סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

1 דברים חשובים מלינארית 1

1.1 מטריצות דומות

יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, נאמר כי A ו־B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש־$A = P^{-1} \cdot B \cdot P$.
משפט: נתון $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ריבועיות, הבאים שקולים:

1. A, B דומות.
2. קיימת $T : V \to V$ ובסיסים C, C' של V כך ש־$[T]_C = A, [T]_{C'} = B$.
3. לכל $T : V \to V$, אם קיים בסיס C של V כך ש־$[T]_C = A$, אז קיים בסיס C' של V כך ש־$[T]_{C'} = B$.

ואם A, B דומות אז:

1. $\mathrm{Rank}(A) = \mathrm{Rank}(B), \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$.
2. $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ כאשר $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} (A)_{i,i}$.
3. $\det(A) = \det(B)$.

2 לכסון

2.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.2 מטריצה אלכסונית: מטריצה ריבועית $A \in M_n(\mathbb{F})$ שבה עבור $i \neq j$, $A_{i,j} = 0$. נגדיר את $Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ להיות המטריצה שיש לה $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ על האלכסון.

הגדרה 2.2 מטריצה לכסינה: מטריצה ריבועית $A \in M_n(\mathbb{F})$ שדומה למטריצה אלכסונית. המטרה של מטריצות לכסינות היא שקל להעלות אותן בחזקה. עבור D מטריצה אלכסונית, קיימת P כך ש:

$$A = PDP^{-1}$$
$$A^n = \overbrace{PDP^{-1} \cdot \cdots \cdot PDP^{-1}}^{n \text{ times}} = PD^nP^{-1}$$

הגדרה 3.2 העתקה לכסינה: העתקה לינארית $T : V \to V$ כך שקיים בסיס B של V כך ש־$[T]_B^B$ אלכסונית.
בנוסף, אם T העתקה לכסינה אז כל מטריצה מייצגת שלה לפי בסיס C, $[T]_C^C$, היא לכסינה.

2.1.1 ערך עצמי

הגדרה 4.2 וקטור עצמי של T לערך עצמי λ: $\overline{v}$ כך ש־$T(\overline{v}) = \lambda\overline{v}$.

הגדרה 5.2 ערך עצמי של A לערך עצמי λ: $\overline{v}$ כך ש־$A\overline{v} = \lambda\overline{v}$.

הגדרה 6.2 ערך עצמי של T: λ כך שקיים וקטור עצמי $\underline{\overline{v} \neq 0}$ של T לערך עצמי λ.

2.2 משפטים

1. A לכסינה $\iff$ קיים בסיס $B \subseteq \mathbb{F}^n$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A.
2. אם T לכסינה (או A לכסינה) אז על האלכסון של הצורה האלכסונית מופיעים הערכים העצמיים של T (או A). זה יחיד עד כדי הסידור של האלכסון.