

סיכומי הרצאות - חדו"א 1א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

1	נוסחאות כלליות	2
2	חסמים עליונים ותחתונים	2
3	סדרות	2
3.1	הגדרת הגבול	2
3.2	חשבון גבולות	3
3.3	טענות על גבולות	3
3.4	מבחן ה[שורש](מנה) [(הגבולי)?]	3
3.5	סדרות מונוטוניות	3
3.6	תתי סדרות	4
3.6.1	גבולות חלקיים	4
4	טורים	4
4.1	טור חיובי	5
4.2	מבחן ה[השוואה](שורש)(מנה) [(הגבולי)?] (לטורים חיוביים)?	5
4.3	טור מתכנס בהחלט	5
4.4	טורי חזקות	6
4.5	טענות נוספות על טורים	6
5	פונקציות	6
5.1	הגדרת הגבול	6
5.2	חשבון גבולות (דומה לסדרות)	7
5.3	גבולות שימושיים	7
5.4	רציפות	7

1 נוסחאות כלליות

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$	בינום:
$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \geq \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$	א"ש הממוצעים:
$(1+x)^n \geq 1+nx$ לכל $x > -1, n \in \mathbb{N}$ מתקיים	א"ש ברנולי:
$ a+b \leq a + b $	א"ש המשולש:

2 חסמים עליונים ותחתונים

M יקרא חסם מעיל של A אם לכל $x \in A, x \leq M$.
 M יקרא חסם מלרע של A אם לכל $x \in A, M \leq x$.
 אקסיומת השלמות: לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מעיל קיים חסם עליון קטן ביותר, ונסמן אותו ב- $\sup A$.

טענה שימושית: אם $b = \sup A$ אז לכל $\varepsilon > 0$, קיים $a \in A$ כך ש- $b - \varepsilon < a \leq b$.

הגדרה: נאמר ש- A צפופה ב- B אם לכל $b \in B$ ולכל $\varepsilon > 0$, קיים $a \in A$ כך ש- $|b - a| < \varepsilon$.
טענה: $S \subseteq \mathbb{R}$ צפופה ב- $\mathbb{R} \iff (a, b) \cap S \neq \emptyset, a < b \in \mathbb{R}$ לכל.
טענה: לכל $a < b$, קיים q ש- $q \in (a, b)$.
הוכחה: נניח ש- $a > 0$. יהי k כך ש- $0 < \frac{1}{k} < b - a$. יהי m המספר הקטן ביותר כך ש- $\frac{m}{k} \geq b$. אז $\frac{m-1}{k} < b$. בנוסף, $a + \frac{1}{k} < a + (b - a) = b$ ולכן $a < \frac{m-1}{k}$. אם כך, $a < \frac{m-1}{k} < b$ וסיימנו. אם $a \leq 0$, נוסיף את $x = \lceil |a| + 17 \rceil$ ל- a, b ועבור $c = a + x, d = b + x$ קיים $q \in (a + x, b + x)$ ולכן $q - x \in (a, b)$ מש"ל.
טענה: \mathbb{Q} צפופה ב- \mathbb{R} ו- $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ צפופה ב- $[a, b]$.

3 סדרות

נסמן סדרות ב- (a_n) או $(a_n)_{n=1}^\infty$.
 נאמר שסדרה חסומה מעיל אם קיים M כך שלכל $n, a_n \leq M$.
 נאמר שסדרה חסומה מלרע אם קיים M כך שלכל $n, M \leq a_n$.
 נאמר שסדרה חסומה אם קיים M כך שלכל $n, |a_n| \leq M$.

3.1 הגדרת הגבול

נאמר שהגבול של (a_n) הוא L , ונסמן $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ או $a_n \rightarrow L$, אם:
 $\forall \varepsilon > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall n > n_0. |a_n - L| < \varepsilon$
 נאמר שהגבול של (a_n) הוא ∞ , ונסמן $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ או $a_n \rightarrow \infty$, אם:
 $\forall M > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall n > n_0. a_n > M$
משפט (יחידות הגבול): אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L'$ אז $L = L'$.
סדרות קושי: זהו תנאי שקול להתכנסות, שלא צריך לדעת בשבילו את L :
 $\forall \varepsilon > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall m, n \geq n_0. |a_m - a_n| < \varepsilon$

3.2 חשבון גבולות

יהיו $(a_n), (b_n)$ סדרות כך ש- $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$. אזי:

- $a_n + b_n \rightarrow a + b$
- $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$
- אם $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ ו- $b \neq 0$ לכל n
- אם $b_n \neq 0$ לכל n ו- $b = 0$ אז $\frac{1}{b_n} \rightarrow \infty$
- $|a_n| \rightarrow |a|$
- אם $a_n \geq 0$ לכל n אז $\sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{a}$

3.3 טענות על גבולות

טענה: יהיו $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ סדרות מתכנסות כך ש- $a_n \leq b_n$. אז: $a \leq b$.
כלל הסנדוויץ': יהיו x_n, y_n, z_n סדרות כך ש- $x_n \leq z_n \leq y_n$ (כמעט) לכל n . אם $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow x$ אז $z_n \rightarrow x$.
הרחבה: אם $x_n \geq y_n$ ו- $y_n \rightarrow \infty$ אז $x_n \rightarrow \infty$.
טענה: תהי (a_n) כך ש- $a_n \rightarrow L \neq 0$ ויהי $0 < r < |L|$. אז קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$, $|a_n| > r$.

3.4 מבחן ה[שורש](מנה) (הגבולי)?

מבחן השורש: $a_n \geq 0$ וקיים $0 \leq \alpha < 1$ כך ש- $(a_n)^{1/n} \leq \alpha$ לכל n . אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
מבחן השורש הגבולי: $a_n > 0$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = L$. אזי,

• אם $L < 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

• אם $L > 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

משפט המנה הגבולי: $a_n > 0$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. אזי,

• אם $L < 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

• אם $L > 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

3.5 סדרות מונוטוניות

טענה: תהי (a_n) מונוטונית עולה וחסומה מלעיל. אזי: $a_n \rightarrow \sup a_n$.
טענה: תהי (a_n) מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל. אזי: $a_n \rightarrow \infty$.

3.6 תתי סדרות

תהי (a_n) סדרה ו- (n_k) סדרה עולה ממש של טבעיים. אז $b_k = a_{n_k}$ תת סדרה של (a_n) ונסמן ב- $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$.

משפט הירושה: תהי (a_n) סדרה ו- (a_{n_k}) תת-סדרה.

- אם $a_n \rightarrow L$ אז $a_{n_k} \rightarrow L$
- אם a_n מונוטונית עולה אז a_{n_k} מונוטונית עולה
- אם a_n חסומה אז a_{n_k} חסומה

משפט בולצנו-וירשטראס: לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת ומונוטונית. אם הסדרה לא חסומה יש תת-סדרה מונוטונית מתבדרת ל- $\pm\infty$.

3.6.1 גבולות חלקיים

הגדרה: L יקרא גבול חלקי אם קיימת $a_{n_k} \rightarrow L$. נסמן ב- $\hat{\mathcal{P}}(a_n)$ את קבוצת הגבולות החלקיים, ונסמן ב- $\mathcal{P}(a_n)$ את קבוצת הגבולות החלקיים בלי $\pm\infty$.

בנוסף, נגדיר: $\limsup a_n = \overline{\lim} a_n = \sup \hat{\mathcal{P}}(a_n)$, $\liminf a_n = \underline{\lim} a_n = \inf \hat{\mathcal{P}}(a_n)$.

הערה: על פי בולצנו-וירשטראס, תמיד קיים גבול חלקי

טענה שימושית: תהי (a_n) חסומה. $L = \limsup a_n \iff$

1. לכל $\varepsilon > 0$, $a_n < L + \varepsilon$ כמעט תמיד (חוץ ממספר סופי של איברים)

2. לכל $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon < a_n$ תופעה שכיחה (באינסוף איברים)

טענה: (a_n) חסומה $\iff \limsup a_n, \liminf a_n$ קיימים והם גבולות חלקיים.

טענה: (a_n) אינה חסומה מלעיל/מלרע $\iff -\infty/\infty$ גבול חלקי

טענה: (a_n) מתכנסת במובן הרחב \iff יש גבול חלקי יחיד

טענה: בסדרה חסומה, $\inf a_n \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq \sup a_n$

קבוצה סגורה: תהי $B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה. נאמר ש- B קבוצה סגורה אם לכל סדרה (x_n) , $x_n \rightarrow x \implies x \in B$.
משפט: אם (a_n) חסומה אז $\mathcal{P}(a_n)$ קבוצה סגורה.

4 טורים

תהי (a_n) סדרה. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$.
הגדרה: נאמר ש- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס \iff סדרת הסכומים החלקיים s_n מתכנסת.

הערה: הטור הוא עצם נפרד מסדרת הסכומים החלקיים, אסור לבלבל ביניהם

הטור הגיאומטרי: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ עבור $|q| < 1$.

טענה: אם $\sum a_n$ מתכנס אז $a_n \rightarrow 0$.

קריטריון קושי להתכנסות טורים: $\forall \varepsilon > 0. \exists n_0. \forall m \geq n_0. \forall p \in \mathbb{N}. \left| \sum_{k=m}^{m+p} a_k \right| < \varepsilon$

חשבון טורים:

- אם $\sum a_n = K, \sum b_n = L$ מתכנסים אז $\sum (a_n + b_n) = K + L$ מתכנס
- אם $\sum a_n = L, \alpha \in \mathbb{R}$ מתכנס אז $\sum \alpha a_n = \alpha L$ מתכנס

4.1 טור חיובי

נאמר ש- $\sum a_n$ **טור חיובי** אם $a_n \geq 0$ לכל n

משפט: טור חיובי מתכנס $\iff s_n$ חסומה מלעיל

משפט: יהי $\sum a_n$ טור חיובי. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז כל טור שמתקבל מסידור מחדש של האיברים בו גם מתכנס ולאיתו הגבול.

4.2 מבחן ה[השוואה](שורש)(מנה) [הגבולי] (לטורים חיוביים)?

סימון: יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים. אם החל ממקום מסוים, $a_n \geq b_n$, נסמן $\sum a_n \succcurlyeq \sum b_n$.
מבחן ההשוואה לטורים חיוביים: יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים חיוביים כך ש- $\sum a_n \succcurlyeq \sum b_n$. אז:

1. אם $\sum a_n$ מתכנס, $\sum b_n$ מתכנס

2. אם $\sum b_n$ מתבדר, $\sum a_n$ מתבדר

מבחן השורש לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי ויהי $0 < q < 1$.

אם החל ממקום מסוים, $\sqrt[n]{a_n} < q$, אז $\sum a_n$ מתכנס.

מבחן המנה לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי כך ש- $a_n > 0$ לכל n .

1. אם קיים $0 < q < 1$ כך שהחל ממקום מסוים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ אז הטור מתכנס

2. אם החל ממקום מסוים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ אז הטור מתבדר

מבחן המנה הגבולי לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי כך ש- $a_n > 0$ לכל n .

1. אם $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, $\sum a_n$ מתכנס

2. אם $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, $\sum a_n$ מתבדר

מבחן השורש הגבולי: יהי $\sum a_n$ טור חיובי.

1. אם $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$ אז $\sum a_n$ מתכנס

2. אם $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$ אז $\sum a_n$ מתבדר

4.3 טור מתכנס בהחלט

נאמר ש- $\sum a_n$ **מתכנס בהחלט** אם $\sum |a_n|$ מתכנס.
 אם טור לא מתכנס בהחלט נאמר שהוא "מתכנס בתנאי"

טענה: אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אז $\sum a_n$ מתכנס

טענה שימושית: נסמן $\bar{a}_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \underline{a}_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$.

$$\begin{aligned} a_n \geq 0 & \quad \bar{a}_n = a_n \quad \underline{a}_n = 0 \\ a_n \leq 0 & \quad \bar{a}_n = 0 \quad \underline{a}_n = -a_n \end{aligned}$$

ומתקיים ש- $a_n = \bar{a}_n - \underline{a}_n$.

טענה: אם $\sum \bar{a}_n, \sum \underline{a}_n$ מתכנסים אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

טענה: אם $\sum a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum \bar{a}_n, \sum \underline{a}_n \rightarrow \infty$.

4.4 טורי חזקות

טור חזקות הוא טור מהצורה $\sum a_n x^n$ או $\sum a_n (x - x_0)^n$, אבל פחות מתייחסים אליו).

טור חזקות בהכרח מתכנס באיזשהו x , למשל 0.

משפט Abel: לכל טור חזקות $\sum a_n x^n$ קיים "מספר" $R \in [0, \infty]$ (שנקרא רדיוס ההתכנסות) כך שלכל $x \in (-R, R)$ הטור מתכנס בהחלט, ול- $x > R, x < -R$ הטור מתבדר.

משפט Cauchy-Hadamard: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות, רדיוס ההתכנסות הוא: $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$ (כאשר $\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0$).

הערה: משפט Abel לא מתייחס ל- $\pm R$, צריך לבדוק עבורם בנפרד

4.5 טענות נוספות על טורים

טענה (הכנסת סוגריים): יהי $\sum a_n$ טור מתכנס ו- n_k סדרה עולה של אינדקסים. נסמן $A_1 = a_1 + \dots + a_{n_1}, A_2 = a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}, \dots$ אז הטור $\sum A_n$ מתכנס ולאיתו הגבול.

טענה הפוכה: תהי (a_n) סדרה ו- n_k סדרה עולה של אינדקסים. אם כל האיברים בתוך כל סוגריים, $(a_j)_{n_k+1}^{n_{k+1}}$, בעלי אותו סימן אז הטענה ההפוכה נכונה - אם $\sum A_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס.

שימוש: בתנאים הנכונים, $\sum a_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + \dots$

משפט לייבניץ על טורים מתכנסים: תהי (a_n) סדרה אי-שלילית יורדת ל-0. אזי הטור $\sum (-1)^n a_n$ מתכנס.

טענה: יהיו $(a_n), (b_n)$ סדרות. $\sum a_n b_n$ מתכנס אם אחד מהניסוחים הבאים מתקיים:

תנאי Dirichlet: $b_n \nearrow 0$ או $b_n \searrow 0$ ו- $|s_n^a| < M$

תנאי Abel: $b_n \searrow 0$ או $b_n \nearrow 0$ ו- $|b_n| < M$ ו- $\sum a_n$ מתכנס

משפט Riemann: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בתנאי. אזי לכל $-\infty \leq s \leq \infty$ ניתן לסדר את איברי הטור כך שיתכנס ל- s או שאפילו לא יתכנס במובן הרחב.

5 פונקציות

5.1 הגדרת הגבול

בשביל $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ נדרוש ש- $f(x)$ מוגדרת בסביבה נקובה כלשהי.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$	$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}. f(x) - L < \varepsilon$	Cauchy
	לכל $(x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}$ ו- I סביבה נקובה, אם $x_n \rightarrow x_0$ אז $f(x_n) \rightarrow L$	Heine
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$	$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0, x_0 + \delta). f(x) - L < \varepsilon$	Cauchy
	$(x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}$ ו- $x_0 < x_n \rightarrow x_0$ אז $f(x_n) \rightarrow L$	Heine
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$	$\forall \varepsilon > 0. \exists M > 0. \forall x > M. f(x) - L < \varepsilon$	Cauchy
	$x_n \rightarrow \infty$ אז $f(x_n) \rightarrow L$	Heine
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$	$\forall M > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0, x_0 + \delta). f(x) < -M$	Cauchy
	$(x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}$ ו- $x_0 < x_n \rightarrow x_0$ אז $f(x_n) \rightarrow -\infty$	Heine

5.2 חשבון גבולות (דומה לסדרות)

יהיו $f, g : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ו- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$. אזי:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2 \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2 \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} : (g(x) \neq 0 \text{ וואס קיימת סביבה נקובה בה } L_2 \neq 0) \quad \bullet$$

משפט (הרכבה): יהיו I, J קטעים פתוחים ו- $x_0 \in I, y_0 \in J$. תהייה $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow J \setminus \{y_0\}$ ו- $g : J \setminus \{y_0\} \rightarrow \mathbb{R}$. אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ ו- $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$, אז: $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L$.

5.3 גבולות שימושיים

פולינומים: בגלל ש- $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$ (מחשבון גבולות).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^{1/x} = 1, a > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

5.4 רציפות

הגדרה: יהי I קטע פתוח ויהי $x_0 \in I$. תהי $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. אז:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ אם } f \text{ רציפה ב-} x_0 \quad \bullet$$

$$\text{נאמר ש-} f \text{ רציפה ב-} I \text{ אם } f \text{ רציפה בכל נקודה ב-} I \quad \bullet$$

רציפה מימין/שמאל: תהי $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, אז f רציפה מימין ב- a $\iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

טענה: f רציפה ב- $x_0 \iff f$ רציפה מימין ומשמאל ב- x_0

מיון נקודות אי רציפות: תהי f מוגדרת ב- I ו- $x_0 \in I$ נקודה פנימית.

1. אם קיים $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ אבל $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, נאמר שיש ב- x_0 **אי רציפות סליקה** כי אפשר לסלק אותה עם החלפת ערך אחד.

2. אם קיימים $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ אבל $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, נאמר שיש נקודת אי-רציפות **ממין ראשון**.

3. אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ אינו קיים מכל סיבה אחרת, היא **ממין שני**.

משפט: תהי $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ עולה.

$$\bullet \text{ אם } f \text{ חסומה מלעיל: } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup(f(a, b))$$

$$\bullet \text{ אם } f \text{ אינה חסומה מלעיל ב-} (a, b) : \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$$

טענה: תהי $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית, I קטע פתוח ו- $x_0 \in I$. אזי קיימים וסופיים $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.