

סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 1

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

	I	מונאידים, חבורות, חוגים ושדות	2
1	הגדרות	2
1.1	תכונות של פעולות	2
1.2	מונאיד	2
1.3	חבורה	2
1.4	חוג	2
1.5	שדה	3

חלק I

מונואידים, חבורות, חוגים ושדות

1 הגדרות

1.1 תכונות של פעולות

תהא $*$ פעולה בינארית על A (כלומר ה־domain הוא $A \times A$).

1. $*$ אסוציאטיבית: $\forall a, b, c \in A. (a * b) * c = a * (b * c)$.

2. $*$ חילופית: $\forall a, b. a * b = b * a$.

3. קבוצה A סגורה לפעולה $*$: $*$: $A \times A \rightarrow A$.

1.2 מונואיד

מונואיד הוא זוג $\langle G, * \rangle$ כאשר G קבוצה כלשהי ו־ $*$ פעולה בינארית על G , כך ש:

1. G סגורה לפעולה $*$.

2. $*$ פעולה אסוציאטיבית.

3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר $\exists e \in G. \forall g \in G. e * g = g * e = g$. האיבר הזה יחיד ומסומן e_G .

1.3 חבורה

מקרה פרטי של מונואיד שמקיימת גם:

4. קיים איבר הופכי, כלומר $\forall g \in G. \exists h \in G. g * h = h * g = e$ כאשר e איבר יחידה. האיבר ההופכי של g מסומן g^{-1} .

1.4 חוג

שלשה $\langle R, +, * \rangle$ נקראת חוג אם:

1. $\langle R, + \rangle$ חבורה חילופית, כלומר $\forall a, b \in R. a + b = b + a$.

2. $*$ היא פעולה בינארית על R ו־ R סגורה לפעולה $*$.

3. חוק הפילוג:

$$\forall a, b, c \in R. a * (b + c) = a * b + a * c \\ (b + c) * a = b * a + c * a$$

חוג חילופי - אם $*$ פעולה חילופית (כלומר $a * b = b * a$).

חוג עם יחידה - אם $\langle R, * \rangle$ מונואיד.

סימונים: 0_R ניטרלי לחיבור, 1_R ניטרלי לכפל אם קיים.

מחלק 0 - איבר $a \in R, a \neq 0_R$ נקרא "מחלק 0" אם יש $b \neq 0_R$ כך ש־ $a * b = 0_R$. בממשיים אין מחלק 0.

חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0 נקרא תחום שלמות. הוא מקיים את חוק הצמצום (לכל $a, b, c \in R$, אם $a * b = c * b$ אז $a = c$)

1.5 שדה

$\langle F, +, * \rangle$ מקרה פרטי של חוג שמקיים גם:

1. $\langle F \setminus \{0_F\}, * \rangle$ חבורה חילופית.

כל שדה הוא תחום שלמות, אבל ההפך אינו נכון. תחומי שלמות סופיים הם כן שדות.