סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 1

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

חלק I

מונואידים, חבורות, חוגים ושדות

1 הגדרות

1.1 תכונות של פעולות

תהא $*$ פעולה בינארית על A (כלומר ה־domain הוא $A \times A$).

1. $*$ אסוצייטיבית: $\forall a, b, c \in A. (a * b) * c = a * (b * c)$.
2. $*$ חילופית: $\forall a, b. a * b = b * a$.
3. קבוצה A סגורה לפעולה $*$: $* : A \times A \to A$.

1.2 מונואיד

מונואיד הוא זוג $\langle G, * \rangle$ כאשר G קבוצה כלשהי ו־$*$ פעולה בינארית על G, כך ש:

1. G סגורה לפעולה $*$.
2. $*$ פעולה אסוצייטיבית.
3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר $\exists e \in G. \forall g \in G. e * g = g * e = g$. האיבר הזה יחיד ומסומן e_G.

1.3 חבורה

מקרה פרטי של מונואיד שמקיימת גם:

4. קיים איבר הופכי, כלומר $\forall g \in G. \exists h \in G. g * h = h * g = e$ כאשר e איבר יחידה. האיבר ההופכי של g מסומן g^{-1}.

1.4 חוג

שלשה $\langle R, +, * \rangle$ נקראת חוג אם:

1. $\langle R, + \rangle$ חבורה חילופית, כלומר $\forall a, b \in R. a + b = b + a$.
2. $*$ היא פעולה בינארית על R ו־R סגורה לפעולה $*$.
3. חוק הפילוג:

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in R. a * (b + c) &= a * b + a * c \\ (b + c) * a &= b * a + c * a \end{aligned}$$

חוג חילופי ־ אם $*$ פעולה חילופית (כלומר $a * b = b * a$).

חוג עם יחידה ־ אם $\langle R, * \rangle$ מונואיד.

סימונים: 0_R ניטרלי לחיבור, 1_R ניטרלי לכפל אם קיים.

מחלק 0 **־** איבר $0_R \neq a \in R$ נקרא "מחלק 0" אם יש $b \neq 0_R$ כך ש־$a * b = 0_R$. בממשיים אין מחלק 0.

חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0 נקרא **תחום שלמות**. הוא מקיים את חוק הצמצום (לכל $a, b, c \in R$, אם $a * b = c * b$ אז $a = c$)

1.5 שדה

$\langle F,+,*\rangle$ **מקרה פרטי של חוג** שמקיים גם:

1. $\langle F\setminus\{0_F\},*\rangle$ חבורה חילופית.

כל שדה הוא תחום שלמות, אבל ההפך אינו נכון. תחומי שלמות <u>סופיים</u> הם כן שדות.
הרבה פעמים בהגדרת שדה מוסיפים את הדרישה $0_F\neq 1_F$.

חלק II
מרוכבים

2 הגדרות בסיסיות

נסמן $i=\sqrt{-1}$. ההגדרה הפורמלית של מרוכבים היא: $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$, כאשר המספר הראשון הוא החלק הממשי (שמסומן $Re\left(c\right)$) והמספר השני הוא החלק הדמיוני (שמסומן $Im\left(c\right)$).
עובדות: עבור $z\in\mathbb{C}$,

1. **הגודל של z:** $||z||=\sqrt{Re\left(z\right)^2+Im\left(z\right)^2}$. כלומר המרחק של z מראשית הצירים.
2. **זהות אוילר:** $e^{i\theta}=\cos\left(\theta\right)+i\sin\left(\theta\right)$, לכן $z=||z||\,e^{i\cdot\arg(z)}$.
3. **חיבור:** מחברים את החלק הממשי והדמיוני בנפרד.
4. **כפל:** $(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i\left(bc+da\right)$. משתמשים בזה ש־$i^2=-1$.
5. כל שורש של פולינום מרוכב הוא מרוכב.
6. נגדיר $\overline{z}$ להיות $\overline{z}=a-ib$. כלומר להפוך את החלק הדמיוני.
   (א) $\overline{\overline{z}}=z$
   (ב) $z\cdot\overline{z}=||z||^2$
   (ג) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
   (ד) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
   (ה) $Re\left(z\right)=\frac{z+\overline{z}}{2},Im\left(z\right)=\frac{z-\overline{z}}{2i},$
7. $\langle\mathbb{C},+,\cdot\rangle$ שדה סגור אלגברית (כלומר כל שורש של כל פולינום מרוכב הוא מרוכב).
8. **איבר הופכי:** $w=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$ (אם מכפילים בהופכי מקבלים 1).

3 הצגה פולארית

נגדיר מרוכב בתור זוג $\langle r,\theta\rangle$ כאשר r המרחק מראשית הצירים ו־θ הזווית שהוא יוצר, שנקראת הארגומנט.

$$z=r\cos\theta+ir\sin\theta=r\cdot e^{i\theta}$$

עובדות:

1. **הארגומנט של z:** נסמן $\arg\left(z\right)$ להיות הזווית שהמספר יוצר עם ציר הממשיים (לרוב נסמן כ־θ). ניתן לחשב אותו בעזרת $\arg\left(z\right)=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ ברוב המקרים.

2. $\overline{z}=r\cdot e^{-i\theta}, z^{-1}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$

3. $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

4. להכפיל מספרים מרוכבים על הגרף נראה כמו להכפיל את האורכים זה בזה ולחבר את הזוויות.

פתרון משוואה $z^n=a+ib$. נמצא הצגה פולארית $z^n=re^{i\theta}$. נשתמש בעובדה ש־$e^{i\theta}=e^{i(\theta+2\pi k)}$ עבור $k\in\mathbb{Z}$. אזי:

$$z=\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\frac{k}{n}\right)}$$

עבור $k\in\mathbb{Z}$. ולכל $k\in\{0,\ldots,n-1\}$ נקבל פתרונות שונים.

חלק III
מטריצות

4 הגדרות

וקטור הוא nיה של איברים ב־$\mathbb{F}$. מטריצה היא mיה של וקטורים. מטריצה מסדר $m\times n$ היא מטריצה עם m שורות ו־n עמודות (קודם y ואז x).
נגדיר מערכת משוואות כמטריצה באופן הבא:

$$\begin{cases}\alpha_{1,1}x_1+\cdots+\alpha_{1,n}x_n & =b_1\\ \vdots & =\vdots\\ \alpha_{m,1}x_1+\cdots+\alpha_{m,n}x_n & =b_m\end{cases}\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}\alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,n} & b_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \alpha_{m,1} & \ldots & \alpha_{m,n} & b_m\end{array}\right)$$

4.1 פעולות בסיסיות

חיבור וקטורים:

$$\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_0\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_0+\beta_0\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}$$

4.1.1 כפל מטריצה בוקטור

כמו להציב את הוקטור בעמודות המטריצה.

$$\begin{pmatrix}a_{1,1} & \ldots & a_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1a_{1,1}+\cdots+\beta_na_{1,n}\\ \cdots+\cdots+\ldots\\ \beta_1a_{m,1}+\cdots+\beta_na_{m,n}\end{pmatrix}$$

בנוסף, הפתרונות של $\overline{x}\in\mathrm{Sols}\left(A\mid b\right)$ שקולים ל־$A\overline{x}=\overline{b}$.
את פתרונות המטריצה נסמן ב־Sols. מטריצות נקראות <u>שקולות</u> אם הפתרונות שלהן זהים.
משפטים לגבי כפל מטריצה בוקטור:

- $A\left(\overline{x}+\overline{y}\right)=A\overline{x}+A\overline{y}$
- $A\left(\alpha\cdot\overline{x}\right)=\alpha\cdot\left(A\cdot\overline{x}\right)$.
- עבור I_n מרטיצת היחידה, $I_n\cdot\overline{b}=\overline{b}$. עבור 0 מטריצת ה־0, $0\cdot b=0$.

4.1.2 כפל מטריצה במטריצה

הגדרה 1.4 יהא R חוג ויהיו $A \in M_{n\times m}(R), B \in M_{m\times p}(R)$ מטריצות. נגדיר כפל מטריצות $(A \cdot B) \in M_{p\times n}(R)$ בצורה הבאה:

$$(A \cdot B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

משפט 2.4 $A \cdot B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ A \cdot C_1(B) & \cdots & A \cdot C_n(B) \\ | & | & | \end{pmatrix}$.

משפט 3.4 $A \cdot B = \begin{pmatrix} - & R_1(A) \cdot B & - \\ & \vdots & \\ - & R_n(A) \cdot B & - \end{pmatrix}$.

כלומר כפל מטריצות הוא כפל וקטורים של העמודות של B ב־A, או כפל של השורות של A ב־B.

4.2 טענות לגבי כפל מטריצות:

1. **אסוציאטיביות הכפל:** $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ עבור $A \in M_{m\times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k\times t}(\mathbb{F}), C \in M_{t\times n}(\mathbb{F})$.
2. **חוק הפילוג:**
   (א) $A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2$ עבור $A \in M_{m\times k}(\mathbb{F}), B_1, B_2 \in M_{k\times n}(\mathbb{F})$.
   (ב) $(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B$ עבור $A_1, A_2 \in M_{m\times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k\times n}(\mathbb{F})$.
3. **הוצאת סקלר:** $A \cdot (\alpha \cdot B) = \alpha \cdot (A \cdot B)$ עבור $A \in M_{m\times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k\times n}(\mathbb{F}), \alpha \in \mathbb{F}$.
4. **כפל ב־0 וב־1:** לכל מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$. נוסף לכך $A \cdot I_n = A$, $I_m \cdot A = A$.

הערה: יש מחלקי אפס, לדוגמה $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.3 פעולות אלמנטריות על מטריצה

הפעולות האלה הן:

1. להחליף סדר בין משוואות. $R_i \leftrightarrow R_j$.
2. להכפיל משוואה בקבוע. $R_i \to \alpha \cdot R_i$.
3. לחבר משוואות. $R_i \to R_i + R_j$.

כולן משמרות את הפתרונות של המטריצה.
מטריצות ששקולות באמצעות סדרת פעולות אלמנטריות נקראות <u>שקולות שורה</u>.

4.4 שונות

מטריצה ריבועית: מטריצה שכמות העמודות בה שווה לכמות השורות.

משפט 4.4 הבאים שקולים עבור מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ (מטריצה ריבועית):

1. A שקולת שורות ל־I_n.
2. לכל $\bar{b} \in \mathbb{F}^n$ למערכת $A\overline{x} = \bar{b}$ יש פתרון יחיד.
3. לכל $b \in \mathbb{F}^n$ למערכת $A\overline{x} = \bar{b}$ קיים פתרון.
4. למערכת $A\overline{x} = \bar{0}$ יש פתרון יחיד.
5. קיים b כך שלמערכת $A\overline{x} = \bar{b}$ יש פתרון יחיד.

מטריצת היחידה: מסומנת I_n. היא מטריצה ריבועית שבה $a_{i,j} = 1$ אם $i = j$, ואם $i \neq j$ אז $a_{i,j} = 0$. לדוגמה:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וקטור e_i:

$$(e_i)_i = \begin{cases} 0 & x \neq i \\ 1 & x = i \end{cases}$$

זה בעצם 0 בכל מקום חוץ מהמקום ה־i.
מטריצת הסיבוב:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

אם מכפילים וקטור במטריצת הסיבוב, זה מסובב את הוקטור θ מעלות.

5 דירוג ודירוג קנוני

5.1 הגדרות

בצורה מדורגת:

1. משוואות 0 (מהצורה $b = 0$) נמצאות למטה.
2. המשתנה הפותח בכל משוואה נמצא מימין ממש למשתנים הפותחים במשוואות מעליו.

<u>משתנה חופשי</u> הוא משתנה שלא מקדם פותח של אף שורה.
בנוסף, בצורה מדורגת קנונית:

3. המקדם של כל משתנה פותח הוא 1
4. לכל משתנה פותח של משוואה, המקדם של המשתנה בשאר המשוואות הוא 0.

לכל מטריצה קיימת צורה מדורגת קנונית יחידה ששקולה לה.

5.2 מציאת פתרונות

5.2.1 מציאת מספר הפתרונות לפי צורה מדורגת (לא בהכרח קנונית)

עבור $(A \mid b)$ מטריצה מדורגת:

1. אם ב־$(A \mid b)$ יש שורת סתירה ($0 = b$ כאשר $b \neq 0$) ־ אין פתרון.
2. אחרת, יש $|\mathbb{F}|^k$ פתרונות כאשר k מספר המשתנים החופשיים.

5.2.2 מציאת הפתרונות עצמם לפי צורה מדורגת קנונית

$(A' \mid b')$ מטריצה מדורגת קנונית מסדר $m \times n$ ששקולה ל־$(A \mid b)$ אז:

1. אם ב־$(A' \mid b')$ יש שורת סתירה אז $\text{Sols}\left((A' \mid b')\right) = \emptyset$.
2. אחרת: נעשה החלפה על המשתנים החופשיים. כל משתנה שאינו חופשי יוגדר לפי משוואה מסוימת. דוגמה:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

המקדמים החופשיים הם $1, 4, 6$. הפתרון הוא:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 2 - 4x_4 \\ x_4 \\ 3 - 3x_6 \\ x_6 \end{pmatrix} \mid x_1, x_4, x_6 \in \mathbb{R} \right\}$$

6 תת מרחב

טענה (בוחן תת מרחב): $U \subseteq F^n$ היא תת מרחב אמ"מ:

1. U סגורה לחיבור.
2. U סגירה לכפל בסקלר.
3. $\bar{0} \in U$. ניתן להחליף את התנאי ב־$u \neq \emptyset$.

נובע מכאן גם שחיתוך של תתי מרחבים הוא תת מרחב.

7 צירופים ליניאריים

7.1 בת"ל

הגדרה 1.7 יהיו $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k}) \in (\mathbb{F}^n)^k$, סדרת מקדמים $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^k$ נקראת <u>תלות ליניארית של $(v_1, \ldots, v_k)$</u> אם $\alpha_1 \overline{v_1} + \cdots + \alpha_k \overline{v_k} = 0$.

נגדיר את מרחב התלויות של $(v_1, \ldots, v_k)$ להיות:

$$LD\left((v_1, \ldots, v_k)\right) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \mid \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0 \right\}$$

ו־$LD\left((v_1, \ldots, v_k)\right) = \text{Sols}\left((v_1, \ldots, v_k \mid 0)\right)$.

מסקנה 2.7 $v_1, \ldots, v_k$ בת"ל $\iff$ $LD\left(v_1, \ldots, v_k\right) = \{0\}$.

הגדרה 3.7 סדרת mיות $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k}) \in (\mathbb{F}^m)^k$ תקרא בלתי תלויה לינארית (בת"ל) אם לכל $\bar{b} \in \mathbb{F}^m$ יש לכל היותר פתרון אחד למשוואה $\sum_{i=1}^{k} x_i \overline{v_i} = \bar{b}$.

1. תהי $S \subseteq \mathbb{F}^n$. אם $0 \in S$ אז S תלויה לינארית.
2. תהי $S \subseteq \mathbb{F}^n$ כך ש־$S = (x, y)$ אז S תלויה לינארית $\iff$ הוקטורים פרופורציונים.
3. סדרת וקטורים $(v_1, \ldots, v_m) \subseteq \mathbb{F}^n$ בלתי תלויה לינארית $\iff$ כל איבר אינו צירוף לינארי של קודמיו.

7.2 קבוצת הצירופים הלינאריים

הגדרה 4.7 עבור סדרת nיות, $(v_1, \ldots, v_k) \in (\mathbb{F}^n)^k$,

$$\text{sp}\left(v_1, \ldots, v_k\right) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F} \right\}$$

זה המרחב הנפרש על ידי $v_1, \ldots, v_k$. ההגדרה לקבוצות $K \subseteq \mathbb{F}^n$ היא:

$$\text{sp}\left(k\right) = \left\{ b \in \mathbb{F}^n \mid \exists k \in \mathbb{N}. \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}. \exists t_1, \ldots, t_k \in K. b = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i t_i \right\}$$

קבוצה A פורשת את B אם $\text{span}\left(A\right) = b$.

7.3 בסיס

הגדרה 5.7 יהי $\mathbb{F}$ שדה, B תת קבוצה של $\mathbb{F}^n$. אז B נקראת בסיס של $\mathbb{F}^n$ אם שניים מהתנאים הבאים מתקיימים:

1. B בת"ל.
2. B פורשת את $\mathbb{F}^n$.
3. $m = n$.

כל שניים מוכיחים גם את השלישי.
התנאים הבאים שקולים לכך ש־B בסיס:

1. B בת"ל וכל קבוצה המכילה ממש את B הינה תלויה לינארית. (B בת"ל מקסימלית).
2. B פורשת וכל קבוצה שמוכלת ממש ב־B אינה פורשת. (פורשת מינימלית).
3. לכל $v \in \mathbb{F}^n$ יש הצגה יחידה כצירוף של וקטורים מ־B.

8 שחלוף והפיכות

8.1 שחלוף - Transpose:

הגדרה 1.8 בהינתן מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ נגדיר $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ (לפעמים מסומן גם A^t) את השחלוף של A:
$\left(A^T\right)_{i,j} = (A)_{j,i}$.

באופן אינטואטיבי, הפעולה מחליפה בין השורות לעמודות. לדוגמה: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 2 & 8 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 16 & 32 \end{pmatrix}^T$.

משפט 2.8 חוקי Transpose:

- **חיבור:** $(A+B)^T = A^T + B^T$ (אם החיבור מוגדר, כלומר A, B מאותו הסדר).
- **כפל בסקלר:** $(\alpha A)^T = \alpha \left(A^T\right)$ עבור $\alpha \in \mathbb{F}$.
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ עבור $A \in M_{m\times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k\times n}(F)$.

8.2 הפיכות מטריצה

הגדרה 3.8 מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ תיקרא:

1. **הפיכה משמאל:** אם קיימת מטריצה $B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ כך ש$B \cdot A = I_n$.
2. **הפיכה מימין:** אם קיימת מטריצה $B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ כך ש$A \cdot B = I_m$.
3. **הפיכה:** אם קיימת מטריצה $B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ כך ש$A \cdot B = I_m$ וגם $B \cdot A = I_n$.
   בפרט המטריצה B היא יחידה ומסומנת A^{-1}, ומקיימת $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

הערה: המטריצה 0 אינה הפיכה, מימין או משמאל.
טענות:

1. אם במטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ יש שורת אפסים אז A לא הפיכה מימין.
2. אם A הפיכה A^T הפיכה.
3. $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.
4. אם $A \in M_{m\times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k\times n}(\mathbb{F})$ הפיכות, אז $A \cdot B$ הפיכה ו־$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

משפט 4.8 תהא $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

1. A הפיכה מימין אם ורק אם למערכת $A \cdot \overline{x} = b$ יש פתרון לכל b (כלומר סדרת העמודות של A פורשת, ו־$m \leq n$).
2. A הפיכה משמאל אם ורק אם למערכת $A \cdot \overline{x} = 0$ יש פתרון יחיד (כלומר סדרת העמודות של A בת"ל, ולכן $m \geq n$).
3. A הפיכה אם ורק אם למערכת $A \cdot \overline{x} = b$ יש פתרון יחיד לכל b (כלומר סדרת העמודות של A בסיס, ולכן $m = n$).
   בפרט מטריצה הפיכה היא ריבועית.