in R[x]$ כך ש־$f = q \cdot g + r$.

נגדיר את חוג המטריצות הריבועיות להיות $M_n(R)$ כאשר R חוג, לפי פעולות כפל וחיבור של מטריצות. זה חוג לא חילופי.

נגדיר את חוג ההעתקות ממרחב לעצמו להיות $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,V)$ יחד עם הרכבה ועם חיבור פונקציות. זה חוג לא חילופי עם יחידה Id_V.

השילובים הנפוצים הם $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,V)[x], M_n(R)[x], M_n(R[x])$.

6.2.2 הומומורפיזמים

הומומורפיזם של חוגים זו פונקציה $\varphi : R_1 \to R_2$ כך ש־$\varphi(1_{R_1}) = 1_{R_2}$, ו־$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ ו־$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ (ולכן גם $\varphi(0_{R_1}) = 0_{R_2}$).

יש למשל הומומורפיזם בין $M_n(R)[x]$ לבין $M_n(R[x])$.

6.2.3 חילוק בחוגים

יהי R חוג. יהיו $a, b \in R$, נאמר כי $a \mid b$ אם $\exists c \in R. b = a \cdot c$.

בנוסף נקרא ל־$a \in R$ הפיך ב־R אם קיים $b \in R$ כך ש־$a \cdot b = 1 = b \cdot a$. בנוסף ההופכי יסומן $b = a^{-1}$ והוא יחיד.

ונסמן את קבוצת האיברים ההפיכים ב־R בסימון R^x. לדוגמה ב־$\mathbb{Z}$ האיברים ההפיכים היחידים הם ± 1.

טענה: בתחום שלמות, אם $a = bu$ ו־$b = av$ אז u, v הפיכים.

6.2.4 חברים

נאמר ש־a, b חברים אם קיים $u \in R^x$ כך ש־$a = ub$. זה יחס שקילות.

6.3 אידאלים

יהי R חוג חילופי עם יחידה, $I \subseteq R$ נקרא אידאל אם:

1. $I \neq \emptyset$.
2. I סגור לחיבור.
3. I סגור לכפל באיבר מ־R.

או באופן שקול I תת מרחב וקטורי של מרחב ה־nיות R^1. דוגמה לאידאל היא $\mathbb{Z}_{even}$.
האידאל שנוצר ע"י $X \subseteq R$ הוא $\mathrm{sp}\left(X\right)$ ־ והוא תמיד אידאל כי זה מרחב וקטורי ב־R^1.
מתקיים:

- $a \mid b \iff \mathrm{sp}\left(b\right) \subseteq \mathrm{sp}\left(a\right)$
- a, b חברים $\iff \mathrm{sp}\left(a\right) = \mathrm{sp}\left(b\right)$
- a הפיך $\iff \mathrm{sp}\left(a\right) = R$.
- $I \subseteq R$
- אידאל $\iff$ קיים הומומורפיזם $\varphi : R \to S$ (S חוג) כך ש־$\ker \varphi = I$.

6.3.1 אידאל מאפס

<u>האידאל המאפס של מטריצה $A \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$</u> הוא האידאל הבא: $Z\left(A\right) = \left\{p \in \mathbb{F}\left[x\right] \mid p\left(A\right) = 0\right\}$.
זה אידאל כי $\ker\left(\varphi_A\right) = Z\left(A\right)$ כאשר $\varphi_A : \mathbb{F}\left[x\right] \to M_n\left(A\right)$ העתקת ההצבה. לכל A,

- $Z\left(A\right) \neq \left\{0\right\}$.
- הפולינום האופייני תמיד ב־$Z\left(A\right)$.

נסמן את <u>הפולינום המינימלי של A</u> ב־$m_A \in \mathbb{F}\left[x\right]$, להיות הפולינום המתוקן היחידי כך ש־$\mathrm{sp}\left(m_A\right) = Z\left(A\right)$.
מתקיים:

- $m_A\left(A\right) = 0$.
- $m_A \mid P_A$ הפולינום האופייני.

6.4 תחום שלמות

תחום שלמות הוא חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0.
בחוג חילופי עם יחידה (לא דרוש שאין מחלקי 0) מתקיים:

- $0 \neq a \in R$ יקרא <u>ראשוני</u> $\iff \left(a \mid b \cdot c \implies \left(a \mid c \vee a \mid b\right)\right)$
- $a \in R$ יקרא <u>אי־פריק</u> $\iff \left(a = b \cdot c \implies b \in R^x \vee c \in R^x\right)$

בתחום שלמות מתקיים:

- אם $a \in R$ ראשוני אז a אי־פריק.

6.5 תחום ראשי

תחום שלמות R נקרא <u>תחום ראשי</u> אם כל אידאל $I \subseteq R$ נוצר על ידי איבר, כלומר קיים לו $a \in R$ כך ש־$I = \mathrm{sp}\left(a\right)$.
נגדיר לתחום ראשי R ואיברים $r_1, \ldots, r_k \in R$:

$$\gcd\left(r_1, \ldots, r_k\right) = \left\{d \in R \mid \mathrm{sp}\left(d\right) = \left(r_1, \ldots, r_k\right)\right\}$$

בנוסף מתקיים:

- עבור d כלשהו ב־$\gcd(r_1, \ldots, r_k)$, $\gcd(r_1, \ldots, r_k) = \{d \cdot u \mid u \in R^x\}$
- $d \in \gcd(r_1, \ldots, r_k) \iff (\forall 1 \leq i \leq k . d \mid r_i) \wedge (q \mid r_1, \ldots, r_k \implies q \mid d)$
- $a, b \in R$ יקראו <u>זרים</u> אם $\gcd(a, b) = 1$ או באופן שקול 1 צירוף לינארי של a, b.
- $a \in R$ אי־פריק $\iff$ ראשוני.

נגדיר בנוסף $\operatorname{lcm}(r_1, \ldots, r_k) = \{d \in R \mid \operatorname{sp}(d) = \bigcap_{i=1}^{r} r_i\}$, lowest common multiplier.

7 קבוצת הפולינומים

אם $T : V \to V$ מעל שדה $\mathbb{F}$ ו־$p \in \mathbb{F}[x]$ הגדרנו $p(T) \in \operatorname{Hom}(V, V)$.

אם $A \in M_n(\mathbb{F})$ ו־$p \in \mathbb{F}[x]$ אז $p(A)$ זו מטריצה $p(A) \in M_n(\mathbb{F})$.

הקשר בין $[T]_B$ ל־$[p(T)]_B$ הוא ש־$\underline{p([T]_B) = [p(T)]_B}$.

מתקיים בנוסף:

- אם λ ערך עצמי של A אז $p(\lambda)$ ערך עצמי של $p(A)$.
- אם A, B דומות אז $p(A)$ ו־$p(B)$ דומות, ליתר דיוק, $p(QAQ^{-1}) = Qp(A)Q^{-1}$.