

# סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 1

מיכאל פרבר ברודסקי

## תוכן עניינים

<b>2</b>	<b>I מונואידים, חבורות, חוגים ושדות</b>	
2	1 הגדרות	
2	1.1 תכונות של פעולות	
2	1.2 מונואיד	
2	1.3 חבורה	
2	1.4 חוג	
3	1.5 שדה	
<b>3</b>	<b>II מרכיבים</b>	
3	2 הגדרות בסיסיות	
3	3 הצגה פולארית	
<b>4</b>	<b>III מטריצות</b>	
4	4 הגדרות	
4	4.1 פעולות בסיסיות	
5	4.2 פעולות אלמנטריות על מטריצה	
5	4.3 שונות	
5	5 דירוג ודירוג קנוני	
5	5.1 הגדרות	
6	5.2 מציאת פתרונות	
6	5.2.1 מציאת מספר הפתרונות לפי צורה מדורגת (לא בהכרח קנונית)	
6	5.2.2 מציאת הפתרונות עצמם לפי צורה מדורגת קנונית	
6	6 תת מרחב	
6	7 צירופים לינאריים	
6	7.1 בת"ל	
7	7.2 קבוצת הצירופים הלינאריים	

## חלק I

## מונואידים, חבורות, חוגים ושדות

## 1 הגדרות

## 1.1 תכונות של פעולות

תהא  $*$  פעולה בינארית על  $A$  (כלומר ה־domain הוא  $A \times A$ ).

1.  $*$  אסוציאטיבית:  $\forall a, b, c \in A. (a * b) * c = a * (b * c)$ .

2.  $*$  חילופית:  $\forall a, b. a * b = b * a$ .

3. קבוצה  $A$  סגורה לפעולה  $*$ :  $*$  :  $A \times A \rightarrow A$ .

## 1.2 מונואיד

מונואיד הוא זוג  $\langle G, * \rangle$  כאשר  $G$  קבוצה כלשהי ו־ $*$  פעולה בינארית על  $G$ , כך ש:

1.  $G$  סגורה לפעולה  $*$ .

2.  $*$  פעולה אסוציאטיבית.

3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר  $\exists e \in G. \forall g \in G. e * g = g * e = g$ . האיבר הזה יחיד ומסומן  $e_G$ .

## 1.3 חבורה

מקרה פרטי של מונואיד שמקיימת גם:

4. קיים איבר הופכי, כלומר  $\forall g \in G. \exists h \in G. g * h = h * g = e$  כאשר  $e$  איבר יחידה. האיבר ההופכי של  $g$  מסומן  $g^{-1}$ .

## 1.4 חוג

שלשה  $\langle R, +, * \rangle$  נקראת חוג אם:

1.  $\langle R, + \rangle$  חבורה חילופית, כלומר  $\forall a, b \in R. a + b = b + a$ .

2.  $*$  היא פעולה בינארית על  $R$  ו־ $R$  סגורה לפעולה  $*$ .

3. חוק הפילוג:

$$\forall a, b, c \in R. a * (b + c) = a * b + a * c \\ (b + c) * a = b * a + c * a$$

חוג חילופי - אם  $*$  פעולה חילופית (כלומר  $a * b = b * a$ ).

חוג עם יחידה - אם  $\langle R, * \rangle$  מונואיד.

סימונים:  $0_R$  ניטרלי לחיבור,  $1_R$  ניטרלי לכפל אם קיים.

מחלק 0 - איבר  $a \in R$  נקרא "מחלק 0" אם יש  $b \neq 0_R$  כך ש־ $a * b = 0_R$ . בממשיים אין מחלק 0.

חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0 נקרא תחום שלמות. הוא מקיים את חוק הצמצום (לכל  $a, b, c \in R$ , אם  $a * b = c * b$  אז  $a = c$ )

## 1.5 שדה

$\langle F, +, * \rangle$  מקרה פרטי של חוג שמקיים גם:

1.  $\langle F \setminus \{0_F\}, * \rangle$  חבורה חילופית.

כל שדה הוא תחום שלמות, אבל ההפך אינו נכון. תחומי שלמות סופיים הם כן שדות. הרבה פעמים בהגדרת שדה מוסיפים את הדרישה  $0_F \neq 1_F$ .

## חלק II

## מרוכבים

## 2 הגדרות בסיסיות

נסמן  $i = \sqrt{-1}$ . ההגדרה הפורמלית של מרוכבים היא:  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , כאשר המספר הראשון הוא החלק הממשי (שמסומן  $Re(c)$ ) והמספר השני הוא החלק הדמיוני (שמסומן  $Im(c)$ ).  
עובדות: עבור  $z \in \mathbb{C}$ ,

1. הגודל של  $z$ :  $||z|| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$ . כלומר המרחק של  $z$  מראשית הצירים.

2. זהות אוילר:  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ , לכן  $z = ||z|| e^{i \cdot \arg(z)}$ .

3. חיבור: מחברים את החלק הממשי והדמיוני בנפרד.

4. כפל:  $(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + da)$ . משתמשים בזה ש- $i^2 = -1$ .

5. כל שורש של פולינום מרוכב הוא מרוכב.

6. נגדיר  $\bar{z}$  להיות  $\bar{z} = a - ib$ . כלומר להפוך את החלק הדמיוני.

$$\bar{\bar{z}} = z \quad (\text{א})$$

$$z \cdot \bar{z} = ||z||^2 \quad (\text{ב})$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad (\text{ג})$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad (\text{ד})$$

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (\text{ה})$$

7.  $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$  שדה סגור אלגברית (כלומר כל שורש של כל פולינום מרוכב הוא מרוכב).

8. איבר הופכי:  $w = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$  (אם מכפילים בהופכי מקבלים 1).

## 3 הצגה פולארית

נגדיר מרוכב בתור זוג  $\langle r, \theta \rangle$  כאשר  $r$  המרחק מראשית הצירים ו- $\theta$  הזווית שהוא יוצר, שנקראת הארגומנט.

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r \cdot e^{i\theta}$$

עובדות:

1. הארגומנט של  $z$ : נסמן  $\arg(z)$  להיות הזווית שהמספר יוצר עם ציר הממשיים (לרוב נסמן כ- $\theta$ ). ניתן לחשב אותו בעזרת  $\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$  ברוב המקרים.

$$\bar{z} = r \cdot e^{-i\theta}, z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \quad 2.$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad 3.$$

4. להכפיל מספרים מרוכבים על הגרף נראה כמו להכפיל את האורכים זה בזה ולחבר את הזוויות.

**פתרון משוואה**  $z^n = a + ib$ . נמצא הצגה פולארית  $z^n = r e^{i\theta}$ . נשתמש בעובדה ש-  $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi k)}$  עבור  $k \in \mathbb{Z}$ . אזי:

$$z = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi \frac{k}{n}\right)}$$

עבור  $k \in \mathbb{Z}$ . ולכל  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  נקבל פתרונות שונים.

### חלק III

## מטריצות

### 4 הגדרות

וקטור הוא  $n$ יה של איברים ב- $\mathbb{F}$ . מטריצה היא  $m$ יה של וקטורים. מטריצה מסדר  $m \times n$  היא מטריצה עם  $m$  שורות ו- $n$  עמודות (קודם  $y$  ואז  $x$ ). נגדיר מערכת משוואות כמטריצה באופן הבא:

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \dots + \alpha_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m,1}x_1 + \dots + \alpha_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \dots & \alpha_{m,n} & b_m \end{array} \right)$$

### 4.1 פעולות בסיסיות

חיבור וקטורים:

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 + \beta_0 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

**כפל מטריצה בוקטור:** כמו להציב את הוקטור בעמודות המטריצה.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 a_{1,1} + \dots + \beta_n a_{1,n} \\ \dots + \dots + \dots \\ \beta_1 a_{m,1} + \dots + \beta_n a_{m,n} \end{pmatrix}$$

בנוסף, הפתרונות של  $\bar{x} \in \text{Sols}(A | b)$  שקולים ל- $\bar{A}\bar{x} = \bar{b}$ . את פתרונות המטריצה נסמן ב- $\text{Sols}$ . מטריצות נקראות שקולות אם הפתרונות שלהן זהים. משפטים לגבי כפל מטריצה בוקטור:

$$A(\bar{x} + \bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y} \quad \bullet$$

$$A(\alpha \cdot \bar{x}) = \alpha \cdot (A \cdot \bar{x}) \quad \bullet$$

$$\bullet \text{ עבור } I_n \text{ מרטיצת היחידה, } I_n \cdot \bar{b} = \bar{b}, \text{ עבור } 0 \text{ מרטיצת ה-} 0, 0 \cdot b = 0.$$

## 4.2 פעולות אלמנטריות על מטריצה

הפעולות האלה הן:

1. להחליף סדר בין משוואות.  $R_i \leftrightarrow R_j$ .

2. להכפיל משוואה בקבוע.  $R_i \rightarrow \alpha \cdot R_i$ .

3. לחבר משוואות.  $R_i \rightarrow R_i + R_j$ .

כולן משמרות את הפתרונות של המטריצה.

מטריצות ששקולות באמצעות סדרת פעולות אלמנטריות נקראות שקולות שורה.

## 4.3 שונות

**מטריצה ריבועית:** מטריצה שכמות העמודות בה שווה לכמות השורות.

**משפט 1.4** הבאים שקולים עבור מטריצה  $A \in M_n(\mathbb{F})$  (מטריצה ריבועית):

1.  $A$  שקולת שורות ל- $I_n$ .

2. לכל  $\bar{b} \in \mathbb{F}^n$  למערכת  $A\bar{x} = \bar{b}$  יש פתרון יחיד.

3. לכל  $b \in \mathbb{F}^n$  למערכת  $A\bar{x} = \bar{b}$  קיים פתרון.

4. למערכת  $A\bar{x} = \bar{0}$  יש פתרון יחיד.

5. קיים  $b$  כך שלמערכת  $A\bar{x} = \bar{b}$  יש פתרון יחיד.

**מטריצת היחידה:** מסומנת  $I_n$ . היא מטריצה ריבועית שבה  $a_{i,j} = 1$  אם  $i = j$ , ואם  $i \neq j$  אז  $a_{i,j} = 0$ . לדוגמה:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וקטור  $e_i$ :

$$(e_i)_i = \begin{cases} 0 & x \neq i \\ 1 & x = i \end{cases}$$

זה בעצם 0 בכל מקום חוץ מהמקום ה- $i$ .

## 5 דירוג ודירוג קנוני

### 5.1 הגדרות

**בצורה מדורגת:**

1. משוואות 0 (מהצורה  $0 = b$ ) נמצאות למטה.

2. המשתנה הפותח בכל משוואה נמצא מימין ממש למשתנים הפותחים במשוואות מעליו.

משתנה חופשי הוא משתנה שלא מקדם פותח של אף שורה.

**בנוסף, בצורה מדורגת קנונית:**

3. המקדם של כל משתנה פותח הוא 1

4. לכל משתנה פותח של משוואה, המקדם של המשתנה בשאר המשוואות הוא 0.

לכל מטריצה קיימת צורה מדורגת קנונית יחידה ששקולה לה.

## 5.2 מציאת פתרונות

## 5.2.1 מציאת מספר הפתרונות לפי צורה מדורגת (לא בהכרח קנונית)

עבור  $(A | b)$  מטריצה מדורגת:

1. אם  $(A | b)$  יש שורת סתירה ( $0 = b$  כאשר  $b \neq 0$ ) אין פתרון.
2. אחרת, יש  $|\mathbb{F}|^k$  פתרונות כאשר  $k$  מספר המשתנים החופשיים.

## 5.2.2 מציאת הפתרונות עצמם לפי צורה מדורגת קנונית

$(A' | b')$  מטריצה מדורגת קנונית מסדר  $m \times n$  ששקולה ל- $(A | b)$  אז:

1. אם  $(A' | b')$  יש שורת סתירה אז  $\text{Sols}((A' | b')) = \emptyset$ .
2. אחרת: נעשה החלפה על המשתנים החופשיים. כל משתנה שאינו חופשי יוגדר לפי משוואה מסוימת. דוגמה:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

המקדמים החופשיים הם 1, 4, 6. הפתרון הוא:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 2 - 4x_4 \\ x_4 \\ 3 - 3x_6 \\ x_6 \end{pmatrix} \mid x_1, x_4, x_6 \in \mathbb{R} \right\}$$

## 6 תת מרחב

טענה (בוחן תת מרחב):  $U \subseteq F^n$  היא תת מרחב אם "מ":

1.  $U$  סגורה לחיבור.
  2.  $U$  סגורה לכפל בסקלר.
  3.  $\vec{0} \in U$ . ניתן להחליף את התנאי ב- $u \neq \vec{0}$ .
- נובע מכאן גם שחיתוך של תתי מרחבים הוא תת מרחב.

## 7 צירופים לינאריים

## 7.1 בת"ל

**הגדרה 1.7** סדרת  $m$  מיות  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) \in (\mathbb{F}^m)^k$  תקרא בלתי תלויה לינארית (בת"ל) אם לכל  $\vec{b} \in \mathbb{F}^m$  יש לכל היותר פתרון אחד למשוואה  $\sum_{i=1}^k x_i \vec{v}_i = \vec{b}$ .

**הגדרה 2.7** יהיו  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) \in (\mathbb{F}^n)^k$ , סדרת מקדמים  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}^k$  נקראת תלות לינארית של  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$  אם  $\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$ .

נגדיר את מרחב התלויות של  $(v_1, \dots, v_k)$  להיות:

$$LD((v_1, \dots, v_k)) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \mid \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_k = 0 \right\}$$

$$LD((v_1, \dots, v_k)) = \text{Sols}((v_1, \dots, v_k \mid 0))$$

**מסקנה 3.7**  $LD(v_1, \dots, v_k) = \{0\} \iff v_1, \dots, v_k$  בת"ל

## 7.2 קבוצת הצירופים הלינאריים

**הגדרה 4.7** עבור סדרת  $n$  ניות,  $(v_1, \dots, v_k) \in (\mathbb{F}^n)^k$ ,

$$\text{sp}(v_1, \dots, v_k) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F} \right\}$$

זה המרחב הנפרש על ידי  $v_1, \dots, v_k$ . ההגדרה לקבוצות  $K \subseteq \mathbb{F}^n$  היא:

$$\text{sp}(K) = \left\{ b \in \mathbb{F}^n \mid \exists k \in \mathbb{N}. \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}. \exists t_1, \dots, t_k \in K. b = \sum_{i=1}^k \alpha_i t_i \right\}$$