

# סיכומי הרצאות - חדו"א 1א

מיכאל פרבר ברודסקי

## תוכן עניינים

1	נוסחאות כלליות . . . . .	2
2	חסמים עליונים ותחתונים . . . . .	2
3	סדרות . . . . .	2
3.1	הגדרת הגבול . . . . .	2
3.2	חשבון גבולות . . . . .	3
3.3	טענות על גבולות . . . . .	3
3.4	מבחן ה[שורש](מנה) [(הגבולי)?] . . . . .	3
3.5	סדרות מונוטוניות . . . . .	3
3.6	תתי סדרות . . . . .	4
3.6.1	גבולות חלקיים . . . . .	4
4	טורים . . . . .	4
4.1	טור חיובי . . . . .	5
4.2	מבחן ה[השוואה](שורש)(מנה) [(הגבולי)?] (לטורים חיוביים)? . . . . .	5
4.3	טור מתכנס בהחלט . . . . .	5
4.4	טורי חזקות . . . . .	6
4.5	טענות נוספות על טורים . . . . .	6
5	פונקציות . . . . .	6
5.1	הגדרת הגבול . . . . .	6
5.2	חשבון גבולות (דומה לסדרות) . . . . .	7
5.3	גבולות שימושיים . . . . .	7

## 1 נוסחאות כלליות

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$	בינום:
$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \geq \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$	א"ש הממוצעים:
$(1+x)^n \geq 1+nx$ לכל $x > -1, n \in \mathbb{N}$ מתקיים	א"ש ברנולי:
$ a+b  \leq  a  +  b $	א"ש המשולש:

## 2 חסמים עליונים ותחתונים

$M$  יקרא חסם מלעיל של  $A$  אם לכל  $x \in A, x \leq M$ .  
 $M$  יקרא חסם מלרע של  $A$  אם לכל  $x \in A, M \leq x$ .  
 אקסיומת השלמות: לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל קיים חסם עליון קטן ביותר, ונסמן אותו ב- $\sup A$ .

**טענה שימושית:** אם  $b = \sup A$  אז לכל  $\varepsilon > 0$ , קיים  $a \in A$  כך ש- $b - \varepsilon < a \leq b$ .

**הגדרה:** נאמר ש- $A$  צפופה ב- $B$  אם לכל  $b \in B$  ולכל  $\varepsilon > 0$ , קיים  $a \in A$  כך ש- $|b - a| < \varepsilon$ .  
**טענה:**  $S \subseteq \mathbb{R}$  צפופה ב- $\mathbb{R} \iff (a, b) \cap S \neq \emptyset, a < b \in \mathbb{R}$  לכל.  
**טענה:** לכל  $a < b$ , קיים  $q$  ש- $q \in (a, b)$ .  
**הוכחה:** נניח ש- $a > 0$ . יהי  $k$  כך ש- $0 < \frac{1}{k} < b - a$ . יהי  $m$  המספר הקטן ביותר כך ש- $\frac{m}{k} \geq b$ . אז  $\frac{m-1}{k} < b$ . בנוסף,  $a + \frac{1}{k} < a + (b - a) = b$  ולכן  $a < \frac{m-1}{k}$ . אם כך,  $a < \frac{m-1}{k} < b$  וסיימנו. אם  $a \leq 0$ , נוסיף את  $x = \lceil |a| + 17 \rceil$  ל- $a, b$  ועבור  $c = a + x, d = b + x$  קיים  $q \in (a + x, b + x)$  ולכן  $q - x \in (a, b)$  מש"ל.  
**טענה:**  $\mathbb{Q}$  צפופה ב- $\mathbb{R}$  ו- $\mathbb{Q} \cap [a, b]$  צפופה ב- $[a, b]$ .

## 3 סדרות

נסמן סדרות ב- $(a_n)$  או  $(a_n)_{n=1}^\infty$ .  
 נאמר שסדרה חסומה מלעיל אם קיים  $M$  כך שלכל  $n, a_n \leq M$ .  
 נאמר שסדרה חסומה מלרע אם קיים  $M$  כך שלכל  $n, M \leq a_n$ .  
 נאמר שסדרה חסומה אם קיים  $M$  כך שלכל  $n, |a_n| \leq M$ .

### 3.1 הגדרת הגבול

נאמר שהגבול של  $(a_n)$  הוא  $L$ , ונסמן  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  או  $a_n \rightarrow L$ , אם:  
 $\forall \varepsilon > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall n > n_0. |a_n - L| < \varepsilon$   
 נאמר שהגבול של  $(a_n)$  הוא  $\infty$ , ונסמן  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  או  $a_n \rightarrow \infty$ , אם:  
 $\forall M > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall n > n_0. a_n > M$   
**משפט (יחידות הגבול):** אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L'$  אז  $L = L'$ .  
**סדרות קושי:** זהו תנאי שקול להתכנסות, שלא צריך לדעת בשבילו את  $L$ :  
 $\forall \varepsilon > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall m, n \geq n_0. |a_m - a_n| < \varepsilon$

## 3.2 חשבון גבולות

יהיו  $(a_n), (b_n)$  סדרות כך ש- $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$  אזי:

- $a_n + b_n \rightarrow a + b$
- $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$
- אם  $b_n \neq 0$  לכל  $n$  ו- $b \neq 0$  אז  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$
- אם  $b_n \neq 0$  לכל  $n$  ו- $b = 0$  אז  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \infty$
- $|a_n| \rightarrow |a|$
- אם  $a_n \geq 0$  לכל  $n$  אז  $\sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{a}$

## 3.3 טענות על גבולות

**טענה:** יהיו  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$  סדרות מתכנסות כך ש- $a_n \leq b_n$  אז:  $a \leq b$ .  
**כלל הסנדוויץ':** יהיו  $x_n, y_n, z_n$  סדרות כך ש- $x_n \leq z_n \leq y_n$  (כמעט) לכל  $n$ . אם  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow x$  אז  $z_n \rightarrow x$ .

**הרחבה:** אם  $x_n \geq y_n$  ו- $y_n \rightarrow \infty$  אז  $x_n \rightarrow \infty$ .  
**טענה:** תהי  $(a_n)$  כך ש- $a_n \rightarrow L \neq 0$  ויהי  $0 < r < |L|$ . אז קיים  $n_0$  כך שלכל  $n > n_0$ ,  $|a_n| > r$ .  
**כלל השורש:** אם קיים  $0 < \alpha < 1$  כך שלכל  $n$ ,  $0 \leq a_n^{1/n} \leq \alpha$  אז  $a_n \rightarrow 0$ .

## 3.4 מבחן ה[שורש](מנה) (הגבולי)?

**מבחן השורש:**  $a_n \geq 0$  וקיים  $0 \leq \alpha < 1$  כך ש- $(a_n)^{1/n} \leq \alpha$  לכל  $n$ . אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .  
**מבחן השורש הגבולי:**  $a_n > 0$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = L$ . אזי,

- אם  $L < 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
  - אם  $L > 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
- משפט המנה הגבולי:**  $a_n > 0$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ . אזי,

- אם  $L < 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- אם  $L > 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

## 3.5 סדרות מונוטוניות

**טענה:** תהי  $(a_n)$  מונוטונית עולה וחסומה מלעיל. אזי:  $a_n \rightarrow \sup a_n$ .  
**טענה:** תהי  $(a_n)$  מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל. אזי:  $a_n \rightarrow \infty$ .

### 3.6 תתי סדרות

תהי  $(a_n)$  סדרה ו- $(n_k)$  סדרה עולה ממש של טבעיים. אז  $b_k = a_{n_k}$  תת סדרה של  $(a_n)$  ונסמן ב- $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ .

**משפט הירושה:** תהי  $(a_n)$  סדרה ו- $(a_{n_k})$  תת-סדרה.

- אם  $a_n \rightarrow L$  אז  $a_{n_k} \rightarrow L$
- אם  $a_n$  מונוטונית עולה אז  $a_{n_k}$  מונוטונית עולה
- אם  $a_n$  חסומה אז  $a_{n_k}$  חסומה

**משפט בולצנו-ויירשטראס:** לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת ומונוטונית. אם הסדרה לא חסומה יש תת-סדרה מונוטונית מתבדרת ל- $\pm\infty$ .

#### 3.6.1 גבולות חלקיים

**הגדרה:**  $L$  יקרא גבול חלקי אם קיימת  $a_{n_k} \rightarrow L$ . נסמן ב- $\hat{\mathcal{P}}(a_n)$  את קבוצת הגבולות החלקיים, ונסמן ב- $\mathcal{P}(a_n)$  את קבוצת הגבולות החלקיים בלי  $\pm\infty$ .

בנוסף, נגדיר:  $\limsup a_n = \overline{\lim} a_n = \sup \hat{\mathcal{P}}(a_n)$ ,  $\liminf a_n = \underline{\lim} a_n = \inf \hat{\mathcal{P}}(a_n)$ .

**הערה:** על פי בולצנו-ויירשטראס, תמיד קיים גבול חלקי

**טענה שימושית:** תהי  $(a_n)$  חסומה.  $L = \limsup a_n \iff$

1. לכל  $\varepsilon > 0$ ,  $a_n < L + \varepsilon$  כמעט תמיד (חוץ ממספר סופי של איברים)

2. לכל  $\varepsilon > 0$ ,  $L - \varepsilon < a_n$  תופעה שכיחה (באינסוף איברים)

**טענה:**  $(a_n)$  חסומה  $\iff \limsup a_n, \liminf a_n$  קיימים והם גבולות חלקיים.

**טענה:**  $(a_n)$  אינה חסומה מלעיל/מלרע  $\iff -\infty/\infty$  גבול חלקי

**טענה:**  $(a_n)$  מתכנסת במובן הרחב  $\iff$  יש גבול חלקי יחיד

**טענה:** בסדרה חסומה,  $\inf a_n \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq \sup a_n$

**קבוצה סגורה:** תהי  $B \subseteq \mathbb{R}$  קבוצה. נאמר ש- $B$  קבוצה סגורה אם לכל סדרה  $(x_n)$ ,  $x_n \rightarrow x \implies x \in B$ .  
**משפט:** אם  $(a_n)$  חסומה אז  $\mathcal{P}(a_n)$  קבוצה סגורה.

## 4 טורים

תהי  $(a_n)$  סדרה. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ .  
**הגדרה:** נאמר ש- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  מתכנס  $\iff$  סדרת הסכומים החלקיים  $s_n$  מתכנסת.

**הערה:** הטור הוא עצם נפרד מסדרת הסכומים החלקיים, אסור לבלבל ביניהם

**הטור הגיאומטרי:**  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$  עבור  $|q| < 1$ .

**טענה:** אם  $\sum a_n$  מתכנס אז  $a_n \rightarrow 0$ .

**קריטריון קושי להתכנסות טורים:**  $\forall \varepsilon > 0. \exists n_0. \forall m \geq n_0. \forall p \in \mathbb{N}. \left| \sum_{k=m}^{m+p} a_k \right| < \varepsilon$

**חשבון טורים:**

- אם  $\sum a_n = K, \sum b_n = L$  מתכנסים אז  $\sum (a_n + b_n) = K + L$  מתכנס
- אם  $\sum a_n = L, \alpha \in \mathbb{R}$  מתכנס אז  $\sum \alpha a_n = \alpha L$  מתכנס

## 4.1 טור חיובי

נאמר ש- $\sum a_n$  **טור חיובי** אם  $a_n \geq 0$  לכל  $n$

**משפט:** טור חיובי מתכנס  $\iff s_n$  חסומה מלעיל

**משפט:** יהי  $\sum a_n$  טור חיובי. אם  $\sum a_n$  מתכנס, אז כל טור שמתקבל מסידור מחדש של האיברים בו גם מתכנס ולאיתו הגבול.

## 4.2 מבחן ה[השוואה](שורש)(מנה) (הגבולי)? (לטורים חיוביים)?

**סימון:** יהיו  $\sum a_n, \sum b_n$  טורים. אם החל ממקום מסוים,  $a_n \geq b_n$ , נסמן  $\sum a_n \succcurlyeq \sum b_n$ .  
**מבחן ההשוואה לטורים חיוביים:** יהיו  $\sum a_n, \sum b_n$  טורים חיוביים כך ש- $\sum a_n \succcurlyeq \sum b_n$ . אז:

1. אם  $\sum a_n$  מתכנס,  $\sum b_n$  מתכנס

2. אם  $\sum b_n$  מתבדר,  $\sum a_n$  מתבדר

**מבחן השורש לטורים חיוביים:** יהי  $\sum a_n$  טור חיובי ויהי  $0 < q < 1$ .

אם החל ממקום מסוים,  $\sqrt[n]{a_n} < q$ , אז  $\sum a_n$  מתכנס.

**מבחן המנה לטורים חיוביים:** יהי  $\sum a_n$  טור חיובי כך ש- $a_n > 0$  לכל  $n$ .

1. אם קיים  $0 < q < 1$  כך שהחל ממקום מסוים  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$  אז הטור מתכנס

2. אם החל ממקום מסוים  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  אז הטור מתבדר

**מבחן המנה הגבולי לטורים חיוביים:** יהי  $\sum a_n$  טור חיובי כך ש- $a_n > 0$  לכל  $n$ .

1. אם  $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ,  $\sum a_n$  מתכנס

2. אם  $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ,  $\sum a_n$  מתבדר

**מבחן השורש הגבולי:** יהי  $\sum a_n$  טור חיובי.

1. אם  $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$  אז  $\sum a_n$  מתכנס

2. אם  $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$  אז  $\sum a_n$  מתבדר

## 4.3 טור מתכנס בהחלט

נאמר ש- $\sum a_n$  **מתכנס בהחלט** אם  $\sum |a_n|$  מתכנס.  
 אם טור לא מתכנס בהחלט נאמר שהוא "מתכנס בתנאי"

**טענה:** אם  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט אז  $\sum a_n$  מתכנס

**טענה שימושית:** נסמן  $\bar{a}_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \underline{a}_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$ .

$$\begin{aligned} a_n \geq 0 & \quad \bar{a}_n = a_n \quad \underline{a}_n = 0 \\ a_n \leq 0 & \quad \bar{a}_n = 0 \quad \underline{a}_n = -a_n \end{aligned}$$

ומתקיים ש- $a_n = \bar{a}_n - \underline{a}_n$ .

**טענה:** אם  $\sum \bar{a}_n, \sum \underline{a}_n$  מתכנסים אז  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט.

**טענה:** אם  $\sum a_n$  מתכנס בתנאי, אז  $\sum \bar{a}_n, \sum \underline{a}_n \rightarrow \infty$ .

## 4.4 טורי חזקות

טור חזקות הוא טור מהצורה  $\sum a_n x^n$  או  $\sum a_n (x - x_0)^n$ , אבל פחות מתייחסים אליו).

טור חזקות בהכרח מתכנס באיזשהו  $x$ , למשל 0.

**משפט Abel:** לכל טור חזקות  $\sum a_n x^n$  קיים "מספר"  $R \in [0, \infty]$  (שנקרא רדיוס ההתכנסות) כך שלכל  $x \in (-R, R)$  הטור מתכנס בהחלט, ול- $x > R, x < -R$  הטור מתבדר.

**משפט Cauchy-Hadamard:** יהי  $\sum a_n x^n$  טור חזקות, רדיוס ההתכנסות הוא:  $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$  (כאשר  $\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0$ ).

**הערה:** משפט Abel לא מתייחס ל- $\pm R$ , צריך לבדוק עבורם בנפרד

## 4.5 טענות נוספות על טורים

**טענה (הכנסת סוגריים):** יהי  $\sum a_n$  טור מתכנס ו- $n_k$  סדרה עולה של אינדקסים. נסמן  $A_1 = a_1 + \dots + a_{n_1}, A_2 = a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}, \dots$  אז הטור  $\sum A_n$  מתכנס ולאיתו הגבול.

**טענה הפוכה:** תהי  $(a_n)$  סדרה ו- $n_k$  סדרה עולה של אינדקסים. אם כל האיברים בתוך כל סוגריים,  $(a_j)_{n_k+1}^{n_{k+1}}$ , בעלי אותו סימן אז הטענה ההפוכה נכונה - אם  $\sum A_n$  מתכנס אז  $\sum a_n$  מתכנס.

**שימוש:** בתנאים הנכונים,  $\sum a_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + \dots$

**משפט לייבניץ על טורים מתכנסים:** תהי  $(a_n)$  סדרה אי-שלילית יורדת ל-0. אזי הטור  $\sum (-1)^n a_n$  מתכנס.

**טענה:** יהיו  $(a_n), (b_n)$  סדרות.  $\sum a_n b_n$  מתכנס אם אחד מהניסוחים הבאים מתקיים:

**תנאי Dirichlet:**  $b_n \nearrow 0$  או  $b_n \searrow 0$  ו- $|s_n^a| < M$

**תנאי Abel:**  $b_n \searrow$  או  $b_n \nearrow$  ו- $|b_n| < M$  ו- $\sum a_n$  מתכנס

**משפט Riemann:** יהי  $\sum a_n$  טור מתכנס בתנאי. אזי לכל  $-\infty \leq s \leq \infty$  ניתן לסדר את איברי הטור כך שיתכנס ל- $s$  או שאפילו לא יתכנס במובן הרחב.

## 5 פונקציות

## 5.1 הגדרת הגבול

בשביל  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  נדרוש ש- $f(x)$  מוגדרת בסביבה נקובה כלשהי.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$	$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.  f(x) - L  < \varepsilon$	Cauchy
	לכל $(x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}$ ו- $I$ סביבה נקובה, אם $x_n \rightarrow x_0$ אז $f(x_n) \rightarrow L$	Heine
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$	$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0, x_0 + \delta).  f(x) - L  < \varepsilon$	Cauchy
	$(x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}$ ו- $x_0 < x_n \rightarrow x_0$ אז $f(x_n) \rightarrow L$	Heine
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$	$\forall \varepsilon > 0. \exists M > 0. \forall x > M.  f(x) - L  < \varepsilon$	Cauchy
	$x_n \rightarrow \infty$ אז $f(x_n) \rightarrow L$	Heine
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$	$\forall M > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0, x_0 + \delta). f(x) < -M$	Cauchy
	$(x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}$ ו- $x_0 < x_n \rightarrow x_0$ אז $f(x_n) \rightarrow -\infty$	Heine

## 5.2 חשבון גבולות (דומה לסדרות)

יהיו  $f, g : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  ו- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$ . אזי:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2$$

$$\bullet \text{ אם } L_2 \neq 0 \text{ (ואם קיימת סביבה נקובה בה } g(x) \neq 0 \text{): } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

**משפט (הרכבה):** יהיו  $I, J$  קטעים פתוחים ו- $x_0 \in I, y_0 \in J$ . תהייה  $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow J \setminus \{y_0\}$  ו- $g : J \setminus \{y_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ . אם  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$  ו- $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$ , אזי:  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L$ .

## 5.3 גבולות שימושיים

**פולינומים:** בגלל ש- $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$  (מחשבון גבולות).