קורס B

גלעד מואב

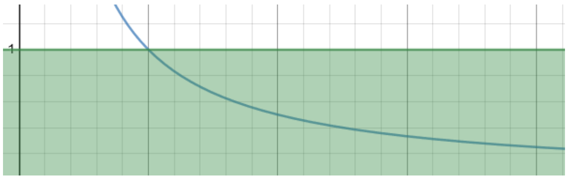
9 בספטמבר 2020

חלק I
חלק א'

1 גבול של סדרה

נגדיר גבול של סדרה באינסוף

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff \forall\epsilon > 0.\exists N.\forall n > N.\, |a_n - L| < \epsilon$$



2 גבול של פונקציה

2.1 גבול הפונקציה באינסוף

בדומה לגבול של סדרה, גבול הפונקציה יהיה

$$\lim_{x_0\to\infty} f(x_0) = L \iff \forall\epsilon > 0.\exists N.\forall x > N.\, |f(x) - L| < \epsilon$$

2.2 גבול הפונקציה בנקודה כלשהי

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \forall\epsilon > 0.\exists\delta > 0.\forall x.\, (0 < |x - x_0| < \delta) \to |f(x) - L| < \epsilon$$

3 רציפות הפונקציה ומשפט ערך הביניים

3.1 רציפות פונקציה

תהא פונקציה f, נגיד כי f רציפה בנקודה x_0 אמ"מ

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

נגיד כי פונקציה f רציפה בקטע I אמ"מ f רציפה בכל נקודה בקטע הנתון.

דרך קלה להראות שפונקציה f אינה רציפה בנקודה x_0 היא להוכיח כי הגבולות החד צדדיים שונים, קרי

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

3.2 משפט ערך הביניים

תהא f פונקציה רציפה בקטע $I=[a,b]$. משפט ערך הביניים אומר כי לכל ערך ב$[f(a),f(b)]$ קיים מקור

$$\forall x\in[f(a),f(b)]\to\exists c\in I.f(c)=x$$

4 נגזרת

4.1 הגדרת הנגזרת

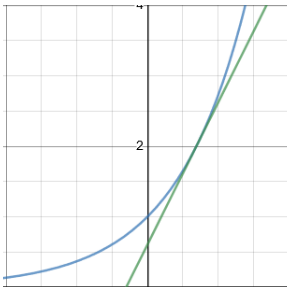
נגיד כי f גזירה בנקודה x_0 אמ"מ הגבול $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ קיים. נגיד כי f גזירה בקטע I אם כל נקודה בקטע גזירה.
נשים לב כי אם f רציפה בקטע I היא גזירה בקטע.
תהא f פונקציה גזירה בנקודה x_0 נגדיר את הנגזרת בנקודה x_0 להיות $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

5 קבוע אוילר e

נגדיר את קבוע אוילר בתור הגבול $2.718\approx\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. בנוסף $(e^x)'=e^x$.

6 שימושי הנגזרת

בעזרת הנגזרת לפונקציה בנקודה x_0 נוכל למצוא את המשיק לפונקציה בנקודה זו ונוכל למצוא קירוב מסדר ראשון לפונקציה סביב x_0



בנוסף נוכל להעזר בנגזרת בשביל למצוא גבולות מסוימים עם כלל לופיטל.

נוסחאות נפוצות

לינאריות הנגזרת:

$$(\alpha\cdot f\pm\beta\cdot g)'=\alpha\cdot f'\pm\beta\cdot g'$$

כפל בנגזרת:

$$(f\cdot g)'=f'\cdot g+g'\cdot f$$

חלוקה בנגזרת:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-g'\cdot f}{g^2}$$

הרכבת הנגזרת:

$$(f\circ g)'=f'(g)\cdot g'$$

7 חקירת פונקציה

חקירת פונקציה מורכבת מהבאים:

1. דומיין
2. חיתוכים עם הצירים
3. נקודות קיצון
4. תחומי עליה וירידה
5. תחומי קעירות וקמירות
6. אסימפטוטות משופעות ומאונכות

8 כלל לופיטל

יהיו f, g , ומתקיים אחד מהבאים

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty, \lim_{x\to x_0} g(x) \pm \infty$

כלל לופיטל אומר כי אם הגבול $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ קיים אז $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

9 פיתוח טיילור והערכת שגיאה

9.1 פיתוח טיילור

תהא f, נגדיר את טור טיילור סביב x_0 כטור חזקות שמתקרב לפונקציה f סביב הנקודה x_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

נגדיר את פולינום טיילור מהדרגה m סביב x_0 כסדרת הסכומים החלקיים מ0 עד m של טור החזקות,

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

נקרא לטור טיילור סביב 0 טור מקלורן.
פולינום טיילור נותן לנו קירוב טוב לפונקציה, את השגיאה נוכל לחשב בעזרת לגראנז.

9.2 הערכת שגיאה לפי לגראנז

נניח ורצינו למצוא את$e^{0.1}$, נעזר בפולינום מקלורן של הפונקציה e^x מהדרגה 3,

$$f(x) = 1 + (0.1) + \frac{1}{2!}(0.1)^2 + \frac{1}{3!}(0.1)^3 + R_3(0.1)$$

כך ש$R_3(0.1)$ הוא השארית של הפולינום,(במקרה הזה $R_3(0.1) = f(x) - 1 + (0.1) + \frac{1}{2!}(0.1)^2 + \frac{1}{3!}(0.1)^3$)
לפי לגראנז קיים $c \in (0, 0.1)$ כך ש$R_3(0.1) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^4$

באופן כללי נסמן את שארית פולינום טיילור מדרגה n סביב x_0 עבור x כ$R_n(x)$
לפי לגראנז אם פונקציה f גזירה $n+1$ פעמים, קיים $c \in (x, x_0) \cup (x_0, x)$ כך ש

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

נוכל לחסום את שארית הפולינום($R_n(x)$)באופן הבא

$$|R_n(x)| \leq \frac{\max\left\{f^{(n+1)}(b) | b \in (x, x_0) \cup (x_0, x)\right\}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

10 ניוטון ראפסון

בעזרת ניוטון ראפסון נוכל למצוא קירובים לשורשים של פונקציות
תהא פונקציה f בעלת שורש יחיד בקטע I, ניקח נקודה $x_0 \in I$ כלשהי
נמצא את פולינום הטיילור מדרגה ראשונה סביב x_0 ומוצאים את החיתוך שלו עם ציר ה־x, נסמן נקודה זו ב x_1

$$x_1 = x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

באופן כללי נסמן $x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, כאשר n גדל כך x_n מתקרב לשורש הפונקציה ומתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$

חלק II
חלק ב'

11 פונקציה קדומה ואינטגרל לא מסוים

נקרא לF פונקציה קדומה לf אמ"מ $F' = f$
בהנתן פונקציה f נסמן את $\int f(x)dx$ כמשפחת הפונקציות הקדומות לf, נקרא לסימון זה($\int$) האינטגרל הלא מסוים של f

12 שיטות אינטגרציה ואינטגרלים מוכרים

12.1 שיטות אינטגרציה מוכרות

1. שימוש בשברים חלקיים

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \int \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1+x}dx = \int\left(\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}\right)dx\left[A=B=\frac{1}{2}\right] = \frac{\int\frac{1}{1-x}dx + \int\frac{1}{1+x}dx}{2}$$

2. שימוש בהצבה

$$\int \frac{x}{1-x^2}dx \left[\begin{array}{c} u = x^2 \\ dx = \frac{du}{2x}\end{array}\right] = \int \frac{x}{1-u}\cdot\frac{du}{2x} = \int\frac{1}{1-u}du$$

3. אינטגרציה בחלקים

$$\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g$$

12.2 אינטגרלים מוכרים

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, x>0; \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int cschxdx = \tanh x + C$$

$$\int sechxdx = -\coth x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$$

13 סכומי דרבו ואינטגרל מסוים

13.1 סכומי דרבו

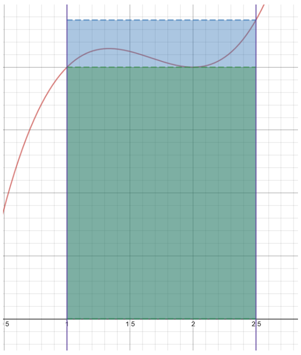
יהי קטע $I=[a_0,a_{n+!}]$ נסמן חלוקה של הקטע הנ"ל $I_{\langle a_1,...,a_n\rangle}$ כך ש$a<\{a_i\}_{i=1}^{n}<b$
תהא חלוקה $I_{\langle a_1,...,a_n\rangle}$, סכומי דרבו העליונים על החלוקה הנ"ל יהיו

$$\sum_{i=0}^{n}(a_{n+1}-a_n)\cdot\max\{f(x)|x\in[a_{n+1},a_n]\}$$

והתחתונים

$$\sum_{i=0}^{n}(a_{n+1}-a_n)\cdot\min\{f(x)|x\in[a_{n+1},a_n]\}$$

נסמן $D^{\pm}_{I_{\langle a_1,...,a_n\rangle}}$ כסכומי דרבו התחתונים/עליונים
נסמן Π_n כ $\langle a_1,...,a_n\rangle$ כך שלכל i, $a_i=a_0+\frac{b-a}{n}\cdot i$



13.2 פונקציה אינטגרבילית, אינטגרל רימן ואינטגרל מסוים

נגיד כי פונקציה $f:I\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן בקטע I אמ"מ $\lim\limits_{n\to\infty}D^{+}_{\Pi_n}-D^{-}_{\Pi_n}=0$ או לחלופין $\lim\limits_{n\to\infty}D^{-}_{\Pi_n}=\lim\limits_{n\to\infty}D^{+}_{\Pi_n}=S$

במקרה זה נסמן $\int\limits_a^b f(x)dx=S$, נקרא לפעולה זו אינטגרל מסוים

כל פונקציה רציפה היא אינטגרבילית ובפרט הפונקציות האלמנטריות(בסיסיות)

14 המשפט היסודי של החדו"א ומשפט ניוטון-לייבניץ

14.1 המשפט היסודי של החדו"א

תהא $f : I \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $I = [a, b]$, נגדיר את הפונקציה צוברת השטח

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

1. F פונקציה רציפה
2. אם f רציפה בx_0 אז F גזירה בx_0 וכן $F'(x_0) = f(x_0)$

באופן כללי, אם f רציפה בקטע I אז F קדומה לה בקטע הנ"ל

14.2 משפט ניוטון-לייבניץ

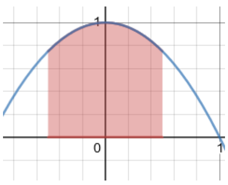
אם f רציפה בקטע $I = [a, b]$ (לכן $\int_a^x$ של f) ונניח כי F קדומה של f , מתקיים

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

15 שימושי האינטגרל

15.1 חישוב שטח מתחת לגרף

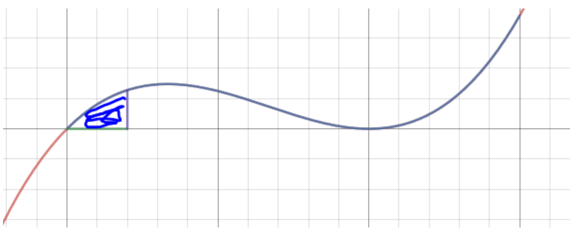
תהא f אינטגרבילית בקטע $I = [a, b]$, $\int_a^b f(x)dx$ הוא השטח מתחת לf בקטע $[a, b]$



15.2 חישוב אורך עקומה

תהא f אינטגרבילית בקטע $I = [a, b]$ ונרצה למצוא את אורך העקומה בין a לb, נעזר במשפט פתגורס ונראה כי

$$\int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$



15.3 נפח גוף סיבוב

15.3.1 נפח גוף סיבוב סביב ציר ה־x

$$\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

במקרה בו מדובר על נפח גוף סיבוב של שטח הכלוא בין 2 פונקציות f, g

$$\pi\int_a^b \left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx$$

15.3.2 נפח גוף סיבוב סביב ציר ה־y

$$2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

חלק III
חלק ג'

16 הגדרות בסיסיות בתורת המספרים

16.1 יחס ה|

יהיו $m, k \in \mathbb{Z}$, נגיד כי $m|k$ אם קיים $i \in \mathbb{Z}$ כך ש$m \cdot i = k$ או באופן כללי

$$m|k \longleftrightarrow \exists i \in \mathbb{Z}.m \cdot i = k$$

16.2 mod

נגיד כי $b \mod n = a$ אמ"מ קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש$b = m \cdot n + a$

$$b \mod n = a \longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}.b = m \cdot n + a$$

16.3 gcd

$\gcd(a, b)$ הוא המחלק המשותף הגדול ביותר של a וb

$$\gcd(a, b) = \max\{m \in \mathbb{Z}|m|a \wedge m|b\}$$

17 משפט אוקלידס לקיום אינסוף ראשוניים

משפט אוקלידס אומר כי קיימים אינסוף ראשוניים.

צ"ל קיימים אינסוף ראשוניים, נניח בשלילה כי קיים מספר סופי n של ראשוניים, נסמן $p_1, p_2, ..., p_n$, נגדיר מספר $p = 1 + \prod_{i=1}^{n} p_i$,
נשים לב כי p לא מתחלק באף p_i לכן p ראשוני וקיימים $n+1$ ראשוניים, **סתירה!**
לכן קיימים אינסוף ראשוניים

18 מחלק משותף מירבי

כפי שראינו $\gcd(a,b)$ ימצא לנו את המחלק המשותף הגדול ביותר של a וb
עבור $\gcd(a,b)=c$ קיים "ייצוג לינארי", כלומר קיימים $t,s\in\mathbb{Z}$ כך ש

$$t\cdot a+s\cdot b=c$$

מספרים זרים

עבור a,b כך ש$\gcd(a,b)=1$ נגיד כי a וb זרים

משפט

עבור a,b ,a,b זרים אמ"מ קיימים $s,t\in\mathbb{Z}$ כך ש$t\cdot a+s\cdot b=1$

19 אלגוריתם אוקלידס

19.1 אלגוריתם אוקלידס

יהיו a,b, נרצה למצוא את $\gcd(a,b)$ אלגוריתם אוקלידס נותן פיתרון יעיל ופשוט לבעיה זו
האלגוריתם משתמש בעובדה ש$\gcd(a,b)=\gcd(a,b+m\cdot a)$, לכן

$$a=m_1\cdot b+n_1$$

$$b=m_2\cdot n_1+n_2$$

$$.$$

$$.$$

$$n_{i-3}=m_{i-1}\cdot n_{i-2}+c$$

$$n_{i-2}=m_i\cdot c+0$$

לכן $\gcd(a,b)=c$
באופן פשוט יותר נוכל לעבוד באופן הבא $\gcd(a,b)=\gcd(a \mod b,b)=...=\gcd(c,0)=c$

19.2 אלגוריתם אוקלידס המורחב

האלגוריתם המורחב עוזר לנו למצוא ייצוג לינארי לשיוויון מהסוג $\gcd(a,b)=c$
הוא עובד כמו האלגורירתם הקודם, **רק אחורה**,
כלומר נתחיל מהשלב האחרון ונראה כי

$$n_{i-3}-m_{i-1}\cdot n_{i-2}=c$$

השלב הבא יהיה הצבת הערכים מהשוויונים שראינו מהאלגוריתם הקודם

$$n_{i-3}-m_{i-1}\cdot(n_{i-4}-m_{i-2}\cdot n_{i-3})=c$$

וכן הלאה

דוגמא

נרצה למצוא את $\gcd(840,138)$ ואת הייצוג הלינארי שלו

$$840 = 6\cdot 138 + 12$$

$$138 = 11\cdot 12 + 6$$

$$12 = 2\cdot 6 + 0$$

לכן $\gcd(840,138) = 6$
כעת נמצא את הייצוג הלינארי שלהם

$$6 = 138 - 11\cdot 12$$

$$6 = 138 - 11\cdot(840 - 6\cdot 138)$$

$$6 = 7\cdot 138 - 11\cdot 840$$

20 משפט על פריקות יחידה לראשוניים

לכל מספר שלם קיימת פריקות יחידה למספרים ראשוניים

21 משוואות דיאופנטיות לינאריות

תהא משוואה דיאופנטית $a\cdot x + b\cdot y = c$

21.1 קיום פתרון למשוואה

נראה כי אם $\gcd(a,b)\,|c$ קיים פתרון ולחלופין אם $\gcd(a,b)\,\not|c$ לא קיים פתרון למשוואה

21.2 מציאת פתרון פרטי

בהנחה ולמשוואה קיים פתרון($\gcd(a,b)\,|c$),
נסמן $d = \gcd(a,b)$, ונראה כי מכיוון ש$d|c$ קיים e כך ש $d\cdot e = c$, כלומר $e = \frac{c}{d}$
בנוסף מכיוון ש$d = \gcd(a,b)$ קיים ייצוג לינארי $t\cdot a + s\cdot b = d$, נכפיל את שני האגפים בe ונקבל

$$e\cdot t\cdot a + e\cdot s\cdot b = e\cdot d \rightarrow (e\cdot t)\cdot a + (e\cdot s)\cdot b = \frac{c}{d}\cdot d = c$$

לכן הפתרון הפרטי למשוואה $a\cdot x + b\cdot y = c$ יהיה $x_0 = e\cdot t, y_0 = e\cdot s$

21.3 מציאת כל הפתרונות

קבוצת כל הפתרונות היא

$$\left\{\left\langle x_0 + \frac{b}{d}\cdot n, y_0 - \frac{a}{d}\cdot n\right\rangle |n\in\mathbb{N}\right\}$$

22 הפיכות מודולו, משפט פרמה הקטן ומשפט השארית הסיני

22.1 משפט פרמה הקטן

יהיו $p\in\mathbb{P}$ וa כך ש$\gcd(a,p) = 1$ יתקיים

$$a^{p-1} = 1 \mod p$$

22.2 הפיכות מודולו

ידוע לנו על פעולות החיבור, חיסור וכפל במודולו, אך מה לגבי חילוק?
יהי $k \in \mathbb{Z}$, נרצה לדעת האם קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש $m \equiv \frac{1}{k} \mod n$ או באופן שקול $m \cdot k \equiv 1 \mod n$
משפט על הפיכות המודולו אומר כי אם k וn זרים קיים m כך ש$m \cdot k \equiv 1 \mod n$

$$\gcd(k,n) = 1 \longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}. m \cdot k \equiv 1 \mod n$$

22.3 משפט השאריות הסיני

22.3.1 דוגמא

נרצה לפתור את מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} x \equiv 7 \mod 19 \\ x \equiv 3 \mod 5 \end{cases}$$

באופן שקול נוכל לפתור את

$$\begin{cases} x = 19a + 7 \\ x = 5b + 3 \end{cases}$$

נחסר את המשוואות אחת מהשניה ונקבל

$$0 = 19a - 5b + 4 \to 4 = 5b - 19a$$

נראה כי קיים פתרון למשוואה מכיוון ש$\gcd(5,-19) = 1|4$, למשל -12

22.3.2 הכללה

באופן כללי כאשר נרצה לפתור מערכת משוואות מהצורה הבאה

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \mod m_1 \\ x \equiv a_2 \mod m_2 \\ . \\ . \\ x \equiv a_n \mod m_n \end{cases}$$

לפי משפט השאריות הסיני, $m_1, m_2, ..., m_n$ זרים בזוגות שקול לקיום פתרון למערכת המשוואות

22.3.3 פתרון פרטי

נסמן $n_i = \frac{m}{m_i}$, נשים לב כי m_i, n_i זרים($\gcd(m_i, n_i) = 1$), לכן קיימים s_i, t_i כך ש$s_i \cdot n_i + t_i \cdot m_i = 1$
נסמן $e_i = s_i \cdot n_i$ ונראה כי $e_i + t_i \cdot m_i = 1$ לכן $e_i = -t_i \cdot m_i + 1$ לכן $e_i \equiv 1 \mod m_i$
באופן כללי אם נקח $i \neq j$ יתקיים $e_i \equiv 0 \mod m_j$ מכיוון ש$m_j | n_i | e_i$ לכן כתלות בi וj ערכו של $e_i \mod m_j = \delta_{i,j}$

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

הפתרון הפרטי של מערכת המשוואות תהיה $x_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot e_k$ שכן

$$x_0 \mod m_i = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot e_k \right) \mod m_i = \sum_{k=1}^{n} (a_k \mod m_i) \cdot (e_k \mod m_i) =$$

$$0 \cdot (a_1 \mod m_i) + ... + 1 \cdot (a_i \mod m_i) + ... = a_i \mod m_i$$

22.3.4 פתרון כללי

קבוצת הפתרונות למערכת המשוואות הנ"ל תהיה

$$\{x_0 + m \cdot z | z \in \mathbb{Z}\}$$

חלק IV
חלק ד'

23 השערת הרצף

24 השערת רימן

25 השערת הנאד

26 סודרים