סיכומי **הרצאות** - חדו"א 1א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

1 נוסחאות כלליות

בינום: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

א"ש הממוצעים: $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot\cdots\cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$

א"ש ברנולי: לכל $x>-1, n\in\mathbb{N}$ מתקיים $(1+x)^n \geq 1+nx$

א"ש המשולש: $|a+b| \leq |a|+|b|$

2 חסמים עליונים ותחתונים

M יקרא **חסם מלעיל** של A אם לכל $x\in A$, $x\leq M$.
M יקרא **חסם מלרע** של A אם לכל $x\in A$, $M\leq x$.

אקסיומת השלמות: לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל קיים חסם עליון קטן ביותר, ונסמן אותו ב־$\sup A$.

טענה שימושית: אם $b=\sup A$ אז לכל $\varepsilon>0$, קיים $a\in A$ כך ש־$b-\varepsilon<a\leq b$.

הגדרה: נאמר ש־A __צפופה ב־B__ אם לכל $b\in B$ ולכל $\varepsilon>0$, קיים $a\in A$ כך ש־$|b-a|<\varepsilon$.

טענה: $S\subseteq\mathbb{R}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$ $\iff$ לכל $a<b\in\mathbb{R}$, $(a,b)\cap S\neq\emptyset$.

טענה: לכל $a<b$, קיים q כך ש־$q\in(a,b)$.

הוכחה: נניח ש־$a>0$. יהי k כך ש־$0<\frac{1}{k}<b-a$. יהי m המספר הקטן ביותר כך ש־$b\leq\frac{m}{k}$. אז $\frac{m-1}{k}<b$. בנוסף, $a+\frac{1}{k}<a+(b-a)=b$ ולכן $a<\frac{m-1}{k}$. אם כך, $a<\frac{m-1}{k}<b$ וסיימנו. אם $a\leq 0$, נוסיף את $x=\lceil|a|+17\rceil$ ל־a,b ועבור $c=a+x, d=b+x$ קיים $q\in(a+x,b+x)$, ולכן $(a,b)\ni q-x\in\mathbb{Q}$ מש"ל.

טענה: $\mathbb{Q}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$ ו־$[a,b]\cap\mathbb{Q}$ צפופה ב־$[a,b]$.

3 סדרות

נסמן סדרות ב־(a_n) או $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
נאמר שסדרה **חסומה מלעיל** אם קיים M כך שלכל n, $a_n\leq M$.
נאמר שסדרה **חסומה מלרע** אם קיים M כך שלכל n, $M\leq a_n$.
נאמר שסדרה **חסומה** אם קיים M כך שלכל n, $|a_n|\leq M$.

3.1 הגדרת הגבול

נאמר שהגבול של (a_n) הוא L, ונסמן $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ או $a_n\to L$, אם:

$$\forall\varepsilon>0.\exists n_0\in\mathbb{N}.\forall n>n_0.\,|a_n-L|<\varepsilon$$

נאמר שהגבול של (a_n) הוא ∞, ונסמן $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ או $a_n\to\infty$, אם:

$$\forall M>0.\exists n_0\in\mathbb{N}.\forall n>n_0.a_n>M$$

משפט (יחידות הגבול): אם $\lim_{n\to\infty}a_n=L, \lim_{n\to\infty}a_n=L'$ אז $L=L'$.

סדרות קושי: זהו תנאי שקול להתכנסות, שלא צריך לדעת בשבילו את L:

$$\forall\varepsilon>0.\exists n_0\in\mathbb{N}.\forall m,n\geq n_0.\,|a_m-a_n|<\varepsilon$$

3.2 חשבון גבולות

יהיו $(a_n),(b_n)$ סדרות כך ש־$a_n \to a, b_n \to b$. אזי:

- $a_n + b_n \to a + b$
- $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ אם $b_n \neq 0$ לכל n ו־$b \neq 0$
  - אם $b_n \neq 0$ לכל n ו־$b = 0$ אז $\frac{1}{b_n} \to \infty$
- $|a_n| \to |a|$
- $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$ אם $a_n \geq 0$ לכל n

3.3 טענות על גבולות

טענה: יהיו $(a_n) \to a, (b_n) \to b$ סדרות מתכנסות כך ש־$a_n \leq b_n$. אז: $a \leq b$.

כלל הסנדוויץ': יהיו x_n, y_n, z_n סדרות כך ש־$x_n \leq z_n \leq y_n$ (כמעט) לכל n. אם $x_n \to x, y_n \to x$, אז $z_n \to x$.

הרחבה: אם $x_n \geq y_n$ ו־$y_n \to \infty$ אז $x_n \to \infty$.

טענה: תהי (a_n) כך ש־$a_n \to L \neq 0$ ויהי $0 < r < |L|$. אז קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$, $|a_n| > r$.

משפט (שטולץ): יהיו a_n, b_n סדרות כך ש־b_n מונוטונית עולה ו־$b_n \to \infty$, או ש־a_n, b_n סדרות מונוטוניות מתכנסות ל־0.

אזי, אם $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$ במובן הרחב אז $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

3.4 מבחן ה[(שורש)(מנה)] (הגבולי)?

מבחן השורש: $a_n \geq 0$ וקיים $0 \leq \alpha < 1$ כך ש־$(a_n)^{1/n} \leq \alpha$ לכל n. אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

מבחן השורש הגבולי: $a_n > 0$ ו־$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = L$. אזי,

- אם $L < 1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- אם $L > 1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

משפט המנה הגבולי: $a_n > 0$ ו־$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. אזי,

- אם $L < 1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- אם $L > 1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

משפט (דלאמבר): תהי (a_n) סדרה חיובית כך ש־$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$, סופי או אינסופי. אזי, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$.

משפט המנה הכללי: $a_n > 0$

- אם קיים $L < 1$ כך שהחל ממקום מסוים $a_{n+1} < La_n$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- אם קיים $L > 1$ כך שהחל ממקום מסוים $a_{n+1} > La_n$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

3.5 סדרות מונוטוניות

טענה: תהי (a_n) מונוטונית עולה וחסומה מלעיל. אזי: $a_n \to \sup a_n$.

טענה: תהי (a_n) מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל. אזי: $a_n \to \infty$.

3.6 תתי סדרות

תהי (a_n) סדרה ו־(n_k) סדרה עולה ממש של טבעיים. אז $b_k = a_{n_k}$ תת סדרה של (a_n) ונסמן ב־$(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$.

משפט הירושה: תהי (a_n) סדרה ו־(a_{n_k}) תת־סדרה.

- אם $a_n \to L$ אז $a_{n_k} \to L$
- אם a_n מונוטונית עולה אז a_{n_k} מונוטונית עולה
- אם a_n חסומה אז a_{n_k} חסומה

משפט בולצנו־ויירשטראס: לכל סדרה חסומה יש תת־סדרה מתכנסת ומונוטונית.
אם הסדרה לא חסומה יש תת־סדרה מונוטונית מתבדרת ל־$\pm\infty$.

3.6.1 גבולות חלקיים

הגדרה: L יקרא גבול חלקי אם קיימת $a_{n_k} \to L$. נסמן ב־$\hat{\mathcal{P}}(a_n)$ את קבוצת הגבולות החלקיים, ונסמן ב־$\mathcal{P}(a_n)$ את קבוצת הגבולות החלקיים בלי $\pm\infty$.

בנוסף, נגדיר: $\liminf a_n = \underline{\lim} a_n = \inf \hat{\mathcal{P}}(a_n)$, $\limsup a_n = \overline{\lim} a_n = \sup \hat{\mathcal{P}}(a_n)$.

הערה: על פי בולצנו־ויירשטראס, תמיד קיים גבול חלקי

טענה שימושית: תהי (a_n) חסומה. $L = \limsup a_n \iff$:

1. לכל $\varepsilon > 0$, $a_n < L + \varepsilon$ כמעט תמיד (חוץ ממספר סופי של איברים)
2. לכל $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon < a_n$ תופעה שכיחה (באינסוף איברים)

טענה: L גבול חלקי של (a_n) $\iff$ לכל $\varepsilon > 0$, $\{n \mid |a_n - L| < \varepsilon\}$ אינסופית

טענה: (a_n) חסומה $\Longleftarrow$ $\limsup a_n, \liminf a_n$ קיימים והם גבולות חלקיים

טענה: (a_n) אינה חסומה מלעיל/מלרע $\iff$ $-\infty/\infty$ גבול חלקי

טענה: (a_n) מתכנסת במובן הרחב $\iff$ יש גבול חלקי יחיד

טענה: בסדרה חסומה, $\inf a_n \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq \sup a_n$

קבוצה סגורה: תהי $B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה. נאמר ש־B קבוצה סגורה אם לכל סדרה $(x_n) \subseteq B$, $x_n \to x \implies x \in B$.
משפט: אם (a_n) חסומה אז $\mathcal{P}(a_n)$ קבוצה סגורה.

4 טורים

תהי (a_n) סדרה. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.
הגדרה: נאמר ש־$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס $\iff$ סדרת הסכומים החלקיים s_n מתכנסת.

הערה: הטור הוא עצם נפרד מסדרת הסכומים החלקיים, אסור לבלבל ביניהם

הטור הגיאומטרי: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ עבור $|q| < 1$.

טענה: אם $\sum a_n$ מתכנס אז $a_n \to 0$.

קריטריון קושי להתכנסות טורים: $\forall \varepsilon > 0 . \exists n_0 . \forall m \geq n_0 . \forall p \in \mathbb{N} . \left| \sum_{k=m}^{m+p} a_k \right| < \varepsilon$

חשבון טורים:

- אם $\sum a_n = K, \sum b_n = L$ מתכנסים אז $\sum (a_n + b_n) = K + L$ מתכנס
- אם $\sum a_n = L, \alpha \in \mathbb{R}$ מתכנס אז $\sum \alpha a_n = \alpha L$ מתכנס

4.1 טור חיובי

נאמר ש־$\sum a_n$ **טור חיובי** אם $a_n \geq 0$ לכל n

משפט: טור חיובי מתכנס $\iff$ s_n חסומה מלעיל

משפט: יהי $\sum a_n$ טור חיובי. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז כל טור שמתקבל מסידור מחדש של האיברים בו גם מתכנס ולאותו הגבול.

4.2 מבחן ה[(השוואה)(שורש)(מנה)] (הגבולי)? לטורים חיוביים

סימון: יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים. אם החל ממקום מסוים, $a_n \geq b_n$, נסמן $\sum a_n \succcurlyeq \sum b_n$.
מבחן ההשוואה לטורים חיוביים: יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים חיוביים כך ש־$\sum a_n \succcurlyeq \sum b_n$. אז:

1. אם $\sum a_n$ מתכנס, $\sum b_n$ מתכנס
2. אם $\sum b_n$ מתבדר, $\sum a_n$ מתבדר

מבחן ההשוואה הגבולי לטורים חיוביים: יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים חיוביים כך ש־$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

1. אם $L = 0$, אז אם $\sum b_n$ מתכנס גם $\sum a_n$ מתכנס ואם $\sum a_n$ מתבדר אז גם $\sum b_n$ מתבדר
2. אם $L = \infty$, אז אם $\sum b_n$ מתבדר גם $\sum a_n$ מתבדר ואם $\sum a_n$ מתכנס אז גם $\sum b_n$ מתכנס

מבחן השורש לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי ויהי $0 < q < 1$.
אם החל ממקום מסוים, $\sqrt[n]{a_n} < q$, אז $\sum a_n$ מתכנס.
מבחן השורש הגבולי לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי.

1. אם $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$ אז $\sum a_n$ מתכנס
2. אם $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$ אז $\sum a_n$ מתבדר

מבחן המנה לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי כך ש־$a_n > 0$ לכל n.

1. אם קיים $0 < q < 1$ כך שהחל ממקום מסוים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ אז הטור מתכנס
2. אם החל ממקום מסוים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ אז הטור מתבדר

מבחן המנה הגבולי לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי כך ש־$a_n > 0$ לכל n.

1. אם $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ אז $\sum a_n$ מתכנס
2. אם $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ אז $\sum a_n$ מתבדר

מבחן העיבוי לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי כך ש־$a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ (מונוטוני יורד חלש). אזי, $\sum a_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס.

4.3 טור מתכנס בהחלט

נאמר ש־$\sum a_n$ **מתכנס בהחלט** אם $\sum |a_n|$ מתכנס.
אם טור לא מתכנס בהחלט נאמר שהוא "**מתכנס בתנאי**"

טענה: אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אז $\sum a_n$ מתכנס

טענה שימושית: נסמן $\underline{a}_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}, \overline{a}_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}$.

$$\begin{array}{lll} a_n \geq 0 & \overline{a}_n = a_n & \underline{a}_n = 0 \\ a_n \leq 0 & \overline{a}_n = 0 & \underline{a}_n = -a_n \end{array}$$

ומתקיים ש־$a_n = \overline{a}_n - \underline{a}_n$.

טענה: אם $\sum \overline{a}_n, \sum \underline{a}_n$ מתכנסים אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
טענה: אם $\sum a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum \overline{a}_n, \sum \underline{a_n} \to \infty$.

4.4 טורי חזקות

טור חזקות הוא טור מהצורה $\sum a_n x^n$ (או $\sum a_n (x - x_0)^n$, אבל פחות מתייחסים אליו).

טור חזקות בהכרח מתכנס באיזשהו x, למשל 0.

משפט Abel: לכל טור חזקות $\sum a_n x^n$ קיים "מספר" $R \in [0, \infty]$ (שנקרא רדיוס ההתכנסות) כך שלכל $x \in (-R, R)$ הטור מתכנס בהחלט, ול־$x > R, x < -R$ הטור מתבדר.

משפט Cauchy-Hadamard: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות, רדיוס ההתכנסות הוא: $R = \dfrac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$

(כאשר $\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0$).

הערה: משפט Abel לא מתייחס ל־$\pm R$, צריך לבדוק עבורם בנפרד

4.5 טענות נוספות על טורים

טענה (הכנסת סוגריים): יהי $\sum a_n$ טור מתכנס ו־n_k סדרה עולה של אינדקסים. נסמן $A_1 = a_1 + \dots + a_{n_1}, A_2 = a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}, \dots$. אז הטור $\sum A_n$ מתכנס ולאותו הגבול.

טענה הפוכה: תהי (a_n) סדרה ו־n_k סדרה עולה של אינדקסים. אם כל האיברים בתוך סוגריים, $(a_j)_{n_k+1}^{n_{k+1}}$, בעלי אותו סימן אז הטענה ההפוכה נכונה ־ אם $\sum A_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס.

שימוש: בתנאים הנכונים, $\sum a_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + \ldots$

משפט לייבניץ על טורים מתכנסים: תהי (a_n) סדרה אי־שלילית יורדת ל־0. אזי הטור $\sum (-1)^n a_n$ מתכנס.

טענה: יהיו $(a_n), (b_n)$ סדרות. $\sum a_n b_n$ מתכנס אם אחד מהניסוחים הבאים מתקיים:

תנאי Dirichlet: $b_n \nearrow 0$ או $b_n \searrow 0$ ו־$|s_n^a| < M$

תנאי Abel: b_n מונוטונית וחסומה ו־$\sum a_n$ מתכנס

משפט Riemann: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בתנאי. אזי לכל $-\infty \leq s \leq \infty$ ניתן לסדר את איברי הטור כך שיתכנס ל־s או שאפילו לא יתכנס במובן הרחב.

5 פונקציות

5.1 הגדרת הגבול

בשביל $\lim_{x\to x_0} f(x)$ נדרוש ש־$f(x)$ מוגדרת בסביבה נקובה כלשהי.

Cauchy	$\forall\varepsilon > 0.\exists\delta > 0.\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.\, |f(x) - L| < \varepsilon$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$
Heine	לכל $\{x_0\} \setminus I \supseteq (x_n)$ ו־I סביבה נקובה, אם $x_n \to x_0$ אז $f(x_n) \to L$	
Cauchy	$\forall\varepsilon > 0.\exists\delta > 0.\forall x \in (x_0, x_0 + \delta).\, |f(x) - L| < \varepsilon$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$
Heine	$(x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}$ ו־$x_0 < x_n \to x_0$ אז $f(x_n) \to L$	
Cauchy	$\forall\varepsilon > 0.\exists M > 0.\forall x > M.\, |f(x) - L| < \varepsilon$	$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = L$
Heine	$x_n \to \infty$ אז $f(x_n) \to L$	
Cauchy	$\forall M > 0.\exists\delta > 0.\forall x \in (x_0, x_0 + \delta).\, f(x) < -M$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$
Heine	$(x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}$ ו־$x_0 < x_n \to x_0$ אז $f(x_n) \to -\infty$	

5.2 חשבון גבולות (דומה לסדרות)

יהיו $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ ו־$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$. אזי:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2$
- אם $L_2 \neq 0$ (ואם קיימת סביבה נקובה בה $g(x) \neq 0$): $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$

משפט (הרכבה): יהיו I, J קטעים פתוחים ו־$x_0 \in I, y_0 \in J$. תהיינה $f : I \setminus \{x_0\} \to J \setminus \{y_0\}$ ו־$g : J \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. אם $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ ו־$\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = L$, אז: $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = L$.

5.3 גבולות שימושיים

- **פולינומים:** בגלל ש־$\lim_{x\to x_0} x = x_0$, $\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$ (מחשבון גבולות).
- עבור $a > 0$, $\lim_{x\to\infty} a^{1/x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

5.4 רציפות

הגדרה: יהי I קטע פתוח ויהי $x_0 \in I$. תהי $f : I \to \mathbb{R}$. אז:

- נאמר ש־f רציפה ב־x_0 אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- נאמר ש־f רציפה ב־I אם f רציפה בכל נקודה ב־I

חשבון רציפות (נובע מחשבון גבולות): יהי I קטע פתוח ו־$x_0 \in I$ (נכון גם לחד־צדדי), ויהיו $f, g : I \to \mathbb{R}$ רציפות.

1. $f + g$ רציפה ב־x_0
2. $f \cdot g$ רציפה ב־x_0
3. אם $g(x) \neq 0$ בסביבת x_0 אז $\frac{f}{g}$ רציפה ב־x_0

משפט (הרכבה): יהיו $f : A \to \mathbb{R}, g : B \to \mathbb{R}, x_0 \in A$ כך ש־$B \subseteq f(A)$. אם f רציפה ב־x_0 ו־g רציפה ב־$g(x_0)$, אז $g \circ f$ רציפה ב־x_0.

רציפה מימין/שמאל: תהי $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, אז f רציפה מימין ב־a $\iff$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

טענה: f רציפה ב־x_0 $\iff$ f רציפה מימין ומשמאל ב־x_0

מיון נקודות אי רציפות: תהי f מוגדרת ב־I ו־x_0 נקודה פנימית.

1. אם קיים $\lim_{x\to x_0} f(x)$ אבל $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, נאמר שיש ב־$x_0$ **אי רציפות סליקה** כי אפשר לסלק אותה עם החלפת ערך אחד.
2. אם קיימים $\lim_{x\to x_0^+} f(x), \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ אבל $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ נאמר שיש נקודת אי־רציפות **ממין ראשון**.
3. אם $\lim_{x\to x_0} f(x)$ אינו קיים מכל סיבה אחרת, היא **ממין שני**.

משפט: תהי $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ עולה.

- אם f חסומה מלעיל: $\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup(f(a, b))$
- אם f אינה חסומה מלעיל ב־(a, b): $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהי $f : I \to \mathbb{R}$ רציפה ומונוטונית חזק. אזי $f(I)$ קטע מוכלל ו־$f^{-1} : f(I) \to I$ רציפה.

טענה: תהי $f : I \to \mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית, I קטע פתוח ו־$x_0 \in I$. אזי קיימים וסופיים $\lim_{x\to x_0^+} f(x), \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

פונקציית Riemann:
$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & x=\frac{p}{q},p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N},\gcd(p,q)=1\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

מתקיים ש־$\lim_{x\to x_0}R(x)=0$ לכל x_0, ולכן פונקציית רימן **רציפה באי־רציונאלים ואינה רציפה ברציונאלים**.

משפט ויירשטראס: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה. אזי: f חסומה ומשיגה את חסמיה (כלומר משיגה מינימום ומקסימום בקטע).

משפט ערך הביניים של קושי: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ויהי $f(a)\le t\le f(b)$. אזי קיים $x\in[a,b]$ כך ש־$f(x)=t$.

מסקנה: אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה אז $f[a,b]$ קטע סגור.

קטע מוכלל: אם $x_1,x_2\in I$ אז כל מספר ביניהם $(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$ גם ב־I.

משפט: אם $f:I\to\mathbb{R}$ רציפה ו־I קטע מוכלל אז $f(I)$ קטע מוכלל.

5.5 רציפות במ"ש (במידה שווה)

הגדרה: תהי $f:A\to\mathbb{R}$, נאמר ש־f רציפה במידה שווה ב־A אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in A$,
$$|x-y|<\delta\implies|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

משפט קנטור: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, אזי f רציפה במ"ש ב־$[a,b]$.

קטע פתוח: תהי $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, אזי f רציפה במ"ש ב־$(a,b]$ $\iff$ קיים וסופי $\lim_{x\to a^+}f(x)$.

משפט: אם $f:[0,\infty)$ רציפה כך שקיים וסופי $\lim_{x\to\infty}f(x)$ אז f רציפה במ"ש.

איחוד קטעים: אם f רציפה במ"ש ב־$(a,b],[b,c)$ אז f רציפה במ"ש ב־(a,c).

מסקנה: אפשר לעשות את כל הוריאציות של קטעים באמצעות איחוד קטעים - למשל, אם f רציפה ב־(a,b) ו־$\lim_{x\to a^+}f(x),\lim_{x\to b^-}f(x)$ קיימים וסופיים אז f רציפה במ"ש ב־(a,b) באמצעות איחוד הקטעים $\left(a,\frac{a+b}{2}\right],\left[\frac{a+b}{2},b\right)$.

טענה: פונקציה רציפה במ"ש בקטע פתוח היא חסומה.

שיטת הפרכה: למצוא שתי סדרות $(x_n),(y_n)$ כך ש־$|x_n-y_n|\to0$ אבל $|f(x_n)-f(y_n)|\not\to0$.

5.6 נגזרת

תהי f מוגדרת בקטע פתוח I ו־$x_0\in I$. אם קיים וסופי $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (הגדרות שקולות), נאמר ש־f גזירה ב־x_0 ונסמן את הגבול ב־$f'(x_0)$.

טענה: פונקציה גזירה ב־x_0 רציפה ב־x_0.

משפט רול: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־(a,b). אם $f(a)=f(b)$ אז קיים $c\in(a,b)$ כך ש־$f'(c)=0$.

משפט Lagrange: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־(a,b). קיימת $c\in(a,b)$ עבורה $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

משפט הערך הממוצע של קושי: יהיו $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפות ב־$[a,b]$ וגזירות ב־(a,b), ונניח ש־$g'(x)\neq0$ לכל $x\in(a,b)$. קיימת $c\in(a,b)$ עבורה $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

המשפטים האלה חזקים כי הם מקשרים בין הנגזרת לבין ערכים קונקרטיים של f.

משפט ערך הביניים של Darboux: יהי I קטע מוכלל ותהי $f: I \to \mathbb{R}$ גזירה. יהיו $u, v \in I$ כך ש־$f'(v) \neq f'(u)$. אזי לכל c בין $f'(u)$ ל־$f'(v)$ קיים w בין u ל־v כך ש־$f'(w) = c$.

כלומר, למרות שנגזרת לא בהכרח רציפה, היא עדיין תמיד מקיימת את משפט ערך הביניים.

גזירה n פעמים: אם $f, f^{(1)}, \ldots, f^{(n-1)}$ גזירות בסביבה של x_0, ו־$f^{(n)}$ גזירה ב־x_0.

כלל לייבניץ: יהי I קטע פתוח, $x_0 \in I$ ו־$f, g: I \to \mathbb{R}$ גזירות n פעמים ב־x_0. אז:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0)$$

שזו הכללה של הכלל $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$.

כלל השרשרת: תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ו־U סביבה של X_0. תהי $f: U \to \mathbb{R}$ גזירה ב־x_0 ותהי $g: V \to \mathbb{R}$ כך ש־$f(U) \subseteq V$ גזירה ב־$f(x_0) = y_0$. אזי $g(f(x_0))$ גזירה ומתקיים:

$$(g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

מדריך למהנדסים

$(\alpha f(x) + \beta g(x))'$	$\alpha f'(x) + \beta g'(x)$
$(f(g(x)))'$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$(f(x) \cdot g(x))'$	$f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$
$(x^n)'$	$n \cdot x^{n-1}$
$(\ln x)'$	$\frac{1}{x}$
$(\sin(x))'$	$\cos(x)$
$(\cos(x))'$	$-\sin(x)$

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהיינה $f, g: I \to \mathbb{R}$ רציפות ב־I וגזירות בפנימו. אם $f'(x) = g'(x)$ בפנימו אז קיים c כך שלכל x,

$$f(x) = g(x) + c$$

משפט: תהי $f: [a, b) \to \mathbb{R}$ רציפה ב־$[a, b)$ וגזירה ב־(a, b). כמו כן קיים וסופי $\lim_{x \to a^+} f'(x) = l$. אזי f גזירה מימין ב־a ומתקיים: $f'_+(a) = l$.

דיפרנציאביליות: תהי f מוגדרת ב־I קטע פתוח ו־$x_0 \in I$. נאמר ש־f דיפרנציאבילית ב־x_0 אם:

1. $f(x)$ רציפה ב־x_0
2. קיים ישר $ax + b$ שהוא קירוב ראשון ב־x_0 (כלומר, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (ax+b)}{x - x_0} = 0$).

משפט: f דיפרנציאבלית ב־x_0 $\iff$ גזירה ב־x_0. הקירוב הוא $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

משפט: יהי I קטע פתוח, $x_0 \in I$, $f: I \to \mathbb{R}$ <u>מונוטונית חזק ורציפה</u>.

אם f גזירה ב־x_0 אז $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ גזירה ב־$y_0 = f(x_0)$ ו: $\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)}$.

5.7 חקירת פונקציות

5.7.1 מינימום ומקסימום מקומי

הגדרה: $x_0 \in I$ פנימית מינימום מקומי אם לכל $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f(x) \geq f(x_0)$.

משפט Fermat: יהי I קטע מוכלל ותהי $x_0 \in I$ פנימית. תהי $f : I \to \mathbb{R}$ גזירה בכל נקודה פנימית ב־I. אם x_0 מינימום/מקסימום מקומי אז $f'(x_0) = 0$.

משפט: יהי I קטע מוכלל, $x_0 \in I$ פנימית, f גזירה פעמיים ב־x_0 ו־$f'(x_0) = 0$. אזי, אם $f''(x_0) > 0$ אז x_0 מינימום מקומי, אם $f''(x_0) < 0$ אז x_0 מקסימום מקומי, ואחרת לא ידוע.

5.7.2 עליה וירידה

משפט: יהי I קטע מוכלל, $f : I \to \mathbb{R}$ רציפה וגזירה בפנים I. אם לכל x בפנים I, $f'(x) \geq 0$ ($>$), אז f עולה (ממש) בכל I.

טענה: תהי $f : I \to \mathbb{R}$ גזירה ו־$x_0 \in I$ נקודה פנימית. אם f' רציפה ב־x_0 ו־$f'(x_0) > 0$ אז קיימת סביבה של x_0 בה f עולה ממש.

5.8 כלל לופיטל

5.8.1 $\frac{"0"}{"0"}$

יהי I קטע מוכלל ו־f,g גזירות בסביבה נקובה של x_0 כך שמתקיימים התנאים הבאים:

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$
2. $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$
3. $g'(x) \neq 0$ לכל $x \in I$
4. קיים $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (סופי או אינסופי)

אז $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

5.8.2 $\frac{"\infty"}{"\infty"}$

יהי I קטע מוכלל ו־f,g גזירות בסביבה נקובה של x_0 כך שמתקיימים התנאים הבאים:

2. $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$
3. $g'(x) \neq 0$ לכל $x \in I$
4. קיים $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (סופי או אינסופי)

אז $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

6 טורי טיילור

6.1 היי זה לא הזה ממבוא מורחב?

(בניגוד לחלקים הקודמים אני לא במצב רוח לכתוב באופן יותר מדי פורמלי)

יהיו $\lim_{x\to x_0} f(x)=0, \lim_{x\to x_0} g(x)=0$.

$f(x)=o(g(x))$	אם $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$
$f(x)=O(g(x))$	קיים $c>0$ כך שבסביבה של x_0, $\lvert f(x)\rvert\le c\cdot\lvert g(x)\rvert$
$f(x)=\Theta(g(x))$	$f(x)=O(g(x))\wedge g(x)=O(f(x))$ (אין באמת שימושים ל־O עצמו)

6.2 באמת טורי טיילור אני מבטיח

הגדרה: יהי I קטע פתוח, $x_0\in I$, $f,g:I\to\mathbb{R}$. נאמר ש־f ו־g מזדהות עד סדר n ב־x_0 אם שתיהן גזירות n פעמים ב־x_0 ומתקיים $f^{(k)}(x_0)=g^{(k)}(x_0)$ עבור $k=1,\ldots,n$.

טענה: אם f,g מזדהות עד סדר n ב־x_0 אז $f(x)-g(x)=o((x-x_0)^n)$.

הגדרה: יהי I קטע פתוח, $x_0\in I$, $f:I\to\mathbb{R}$ גזירה n פעמים ב־x_0. נאמר ש־$p_n(x)$ פולינום טיילור של f ב־x_0 אם $p_n(x)$ מזדהה עם f ב־x_0 עד סדר n.

משפט: קיים ויחיד $p_n(x)$ והנוסחה היא:

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

הגדרה: נגדיר את השארית להיות $R_n(x)=f(x)-p_n(x)$.
משפט פאנו: $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$.
משפט טיילור עם שארית לגרנז': יהי I קטע פתוח, $x_0\in I$, f גזירה $n+1$ פעמים ב־I.
אז לכל $x_0\neq x\in I$, קיים c_x בין x_0 ל־x כך ש:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

מסקנה: אם f גזירה אינסוף פעמים ב־I וקיים $M(x)$ כך שלכל $k\in\mathbb{N}$ ולכל y בין x ל־x_0, $\left|f^{(k)}(y)\right|<M(x)$, אז $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

לפי טיעון כזה מוכיחים שהשארית שואפת ל־0 ב־e^x, ולכן בעצם $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, ואפשר אפילו להעריך את השגיאה.