

# סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

## תוכן עניינים

1	דברים חשובים מלינארית 1	2
1.1	מטריצות דומות	2
2	לכסון	2
2.1	הגדרות בסיסיות	2
2.1.1	ערך עצמי	2
2.1.2	וקטורים עצמיים	2
2.2	משפטים	3

# 1 דברים חשובים מלינארית 1

## 1.1 מטריצות דומות

היו  $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ , נאמר כי  $A$  ו- $B$  דומות אם קיימת מטריצה הפיכה  $P$  כך ש- $A = P^{-1} \cdot B \cdot P$ .  
משפט: נתון  $A, B \in M_n(\mathbb{F})$  ריבועיות, הבאים שקולים:

1.  $A, B$  דומות.

2. קיימת  $T: V \rightarrow V$  ובסיסים  $C, C'$  של  $V$  כך ש- $[T]_C = A, [T]_{C'} = B$ .

3. לכל  $T: V \rightarrow V$ , אם קיים בסיס  $C$  של  $V$  כך ש- $[T]_C = A$ , אז קיים בסיס  $C'$  של  $V$  כך ש- $[T]_{C'} = B$ .

ואם  $A, B$  דומות אז:

1.  $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(B), \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$ .

2.  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$  כאשר  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n (A)_{i,i}$ .

3.  $\det(A) = \det(B)$ .

## 2 לכסון

### 2.1 הגדרות בסיסיות

**הגדרה 1.2 מטריצה אלכסונית:** מטריצה ריבועית  $A \in M_n(\mathbb{F})$  שבה עבור  $i \neq j, A_{i,j} = 0$ . נגדיר את  $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  להיות המטריצה שיש לה  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  על האלכסון.

**הגדרה 2.2 מטריצה לכסינה:** מטריצה ריבועית  $A \in M_n(\mathbb{F})$  שדומה למטריצה אלכסונית. המטרה של מטריצות לכסינות היא שקל להעלות אותן בחזקה. עבור  $D$  מטריצה אלכסונית, קיימת  $P$  כך ש:

$$A = PDP^{-1}$$
$$A^n = \overbrace{PDP^{-1} \dots PDP^{-1}}^{n \text{ times}} = PD^n P^{-1}$$

**הגדרה 3.2 העתקה לכסינה:** העתקה לינארית  $T: V \rightarrow V$  כך שקיים בסיס  $B$  של  $V$  כך ש- $[T]_B^B$  אלכסונית. בנוסף, אם  $T$  העתקה לכסינה אז כל מטריצה מייצגת שלה לפי בסיס  $C, [T]_C^C$ , היא לכסינה.

#### 2.1.1 ערך עצמי

**הגדרה 4.2 וקטור עצמי של  $T$  לערך עצמי  $\lambda$ :**  $\bar{v}$  כך ש- $T(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$ .

**הגדרה 5.2 ערך עצמי של  $A$  לערך עצמי  $\lambda$ :**  $\bar{v}$  כך ש- $A\bar{v} = \lambda \bar{v}$ .

**הגדרה 6.2 ערך עצמי של  $T$ :**  $\lambda$  כך שקיים וקטור עצמי  $\bar{v} \neq 0$  של  $T$  לערך עצמי  $\lambda$ .

#### 2.1.2 וקטורים עצמיים

**הגדרה 7.2 מרחבים עצמיים:** תהא  $T: V \rightarrow V$  ה"ל, ויהי  $\lambda \in \mathbb{F}$ . נגדיר  $V_\lambda = \{\bar{v} \in V \mid T(\bar{v}) = \lambda \bar{v}\}$ , כלומר קבוצת הוקטורים עם ערך עצמי  $\lambda$ .

$V_\lambda \neq \{0_V\} \iff T$  ערך עצמי של  $T$ . ניתן גם להגדיר כך:  $V_\lambda = \text{Sols}(A - \lambda I) / \ker(T - \lambda \cdot Id)$ .

**הגדרה 8.2 פולינום אופייני:** תהא  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ , נסמן ב- $P_A(\lambda) = |A - \lambda I|$  את הפולינום האופייני של  $A$ .  
טענות:

1.  $P_A(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$  הוכחה:

$$P_A(\lambda) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n \overbrace{(A - \lambda I)_{i, \sigma(i)}}^{\text{polynomial in } \mathbb{F}[\lambda]}$$

2. המקדם המוביל ב- $P_A(\lambda)$  הוא  $(-1)^n$ .

3.  $\lambda$  ערך עצמי של  $A \iff \ker(T - \lambda Id) = V_\lambda \neq \{0\} \iff \det(T - \lambda Id) = 0$

4.  $\lambda$  ערך עצמי של  $A \iff \lambda$  שורש של  $P_A(\lambda)$

5. אם  $A, B$  דומות אז  $P_A = P_B$  הוכחה:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= |A - \lambda I| = |PBP^{-1} - \lambda I| = |PBP^{-1} - P\lambda IP^{-1}| = |P(B - \lambda I)P^{-1}| \\ &= |P| |B - \lambda I| |P^{-1}| = |B - \lambda I| = P_B(\lambda) \end{aligned}$$

6. נגדיר  $P_T(\lambda) = P_{[T]_B}(\lambda)$  - זה לא משנה איזה  $B$  בחרנו.

**הגדרה 9.2 ריבוי גיאומטרי של  $\lambda$ :** נסמן ב- $\mu_\lambda^A = \mu_\lambda^T = \mu_\lambda = \dim(V_\lambda)$

**הגדרה 10.2 ריבוי אלגברי של  $\lambda$ :** מסומן  $\rho_\lambda$  (רו), הוא הריבוי של  $\lambda$  בפולינום האופייני  $P_A(\lambda)$ , כלומר כמה פעמים הוא מופיע בפולינום.  
**טענות:**

1. אם  $A$  מטריצה בעלת ערכים עצמיים  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  עם ריבויים אלגבריים  $\rho_{\lambda_1}, \dots, \rho_{\lambda_k}$  אז  $\rho_{\lambda_1} + \dots + \rho_{\lambda_k} \leq n$

2. אם  $P_A(\lambda)$  מתפרק לגורמים לינאריים אז  $\rho_{\lambda_1} + \dots + \rho_{\lambda_k} = n$

3. לכל ערך עצמי  $\lambda$ ,  $\mu_\lambda \leq \rho_\lambda$

## 2.2 משפטים

1.  $A$  לכסינה  $\iff$  קיים בסיס  $B \subseteq \mathbb{F}^n$  שמורכב מוקטורים עצמיים של  $A$ .

2. אם  $T$  לכסינה (או  $A$  לכסינה) אז על האלכסון של הצורה האלכסונית מופיעים הערכים העצמיים של  $T$  (או  $A$ ). זה יחיד עד כדי הסידור של האלכסון.

3. תהא  $A/T$  עם ערכים עצמיים  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . אז הסכום  $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$  הוא סכום ישר. לכן אם  $A \in M_n(\mathbb{F})$  בעלת  $n$  ערכים עצמיים שונים, אז  $A$  לכסינה. ההפך לא בהכרח נכון.

**המשפט המרכזי:** תהא  $A \in M_n(\mathbb{F})$  אזי:  $A$  לכסינה מעל  $\mathbb{F} \iff$

1.  $P_A(\lambda)$  מתפרק לגורמים לינאריים מעל  $\mathbb{F}$ .

2. לכל ע"ע  $\lambda$  של  $A$ ,  $\rho_\lambda = \mu_\lambda$ .