

סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

2	I אלגוריתמים
2	1 לכסון
2	1.1 וקטורים עצמיים וערכים עצמיים
2	1.2 פולינום אופייני ומינימלי
3	2 זירדון
3	2.1 העלאה בחזקה
4	3 גראם-שמידט
4	3.1 הטלה
4	3.2 האלגוריתם עצמו
4	II מכפלות פנימיות ותבניות בילינאריות
4	4 מכפלה פנימית
4	4.1 הגדרות בסיסיות
4	4.2 תכונות
5	4.3 אורתוגונליות
5	4.3.1 משלים אורתוגונלי
5	4.4 נורמה
5	5 סוגים של העתקות לינאריות
5	5.1 העתקות אוניטריות
6	5.2 העתקות אורתוגונליות
6	5.3 העתקות נורמליות
6	6 תבניות בילינאריות
6	6.1 חפיפת מטריצות
6	6.2 תבניות בילינאריות סימטריות
7	6.2.1 תבנית ריבועית
7	6.3 תבניות בילינאריות אנטי-סימטריות

חלק I

אלגוריתמים

1 לכסון

העתקה לכסינה היא העתקה לינארית כך שקיים בסיס B כך ש- $[T]_B^B$ אלכסונית. אם T העתקה לכסינה, אז כל מטריצה מייצגת שלה גם לכסינה.

1.1 וקטורים עצמיים וערכים עצמיים

נגיד וקטור עצמי של A לערך עצמי λ להיות \underline{v} כך ש- $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$. באופן הפוך ערך עצמי של A הוא λ כך שקיים וקטור עצמי $\underline{v} \neq \underline{0}$ לערך עצמי λ .
 מרחב הוקטורים העצמיים לכל λ הוא $V_\lambda = \{\underline{v} \in V \mid A\underline{v} = \lambda\underline{v}\} = \text{Sols}(A - \lambda I)$. הסכום של V_λ שונים הוא סכום ישר.
משפט: A לכסינה \iff קיים בסיס $B \subseteq \mathbb{F}^n$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A .
משפט: במטריצה המלוכסנת, הערכים העצמיים הם האיברים שנמצאים על האלכסון עד כדי הסדר שלהם.

1.2 פולינום אופייני ומינימלי

נגדיר את $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ להיות הפולינום האופייני של A . מתקיים:
 • $p_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, כך ש- $a_0 = (-1)^n \det A$ ו- $a_{n-1} = -\text{tr}(A)$ (ו- $a_n = 1$).
 • λ ערך עצמי של $A \iff \lambda$ שורש של $p_A(\lambda)$ (כי זה אומר שהמטריצה אינה הפיכה עבור λ הזה כלומר יש פתרונות).
 • אם A, B דומות אז $p_A = p_B$.
 • $p_{AB}(\lambda) = p_{BA}(\lambda)$ ו- $p_A(\lambda) = p_{A^t}(\lambda)$.
 • יהיו $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ המרחבים העצמיים. הסכום ביניהם הוא סכום ישר.
 נגדיר את הריבוי האלגברי של α, ρ_α (רו), להיות כמות הפעמים ש- $(\lambda - \alpha)$ מופיע בפולינום $P_A(\lambda)$. כלומר אם הפולינום הוא $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$ אז $\rho_1 = 1, \rho_3 = 2$.
 בנוסף נגדיר את הריבוי הגיאומטרי של α, μ_α להיות $\dim(V_\lambda)$.
משפט: לכל ערך עצמי $\lambda, \mu_\lambda \leq \rho_\lambda$.
משפט: עבור $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ הערכים העצמיים, ואם $p_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים אז גם $\rho_{\lambda_1} + \dots + \rho_{\lambda_k} = n$.
המשפט המרכזי (תנאי ללכסינות): תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$. לכסינה מעל \mathbb{F} אם ורק אם:

1. $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל \mathbb{F} .
 2. לכל ערך עצמי λ של $A, \rho_\lambda = \mu_\lambda$.
- נגדיר את הפולינום המינימלי של A, m_A , להיות הפולינום המתקון היחיד כך ש- $\text{sp}(m_A)$ האידאל המאפס של A . מתקיים:

- m_A מחלק את p_A .
 - לכל $q \in \mathbb{F}[x]$ פולינום אי פריק, $q \mid p_A \iff q \mid m_A$.
 - לכן אם $p_A = \prod_{i \in I} q_i^{m_i}$ (אי פריקים) אז $m_A = \prod_{i \in I} q_i^{r_i}$ כאשר $1 \leq r_i \leq m_i$.
- משפט:** במטריצת בלוקים אלכסונית $A = \text{Diag}(A_1, \dots, A_n)$ מתקיים:

- $p_A = p_{A_1} \cdots p_{A_n}$.
- $m_A = \text{lcm}(m_{A_1}, \dots, m_{A_n})$.

2 זירדון

נגדיר **בלוק זירדון** להיות מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ואפילו (λ) , כלומר יש אלכסון של λ ומעליו אלכסון של 1.

צורת זירדון היא מטריצת בלוקים אלכסונית כך שכל הבלוקים הם בלוקי זירדון.

באופן פרקטי וחשוב:

1. חישוב הפולינום האופייני. נסמן את הערכים העצמיים ב- $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ואת הריבויים האלגבריים שלהם ב- $\rho_{\lambda_1}, \dots, \rho_{\lambda_k}$.

2. לכל λ_i :

(א) נחשב את $\ker(A - \lambda_i I), \dots, \ker(A - \lambda_i I)^{\rho_{\lambda_i}}$ עד שהמימד של זה מפסיק להשתנות (לא כולל). נסמן את המקום שבו המימד מפסיק להשתנות ב- j^- . זה גם הריבוי בפולינום המינימלי.

(ב) מ- j^- עד ל-1:

i. נשלים את $\ker(A - \lambda_i I)^{j-1}$ לבסיס של $\ker(A - \lambda_i I)^j$.

ii. יהי v שהוסף בהשלמה. נוסיף לבסיס את $(A - \lambda_i I)^j v, \dots, (A - \lambda_i I)^1 v, v$. נספור שצריך איבר אחד פחות מאלה (כלומר ניקח איבר אחד פחות מההשלמות של החזקות הקודמות).

3. אפשר להשתמש בבסיס שקיבלנו ישירות או לשים $P = (B_1 \dots B_n)$ ואז $J = P^{-1}AP$ (כי $P = [Id]_E^B$) ואכן $[A]_B^B = [Id]_B^E \cdot [A]_E^E \cdot [Id]_E^B$.

משפט:

- צורת זירדון יחידה עד כדי הסידור של בלוקי הזירדון.
- μ_λ הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי כלשהו הוא מספר הבלוקים שלו.
- ρ_λ הריבוי האלגברי באופייני הוא סכום הגדלים של הבלוקים.
- הריבוי האלגברי במינימלי הוא המקסימום של הגדלים של הבלוקים.

2.1 העלאה בחזקה

$$\begin{pmatrix} x & 1 & & \\ & x & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x^n & \binom{n}{1} x^{n-1} & \binom{n}{2} x^{n-2} & \\ & x^n & \ddots & \binom{n}{2} x^{n-2} \\ & & \ddots & \binom{n}{1} x^{n-1} \\ & & & x^n \end{pmatrix}$$

לדוגמה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 2^3 & 3 \cdot 2^2 & \binom{3}{2} \cdot 2^1 & \binom{3}{3} \cdot 2^0 \\ 0 & 2^3 & 3 \cdot 2^2 & \binom{3}{2} \cdot 2^1 \\ 0 & 0 & 2^3 & 3 \cdot 2^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 6 & 1 \\ 0 & 8 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

3 גראם-שמידט

3.1 הטלה

נגדיר את ההטלה של וקטור v על U להיות:

$$P_U(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} \cdot b_i$$

כאשר b_1, \dots, b_n בסיס אורתוגונלי, בהמשך נראה שקיים כזה לכל מרחב נוצר סופית.

תכונות:

$$P_U^2 = P_U \text{ ולכן } \forall u \in U. P_U(u) = u$$

$$P_U \text{ העתקה לינארית, כך ש-} \{v \in V \mid v \perp U\} = \ker(P_U). \text{ נסמן גם ב-} U^\perp.$$

$$(v - P_U(v)) \perp U \text{ לכל } v.$$

משפט הקירוב הטוב ביותר: נגדיר $\text{dist}(v, U) = \text{dist}(v, P_U(v))$. אז מתקיים ש- $\text{dist}(v, U) = \inf_{u \in U} \text{dist}(v, u)$. כלומר שהמרחק הזה הוא המרחק הכי קצר מ- v ל- U .

3.2 האלגוריתם עצמו

אלגוריתם גראם-שמידט הוא האלגוריתם למציאת סדרה אורתונורמלית w_1, \dots, w_x ל- $\text{sp}(b_1, \dots, b_n)$ כך ש- $\text{sp}(b_1, \dots, b_n) = \text{sp}(w_1, \dots, w_x)$.

נוריד מ- b_1, \dots, b_n את האפסים. נגדיר את $w_1 = \frac{1}{\|b_1\|} b_1$ להיות המנורמל. לכל $i \in 2, \dots, n$, נגדיר $U = \text{sp}(b_1, \dots, b_{i-1})$, ואז נחשב $w'_i = b_i - P_U(b_i)$. אם $w'_i = 0$, נתעלם ממנו, אחרת נוסיף לסדרה w את w'_i את w'_i המנורמל.

חלק II

מכפלות פנימיות ותבניות בילינאריות

4 מכפלה פנימית

4.1 הגדרות בסיסיות

יהי V מ"ו מעל \mathbb{C} או \mathbb{R} . מכפלה אוניטרית (נקרא "מכפלה פנימית" מעל \mathbb{R}) מעל V היא פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$ כך ש-:

$$1. \text{ לינאריות לפי הרכיב השמאלי: } \langle \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2, \underline{u} \rangle = \alpha \cdot \langle \underline{v}_1, \underline{u} \rangle + \beta \cdot \langle \underline{v}_2, \underline{u} \rangle$$

$$2. \text{ הרמיטיות: } \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = \overline{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}$$

$$3. \text{ חיוביות: } \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \in \mathbb{R} \wedge \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \geq 0$$

$$4. \text{ אפיון } 0: \underline{v} = \underline{0} \iff \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = 0$$

4.2 תכונות

משפט לגבי הרכיב הימני:

$$\bullet \langle \underline{u}, v_1 + v_2 \rangle = \langle \underline{u}, v_1 \rangle + \langle \underline{u}, v_2 \rangle \text{ חיבוריות לפי הימני.}$$

- $\langle v, \alpha u \rangle = \bar{\alpha} \langle v, u \rangle$ כמו הומוגניות ברכיב הימני, אבל עם הצמוד.
- $\langle \underline{v}, 0 \rangle = 0$ מתאפס גם לפי הרכיב הימני.
- לכן יש לנו כמעט לינאריות לפי הרכיב הימני, אבל עם הסקלר הצמוד.
- ומכאן נובע: $\left\langle \sum_{i=1}^n a_i \underline{v}_i, \sum_{j=1}^m b_j \underline{u}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \bar{b}_j \langle \underline{v}_i, \underline{u}_j \rangle$

4.3 אורתוגונליות

(v_1, \dots, v_n) נקראת אורתוגונלית אם"ם $\forall i \neq j. v_i \perp v_j$ כלומר $\langle v_i, v_j \rangle = 0$.
 לדוגמה $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ סדרה אורתוגונלית עם המכפלה האוניטרית הסטנדרטית.
 נגדיר וקטור יחידה להיות v כך ש- $\|v\| = 1$. אם $\underline{v} \neq 0$ אז $\frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \underline{v}$ וקטור יחידה, שנקרא גם הוקטור המנורמל.
 אז סדרה אורתונורמלית היא סדרה אורתוגונלית של וקטורי יחידה.
משפט: סדרה אורתוגונלית היא בת"ל.

4.3.1 משלים אורתוגונלי

יהי $U \subseteq V$. נגדיר U^\perp להיות המרחב שניצב לכל איבר ב- U . נסמן $\dim U = k$. נחשב אותו באמצעות השלמת בסיס של U לבסיס של V , גראם-שמידט על הבסיס שיוצא, ואז ניקח את האיברים $k+1, \dots, n$. וזה הבסיס של U^\perp . מתקיים:

1. $U \oplus U^\perp = V$
2. $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ ואם V נוצר סופית אז $U = (U^\perp)^\perp$
3. $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$
4. $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$
5. אם $U \subseteq W$ אז $W^\perp \subseteq U^\perp$
6. $\langle v, u \rangle = \langle P_U(v), P_U(u) \rangle + \langle P_{U^\perp}(v), P_{U^\perp}(u) \rangle$

4.4 נורמה

נגדיר $\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$. מתקיים:

- $\|a\| \geq 0$ ו- $a = 0 \iff \|a\| = 0$
- $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$ לכל $a \in L, \lambda \in \mathbb{R}$
- $|||a|| - ||b||| \leq \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$
- משפט פיתגורס: $a \perp b \iff \|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$

5 סוגים של העתקות לינאריות

5.1 העתקות אוניטריות

העתקה מעל \mathbb{C} המקיימת $(Tu, Tv) = (u, v)$ נקראת העתקה אוניטרית. היא משמרת אורכים וזוויות, כלומר $\|Tv\| = \|v\|$.
משפט: כל דבר פה שקול לכך ש- T אוניטרית.

1. T מעתיקה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי.
2. $T^*T = I$. לכן אם T אוניטרית אז היא הפיכה כך ש- $T^* = T^{-1}$.
3. T נורמלית וכל הערכים העצמיים על מעגל היחידה.

5.2 העתקות אורתוגונליות

דומה אבל מעל \mathbb{R} .

משפט: T אורתוגונלית $\iff T$ מעתיקה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי. בפרט אם T אוניטרית היא הפיכה.

משפט: יהי V מרחב וקטורי, מעל \mathbb{R} או \mathbb{C} , עם מכפלה פנימית. התנאים הבאים שקולים:

1. $TT^* = T^*T = I$, כלומר $T^* = T^{-1}$.
2. לכל u, v , $(Tu, Tv) = (u, v)$, כלומר אוניטרית/אורתוגונלית לפי השדה.
3. לכל v , $\|Tv\| = \|v\|$, כלומר T שומרת על אורכים.

5.3 העתקות נורמליות

העתקה נקראת נורמלית אם $TT^* = T^*T$.

משפט: מטריצה נורמלית ניתנת ללכסון אוניטרי, כלומר קיים בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של T ו- $T = P^*DP$ כאשר D אלכסונית.

משפט: המרחבים העצמיים ניצבים זה לזה.

טענה: $|T(v)| = |T^*(v)|$.

6 תבניות בילינאריות

הגדרה: תבנית בילינארית היא $f : (V \times W) \rightarrow \mathbb{F}$ שלילנארית על פי הרכיב השמאלי ועל פי הרכיב הימני.

נסמן את קבוצת התבניות הבילינאריות ב- $\text{Bil}(V, W)$, או $\text{Bil}(V) := \text{Bil}(V, V)$.

מטריצה מייצגת: נגדיר $([f]_{B,C})_{i,j} = f(b_i, c_j)$. מתקיים $f(v, w) = [v]_B^t \cdot [f]_{B,C} \cdot [w]_C$ לכל v, w .

מעבר בסיסים: $[f]_{B',C'} = ([Id]_B^{B'})^t \cdot [f]_{B,C} \cdot [Id]_C^{C'}$.

הגדרה: נגדיר את הדרגה $\text{rk}(f)$ להיות $\text{rk}([f]_{B,C})$ עבור B, C בסיסים כלשהם.

הגדרה: f נקראת אי מנוונת אם $\text{rk} f = \dim V = \dim W$. לכן גם $[f]_{B,C}$ הפיכה.

6.1 חפיפת מטריצות

שתי מטריצות A, B נקראות שקולות אם $A = P^t B Q$, וחופפות אם $A = P^t B P$ יש המון משפטים.....

6.2 תבניות בילינאריות סימטריות

תבנית בילינארית תקרא סימטרית אם לכל v, w , $f(v, w) = f(w, v)$. המטריצה המייצגת היא אלכסונית.

משפט ההתמדה של סילבסטר: מעל \mathbb{R} . תהי f תבנית בילינארית סימטרית כך ש- $\text{rk} f = r \leq n = \dim V$. אז קיים בסיס $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ כך ש- $[f]_{B,B}$ אלכסונית, ועל האלכסון יש רק $0, -1, 1$. הכמויות שלהם אינן תלויות בבחירת הבסיס.

כדי לחשב את אינדקסי ההתמדה הללו, P_+ כמות ה-1ים ו- P_- כמות ה-(-1)ים (ההפרש שלהם גם נקרא הסיגנטורה), ממטריצה מייצגת, יש שתי דרכים:

1. דירוג בו זמנית של השורות ושל העמודות, עד שמגיעים לצורה אלכסונית.

2. נחשב את $\Delta_0, \dots, \Delta_r$ הדטרמיננטות של חתכים של המטריצה $(r \text{ זה } rk)$ - למשל עבור $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ זה יהיה:

$$\Delta_0 = 1, \Delta_1 = \det \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

כמות הפעמים שהסימן לא משתנה מהקודם היא P_+ , כמות הפעמים שהסימן כן משתנה היא P_- .

טענה: תבנית בילינארית חיובית לחלוטין וסימטרית היא בעצם מכפלה פנימית.

(חיובית לחלוטין זו תכונה של תבניות ריבועיות/סימטריות כך ש- $f(v, v) > 0$ לכל v , או באופן שקול שבמטריצה המייצגת כל הע"ע חיוביים, או באופן שקול ש- $\Delta_i > 0$ לכל i)

6.2.1 תבנית ריבועית

תהי $f \in \text{Bil}(V)$ תבנית סימטרית. נגדיר $Q(v) = f(v, v)$ ונקרא לה תבנית ריבועית. כל תבנית ריבועית מיוצגת ביחידות על ידי תבנית בילינארית סימטרית. ניתן למצוא את f ע"י:

$$2f(v, w) = Q(v + w) - Q(v) - Q(w)$$

6.3 תבניות בילינאריות אנטי-סימטריות

תבנית בילינארית תקרא סימטרית אם לכל v, w , $f(v, w) = -f(w, v)$. המטריצה המייצגת היא:

$$\text{Diag} \left(\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}^{\frac{1}{2} \text{rk}(f) \text{ times}}, 0, \dots, 0 \right)$$

בפרט $\text{rk} f$ זוגי, ומספר האפסים הוא $n - \text{rk} f$.