סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

חלק I

אלגוריתמים

1 לכסון

העתקה לכסינה היא העתקה לינארית כך שקיים בסיס B כך ש־$[T]_B^B$ אלכסונית. אם T העתקה לכסינה, אז כל מטריצה מייצגת שלה גם לכסינה.

1.1 וקטורים עצמיים וערכים עצמיים

נגיד וקטור עצמי של A לערך עצמי λ להיות $\underline{v}$ כך ש־$A\underline{v} = \lambda\underline{v}$. באופן הפוך ערך עצמי של A הוא λ כך שקיים וקטור עצמי $\underline{v} \neq \underline{0}$ לערך עצמי λ.

מרחב הוקטורים העצמיים לכל λ הוא $V_\lambda = \{\underline{v} \in V \mid A\underline{v} = \lambda\underline{v}\} = \mathrm{Sols}\left(A - \lambda I\right)$. הסכום של V_λ שונים הוא סכום ישר.

משפט: A לכסינה $\iff$ קיים בסיס $B \subseteq \mathbb{F}^n$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A.

משפט: במטריצה המלוכסנת, **הערכים העצמיים הם האיברים שנמצאים על האלכסון** עד כדי הסדר שלהם.

1.2 פולינום אופייני ומינימלי

נגדיר את $p_A\left(\lambda\right) = \det\left(\lambda I - A\right)$ להיות הפולינום האופייני של A. מתקיים:

- $p_A\left(x\right) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, כך ש־$a_0 = \left(-1\right)^n \det A$ ו־$a_{n-1} = -\mathrm{tr}\left(A\right)$ (ו־$a_n = 1$).
- λ ערך עצמי של A $\iff$ λ שורש של $p_A\left(\lambda\right)$ (כי זה אומר שהמטריצה אינה הפיכה עבור ה־λ הזה כלומר יש פתרונות).
- אם A, B דומות אז $p_A = p_B$.
- $p_A\left(\lambda\right) = p_{A^t}\left(\lambda\right)$, ו־$p_{AB}\left(\lambda\right) = p_{BA}\left(\lambda\right)$.
- יהיו $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$ המרחבים העצמיים. הסכום ביניהם הוא סכום ישר.

נגדיר את הריבוי האלגברי של α, ρ_α (רו), להיות כמות הפעמים ש־$\left(\lambda - \alpha\right)$ מופיע בפולינום $P_A\left(\lambda\right)$. כלומר אם הפולינום הוא $P_A\left(\lambda\right) = \left(\lambda - 1\right)\left(\lambda - 3\right)^2$ אז $\rho_1 = 1, \rho_3 = 2$.

בנוסף נגדיר את הריבוי הגיאומטרי של α, μ_λ, להיות $\dim\left(V_\lambda\right)$.

משפט: לכל ערך עצמי λ, $\mu_\lambda \leq \rho_\lambda$.

משפט: עבור $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ הערכים העצמיים, $\rho_{\lambda_1} + \cdots + \rho_{\lambda_k} \leq n$, ואם $p_A\left(\lambda\right)$ מתפרק לגורמים לינאריים אז גם $\rho_{\lambda_1} + \cdots + \rho_{\lambda_k} = n$.

המשפט המרכזי (תנאי ללכסינות): תהא $A \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$. A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אמ"ם:

1. $P_A\left(\lambda\right)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$.
2. לכל ערך עצמי λ של A, $\rho_\lambda = \mu_\lambda$.

נגדיר את הפולינום המינימלי של A, m_A, להיות הפולינום המתוקן היחידי כך ש־$\mathrm{sp}\left(m_A\right)$ האידאל המאפס של A. מתקיים:

- m_A מחלק את p_A.
- לכל $q \in \mathbb{F}\left[x\right]$ פולינום אי פריק, $q \mid m_A \iff q \mid p_A$.

  לכן אם $p_A = \prod_{i \in I} q_i^{m_i}$ (q_i אי פריקים) אז $m_A = \prod_{i \in I} q_i^{r_i}$ כאשר $1 \leq r_i \leq m_i$.

משפט: במטריצת בלוקים אלכסונית $A = \mathrm{Diag}\left(A_1, \ldots, A_n\right)$ מתקיים:

- $p_A = p_{A_1} \cdot \cdots \cdot p_{A_n}$.
- $m_A = \mathrm{lcm}\left(m_{A_1}, \ldots, m_{A_n}\right)$.

2 ז'ירדון

נגדיר **בלוק ז'ורדן** להיות מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ ואפילו $\begin{pmatrix}\lambda\end{pmatrix}$, כלומר יש אלכסון של λ ומעליו אלכסון של 1ים.

צורת ז'ורדן היא מטריצת בלוקים אלכסונית כך שכל הבלוקים הם בלוקי ז'ורדן.

באופן פרקטי וחישובי:

1. חישוב הפולינום האופייני. נסמן את הערכים העצמיים ב־$\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ ואת הריבויים האלגבריים שלהם ב־$\rho_{\lambda_1},\ldots,\rho_{\lambda_k}$.
2. לכל λ_i:
   (א) נחשב את $\ker(A-\lambda_i I),\ldots,\ker(A-\lambda_i I)^{\rho_{\lambda_i}}$ עד שהמימד של זה מפסיק להשתנות (לא כולל). נסמן את המקום שבו המימד מפסיק להשתנות ב־j. זה גם הריבוי בפולינום המינימלי.
   (ב) מ־j עד ל־1:
      i. נשלים את $\ker(A-\lambda_i I)^{j-1}$ **לבסיס של** $\ker(A-\lambda_i I)^{j}$.
      ii. יהי v שהוסף בהשלמה. נוסיף לבסיס את $(A-\lambda_i I)^{j}v,\ldots,(A-\lambda_i I)^{1}v, v$. נספור שצריך איבר אחד פחות מאלה (כלומר ניקח איבר אחד פחות מההשלמות של החזקות הקודמות).
3. אפשר להשתמש בבסיס שקיבלנו ישירות או לשים $P=\begin{pmatrix}B_1 & \ldots & B_n\end{pmatrix}$, ואז $J=P^{-1}AP$ (כי $P=[Id]_E^B$ ואכן $[A]_B^B=[Id]_B^E\cdot[A]_E^E\cdot[Id]_E^B$).

משפט:

- צורת זורדן יחידה עד כדי הסידור של בלוקי הז'ורדן.
- μ_λ הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי כלשהו הוא מספר הבלוקים שלו.
- ρ_λ הריבוי האלגברי באופייני הוא סכום הגדלים של הבלוקים.
- הריבוי האלגברי במינימלי הוא המקסימום של הגדלים של הבלוקים.

2.1 העלאה בחזקה

$$\begin{pmatrix} x & 1 & & \\ & x & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & x\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x^n & \binom{n}{1}x^{n-1} & \binom{n}{2}x^{n-2} & \\ & x^n & \ddots & \binom{n}{2}x^{n-2}\\ & & \ddots & \binom{n}{1}x^{n-1}\\ & & & x^n\end{pmatrix}$$

לדוגמה:

$$\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}2^3 & 3\cdot 2^2 & \binom{3}{2}\cdot 2^1 & \binom{3}{3}\cdot 2^0\\ 0 & 2^3 & 3\cdot 2^2 & \binom{3}{2}\cdot 2^1\\ 0 & 0 & 2^3 & 3\cdot 2^2\\ 0&0&0&2^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&12&6&1\\0&8&12&6\\0&0&8&12\\0&0&0&8\end{pmatrix}$$

3 גראם־שמידט

3.1 הטלה

נגדיר את ההטלה של וקטור v על U להיות:

$$P_U\left(v\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left\langle v,b_i\right\rangle}{\left\langle b_i,b_i\right\rangle}\cdot b_i$$

כאשר $b_1,\ldots,b_n$ בסיס אורתוגונלי, בהמשך נראה שקיים כזה לכל מרחב נוצר סופית.
תכונות:

- $\forall u\in U.P_U\left(u\right)=u$, ולכן $P_U^2=P_U$
- P_U העתקה לינארית, כך ש־$\ker\left(P_U\right)=\left\{v\in V\mid v\perp U\right\}$. נסמן גם ב־$U^{\perp}$.
- $\left(v-P_U\left(v\right)\right)\perp U$ לכל v.

משפט הקירוב הטוב ביותר: נגדיר $\text{dist}\left(v,U\right)=\text{dist}\left(v,P_U\left(v\right)\right)$. אז מתקיים ש־$\text{dist}\left(v,U\right)=\inf_{u\in U}\text{dist}\left(v,u\right)=\min_{u\in U}\text{dist}\left(v,u\right)$, כלומר שהמרחק הזה הוא המרחק הכי קצר מ־v ל־U.

3.2 האלגוריתם עצמו

אלגוריתם גראם־שמידט הוא האלגוריתם למציאת סדרה אורתונורמלית $w_1,\ldots,w_x$ ל־$\text{sp}\left(b_1,\ldots,b_n\right)$ כך ש־$\text{sp}\left(b_1,\ldots,b_n\right)=\text{sp}\left(w_1,\ldots,w_x\right)$.

נוריד מ־$b_1,\ldots,b_n$ את האפסים. נגדיר את $w_1=\frac{1}{||b_1||}b_1$ להיות המנורמל. לכל $i\in 2,\ldots,n$, נגדיר $U=\text{sp}\left(b_1,\ldots,b_{i-1}\right)$, ואז נחשב $w_i'=b_i-P_U\left(b_i\right)$. אם $w_i'=0$, נתעלם ממנו, אחרת נוסיף לסדרה w את $\frac{1}{||w_i'||}w_i'$ המנורמל.

חלק II

מכפלות פנימיות ותבניות בילינאריות

4 מכפלה פנימית

4.1 הגדרות בסיסיות

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$. מכפלה אוניטרית (נקרא "מכפלה פנימית" מעל $\mathbb{R}$) מעל V היא פונקציה $\left\langle\cdot,\cdot\right\rangle:V\times V\to\mathbb{C}\left(\mathbb{R}\right)$ כך ש־:

1. לינאריות לפי הרכיב השמאלי: $\left\langle\alpha\underline{v_1}+\beta\underline{v_2},u\right\rangle=\alpha\cdot\left\langle\underline{v_1},\underline{u}\right\rangle+\beta\cdot\left\langle\underline{v_2},\underline{u}\right\rangle$
2. הרמיטיות: $\left\langle\underline{v},\underline{u}\right\rangle=\overline{\left\langle\underline{u},\underline{v}\right\rangle}$
3. חיוביות: $\left\langle\underline{v},\underline{v}\right\rangle\in\mathbb{R}\wedge\left\langle\underline{v},\underline{v}\right\rangle\geq 0$
4. אפיון 0: $\left\langle\underline{v},\underline{v}\right\rangle=0\iff\underline{v}=\underline{0}$

4.2 תכונות

משפט לגבי הרכיב הימני:

- $\left\langle\underline{u},v_1+v_2\right\rangle=\left\langle u,v_1\right\rangle+\left\langle u,v_2\right\rangle$ חיבוריות לפי הימני.

- $\langle v, \alpha u\rangle = \overline{\alpha}\langle v, u\rangle$ כמו הומוגניות ברכיב הימני, אבל עם הצמוד.
- $\langle \underline{v}, \underline{0}\rangle = 0$ מתאפס גם לפי הרכיב הימני.
- לכן יש לנו כמעט לינאריות לפי הרכיב הימני, אבל עם הסקלר הצמוד.
- ומכאן נובע: $\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{v_i}, \sum_{j=1}^{m} b_j \underline{u_j}\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \overline{b_j}\left\langle \underline{v_i}, \underline{u_j}\right\rangle$

4.3 אורתוגונליות

$(v_1, \ldots, v_n)$ נקראת <u>אורתוגונלית</u> אמ"ם $\forall i \neq j. v_i \perp v_j$ כלומר $\langle v_i, v_j\rangle = 0$.

לדוגמה $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ סדרה אורתוגונלית עם המכפלה האוניטרית הסטנדרטית.

נגדיר וקטור יחידה להיות v כך ש־$||\underline{v}|| = 1$. אם $\underline{v} \neq 0$ אז $\frac{1}{||\underline{v}||} \cdot \underline{v}$ וקטור יחידה, שנקרא גם הוקטור <u>המנורמל</u>.

אז סדרה <u>אורתונורמלית</u> היא סדרה אורתוגונלית של וקטורי יחידה.

משפט: סדרה אורתוגונלית היא בת"ל.

4.3.1 משלים אורתוגונלי

יהי $U \subseteq V$. נגדיר $U^{\perp}$ להיות המרחב שניצב לכל איבר ב־U. נסמן $\dim U = k$. נחשב אותו באמצעות השלמת בסיס של U לבסיס של V, גראם־שמידט על הבסיס שיוצא, ואז ניקח את האיברים ה־$k+1, \ldots, n$ וזה הבסיס של $U^{\perp}$. מתקיים:

1. $U \oplus U^{\perp} = V$
2. $U \subseteq \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ ואם V נוצר סופית אז $U = \left(U^{t}\right)^{t}$.
3. $\left(U+W\right)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$
4. $\left(U \cap W\right)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$
5. אם $U \subseteq W$ אז $W^{\perp} \subseteq U^{\perp}$
6. $\langle v, u\rangle = \langle P_U(v), P_U(u)\rangle + \langle P_{U^{\perp}}(v), P_{U^{\perp}}(u)\rangle$

4.4 נורמה

נגדיר $||a|| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$. מתקיים:

- $||a|| \geq 0$ ו־$a = 0 \iff ||a|| = 0$
- $||\lambda a|| = |\lambda| \cdot ||a||$ לכל $a \in L, \lambda \in \mathbb{R}$
- $|||a|| - ||b||| \leq ||a+b|| \leq ||a|| + ||b||$
- משפט פיתגורס: $||a+b||^2 = ||a||^2 + ||b||^2 \iff a \perp b$

5 סוגים של העתקות לינאריות

5.1 העתקות אוניטריות

העתקה מעל $\mathbb{C}$ המקיימת $(Tu, Tv) = (u, v)$ נקראת <u>העתקה אוניטרית</u>. היא משמרת <u>אורכים וזוויות</u>, כלומר $||Tv|| = ||v||$.

משפט: כל דבר פה שקול לכך ש־T אוניטרית.

1. T מעתיקה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי.
2. $T^*T = I$. לכן אם T אוניטרית אז היא הפיכה כך ש־$T^* = T^{-1}$.
3. T נורמלית וכל הערכים העצמיים על מעגל היחידה.

5.2 העתקות אורתוגונליות

דומה אבל מעל $\mathbb{R}$.

משפט: T אורתוגונלית $\iff$ T מעתיקה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי. בפרט אם T אוניטרית היא הפיכה.

משפט: יהי V מרחב וקטורי, מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, עם מכפלה פנימית. התנאים הבאים שקולים:

1. $T^* = T^{-1}$, כלומר $TT^* = T^*T = I$.
2. לכל u, v, $(Tu, Tv) = (u, v)$, כלומר אוניטרית/אורתוגונלית לפי השדה.
3. לכל v, $||Tv|| = ||v||$, כלומר T שומרת על אורכים.

5.3 העתקות נורמליות

העתקה נקראת נורמלית אם $TT^* = T^*T$.

משפט: מטריצה נורמלית ניתנת ללכסון אוניטרי, כלומר קיים בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של T ו־$T = P^*DP$ כאשר D אלכסונית.

משפט: המרחבים העצמיים ניצבים זה לזה.

טענה: $|T(v)| = |T^*(v)|$.

6 תבניות בילינאריות

הגדרה: תבנית בילינארית היא $f : (V \times W) \to \mathbb{F}$ שלינארית על פי הרכיב השמאלי ועל פי הרכיב הימני.

נסמן את קבוצת התבניות הבילינאריות ב־$\mathrm{Bil}(V, W)$, או $\mathrm{Bil}(V) := \mathrm{Bil}(V, V)$.

מטריצה מייצגת: נגדיר $\left([f]_{B,C}\right)_{i,j} = f(b_i, c_j)$. מתקיים $f(v, w) = [v]_B^t \cdot [f]_{B,C} \cdot [w]_C$ לכל v, w.

מעבר בסיסים: $[f]_{B',C'} = \left([Id]_B^{B'}\right)^t \cdot [f]_{B,C} \cdot [Id]_C^{C'}$

הגדרה: נגדיר את הדרגה $\mathrm{rk}(f)$ להיות $\mathrm{rk}\left([f]_{B,C}\right)$ עבור B, C בסיסים כלשהם.

הגדרה: f נקראת אי מנוונת אם $\mathrm{rk} f = \dim V = \dim W$. לכן גם $[f]_{B,C}$ הפיכה.

6.1 חפיפת מטריצות

שתי מטריצות A, B נקראות שקולות אם $A = P^tBQ$, וחופפות אם $A = P^tBP$........ יש המון משפטים.......

6.2 תבניות בילינאריות סימטריות

תבנית בילינארית תקרא סימטרית אם לכל v, w, $f(v, w) = f(w, v)$. המטריצה המייצגת היא אלכסונית.

משפט ההתמדה של סילבסטר: מעל $\mathbb{R}$. תהי f תבנית בילינארית סימטרית כך ש־$\mathrm{rk} f = r \le n = \dim V$. אז קיים בסיס $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ כך ש־$[f]_{B,B}$ אלכסונית, ועל האלכסון יש רק $0, -1, 1$. הכמויות שלהם אינן תלויות בבחירת הבסיס.

כדי לחשב את אינדקסי ההתמדה הללו, P_+ כמות ה־1ים ו־P_- כמות ה־(-1)ים (ההפרש שלהם גם נקרא הסיגנטורה), ממטריצה מייצגת, יש שתי דרכים:

1. דירוג בו זמנית של השורות ושל העמודות, עד שמגיעים לצורה אלכסונית.

2. נחשב את $\Delta_0,\ldots,\Delta_r$ הדטרמיננטות של חתכים של המטריצה (r זה rk) - למשל עבור $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ זה יהיה:

$$\Delta_0=1,\Delta_1=\det\begin{vmatrix}1\end{vmatrix},\Delta_2=\det\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix},\Delta_3=\det\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$$

כמות הפעמים שהסימן לא משתנה מהקודם היא P_+, כמות הפעמים שהסימן כן משתנה היא P_-.

טענה: תבנית בילינארית <u>חיובית לחלוטין וסימטרית</u> היא בעצם <u>מכפלה פנימית</u>.

(חיובית לחלוטין זו תכונה של תבניות ריבועיות/סימטריות כך ש-$f(v,v)>0$ לכל v, או באופן שקול שבמטריצה המייצגת כל הע"ע חיוביים, או באופן שקול ש-$\Delta_i>0$ לכל i)

6.2.1 תבנית ריבועית

תהי $f\in\mathrm{Bil}(V)$ תבנית סימטרית. נגדיר $Q(v)=f(v,v)$ ונקרא לה <u>תבנית ריבועית</u>. כל תבנית ריבועית מיוצגת ביחידות על ידי תבנית בילינארית סימטרית. ניתן למצוא את f ע"י:

$$2f(v,w)=Q(v+w)-Q(v)-Q(w)$$

6.3 תבניות בילינאריות אנטי-סימטריות

תבנית בילינארית תקרא <u>סימטרית</u> אם לכל v,w, $f(v,w)=-f(w,v)$. המטריצה המייצגת היא:

$$\mathrm{Diag}\left(\overbrace{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}^{\frac{1}{2}\mathrm{rk}(f)\text{ times}},0,\ldots,0\right)$$

בפרט $\mathrm{rk}f$ זוגי, ומספר האפסים הוא $n-\mathrm{rk}f$.