

סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

1	דברים חשובים מלינארית 1	2
1.1	מטריצות דומות	2
2	לכסון	2
2.1	הגדרות בסיסיות	2
2.1.1	ערך עצמי	2
2.1.2	וקטורים עצמיים	2
2.2	משפטים	3

1 דברים חשובים מלינארית 1

1.1 מטריצות דומות

היה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, נאמר כי A ו- B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $A = P^{-1} \cdot B \cdot P$.
משפט: נתון $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ריבועיות, הבאים שקולים:

1. A, B דומות.

2. קיימת $T: V \rightarrow V$ ובסיסים C, C' של V כך ש- $[T]_C = A, [T]_{C'} = B$.

3. לכל $T: V \rightarrow V$, אם קיים בסיס C של V כך ש- $[T]_C = A$, אז קיים בסיס C' של V כך ש- $[T]_{C'} = B$.

ואם A, B דומות אז:

1. $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(B), \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$.

2. $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ כאשר $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n (A)_{i,i}$.

3. $\det(A) = \det(B)$.

2 לכסון

2.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.2 מטריצה אלכסונית: מטריצה ריבועית $A \in M_n(\mathbb{F})$ שבה עבור $i \neq j, A_{i,j} = 0$. נגדיר את $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ להיות המטריצה שיש לה $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ על האלכסון.

הגדרה 2.2 מטריצה לכסינה: מטריצה ריבועית $A \in M_n(\mathbb{F})$ שדומה למטריצה אלכסונית. המטרה של מטריצות לכסינות היא שקל להעלות אותן בחזקה. עבור D מטריצה אלכסונית, קיימת P כך ש:

$$A = PDP^{-1}$$
$$A^n = \overbrace{PDP^{-1} \dots PDP^{-1}}^{n \text{ times}} = PD^n P^{-1}$$

הגדרה 3.2 העתקה לכסינה: העתקה לינארית $T: V \rightarrow V$ כך שקיים בסיס B של V כך ש- $[T]_B^B$ אלכסונית. בנוסף, אם T העתקה לכסינה אז כל מטריצה מייצגת שלה לפי בסיס $C, [T]_C^C$, היא לכסינה.

2.1.1 ערך עצמי

הגדרה 4.2 וקטור עצמי של T לערך עצמי λ : \bar{v} כך ש- $T(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$.

הגדרה 5.2 ערך עצמי של A לערך עצמי λ : \bar{v} כך ש- $A\bar{v} = \lambda \bar{v}$.

הגדרה 6.2 ערך עצמי של T : λ כך שקיים וקטור עצמי $\bar{v} \neq 0$ של T לערך עצמי λ .

2.1.2 וקטורים עצמיים

הגדרה 7.2 מרחבים עצמיים: תהא $T: V \rightarrow V$ ה"ל, ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$. נגדיר $V_\lambda = \{\bar{v} \in V \mid T(\bar{v}) = \lambda \bar{v}\}$, כלומר קבוצת הוקטורים עם ערך עצמי λ .

$V_\lambda \neq \{0_V\} \iff T$ ערך עצמי של T . ניתן גם להגדיר כך: $V_\lambda = \text{Sols}(A - \lambda I) / \ker(T - \lambda \cdot Id)$.

הגדרה 8.2 פולינום אופייני: תהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, נסמן ב- $P_A(\lambda) = |A - \lambda I|$ את הפולינום האופייני של A .
טענות:

1. $P_A(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ הוכחה:

$$P_A(\lambda) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n \overbrace{(A - \lambda I)_{i, \sigma(i)}}^{\text{polynomial in } \mathbb{F}[\lambda]}$$

2. המקדם המוביל ב- $P_A(\lambda)$ הוא $(-1)^n$.

3. λ ערך עצמי של $A \iff \ker(T - \lambda Id) = V_\lambda \neq \{0\} \iff \det(T - \lambda Id) = 0$

4. λ ערך עצמי של $A \iff \lambda$ שורש של $P_A(\lambda)$

5. אם A, B דומות אז $P_A = P_B$ הוכחה:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= |A - \lambda I| = |PBP^{-1} - \lambda I| = |PBP^{-1} - P\lambda IP^{-1}| = |P(B - \lambda I)P^{-1}| \\ &= |P| |B - \lambda I| |P^{-1}| = |B - \lambda I| = P_B(\lambda) \end{aligned}$$

6. נגדיר $P_T(\lambda) = P_{[T]_B}(\lambda)$ - זה לא משנה איזה B בחרנו.

הגדרה 9.2 ריבוי גיאומטרי של λ : נסמן ב- $\mu_\lambda^A = \mu_\lambda^T = \mu_\lambda = \dim(V_\lambda)$

הגדרה 10.2 ריבוי אלגברי של λ : מסומן ρ_λ (רו), הוא הריבוי של λ בפולינום האופייני $P_A(\lambda)$, כלומר כמה פעמים הוא מופיע בפולינום.
טענות:

1. אם A מטריצה בעלת ערכים עצמיים $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ עם ריבויים אלגבריים $\rho_{\lambda_1}, \dots, \rho_{\lambda_k}$ אז $\rho_{\lambda_1} + \dots + \rho_{\lambda_k} \leq n$

2. אם $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים אז $\rho_{\lambda_1} + \dots + \rho_{\lambda_k} = n$

3. לכל ערך עצמי λ , $\mu_\lambda \leq \rho_\lambda$

2.2 משפטים

1. A לכסינה \iff קיים בסיס $B \subseteq \mathbb{F}^n$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A .

2. אם T לכסינה (או A לכסינה) אז על האלכסון של הצורה האלכסונית מופיעים הערכים העצמיים של T (או A). זה יחיד עד כדי הסידור של האלכסון.

3. תהא A/T עם ערכים עצמיים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. אז הסכום $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$ הוא סכום ישר. לכן אם $A \in M_n(\mathbb{F})$ בעלת n ערכים עצמיים שונים, אז A לכסינה. ההפך לא בהכרח נכון.

המשפט המרכזי: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי: A לכסינה מעל $\mathbb{F} \iff$

1. $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל \mathbb{F} .

2. לכל ע"ע λ של A , $\rho_\lambda = \mu_\lambda$.