סיכומי הרצאות - חדו"א 1א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

1 נוסחאות כלליות

בינום: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

א"ש הממוצעים: $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \cdots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$

א"ש ברנולי: לכל $x > -1, n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(1+x)^n \geq 1+nx$

א"ש המשולש: $|a+b| \leq |a|+|b|$

2 חסמים עליונים ותחתונים

M יקרא **חסם מלעיל** של A אם לכל $x \in A$, $x \leq M$.
M יקרא **חסם מלרע** של A אם לכל $x \in A$, $M \leq x$.

אקסיומת השלמות: לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל קיים חסם עליון קטן ביותר, ונסמן אותו ב־$\sup A$.

טענה שימושית: אם $b = \sup A$ אז לכל $\varepsilon > 0$, קיים $a \in A$ כך ש־$b-\varepsilon < a \leq b$.

הגדרה: נאמר ש־A <u>צפופה ב־B</u> אם לכל $b \in B$ ולכל $\varepsilon > 0$, קיים $a \in A$ כך ש־$|b-a| < \varepsilon$.

טענה: $S \subseteq \mathbb{R}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$ $\iff$ לכל $a < b \in \mathbb{R}$, $(a,b) \cap S \neq \emptyset$.

טענה: לכל $a < b$, קיים q כך ש־$q \in (a,b)$.

הוכחה: נניח ש־$a > 0$. יהי k כך ש־$0 < \frac{1}{k} < b-a$. יהי m המספר הקטן ביותר כך ש־$\frac{m}{k} \geq b$. אז $\frac{m-1}{k} < b$. בנוסף, $a+\frac{1}{k} < a+(b-a) = b$ ולכן $a < \frac{m-1}{k}$. אם כך, $a < \frac{m-1}{k} < b$ וסיימנו. אם $a \leq 0$, נוסיף את $x = \lceil |a|+17 \rceil$ ל־a,b ועבור $c = a+x, d = b+x$ קיים $q \in (a+x, b+x)$, ולכן $\mathbb{Q} \ni q-x \in (a,b)$ מש"ל.

טענה: $\mathbb{Q}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$ ו־$[a,b] \cap \mathbb{Q}$ צפופה ב־$[a,b]$.

3 סדרות

נסמן סדרות ב־(a_n) או $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

נאמר שסדרה **חסומה מלעיל** אם קיים M כך שלכל n, $a_n \leq M$.

נאמר שסדרה **חסומה מלרע** אם קיים M כך שלכל n, $M \leq a_n$.

נאמר שסדרה **חסומה** אם קיים M כך שלכל n, $|a_n| \leq M$.

3.1 הגדרת הגבול

נאמר שהגבול של (a_n) הוא L, ונסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ או $a_n \to L$, אם:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall n > n_0. \, |a_n - L| < \varepsilon$$

נאמר שהגבול של (a_n) הוא ∞, ונסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ או $a_n \to \infty$, אם:

$$\forall M > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall n > n_0. a_n > M$$

משפט (יחידות הגבול): אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L, \lim_{n\to\infty} a_n = L'$ אז $L = L'$.

סדרות קושי: זהו תנאי שקול להתכנסות, שלא צריך לדעת בשבילו את L:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall m,n \geq n_0. \, |a_m - a_n| < \varepsilon$$

3.2 חשבון גבולות

יהיו $(a_n),(b_n)$ סדרות כך ש־$a_n \to a, b_n \to b$. אזי:

- $a_n + b_n \to a + b$
- $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ אם $b_n \neq 0$ לכל n ו־$b \neq 0$
  - אם $b_n \neq 0$ לכל n ו־$b = 0$ אז $\frac{1}{b_n} \to \infty$
- $|a_n| \to |a|$
- $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$ אם $a_n \geq 0$ לכל n

3.3 טענות על גבולות

טענה: יהיו $(a_n) \to a, (b_n) \to b$ סדרות מתכנסות כך ש־$a_n \leq b_n$. אז: $a \leq b$.

כלל הסנדוויץ': יהיו x_n, y_n, z_n סדרות כך ש־$x_n \leq z_n \leq y_n$ (כמעט) לכל n. אם $x_n \to x, y_n \to x$, אז $z_n \to x$.

הרחבה: אם $x_n \geq y_n$ ו־$y_n \to \infty$ אז $x_n \to \infty$.

טענה: תהי (a_n) כך ש־$a_n \to L \neq 0$ ויהי $0 < r < |L|$. אז קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$, $|a_n| > r$.

3.4 מבחן ה[(שורש)(מנה)] (הגבולי)?

מבחן השורש: $a_n \geq 0$ וקיים $0 \leq \alpha < 1$ כך ש־$(a_n)^{1/n} \leq \alpha$ לכל n. אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

מבחן השורש הגבולי: $a_n > 0$ ו־$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = L$. אזי,

- אם $L < 1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- אם $L > 1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

משפט המנה הגבולי: $a_n > 0$ ו־$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. אזי,

- אם $L < 1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- אם $L > 1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

3.5 סדרות מונוטוניות

טענה: תהי (a_n) מונוטונית עולה וחסומה מלעיל. אזי: $a_n \to \sup a_n$.

טענה: תהי (a_n) מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל. אזי: $a_n \to \infty$.

3.6 תתי סדרות

תהי (a_n) סדרה ו־(n_k) סדרה עולה ממש של טבעיים. אז $b_k = a_{n_k}$ תת סדרה של (a_n) ונסמן ב־$(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$.

משפט הירושה: תהי (a_n) סדרה ו־(a_{n_k}) תת־סדרה.

- אם $a_n \to L$ אז $a_{n_k} \to L$
- אם a_n מונוטונית עולה אז a_{n_k} מונוטונית עולה
- אם a_n חסומה אז a_{n_k} חסומה

משפט בולצנו־ויירשטראס: לכל סדרה חסומה יש תת־סדרה מתכנסת ומונוטונית.
אם הסדרה לא חסומה יש תת־סדרה מונוטונית מתבדרת ל־$\pm\infty$.

3.6.1 גבולות חלקיים

הגדרה: L יקרא גבול חלקי אם קיימת $a_{n_k} \to L$. נסמן ב־$\hat{\mathcal{P}}(a_n)$ את קבוצת הגבולות החלקיים, ונסמן ב־$\mathcal{P}(a_n)$ את קבוצת הגבולות החלקיים בלי $\pm\infty$.

בנוסף, נגדיר: $\liminf a_n = \underline{\lim} a_n = \inf \hat{\mathcal{P}}(a_n)$, $\limsup a_n = \overline{\lim} a_n = \sup \hat{\mathcal{P}}(a_n)$.

הערה: על פי בולצנו־ויירשטראס, תמיד קיים גבול חלקי

טענה שימושית: תהי (a_n) חסומה. $L = \limsup a_n \iff$:

1. לכל $\varepsilon > 0$, $a_n < L + \varepsilon$ כמעט תמיד (חוץ ממספר סופי של איברים)
2. לכל $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon < a_n$ תופעה שכיחה (באינסוף איברים)

טענה: (a_n) חסומה $\Longleftarrow$ $\limsup a_n, \liminf a_n$ קיימים והם גבולות חלקיים.

טענה: (a_n) אינה חסומה מלעיל/מלרע $\iff$ $-\infty/\infty$ גבול חלקי

טענה: (a_n) מתכנסת במובן הרחב $\iff$ יש גבול חלקי יחיד

טענה: בסדרה חסומה, $\inf a_n \le \liminf a_n \le \limsup a_n \le \sup a_n$

קבוצה סגורה: תהי $B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה. נאמר ש־B קבוצה סגורה אם לכל סדרה $(x_n) \subseteq B$, $x_n \to x \implies x \in B$.
משפט: אם (a_n) חסומה אז $\mathcal{P}(a_n)$ קבוצה סגורה.

4 טורים

תהי (a_n) סדרה. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.
הגדרה: נאמר ש־$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס $\iff$ סדרת הסכומים החלקיים s_n מתכנסת.

הערה: הטור הוא עצם נפרד מסדרת הסכומים החלקיים, אסור לבלבל ביניהם

הטור הגיאומטרי: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ עבור $|q| < 1$.

טענה: אם $\sum a_n$ מתכנס אז $a_n \to 0$.

קריטריון קושי להתכנסות טורים: $\forall \varepsilon > 0. \exists n_0. \forall m \ge n_0. \forall p \in \mathbb{N}. \left| \sum_{k=m}^{m+p} a_k \right| < \varepsilon$

חשבון טורים:

- אם $\sum a_n = K, \sum b_n = L$ מתכנסים אז $\sum (a_n + b_n) = K + L$ מתכנס
- אם $\sum a_n = L, \alpha \in \mathbb{R}$ מתכנס אז $\sum \alpha a_n = \alpha L$ מתכנס

4.1 טור חיובי

נאמר ש־$\sum a_n$ **טור חיובי** אם $a_n \geq 0$ לכל n

משפט: טור חיובי מתכנס $\iff$ s_n חסומה מלעיל

משפט: יהי $\sum a_n$ טור חיובי. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז כל טור שמתקבל מסידור מחדש של האיברים בו גם מתכנס ולאותו הגבול.

4.2 מבחן ה[(השוואה)(שורש)(מנה)] (הגבולי)? (לטורים חיוביים)?

סימון: יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים. אם החל ממקום מסוים, $a_n \geq b_n$, נסמן $\sum a_n \succcurlyeq \sum b_n$.

מבחן ההשוואה לטורים חיוביים: יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים חיוביים כך ש־$\sum a_n \succcurlyeq \sum b_n$. אז:

1. אם $\sum a_n$ מתכנס, $\sum b_n$ מתכנס
2. אם $\sum b_n$ מתבדר, $\sum a_n$ מתבדר

מבחן השורש לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי ויהי $0 < q < 1$.
אם החל ממקום מסוים, $\sqrt[n]{a_n} < q$, אז $\sum a_n$ מתכנס.

מבחן המנה לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי כך ש־$a_n > 0$ לכל n.

1. אם קיים $0 < q < 1$ כך שהחל ממקום מסוים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ אז הטור מתכנס
2. אם החל ממקום מסוים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ אז הטור מתבדר

מבחן המנה הגבולי לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי כך ש־$a_n > 0$ לכל n.

1. אם $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, $\sum a_n$ מתכנס
2. אם $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, $\sum a_n$ מתבדר

מבחן השורש הגבולי: יהי $\sum a_n$ טור חיובי.

1. אם $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$ אז $\sum a_n$ מתכנס
2. אם $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$ אז $\sum a_n$ מתבדר

4.3 טור מתכנס בהחלט

נאמר ש־$\sum a_n$ **מתכנס בהחלט** אם $\sum |a_n|$ מתכנס.
אם טור לא מתכנס בהחלט נאמר שהוא "**מתכנס בתנאי**"

טענה: אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אז $\sum a_n$ מתכנס

טענה שימושית: נסמן $\overline{a}_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \underline{a}_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$.

$$\begin{array}{lll} a_n \geq 0 & \overline{a}_n = a_n & \underline{a}_n = 0 \\ a_n \leq 0 & \overline{a}_n = 0 & \underline{a}_n = -a_n \end{array}$$

ומתקיים ש־$a_n = \overline{a}_n - \underline{a}_n$.

טענה: אם $\sum \overline{a}_n, \sum \underline{a}_n$ מתכנסים אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
טענה: אם $\sum a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum \overline{a}_n, \sum \underline{a}_n \to \infty$.

4.4 טורי חזקות

טור חזקות הוא טור מהצורה $\sum a_n x^n$ (או $\sum a_n (x-x_0)^n$, אבל פחות מתייחסים אליו).

טור חזקות בהכרח מתכנס באיזשהו x, למשל 0.

משפט Abel: לכל טור חזקות $\sum a_n x^n$ קיים "מספר" $R \in [0,\infty]$ (שנקרא רדיוס ההתכנסות) כך שלכל $x \in (-R,R)$ הטור מתכנס בהחלט, ול־$x > R, x < -R$ הטור מתבדר.

משפט Cauchy-Hadamard: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות, רדיוס ההתכנסות הוא: $R = \dfrac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$

(כאשר $\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0$).

הערה: משפט Abel לא מתייחס ל־$\pm R$, צריך לבדוק עבורם בנפרד

4.5 טענות נוספות על טורים

טענה (הכנסת סוגריים): יהי $\sum a_n$ טור מתכנס ו־n_k סדרה עולה של אינדקסים. נסמן $A_1 = a_1 + \cdots + a_{n_1}, A_2 = a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}, \ldots$. אז הטור $\sum A_n$ מתכנס ולאותו הגבול.

טענה הפוכה: תהי (a_n) סדרה ו־n_k סדרה עולה של אינדקסים. אם כל האיברים בתוך כל סוגריים, $(a_j)_{n_k+1}^{n_{k+1}}$, בעלי אותו סימן אז הטענה ההפוכה נכונה ־ אם $\sum A_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס.

שימוש: בתנאים הנכונים, $\sum a_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + \ldots$

משפט לייבניץ על טורים מתכנסים: תהי (a_n) סדרה אי־שלילית יורדת ל־0. אזי הטור $\sum (-1)^n a_n$ מתכנס.

טענה: יהיו $(a_n), (b_n)$ סדרות. $\sum a_n b_n$ מתכנס אם אחד מהניסוחים הבאים מתקיים:

תנאי Dirichlet: $b_n \nearrow 0$ או $b_n \searrow 0$ ו־$|s_n^a| < M$

תנאי Abel: $b_n \searrow$ או $b_n \nearrow$ ו־$|b_n| < M$ ו־$\sum a_n$ מתכנס

משפט Riemann: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בתנאי. אזי לכל $-\infty \le s \le \infty$ ניתן לסדר את איברי הטור כך שיתכנס ל־s או שאפילו לא יתכנס במובן הרחב.

5 פונקציות

5.1 הגדרת הגבול

בשביל $\lim_{x\to x_0} f(x)$ נדרוש ש־$f(x)$ מוגדרת בסביבה נקובה כלשהי.

Cauchy	$\forall\varepsilon > 0.\exists\delta > 0.\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}.\, |f(x) - L| < \varepsilon$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$
Heine	לכל $(x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}$ ו־I סביבה נקובה, אם $x_n \to x_0$ אז $f(x_n) \to L$	
Cauchy	$\forall\varepsilon > 0.\exists\delta > 0.\forall x \in (x_0, x_0+\delta).\, |f(x) - L| < \varepsilon$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$
Heine	$(x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}$ ו־$x_0 < x_n \to x_0$ אז $f(x_n) \to L$	
Cauchy	$\forall\varepsilon > 0.\exists M > 0.\forall x > M.\, |f(x) - L| < \varepsilon$	$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = L$
Heine	$x_n \to \infty$ אז $f(x_n) \to L$	
Cauchy	$\forall M > 0.\exists\delta > 0.\forall x \in (x_0, x_0+\delta).\, f(x) < -M$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$
Heine	$(x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}$ ו־$x_0 < x_n \to x_0$ אז $f(x_n) \to -\infty$	

5.2 חשבון גבולות (דומה לסדרות)

יהיו $f,g:I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ ו־$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L_1,\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=L_2$. אזי:

- $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+g(x)=L_1+L_2$
- $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=L_1\cdot L_2$
- אם $L_2\neq 0$ (ואם קיימת סביבה נקובה בה $g(x)\neq 0$): $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L_1}{L_2}$

משפט (הרכבה): יהיו I,J קטעים פתוחים ו־$x_0\in I, y_0\in J$. תהיינה $f:I\setminus\{x_0\}\to J\setminus\{y_0\}$ ו־$g:J\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$. אם $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=y_0$ ו־$\lim\limits_{y\to y_0}g(y)=L$, אז: $\lim\limits_{x\to x_0}g(f(x))=L$.

5.3 גבולות שימושיים

פולינומים: בגלל ש־$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{p(x)}{q(x)}=\dfrac{p(x_0)}{q(x_0)}$ (מחשבון גבולות).