סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

1 דברים חשובים מלינארית 1

1.1 מטריצות דומות

יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{F})$, נאמר כי A ו־B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש־$A=P^{-1}\cdot B\cdot P$.
משפט: נתון $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ ריבועיות, הבאים שקולים:

1. A,B דומות.
2. קיימת $T:V\to V$ ובסיסים C,C' של V כך ש־$[T]_C=A,[T]_{C'}=B$.
3. לכל $T:V\to V$, אם קיים בסיס C של V כך ש־$[T]_C=A$, אז קיים בסיס C' של V כך ש־$[T]_{C'}=B$.

ואם A,B דומות אז:

1. $\mathrm{Rank}(A)=\mathrm{Rank}(B),\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}(B)$.
2. $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$ כאשר $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}(A)_{i,i}$.
3. $\det(A)=\det(B)$.

2 לכסון

2.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.2 מטריצה אלכסונית: מטריצה ריבועית $A\in M_n(\mathbb{F})$ שבה עבור $i\neq j$, $A_{i,j}=0$. נגדיר את $Diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ להיות המטריצה שיש לה $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ על האלכסון.

הגדרה 2.2 מטריצה לכסינה: מטריצה ריבועית $A\in M_n(\mathbb{F})$ שדומה למטריצה אלכסונית. המטרה של מטריצות לכסינות היא שקל להעלות אותן בחזקה. עבור D מטריצה אלכסונית, קיימת P כך ש:

$$A=PDP^{-1}$$
$$A^n=\overbrace{PDP^{-1}\cdot\dots\cdot PDP^{-1}}^{n\text{ times}}=PD^nP^{-1}$$

הגדרה 3.2 העתקה לכסינה: העתקה לינארית $T:V\to V$ כך שקיים בסיס B של V כך ש־$[T]_B^B$ אלכסונית.
בנוסף, אם T העתקה לכסינה אז כל מטריצה מייצגת שלה לפי בסיס C, $[T]_C^C$, היא לכסינה.

2.1.1 ערך עצמי

הגדרה 4.2 וקטור עצמי של T לערך עצמי λ: $\overline{v}$ כך ש־$T(\overline{v})=\lambda\overline{v}$.

הגדרה 5.2 ערך עצמי של A לערך עצמי λ: $\overline{v}$ כך ש־$A\overline{v}=\lambda\overline{v}$.

הגדרה 6.2 ערך עצמי של T: λ כך שקיים וקטור עצמי $\underline{\overline{v}\neq 0}$ של T לערך עצמי λ.

2.1.2 וקטורים עצמיים

הגדרה 7.2 מרחבים עצמיים: תהא $T:V\to V$ ה"ל, ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$. נגדיר $V_\lambda=\{\overline{v}\in V\mid T(\overline{v})=\lambda\overline{v}\}$, כלומר קבוצת הוקטורים עם ערך עצמי λ.
λ ערך עצמי של T $\iff$ $V_\lambda\neq\{0_V\}$. בנוסף V_λ תמ"ו. ניתן גם להגדיר כך: $V_\lambda=\mathrm{Sols}(A-\lambda I)/\ker(T-\lambda\cdot Id)$.

הגדרה 8.2 פולינום אופייני: תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, נסמן ב־$P_A(\lambda)=|A-\lambda I|$ את הפולינום האופייני של A.
טענות:

1. $P_A(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$. הוכחה:

$$P_A(\lambda) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} \overbrace{(A - \lambda I)_{i,\sigma(i)}}^{polynomial\, in\, \mathbb{F}[\lambda]}$$

2. המקדם המוביל ב־$P_A(\lambda)$ הוא $(-1)^n$.
3. λ ערך עצמי של $A \iff \ker(T - \lambda Id) = V_\lambda \neq \{\bar{0}\} \iff \det(T - \lambda Id) = 0$.
4. λ ערך עצמי של $A \iff \lambda$ שורש של $P_A(\lambda)$.
5. אם A, B דומות אז $P_A = P_B$. הוכחה:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= |A - \lambda I| = \left|PBP^{-1} - \lambda I\right| = \left|PBP^{-1} - P\lambda IP^{-1}\right| = \left|P(B - \lambda I)P^{-1}\right| \\ &= |P|\,|B - \lambda I|\,\left|P^{-1}\right| = |B - \lambda I| = P_B(\lambda) \end{aligned}$$

6. נגדיר $P_T(\lambda) = P_{[T]_B}(\lambda)$ ־ זה לא משנה איזה B בחרנו.

הגדרה 9.2 ריבוי גיאומטרי של λ**:** נסמן ב־$\mu_\lambda^A = \mu_\lambda^T = \mu_\lambda = \dim(V_\lambda)$.

הגדרה 10.2 ריבוי אלגברי של λ**:** מסומן ρ_λ (רו), הוא הריבוי של λ בפולינום האופייני $P_A(\lambda)$, כלומר כמה פעמים הוא מופיע בפולינום.

טענות:

1. אם A מטריצה בעלת ערכים עצמיים $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ עם ריבויים אלגבריים $\rho_{\lambda_1}, \ldots, \rho_{\lambda_k}$ אז $\rho_{\lambda_1} + \cdots + \rho_{\lambda_k} \leq n$.
2. אם $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים אז $\rho_{\lambda_1} + \cdots + \rho_{\lambda_k} = n$.
3. לכל ערך עצמי λ, $\mu_\lambda \leq P_\lambda$.

2.2 משפטים

1. A לכסינה $\iff$ קיים בסיס $B \subseteq \mathbb{F}^n$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A.
2. אם T לכסינה (או A לכסינה) אז על האלכסון של הצורה האלכסונית מופיעים הערכים העצמיים של T (או A). זה יחיד עד כדי הסידור של האלכסון.
3. תהא A/T עם ערכים עצמיים $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. אז הסכום $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_n}$ הוא סכום ישר.
   לכן אם $A \in M_n(\mathbb{F})$ בעלת n ערכים עצמיים שונים, אז A לכסינה. ההפך לא בהכרח נכון.

המשפט המרכזי: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי: A לכסינה מעל $\mathbb{F} \iff$

1. $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינארים מעל $\mathbb{F}$.
2. לכל ע"ע λ של A, $\rho_\lambda = \mu_\lambda$.