1 מטריצות בסיסיות

1.1 כפל מטריצה במטריצה

הגדרה 1.1 יהא R חוג ויהיו $A\in M_{n\times m}\left(R\right),B\in M_{m\times p}\left(R\right)$ מטריצות. נגדיר כפל מטריצות $(A\cdot B)\in M_{p\times n}(R)$ בצורה הבאה:

$$\left(A\cdot B\right)_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\cdot b_{k,j}$$

1.1.1 טענות לגבי כפל מטריצות:

משפט 2.1 $A\cdot B=\begin{pmatrix} | & & | \\ A\cdot C_1(B) & \cdots & A\cdot C_n(B) \\ | & & | \end{pmatrix}$.

משפט 3.1 $A\cdot B=\begin{pmatrix} - & R_1(A)\cdot B & - \\ & \vdots & \\ - & R_n(A)\cdot B & - \end{pmatrix}$.

1. **אסוציאטיביות הכפל:** $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.
2. **חוק הפילוג.**
3. **הוצאת סקלר:** $A\cdot(\alpha\cdot B)=\alpha\cdot(A\cdot B)$.
4. **כפל ב־0 וב־1:** $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $A\cdot 0=0\cdot A=0$ ו־ $A\cdot I_n=A$, $I_m\cdot A=A$.

1.2 פעולות אלמנטריות

1. להחליף סדר בין משוואות. $R_i\leftrightarrow R_j$.
2. להכפיל משוואה בקבוע. $R_i\to\alpha\cdot R_i$.
3. לחבר משוואות. $R_i\to R_i+R_j$.

כולן משמרות את הפתרונות של המטריצה, ואת המרחב $R\left(A\right)$ ואת $\text{rank}\left(A\right)$.

משפט 4.1 יהיו A,B מטריצות כך ש־$A\cdot B$ מוגדר, ותהא φ פעולה אלמנטרית. אזי:

$$\varphi\left(A\cdot B\right)=\varphi\left(A\right)\cdot B$$

הגדרה 5.1 המטריצה האלמנטרית: לכל פעולה אלמנטרית φ על מטריצות עם m שורות, נגדיר מטריצה אלמנטרית E_φ על ידי $E_\varphi:=\varphi\left(I_m\right)$.

לכל מטריצה $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$, ופעולה אלמנטרית φ, מתקיים ש־$\varphi\left(A\right)=E_\varphi\cdot A$.

בנוסף מטריצות אלמנטריות הפיכות, והמטריצה של הפעולה ההופכית של φ היא $\left(E_\varphi\right)^{-1}$.

2 דירוג ודירוג קנוני

2.1 הגדרות

בצורה מדורגת:

1. משוואות 0 (מהצורה $0=b$) נמצאות למטה.
2. המשתנה הפותח בכל משוואה נמצא מימין ממש למשתנים הפותחים במשוואות מעליו.

<u>משתנה חופשי</u> הוא משתנה שלא מקדם פותח של אף שורה.

בנוסף, בצורה מדורגת קנונית:

3. המקדם של כל משתנה פותח הוא 1
4. לכל משתנה פותח של משוואה, המקדם של המשתנה בשאר המשוואות הוא 0.

לכל מטריצה קיימת צורה מדורגת קנונית **יחידה** ששקולה לה.

3 בוחן תת מרחב

$U\subseteq F^n$ היא תת מרחב אמ"מ:

1. U סגורה לחיבור.
2. U סגורה לכפל בסקלר.
3. $\bar{0}\in U$. ניתן להחליף את התנאי ב־$U\neq\emptyset$.

נובע מכאן גם שחיתוך של תתי מרחבים הוא תת מרחב.

4 צירופים ליניאריים

הגדרה 1.4 סדרת mיות $(\overline{v_1},\ldots,\overline{v_k})\in\left(\mathbb{F}^m\right)^k$ תקרא <u>בלתי תלויה לינארית</u> (בת"ל) אם לכל $\bar{b}\in\mathbb{F}^m$ יש לכל היותר פתרון אחד למשוואה $\sum_{i=1}^{k}x_i\overline{v_i}=\bar{b}$.

משפט 2.4 סדרת וקטורים $(v_1,\ldots,v_m)\subseteq\mathbb{F}^n$ בלתי תלויה לינארית $\iff$ כל איבר אינו צירוף לינארי של קודמיו.

הגדרה 3.4 נגדיר את מרחב התלויות של $(\overline{v_1},\ldots,\overline{v_k})$ להיות:

$$LD\left((\overline{v_1},\ldots,\overline{v_k})\right)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n\mid\alpha_1\overline{v_1}+\cdots+\alpha_k\overline{v_k}=0\right\}$$

בנוסף $\overline{v_1},\ldots,\overline{v_k}$ בת"ל $\iff$ $LD\left(\overline{v_1},\ldots,\overline{v_k}\right)=\{0\}$.

4.1 בסיס

הגדרה 4.4 (משפט 2 מתוך 3) יהי $\mathbb{F}$ שדה, B תת קבוצה של $\mathbb{F}^n$. אז B נקראת <u>בסיס</u> של $\mathbb{F}^n$ אם שניים מהתנאים הבאים מתקיימים:

1. B בת"ל.
2. B פורשת את $\mathbb{F}^n$.
3. $m = n$.

כל שניים מוכיחים גם את השלישי.

התנאים הבאים שקולים לכך ש־B בסיס:

1. בת"ל מקסימלית - B בת"ל וכל קבוצה המכילה ממש את B הינה תלויה לינארית.
2. פורשת מינימלית - B פורשת וכל קבוצה שמוכלת ממש ב־B אינה פורשת.
3. לכל $v \in \mathbb{F}^n$ יש הצגה יחידה כצירוף של וקטורים מ־B.

4.1.1 למת ההחלפה של ריס

יהי V מ"ו, ותהא $(v_1, \ldots, v_n)$ סדרה פורשת ב־V, ו־$(u_1, \ldots, u_m)$ סדרה בת"ל. אזי:

1. קיימים $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$ כך ש־$(u_1, \ldots, u_m) \frown (v_j \mid j \notin \{i_1, \ldots, i_m\})$ פורשת.
2. $m \leq n$.

כלומר אפשר להחליף איברים כלשהם של סדרה פורשת באיבריה של כל סדרה בת"ל.

5 שחלוף והפיכות

נגדיר את השחלוף של A, A^T, להיות המטריצה כך ש־$\left(A^T\right)_{i,j} = A_{j,i}$. אם $A = A^T$, נגיד ש־A סימטרית.

משפט 1.5 חוקי Transpose:

- **חיבור:** $(A+B)^T = A^T + B^T$ (אם החיבור מוגדר).
- **כפל בסקלר:** $(\alpha A)^T = \alpha\left(A^T\right)$.
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

הגדרה 2.5 מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ תיקרא:

1. **הפיכה משמאל:** אם קיימת מטריצה $B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ כך ש$B \cdot A = I_n$.
2. **הפיכה מימין:** אם קיימת מטריצה $B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ כך ש$A \cdot B = I_m$.
3. **הפיכה:** אם קיימת מטריצה $B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ כך ש$A \cdot B = I_m$ וגם $B \cdot A = I_n$. קיימת הופכית יחידה.

משפט 3.5 תהא $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

1. A הפיכה משמאל $\iff$ למערכת $A \cdot \overline{x} = 0$ יש פתרון יחיד (כלומר סדרת העמודות של A בת"ל, ולכן $m \geq n$).
2. A הפיכה מימין $\iff$ למערכת $A \cdot \overline{x} = \overline{b}$ יש פתרון לכל $\overline{b} \in \mathbb{F}^m$ (כלומר סדרת העמודות של A פורשת, ו־$m \leq n$).
3. A הפיכה $\iff$ למערכת $A \cdot \overline{x} = \overline{b}$ יש פתרון יחיד לכל $\overline{b} \in \mathbb{F}^m$ (כלומר סדרת העמודות של A בסיס, ולכן $m = n$).

   בפרט מטריצה הפיכה היא ריבועית.

טענות:

1. אם במטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ יש שורת אפסים אז A לא הפיכה מימין.
2. אם A הפיכה A^T הפיכה.
3. $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.
4. אם $A \in M_{m\times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k\times n}(\mathbb{F})$ הפיכות, אז $A \cdot B$ הפיכה ו־$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

5.1 תנאים שקולים להפיכות במטריצה ריבועית

1. A שקולת שורות ל־I_n.
2. קיים $\overline{b} \in \mathbb{F}^n$ כך שלמערכת $A\overline{x} = \overline{b}$ יש פתרון יחיד.
3. לכל $\overline{b} \in \mathbb{F}^n$ למערכת $A\overline{x} = \overline{b}$ יש פתרון יחיד.
4. A הפיכה משמאל - כלומר עמודות A בת"ל. אפשר גם שורות לפי 6.
5. A הפיכה מימין - כלומר עמודות A פורשות. אפשר גם שורות לפי 6.
6. A^T הפיכה.

ובנוסף A, B ריבועיות והפיכות $\iff$ $A \cdot B$ הפיכה.

6 דטרמיננטה

פיתוח דטרמיננטה לפי עמודה j:

$$\det_j^{(n)}(A) = \sum_{k=1}^{n} (A)_{k,j} \cdot (-1)^{k+j} \cdot \det^{(n-1)}\left(A_{(k\,j)}\right)$$

טענות:

1. לינאריות לפי שורה:

$$\det\begin{pmatrix} -A_1- \\ \vdots \\ -\alpha \cdot B + \beta \cdot C- \\ \vdots \\ -A_n- \end{pmatrix} = \alpha \cdot \det\begin{pmatrix} -A_1- \\ \vdots \\ -B- \\ \vdots \\ -A_n- \end{pmatrix} + \beta \cdot \det\begin{pmatrix} -A_1- \\ \vdots \\ -C- \\ \vdots \\ -A_n- \end{pmatrix}$$

2. נרמול: $N(I) = 1$.

3. אם φ פעולה אלמנטרית אז $\det(\varphi(A)) = x_{\varphi}\cdot\det(A)$ כאשר אם φ החלפת שורה $x_{\varphi} = -1$, אם φ כפל בסקלר λ אז $x_{\varphi} = \lambda^{-1}$, ואם φ הוספת שורה אז 1.

4. $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$.

5. אם A לא הפיכה אז $\det(A) = 0$. ואם A הפיכה אז $\det(A) \neq 0$ ו־$\det(A) = x_{\varphi_1}\cdot\dots\cdot x_{\varphi_n}$ כאשר $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ פעולות הדירוג.

6. $\det(A) = \det\left(A^T\right)$. לכן אפשר גם להפעיל פעולות עמודה, שהן פעולות שורה על השחלוף.

7. במטריצה משולשית עליונה או תחתונה ($\forall j < i.\left(A\right)_{i,j} = 0$ או $\forall i < j.\left(A\right)_{i,j} = 0$), הדטרמיננטה היא מכפלת האלכסון.

משפט 1.6 (דטרמיננטה לפי תמורות):

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sign}(\sigma)\cdot\prod_{i=1}^{n}(A)_{i,\sigma(i)}$$

כלל קרמר: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה, אז לכל $\bar{b}\in\mathbb{F}^n$ למערכת $A\bar{x} = \bar{b}$ יש פתרון יחיד והפתרון הינו: (שתי דרכים לתאר אותו)

1. $c = A^{-1}\cdot\bar{b}$.
2. $c_j = \frac{|B_j|}{|A|}$ כאשר $B_j\left(C_1(A),\dots,C_{j-1}(A),\bar{b},\dots,C_n(A)\right)$.

6.1 מטריצת ונדרמונד

עבור מטריצה מהצורה הבאה:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1}\\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1}\\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3 & \dots & \alpha_3^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \dots & \alpha_m^{n-1}\end{pmatrix}$$

אז הדטרמיננטה היא $\det(V) = \prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_j - \alpha_i)$.

6.2 מטריצה מוצמדת

נגדיר: $(\operatorname{adj}(A))_{i,j} = (-1)^{j+i}\cdot\det\left(A_{(j\,i)}\right)$.

מתקיים:

1. $(\operatorname{adj}(A))^T = \operatorname{adj}\left(A^T\right)$.
2. אם A לא הפיכה אז: מטריצת האפס $= A\cdot\operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A)\cdot A$.
3. $A\cdot\operatorname{adj}(A) = I\cdot\det(A)$. אז $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\operatorname{adj}(A)$.

7 תמורות

7.1 הגדרות

פורמלית, S_n זה קבוצת הפונקציות החח"ע ועל ב־$J_n\to J_n$ כאשר $J_n = \{1,\dots,n\}$.

סימונים לתמורות:

1. $\sigma: J_n\to J_n$ חח"ע ועל.
2. רישום ישיר: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4)\end{pmatrix}$.

הגדרה 1.7 (מטריצת תמורה): מטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$ נקראת מטריצת תמורה אם קיימת תמורה $\sigma\in S_n$ כך ש־$P(\sigma) = A = \begin{pmatrix} | & & |\\ e_{\sigma(1)} & \dots & e_{\sigma(n)}\\ | & & |\end{pmatrix}$.

7.2 sign

הגדרה 2.7 עבור $\sigma\in S_n$, $\operatorname{sign}(\sigma)$ (הסיגנטורה של σ) מוגדרת כ־$\operatorname{sign}(\sigma) = |P(\sigma)|$.

הגדרה שקולה: תהא $\sigma\in S_n$ תמורה. לכל $1\le i\le n$ נגדיר את $N(\sigma) = |\{(i,j)\mid j>i\wedge\sigma(j)<\sigma(i)\}|$ ו־$z_\sigma(i) = |\{(i,j)\mid j>i,\sigma(i)<\sigma(j)\}|$ (ו־$N(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} z_\sigma(i)$). נגדיר את sign להיות: $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$.

משפט 3.7 $\operatorname{sign}(\sigma\tau) = \operatorname{sign}(\sigma)\cdot\operatorname{sign}(\tau)$.

8 מרחב וקטורי

8.1 הגדרות

הגדרה 1.8 (מרחב וקטורי): מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ זו שלשה $(V,+,\cdot)$ כך ש:

1. $\langle V,+\rangle$ חבורה חילופית.
2. $\cdot:\mathbb{F}\times V\to V$ כפל בסקלר, פעולה שמקיימת:
   (א) אסוצייטיביות. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}.\forall\overline{v}\in V.\beta\cdot(\alpha\cdot\overline{v}) = (\beta\cdot\alpha)\cdot v$.
   (ב) $\forall\overline{v}\in V.1_{\mathbb{F}}\cdot\overline{v} = \overline{v}$.
3. חוק הפילוג:
   (א) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}.\forall\overline{v}\in V.(\alpha+\beta)\cdot\overline{v} = \alpha\cdot\overline{v}+\beta\cdot\overline{v}$.
   (ב) $\forall a\in\mathbb{F}.\forall\overline{v_1},\overline{v_2}\in V.\alpha\cdot(\overline{v_1}+\overline{v_2}) = \alpha\cdot\overline{v_1}+\alpha\cdot\overline{v_2}$.

9 בסיס האמל

- תת קבוצה $X\subseteq V$ נקראת בת"ל אם לכל $v_1,\dots,v_n\in X$, $v_1,\dots,v_n$ בת"ל. כלומר אין צירוף לינארי לא טריויאלי של איברים מ־X שיוצא 0.

- תת קבוצה $X \subseteq V$ נקראת פורשת אם $\mathrm{sp}(X) = V$.
- קבוצה $X \subseteq V$ נקראת בסיס האמל אם היא בת"ל ופורשת.

10 מימד

הגדרה 1.10 (מימד): יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ בעל בסיס, המימד של V הינו עוצמת בסיס כלשהו (והמימד יחיד). מסמנים כ־$\dim_{\mathbb{F}}(V)$.

משפט 2.10 (משפט המימדים הראשון):

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

מסקנה: אם $U \subseteq V$ ו־$\dim U = \dim V$, אז $U = V$.

משפט 3.10 (משפט המימדים השני): עבור $T : V \to U$,

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(Im(T))$$

11 סכום ישר

הגדרה: נאמר כי $U_1 + \cdots + U_n$ הוא סכום ישר $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ אם לכל $\overline{v} \in U_1 + \cdots + U_n$ קיימת ויחידה סדרה $\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_n} \in U_i$ כך ש־$\overline{v} = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i}$. נקרא גם הצגה יחידה.

משפט האיפיון: יהיו $U_1, \ldots, U_n \subseteq U$ תמ"ו, הבאים שקולים:

1. $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$.
2. לכל סדרות בת"ל B_i ב־U_i, השרשור $B_1 \frown B_2 \frown \cdots \frown B_n$ בת"ל.
3. לכל $1 \leq i \leq n$, $U_i \cap \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} U_j\right) = \{\overline{0}\}$.
   בפרט אם $n = 2$, $U_1 \cap U_2 = \{\overline{0}\}$.

12 מרחב העמודות והשורות

הגדרה: תהא $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, נגדיר:

1. מרחב הפתרונות: $\mathrm{Sols}(A) = \{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = \overline{0}\}$.
2. מרחב העמודות: $C(A) = \mathrm{sp}(C_1(A), \ldots, C_n(A))$.
3. מרחב השורות: $R(A) = \mathrm{sp}(R_1(A), \ldots, R_m(A))$.

משפט 1.12 $\dim(R(A)) = \dim(C(A))$. יסומן גם כ־$\mathrm{Rank}(A)$.

בנוסף נסמן $\mathcal{N}(A) = \dim(\mathrm{Sols}(A))$.

משפט 2.12 (משפט הדרגה): פעולות דירוג משמרות את $R(A)$ (ולכן גם את $\mathrm{Rank}(A)$), אבל לא בהכרח משמרות את $C(A)$.

(משפט הדרגה והאפסות): $\mathrm{Rank}(A) + \mathcal{N}(A) = n$.

מסקנה: A הפיכה $\iff \mathrm{Rank}(A) = n$.

חוקי rank: לכל מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$,

1. $\mathrm{Rank}(A) \leq \min(n, m)$.
2. $\mathrm{Rank}(A \cdot B) \leq \min(\mathrm{Rank}(A), \mathrm{Rank}(B))$.
3. $\mathrm{Rank}(A + B) \leq \mathrm{Rank}(A) + \mathrm{Rank}(B)$.
4. אם A הפיכה אז $\mathrm{Rank}(A \cdot B) = \mathrm{Rank}(B), \mathrm{Rank}(B \cdot A) = \mathrm{Rank}(B)$ (אם מוגדר).

13 העתקות לינאריות

הגדרה: יהיו V, U מ"ו מעל $\mathbb{F}$, נאמר כי $T : V \to U$ העתקה לינארית אם:

1. חיבוריות ־ $\forall v_1, v_2 \in V. T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$.
2. הומוגניות ־ $\forall \alpha \in \mathbb{F}. \forall v \in V. T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v)$.

הגדרות נוספות:

1. $\ker(T) = T^{-1}[\{0\}] = \{\overline{v} \in V \mid T(\overline{v}) = 0\}$ הגרעין של T, kernel.
2. $Im(T) = \{T(\overline{v}) \mid \overline{v} \in V\} \subseteq U$ התמונה של T.

בנוסף $\ker(T), Im(T)$ תמ"ו של T.

13.1 תכונות בסיסיות

תהא $T : V \to U$ לינארית,

1. $T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i)$ ־ כל צירוף לינארי נשמר.
2. $T(-\overline{v}) = -T(\overline{v})$ ־ מכפליות.
3. $T\left(\overline{0}_V\right) = \overline{0}_U$.
4. T חח"ע $\iff \ker(T) = \{\overline{0}\}$.
5. T על $\iff \mathrm{Im}(T) = U$ (טריויאלי).
6. אם $(u_1, \ldots, u_n)$ סדרה פורשת של V אז $(T(u_1), \ldots, T(u_k))$ סדרה פורשת של $Im(T)$.
7. עבור $(v_1, \ldots, v_n)$, $LD(v_1, \ldots, v_n) \subseteq LD(T(v_1), \ldots, T(v_n))$. לכן:
   (א) אם $(T(v_1), \ldots, T(v_n))$ בת"ל אז $(v_1, \ldots, v_n)$ בת"ל.
   (ב) אם $v_i \in \mathrm{sp}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ אז גם $T(v_i) \in \mathrm{sp}(T(v_1), \ldots, T(v_{i-1}), T(v_{i+1}), \ldots, T(v_n))$.
   (ג) אם T חח"ע, אז $LD(T(v_1), \ldots, T(v_n)) = LD(v_1, \ldots, v_n)$.
   אם T חח"ע, אז T מעבירה סדרה פורשת של V לסדרה פורשת של U.

8. יהיו V,U מ"ו. יהי $B=(b_1,\dots,b_n)$ בסיס של V. יהיו $u_1,\dots,u_n\in U$ וקטורים כלשהם. אז קיימת ויחידה העתקה לינארית $T:V\to U$ כך שלכל $1\le i\le n$, $T(b_i)=u_i$. כלומר העתקה לינארית נקבעת ביחידות לפי $\dim(V)$ איברים.

משפט המימדים השני: $\dim(V)=\dim(\ker(T))+\dim(Im(T))$.

13.2 הטלה

יהי V מ"ו, ו־$U,W\subseteq V$ תמ"ו כך ש־$V=U\oplus W$. ראינו כי כל וקטור $\overline{v}\in V$ ניתן להציג באופן יחיד:

$$\overline{v}=\overline{u}+\overline{w},\overline{u}\in U,\overline{w}\in W$$

נגדיר את ההטלה של V על U:

$$P_{(U,W)}:V\to U$$
$$P_{(W,U)}:V\to W$$
$$P_{(U,W)}(\overline{v})=\iota x\in U.\exists y\in W.\overline{v}=x+y$$

כלומר זה ייצוג לאחד מהאיברים בהצגה היחידה של וקטור.

טענות:

1. הטלה $P_{(U,W)}$ היא העתקה לינארית.
2. $P_{(U,W)}\circ P_{(U,W)}=P$, $P_{(U,W)}+P_{(W,U)}=Id_V$.
3. $\mathrm{Im}\left(P_{(U,W)}\right)=U$, $P^{-1}_{(U,W)}[\{0\}]=W$.

13.3 איזומורפיזם

13.3.1 הגדרות

הגדרה: יהיו V,U מ"ו מעל $\mathbb{F}$, נאמר כי $f:V\to U$ היא איזומורפיזם של מ"ו אם:

1. f חח"ע ועל.
2. f העתקה לינארית (חיבורית והומוגנית).

איזומורפיזם משמר את הפתרונות של $v=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{u_i}$ כאשר $v,\overline{u_1},\dots,\overline{u_n}\in V$.

שני מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה נקראים <u>איזומורפיים</u> ומסומנים $V\simeq U$ אז קיים איזומורפיזם $T:V\to U$. זה "יחס שקילות".

משפט: יהיו V,U מ"ו נוצרים סופית, אז $V\simeq U\iff\dim(V)=\dim(U)$.

משפט 1.13 (2 מתוך 3 להעתקות לינאריות): כל 2 מתוך 3 הבאים שקולים לכך ש־T איזומורפיזם.

1. $\dim(V)=\dim(U)$.
2. T חח"ע.
3. T על.

13.3.2 קואורדינטות

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, B בסיס של V. נסמן $\dim V=n$, ויהי $B=(b_1,\dots,b_n)$ בסיס. על פי משפט, לכל $\overline{v}\in V$ קיימים ויחידים $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ כך ש־$v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ib_i$. נגדיר את הקואורדינטות של $\overline{v}$ לפי B להיות:

$$[\overline{v}]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$$

זה איזומורפיזם מ־V ל־$\mathbb{F}^n$. העתקת הקואורדינטות תסומן גם בתור $[\cdot]_B:V\to\mathbb{F}^n$.

13.4 מרחב ההעתקות

הגדרה: $\mathrm{Hom}(V,U)=\left\{T\in U^V\mid \text{T is linear}\right\}$ מרחב ההעתקות. זה תת מרחב של $\langle U^V,+,\cdot\rangle$.

משפט: $\dim(\mathrm{Hom}(V,U))=\dim(V)\cdot\dim(U)$ – זה נכון אפילו אם V,U לא נוצרים סופית.

13.5 מטריציונית

הגדרה: לכל מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, נגדיר את ההעתקה המטריציונית המתאימה ל־A, $T_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$:

$$T_A(\overline{v})=A\overline{x}$$

פונקציה f נקראת מטריציונית אם קיימת מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ כך ש־$f=T_A$, ונסמן $A=[f]$.

השיטה למצוא את המטריצה $[T]$ היא:

$$[T]=\left(T\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\quad T\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\quad\dots\quad T\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

משפט: תהא $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$, אזי T העתקה לינארית $\iff T$ מטריציונית.

טענות:

1. $\mathrm{Sols}(A)=T_A^{-1}\left[\{\overline{0}\}\right]=\ker(T_A)$.
2. $C(A)=Im(T_A)$.
3. T_A על $\iff$ עמודות A פורשות. אם היא ריבועית אז גם הפיכה.
4. T_A חח"ע $\iff$ עמודות A בת"ל. כי אין שתי דרכים להגיע לאותו הדבר.
5. T_A הפיכה $\iff$ עמודות A בסיס $\iff A$ הפיכה.
6. $[T+S]=[T]+[S],[\alpha\cdot T]=\alpha\cdot[T],[S\circ T]=[S]\cdot[T]$.

14 מטריצה מייצגת

הגדרה: תהא $T:V\to U$ צ"ל V,U נוצר סופית. יהי B בסיס של V, ו־C בסיס של U. נגדיר את ההעתקה המייצגת $T_C^B:\mathbb{F}^{\dim(V)}\to\mathbb{F}^{\dim(U)}$:

$$T_C^B=Q_C\circ T\circ Q_B$$
$$[T]_C^B=\left[T_C^B\right]$$

טענות:

1. $C_i\left(\left[T_C^B\right]\right)=T_C^B\left(e_i\right)$.
כלומר $[T]_C^B=\begin{pmatrix} | & & | \\ [T(b_1)]_C & \dots & [T(b_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix}$.
2. $[T]_C^B\cdot[v]_B=[T(v)]_C$.
3. לכל $\overline{v}\in V$, $\overline{v}\in\ker(T)\iff[\overline{v}]_B\in\text{Sols}\left([T]_C^B\right)$.
4. לכל $\overline{u}\in U$, $\overline{u}\in Im(T)\iff[\overline{u}]_C\in\text{Cols}\left([T]_C^B\right)$
לכן מסיקים ש:

$$\mathcal{N}\left([T]_C^B\right)=\dim(\ker(T)),\text{Rank}\left([T]_C^B\right)=\dim(Im(T))$$

5. T הפיכה $\iff$ T_C^B הפיכה $\iff$ $[T]_C^B$ הפיכה, בנוסף $\left([T]_C^B\right)^{-1}=\left[T^{-1}\right]_B^C$.
6. $[S\circ T]_D^B=[S]_D^C\cdot[T]_C^B$.

אלגוריתם לחישוב המטריצה המייצגת: נבחר בסיס שנוח לחשב בו קואורדינטות ב־U ־ בדרך כלל הבסיס הסטנדרטי. $W=(w_1,\dots,w_n)$. נשתמש בדירוג:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & & | & | & & | \\ [u_1]_W & \dots & [u_m]_W & [T(b_1)]_W & \dots & [T(b_n)]_W \\ | & & | & | & & | \end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to\dots}\dots$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & [T]_C^B \\ & & 1 & \end{array}\right)$$

באופן דומה לאיך שמחשבים מטריצה הופכית.

הגדרה 1.14 מטריצות שינוי הקואורדינטות: יהיו B,C שני בסיסים של מ"ו V. אז נגדיר את מטריצת שינוי הקואורדינטות מ־B ל־C על ידי: $[Id_V]_C^B$.

1. $\overline{v}\in V$, $[Id_V]_C^B\cdot[\overline{v}]_B=[\overline{v}]_C$.
2. $[T]_C^B=[Id]_C^{C'}\cdot[T]_{C'}^{B'}\cdot[Id_V]_{B'}^B$.

15 מטריצות דומות

יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{F})$, נאמר כי A ו־B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש־$A=P^{-1}\cdot B\cdot P$.

משפט: נתון $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ ריבועיות, הבאים שקולים:

1. A,B דומות.
2. קיימת $T:V\to V$ ובסיסים C,C' של V כך ש־$[T]_C=A,[T]_{C'}=B$.
3. לכל $T:V\to V$, אם קיים בסיס C של V כך ש־$[T]_C=A$, אז קיים בסיס C' של V כך ש־$[T]_{C'}=B$.

ואם A,B דומות אז:

1. $\text{Rank}(A)=\text{Rank}(B),\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}(B)$..
2. $\text{tr}(A)=\text{tr}(B)$ כאשר $\text{tr}(A)=\sum_{i=1}^n(A)_{i,i}$.
3. $\det(A)=\det(B)$.

16 אלגוריתמים

16.1 צמצום סדרה לבת"ל

16.1.1 לפי שורות

יהיו $v_1,\dots,v_n\in\mathbb{F}^m$. נשים את $v_1,\dots,v_n$ כשורות, $B=\begin{pmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_n^t\end{pmatrix}\in M_{n\times m}(\mathbb{F})$, ונדרג בלי להחליף שורות (כלומר, בעמודה של מקדם הפותח יש רק 1 במקום אחד והשאר אפסים, אבל המקדמים הפותחים לא ממוינים). השורות שהתאפסו מתאימות לוקטורים שהיו תלוים לינארית באחרים, וסדרת השורות שלא התאפסו הן סדרה בת"ל.

16.1.2 לפי עמודות

נשים את $v_1,\dots,v_n$ כעמודות, $A=(v_1\dots v_n)$, נדרג ונבדוק שיש רק פתרון טריויאלי למערכת ההומוגנית $(A\mid 0)$, כלומר שאין אף משתנה חופשי.

16.2 השלמה של סדרה בת"ל לבסיס

תהא $(v_1,\dots,v_k)$ סדרה בת"ל, ו־$(u_1,\dots,u_m)$ סדרה פורשת. נבנה מטריצה ש<u>עמודותיה</u>:

$$(v_1,\dots,v_k,u_1,\dots,u_m)$$

נדרג את המטריצה, ונסתכל על העמודות מ־u שנפתחה בהן מדרגה. את ה־uים המתאימים נוסיף לסדרת ה־vים, ונקבל בסיס.