

קורס B

גלעד מואב

28 בספטמבר 2020

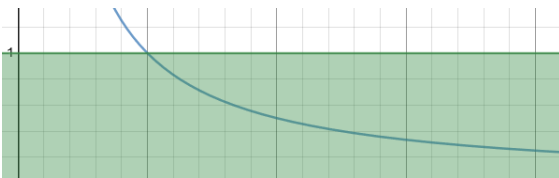
חלק I

חלק א'

1 גבול של סדרה

נגדיר גבול של סדרה באינסוף

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \iff \forall \epsilon > 0. \exists N. \forall n > N. |a_n - L| < \epsilon$$



2 גבול של פונקציה

2.1 גבול הפונקציה באינסוף

בדומה לגבול של סדרה, גבול הפונקציה יהיה

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0. \exists N. \forall x > N. |f(x) - L| < \epsilon$$

2.2 גבול הפונקציה בנקודה כלשהי

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x. (0 < |x - x_0| < \delta) \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

3 רציפות הפונקציה ומשפט ערך הביניים

3.1 רציפות פונקציה

תהא פונקציה f , נגיד כי f רציפה בנקודה x_0 אם

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

נגיד כי פונקציה f רציפה בקטע I אם f רציפה בכל נקודה בקטע הנתון.

דרך קלה להראות שפונקציה f אינה רציפה בנקודה x_0 היא להוכיח כי הגבולות החד צדדיים שונים, קרי

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

3.2 משפט ערך הביניים

תהא f פונקציה רציפה בקטע $I = [a, b]$. משפט ערך הביניים אומר כי לכל ערך ב $[f(a), f(b)]$ קיים מקור

$$\forall x \in [f(a), f(b)] \rightarrow \exists c \in I. f(c) = x$$

4 נגזרת

4.1 הגדרת הנגזרת

נגיד כי f גזירה בנקודה x_0 אם $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ קיים. נגיד כי f גזירה בקטע I אם כל נקודה בקטע גזירה. נשים לב כי אם f גזירה בקטע I היא רציפה בקטע.

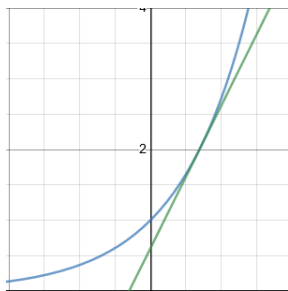
תהא f פונקציה גזירה בנקודה x_0 נגדיר את הנגזרת בנקודה x_0 להיות $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

5 קבוע אוילר e

נגדיר את קבוע אוילר בתור הגבול $e = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x \approx 2.718$. בנוסף $(e^x)' = e^x$.

6 שימושי הנגזרת

בעזרת הנגזרת לפונקציה בנקודה x_0 נוכל למצוא את המשיק לפונקציה בנקודה זו ונוכל למצוא קירוב מסדר ראשון לפונקציה סביב x_0



בנוסף נוכל להעזר בנגזרת בשביל למצוא גבולות מסוימים עם כלל לופיטל.

נוסחאות נפוצות

לינאריות הנגזרת:

$$(\alpha \cdot f \pm \beta \cdot g)' = \alpha \cdot f' \pm \beta \cdot g'$$

כפל בנגזרת:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$$

חלוקה בנגזרת:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

הרכבת הנגזרת:

$$(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$$

7 חקירת פונקציה

חקירת פונקציה מורכבת מהבאים:

1. דומיין
2. חיתוכים עם הצירים
3. נקודות קיצון
4. תחומי עליה וירידה
5. תחומי קעירות וקמירות
6. אסימפטוטות משופעות ומאונכות

8 כלל לופיטל

יהיו f, g , ומתקיים אחד מהבאים

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \text{ קיים אז } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ הגבול}$$

9 פיתוח טיילור והערכת שגיאה

9.1 פיתוח טיילור

תהא f , נגדיר את טור טיילור סביב x_0 כטור חזקות שמתקרב לפונקציה f סביב הנקודה x_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

נגדיר את פולינום טיילור מהדרגה m סביב x_0 כסדרת הסכומים החלקיים מ-0 עד m של טור החזקות,

$$\sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

נקרא לטור טיילור סביב 0 טור מקלורן.

פולינום טיילור נותן לנו קירוב טוב לפונקציה, את השגיאה נוכל לחשב בעזרת לגראנז'.

9.2 הערכת שגיאה לפי לגראנז'

נניח ורצינו למצוא את $e^{0.1}$, נעזר בפולינום מקלורן של הפונקציה e^x מהדרגה 3,

$$f(x) = 1 + (0.1) + \frac{1}{2!}(0.1)^2 + \frac{1}{3!}(0.1)^3 + R_3(0.1)$$

כך ש $R_3(0.1)$ הוא השארית של הפולינום, במקרה הזה $R_3(0.1) = f(x) - 1 + (0.1) + \frac{1}{2!}(0.1)^2 + \frac{1}{3!}(0.1)^3$

לפי לגראנז' קיים $c \in (0, 0.1)$ כך ש $R_3(0.1) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^4$

באופן כללי נסמן את שארית פולינום טיילור מדרגה n סביב x_0 עבור x כ $R_n(x)$ לפי לגראנז' אם פונקציה f גזירה $n+1$ פעמים, קיים $c \in (x, x_0) \cup (x_0, x)$ כך ש

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

נוכל לחסום את שארית הפולינום $R_n(x)$ באופן הבא

$$|R_n(x)| \leq \frac{\max \{ |f^{(n+1)}(b)| \mid b \in (x, x_0) \cup (x_0, x) \}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$$

10 ניוטון ראפסון

בעזרת ניוטון ראפסון נוכל למצוא קירובים לשורשים של פונקציות
תהא פונקציה f בעלת שורש יחיד בקטע I , ניקח נקודה $x_0 \in I$ כלשהי
נמצא את פולינום הטיילור מדרגה ראשונה סביב x_0 ומוצאים את החיתוך שלו עם ציר ה- x , נסמן נקודה זו ב- x_1

$$x_1 = x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

באופן כללי נסמן $x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, כאשר n גדל כך x_n מתקרב לשורש הפונקציה ומתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$

חלק II

חלק ב'

11 פונקציה קדומה ואינטגרל לא מסוים

נקרא ל- F פונקציה קדומה ל- f אם $F' = f$
בהנתן פונקציה f נסמן את $\int f(x)dx$ כמשפחת הפונקציות הקדומות ל- f , נקרא לסימון זה \int האינטגרל הלא מסוים של f

12 שיטות אינטגרציה ואינטגרלים מוכרים

12.1 שיטות אינטגרציה מוכרות

1. שימוש בשברים חלקיים

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \int \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} dx = \int \left(\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \right) dx \left[A = B = \frac{1}{2} \right] = \frac{\int \frac{1}{1-x} dx + \int \frac{1}{1+x} dx}{2}$$

2. שימוש בהצבה

$$\int \frac{x}{1-x^2} dx \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ dx = \frac{du}{2x} \end{array} \right] = \int \frac{x}{1-u} \cdot \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{1-u} du$$

3. אינטגרציה בחלקים

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

4. דרך נוספת - שימוש בחלוקת פולינומים

ניקח לדוגמא את השאלה $x^3 - x^2 + 0x - 4 : x - 3$
תחילה נחלק את האיברים המובילים אחד בשני

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x-3 \overline{) x^3 - x^2 + 0x - 4} \end{array}$$

כעת נחסר את $(x-3)x^2$ מ- $x^3 - x^2$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x-3 \overline{) x^3 - x^2 + 0x - 4} \\ \underline{x^3 - 3x^2} \\ 2x^2 + 0x \end{array}$$

וכן הלאה....

$$\begin{array}{r}
 x^2+2x+3 \\
 x-3 \overline{) x^3 - x^2 + 0x - 4} \\
 \underline{x^3 - 3x^2 } \\
 2x^2 + 0x \\
 \underline{2x^2 - 3x } \\
 3x - 4 \\
 \underline{3x - 9} \\
 5
 \end{array}$$

$$\frac{x^3-x^2-4}{x-3} = x-3 \overline{) x^3 - x^2 + 0x - 4} = x^2 + 2x + 3 + \frac{5}{x-3} \quad \text{לכן}$$

12.2 אינטגרלים מוכרים

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, x > 0; \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \operatorname{csch} x dx = \tanh x + C$$

$$\int \operatorname{sech} x dx = -\coth x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

13 סכומי דרבו ואינטגרל מסוים

13.1 סכומי דרבו

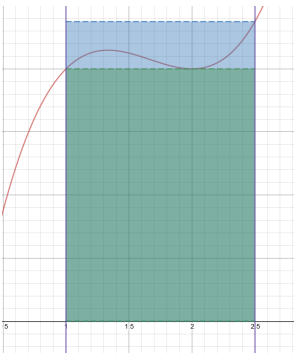
יהי קטע $I = [a_0, a_{n+1}]$ נסמן חלוקה של הקטע הנ"ל $I_{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}$ כך ש $a < \{a_i\}_{i=1}^n < b$ תהא חלוקה $I_{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}$, סכומי דרבו העליונים על החלוקה הנ"ל יהיו

$$\sum_{i=0}^n (a_{n+1} - a_n) \cdot \max \{f(x) | x \in [a_{n+1}, a_n]\}$$

והתחתונים

$$\sum_{i=0}^n (a_{n+1} - a_n) \cdot \min \{f(x) | x \in [a_{n+1}, a_n]\}$$

נסמן $D_{I_{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}}^\pm$ כסכומי דרבו התחתונים/עליונים
נסמן Π_n כ $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ כך שלכל i , $a_i = a_0 + \frac{b-a}{n} \cdot i$



13.2 פונקציה אינטגרלית, אינטגרל רימן ואינטגרל מסוים

נגיד כי פונקציה $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית רימן בקטע I אם $\lim_{n \rightarrow \infty} D_{\Pi_n}^+ - D_{\Pi_n}^- = 0$ או לחלופין $\lim_{n \rightarrow \infty} D_{\Pi_n}^- = \lim_{n \rightarrow \infty} D_{\Pi_n}^+ = S$ במקרה זה נסמן $\int_a^b f(x) dx = S$, נקרא לפעולה זו אינטגרל מסוים

כל פונקציה רציפה היא אינטגרלית ובפרט הפונקציות האלמנטריות (בסיסיות)

14 המשפט היסודי של החזו"א ומשפט ניוטון-לייבניץ

14.1 המשפט היסודי של החזו"א

תהא $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית בקטע $I = [a, b]$, נגדיר את הפונקציה צוברת השטח

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

1. F פונקציה רציפה

2. אם f רציפה ב x_0 אז F גזירה ב x_0 וכן $F'(x_0) = f(x_0)$

באופן כללי, אם f רציפה בקטע I אז F קדומה לה בקטע הנ"ל

14.2 משפט ניוטון-לייבניץ

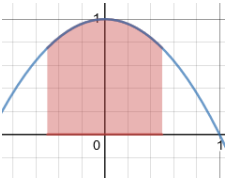
אם f רציפה בקטע $I = [a, b]$ (לכן $\int_a^x f$ של f) ונניח כי F קדומה של f , מתקיים

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

15 שימושי האינטגרל

15.1 חישוב שטח מתחת לגרף

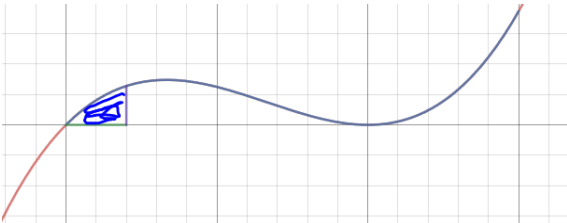
תהא f אינטגרבילית בקטע $I = [a, b]$, $\int_a^b f(x) dx$ הוא השטח מתחת ל- f בקטע $[a, b]$



15.2 חישוב אורך עקומה

תהא f אינטגרבילית בקטע $I = [a, b]$ ונרצה למצוא את אורך העקומה בין a ל- b , נעזר במשפט פתגורס ונראה כי

$$\int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$



15.3 נפח גוף סיבוב

15.3.1 נפח גוף סיבוב סביב ציר ה- x

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx$$

במקרה בו מדובר על נפח גוף סיבוב של שטח הכלוא בין 2 פונקציות f, g

$$\pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

15.3.2 נפח גוף סיבוב סביב ציר ה- y

$$2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

חלק III

חלק ג'

16 הגדרות בסיסיות בתורת המספרים

16.1 יחס ה

יהיו $m, k \in \mathbb{Z}$, נגיד כי $m|k$ אם קיים $i \in \mathbb{Z}$ כך ש- $m \cdot i = k$ או באופן כללי
 $m|k \iff \exists i \in \mathbb{Z}. m \cdot i = k$

16.2 mod

נגיד כי $b \bmod n = a$ אם "מ" קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך $b = m \cdot n + a$

$$b \bmod n = a \iff \exists m \in \mathbb{Z}. b = m \cdot n + a$$

16.3 gcd

$\gcd(a, b)$ הוא המחלק המשותף הגדול ביותר של a ו- b

$$\gcd(a, b) = \max \{m \in \mathbb{Z} | m|a \wedge m|b\}$$

17 משפט אוקלידס לקיום אינסוף ראשוניים

משפט אוקלידס אומר כי קיימים אינסוף ראשוניים.

צ"ל קיימים אינסוף ראשוניים, נניח בשלילה כי קיים מספר סופי n של ראשוניים, נסמן p_1, p_2, \dots, p_n נגדיר מספר $p = 1 + \prod_{i=1}^n p_i$, נשים לב כי p לא מתחלק באף p_i לכן p ראשוני וקיימים $n+1$ ראשוניים, סתירה! לכן קיימים אינסוף ראשוניים

18 מחלק משותף מירבי

כפי שראינו $\gcd(a, b)$ ימצא לנו את המחלק המשותף הגדול ביותר של a ו- b עבור $\gcd(a, b) = c$ קיים "ייצוג לינארי", כלומר קיימים $t, s \in \mathbb{Z}$ כך ש

$$t \cdot a + s \cdot b = c$$

מספרים זרים

עבור a, b כך ש $\gcd(a, b) = 1$ נגיד כי a ו- b זרים

משפט

עבור a, b זרים אם "מ" קיימים $s, t \in \mathbb{Z}$ כך ש $t \cdot a + s \cdot b = 1$

19 אלגוריתם אוקלידס

19.1 אלגוריתם אוקלידס

יהיו a, b , נרצה למצוא את $\gcd(a, b)$ אלגוריתם אוקלידס נותן פיתרון יעיל ופשוט לבעיה זו האלגוריתם משתמש בעובדה ש $\gcd(a, b) = \gcd(a, b + m \cdot a)$, לכן

$$a = m_1 \cdot b + n_1$$

$$b = m_2 \cdot n_1 + n_2$$

.

.

$$n_{i-3} = m_{i-1} \cdot n_{i-2} + c$$

$$n_{i-2} = m_i \cdot c + 0$$

לכן $\gcd(a, b) = c$
 באופן פשוט יותר נוכל לעבוד באופן הבא $\gcd(a, b) = \gcd(a \bmod b, b) = \dots = \gcd(c, 0) = c$

19.2 אלגוריתם אוקלידס המורחב

האלגוריתם המורחב עוזר לנו למצוא ייצוג לינארי לשיויון מהסוג $\gcd(a, b) = c$
 הוא עובד כמו האלגוריתם הקודם, רק אחורה,
 כלומר נתחיל מהשלב האחרון ונראה כי

$$n_{i-3} - m_{i-1} \cdot n_{i-2} = c$$

השלב הבא יהיה הצבת הערכים מהשיויונים שראינו מהאלגוריתם הקודם

$$n_{i-3} - m_{i-1} \cdot (n_{i-4} - m_{i-2} \cdot n_{i-3}) = c$$

וכן הלאה

דוגמא

נרצה למצוא את $\gcd(840, 138)$ ואת הייצוג הלינארי שלו

$$840 = 6 \cdot 138 + 12$$

$$138 = 11 \cdot 12 + 6$$

$$12 = 2 \cdot 6 + 0$$

לכן $\gcd(840, 138) = 6$
 כעת נמצא את הייצוג הלינארי שלהם

$$6 = 138 - 11 \cdot 12$$

$$6 = 138 - 11 \cdot (840 - 6 \cdot 138)$$

$$6 = 7 \cdot 138 - 11 \cdot 840$$

20 משפט על פריקות יחידה לראשוניים

לכל מספר שלם קיימת פריקות יחידה למספרים ראשוניים

21 משוואות דיאופנטיות לינאריות

תהא משוואה דיאופנטית $a \cdot x + b \cdot y = c$

21.1 קיום פתרון למשוואה

נראה כי אם $\gcd(a, b) \mid c$ קיים פתרון ולחלופין אם $\gcd(a, b) \nmid c$ לא קיים פתרון למשוואה

21.2 מציאת פתרון פרטי

בהנחה ולמשוואה קיים פתרון $(\gcd(a, b) \mid c)$, נסמן $d = \gcd(a, b)$, ונראה כי מכיון ש $d \mid c$ קיים e כך ש $d \cdot e = c$, כלומר $e = \frac{c}{d}$
 בנוסף מכיון ש $d = \gcd(a, b)$ קיים ייצוג לינארי $t \cdot a + s \cdot b = d$, נכפיל את שני האגפים ב e ונקבל

$$e \cdot t \cdot a + e \cdot s \cdot b = e \cdot d \rightarrow (e \cdot t) \cdot a + (e \cdot s) \cdot b = \frac{c}{d} \cdot d = c$$

לכן הפתרון הפרטי למשוואה $a \cdot x + b \cdot y = c$ יהיה $x_0 = e \cdot t, y_0 = e \cdot s$

21.3 מציאת כל הפתרונות

קבוצת כל הפתרונות היא

$$\left\{ \left\langle x_0 + \frac{b}{d} \cdot z, y_0 - \frac{a}{d} \cdot z \right\rangle \mid z \in \mathbb{Z} \right\}$$

22 הפיכות מודולו, משפט פרמה הקטן ומשפט השארית הסיני

22.1 משפט פרמה הקטן

יהיו $a, p \in \mathbb{P}$ כך ש $\gcd(a, p) = 1$ יתקיים

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

22.2 הפיכות מודולו

ידוע לנו על פעולות החיבור, חיסור וכפל במודולו, אך מה לגבי חילוק?
יהי $k \in \mathbb{Z}$, נרצה לדעת האם קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש $m \equiv \frac{1}{k} \pmod{n}$ או באופן שקול $m \cdot k \equiv 1 \pmod{n}$
משפט על הפיכות המודולו אומר כי אם k ו n זרים קיים m כך ש $m \cdot k \equiv 1 \pmod{n}$

$$\gcd(k, n) = 1 \iff \exists m \in \mathbb{Z}. m \cdot k \equiv 1 \pmod{n}$$

22.3 משפט השאריות הסיני

22.3.1 דוגמא

נרצה לפתור את מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{19} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

באופן שקול נוכל לפתור את

$$\begin{cases} x = 19a + 7 \\ x = 5b + 3 \end{cases}$$

נחסר את המשוואות אחת מהשנייה ונקבל

$$0 = 19a - 5b + 4 \rightarrow 4 = 5b - 19a$$

נראה כי קיים פתרון למשוואה מכיוון ש $\gcd(5, -19) = 1 \mid 4$, למשל -12

22.3.2 הכללה

באופן כללי כאשר נרצה לפתור מערכת משוואות מהצורה הבאה

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

לפי משפט השאריות הסיני, m_1, m_2, \dots, m_n זרים בזוגות שקול לקיום פתרון למערכת המשוואות

22.3.3 פתרון פרטי

נסמן $n_i = \frac{m}{m_i}$, נשים לב כי m_i, n_i זרים ($\gcd(m_i, n_i) = 1$), לכן קיימים s_i, t_i כך ש $s_i \cdot n_i + t_i \cdot m_i = 1$.
 נסמן $e_i = s_i \cdot n_i$ ונראה כי $e_i + t_i \cdot m_i = 1$ לכן $e_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ לכן $e_i = -t_i \cdot m_i + 1$.
 באופן כללי אם נקח $j \neq i$ יתקיים $e_i \equiv 0 \pmod{m_j}$ מכיוון ש $m_j | n_i | e_i$ לכן כתלות ב i ו j נגדערו של $e_i \pmod{m_j} = \delta_{i,j}$

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

הפתרון הפרטי של מערכת המשוואות תהיה $x_0 = \sum_{k=1}^n a_k \cdot e_k$ שכן

$$x_0 \pmod{m_i} = \left(\sum_{k=1}^n a_k \cdot e_k \right) \pmod{m_i} = \sum_{k=1}^n (a_k \pmod{m_i}) \cdot (e_k \pmod{m_i}) =$$

$$0 \cdot (a_1 \pmod{m_i}) + \dots + 1 \cdot (a_i \pmod{m_i}) + \dots = a_i \pmod{m_i}$$

22.3.4 פתרון כללי

קבוצת הפתרונות למערכת המשוואות הנ"ל תהיה

$$\{x_0 + m \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

חלק IV

חלק ד'

23 השערת הרצף

24 השערת רימן

25 השערת הנאד

26 סודרים

