סיכומי הרצאות ־ אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

חלק I
אלגוריתמים

1 לכסון

<u>העתקה לכסינה</u> היא העתקה לינארית כך שקיים בסיס B כך ש־$[T]_B^B$ אלכסונית. אם T העתקה לכסינה, אז כל מטריצה מייצגת שלה גם לכסינה.

1.1 וקטורים עצמיים וערכים עצמיים

נגיד <u>וקטור עצמי של A לערך עצמי λ</u> להיות $\underline{v}$ כך ש־$A\underline{v} = \lambda\underline{v}$. באופן הפוך <u>ערך עצמי של A</u> הוא λ כך שקיים וקטור עצמי $\underline{v} \neq \underline{0}$ לערך עצמי λ.

מרחב הוקטורים העצמיים לכל λ הוא $V_\lambda = \{\underline{v} \in V \mid A\underline{v} = \lambda\underline{v}\} = \text{Sols}\,(A - \lambda I)$. הסכום של V_λ שונים הוא סכום ישר.

משפט: A לכסינה $\iff$ קיים בסיס $B \subseteq \mathbb{F}^n$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A.

משפט: במטריצה המלוכסנת, **הערכים העצמיים הם האיברים שנמצאים על האלכסון** עד כדי הסדר שלהם.

1.2 פולינום אופייני ומינימלי

נגדיר את $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ להיות <u>הפולינום האופייני של A</u>. מתקיים:

- $p_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, כך ש־$a_0 = (-1)^n \det A$ ו־$a_{n-1} = -\text{tr}\,(A)$ (ו־$a_n = 1$).
- λ ערך עצמי של A $\iff$ λ שורש של $p_A(\lambda)$ (כי זה אומר שהמטריצה אינה הפיכה עבור ה־λ הזה כלומר יש פתרונות).
- אם A, B דומות אז $p_A = p_B$.
- $p_A(\lambda) = p_{A^t}(\lambda)$, ו־$p_{AB}(\lambda) = p_{BA}(\lambda)$.
- יהיו $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$ המרחבים העצמיים. הסכום ביניהם הוא <u>סכום ישר</u>.

נגדיר את <u>הריבוי האלגברי של α</u>, ρ_α (רו), להיות כמות הפעמים ש־$(\lambda - \alpha)$ מופיע בפולינום $P_A(\lambda)$. כלומר אם הפולינום הוא $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$ אז $\rho_1 = 1, \rho_3 = 2$.

בנוסף נגדיר את <u>הריבוי הגיאומטרי של α</u>, μ_λ, להיות $\dim(V_\lambda)$.

משפט: לכל ערך עצמי λ, $\mu_\lambda \leq \rho_\lambda$.

משפט: עבור $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ הערכים העצמיים, $\rho_{\lambda_1} + \cdots + \rho_{\lambda_k} \leq n$, ואם $p_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים אז גם $\rho_{\lambda_1} + \cdots + \rho_{\lambda_k} = n$.

המשפט המרכזי (תנאי ללכסינות): תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$. A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אמ"ם:

1. $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$.
2. לכל ערך עצמי λ של A, $\rho_\lambda = \mu_\lambda$.

נגדיר את <u>הפולינום המינימלי של A</u>, m_A, להיות <u>הפולינום המתוקן היחידי</u> כך ש־$\text{sp}\,(m_A)$ האידאל המאפס של A. מתקיים:

- m_A מחלק את p_A.
- לכל $q \in \mathbb{F}[x]$ פולינום אי פריק, $q \mid m_A \iff q \mid p_A$.

  לכן אם $p_A = \prod_{i \in I} q_i^{m_i}$ (q_i אי פריקים) אז $m_A = \prod_{i \in I} q_i^{r_i}$ כאשר $1 \leq r_i \leq m_i$.

משפט: במטריצת בלוקים אלכסונית $A = \text{Diag}\,(A_1, \ldots, A_n)$ מתקיים:

- $p_A = p_{A_1} \cdot \cdots \cdot p_{A_n}$.
- $m_A = \text{lcm}\,(m_{A_1}, \ldots, m_{A_n})$.

2 ז'ירדון

נגדיר **בלוק ז'ורדן** להיות מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ ואפילו $\begin{pmatrix}\lambda\end{pmatrix}$, כלומר יש אלכסון של λ ומעליו אלכסון של 1ים.

צורת ז'ורדן היא מטריצת בלוקים אלכסונית כך שכל הבלוקים הם בלוקי ז'ורדן.

באופן פרקטי וחישובי:

1. חישוב הפולינום האופייני. נסמן את הערכים העצמיים ב־$\lambda_1,\dots,\lambda_k$ ואת הריבויים האלגבריים שלהם ב־$\rho_{\lambda_1},\dots,\rho_{\lambda_k}$.
2. לכל λ_i:

(א) נחשב את $\ker\left(A-\lambda_i I\right),\dots,\ker\left(A-\lambda_i I\right)^{\rho_{\lambda_i}}$ עד שהממד של זה מפסיק להשתנות (לא כולל). נסמן את המקום שבו הממד מפסיק להשתנות ב־j. זה גם הריבוי בפולינום המינימלי.

(ב) מ־j עד ל־1:

i. נשלים את $\ker\left(A-\lambda_i I\right)^{j-1}$ **לבסיס של** $\ker\left(A-\lambda_i I\right)^{j}$.

ii. יהי v שהוסף בהשלמה. נוסיף לבסיס את $\left(A-\lambda_i I\right)^{j}v,\dots,\left(A-\lambda_i I\right)^{1}v, v$. נספור שצריך איבר אחד פחות מאלה (כלומר ניקח איבר אחד פחות מההשלמות של החזקות הקודמות).

3. אפשר להשתמש בבסיס שקיבלנו ישירות או לשים $P=\begin{pmatrix}B_1 & \dots & B_n\end{pmatrix}$, ואז $J=P^{-1}AP$ (כי $P=[Id]_E^B$ ואכן $[A]_B^B=[Id]_B^E\cdot[A]_E^E\cdot[Id]_E^B$).

משפט:

- צורת זורדן יחידה עד כדי הסידור של בלוקי הז'ורדן.
- μ_λ הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי כלשהו הוא מספר הבלוקים שלו.
- ρ_λ הריבוי האלגברי באופייני הוא סכום הגדלים של הבלוקים.
- הריבוי האלגברי במינימלי הוא המקסימום של הגדלים של הבלוקים.

2.1 העלאה בחזקה

$$\begin{pmatrix}x & 1 & & \\ & x & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & x\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}x^n & \binom{n}{1}x^{n-1} & \binom{n}{2}x^{n-2} & \\ & x^n & \ddots & \binom{n}{2}x^{n-2}\\ & & \ddots & \binom{n}{1}x^{n-1}\\ & & & x^n\end{pmatrix}$$

לדוגמה:

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}2^3 & 3\cdot 2^2 & \binom{3}{2}\cdot 2^1 & \binom{3}{3}\cdot 2^0\\ 0 & 2^3 & 3\cdot 2^2 & \binom{3}{2}\cdot 2^1\\ 0 & 0 & 2^3 & 3\cdot 2^2\\ 0 & 0 & 0 & 2^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 12 & 6 & 1\\ 0 & 8 & 12 & 6\\ 0 & 0 & 8 & 12\\ 0 & 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

3 גראם־שמידט

3.1 הטלה

נגדיר את <u>ההטלה של וקטור v על U</u> להיות:

$$P_U\left(v\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left\langle v,b_i\right\rangle}{\left\langle b_i,b_i\right\rangle}\cdot b_i$$

כאשר $b_1,\ldots,b_n$ בסיס אורתוגונלי, בהמשך נראה שקיים כזה לכל מרחב נוצר סופית.
תכונות:

- $\forall u\in U.P_U\left(u\right)=u$, ולכן $P_U^2=P_U$
- P_U העתקה לינארית, כך ש־$\ker\left(P_U\right)=\left\{v\in V\mid v\perp U\right\}$. נסמן גם ב־$U^{\perp}$.
- $\left(v-P_U\left(v\right)\right)\perp U$ לכל v.

משפט הקירוב הטוב ביותר: נגדיר $\operatorname{dist}\left(v,U\right)=\operatorname{dist}\left(v,P_U\left(v\right)\right)$. אז מתקיים ש־$\operatorname{dist}\left(v,U\right)=\inf_{u\in U}\operatorname{dist}\left(v,u\right)=\min_{u\in U}\operatorname{dist}\left(v,u\right)$, כלומר שהמרחק הזה הוא המרחק הכי קצר מ־v ל־U.

3.2 האלגוריתם עצמו

אלגוריתם גראם־שמידט הוא האלגוריתם למציאת סדרה אורתונורמלית $w_1,\ldots,w_x$ ל־$\operatorname{sp}\left(b_1,\ldots,b_n\right)$ כך ש־$\operatorname{sp}\left(b_1,\ldots,b_n\right)=\operatorname{sp}\left(w_1,\ldots,w_x\right)$.

נוריד מ־$b_1,\ldots,b_n$ את האפסים. נגדיר את $w_1=\frac{1}{||b_1||}b_1$ להיות המנורמל. לכל $i\in 2,\ldots,n$, נגדיר $U=\operatorname{sp}\left(b_1,\ldots,b_{i-1}\right)$, ואז נחשב $w_i'=b_i-P_U\left(b_i\right)$. אם $w_i'=0$, נתעלם ממנו, אחרת נוסיף לסדרה w את $\frac{1}{||w_i'||}w_i'$ המנורמל.

חלק II

מכפלות פנימיות ותבניות בילינאריות

4 מכפלה פנימית

4.1 הגדרות בסיסיות

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$. מכפלה אוניטרית (נקרא "מכפלה פנימית" מעל $\mathbb{R}$) מעל V היא פונקציה $\left\langle\cdot,\cdot\right\rangle:V\times V\to\mathbb{C}\left(\mathbb{R}\right)$ כך ש־:

1. לינאריות לפי הרכיב השמאלי: $\left\langle\alpha\underline{v_1}+\beta\underline{v_2},u\right\rangle=\alpha\cdot\left\langle\underline{v_1},\underline{u}\right\rangle+\beta\cdot\left\langle\underline{v_2},\underline{u}\right\rangle$
2. הרמיטיות: $\left\langle\underline{v},\underline{u}\right\rangle=\overline{\left\langle\underline{u},\underline{v}\right\rangle}$
3. חיוביות: $\left\langle\underline{v},\underline{v}\right\rangle\in\mathbb{R}\wedge\left\langle\underline{v},\underline{v}\right\rangle\geq0$
4. אפיון 0: $\left\langle\underline{v},\underline{v}\right\rangle=0\iff\underline{v}=\underline{0}$

4.2 תכונות

משפט לגבי הרכיב הימני:

- $\left\langle\underline{u},v_1+v_2\right\rangle=\left\langle u,v_1\right\rangle+\left\langle u,v_2\right\rangle$ חיבוריות לפי הימני.

- $\langle v, \alpha u\rangle = \overline{\alpha}\langle v, u\rangle$ כמו הומוגניות ברכיב הימני, אבל עם הצמוד.
- $\langle \underline{v}, \underline{0}\rangle = 0$ מתאפס גם לפי הרכיב הימני.
- לכן יש לנו כמעט לינאריות לפי הרכיב הימני, אבל עם הסקלר הצמוד.
- ומכאן נובע: $\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{v_i}, \sum_{j=1}^{m} b_j \underline{u_j}\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \overline{b_j}\left\langle \underline{v_i}, \underline{u_j}\right\rangle$

4.3 אורתוגונליות

$(v_1, \ldots, v_n)$ נקראת <u>אורתוגונלית</u> אמ"ם $\forall i \neq j. v_i \perp v_j$ כלומר $\langle v_i, v_j\rangle = 0$.

לדוגמה $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ סדרה אורתוגונלית עם המכפלה האוניטרית הסטנדרטית.

נגדיר וקטור יחידה להיות v כך ש־$||\underline{v}|| = 1$. אם $\underline{v} \neq 0$ אז $\frac{1}{||\underline{v}||}\cdot \underline{v}$ וקטור יחידה, שנקרא גם הוקטור <u>המנורמל</u>.
אז סדרה <u>אורתונורמלית</u> היא סדרה אורתוגונלית של וקטורי יחידה.
משפט: סדרה אורתוגונלית היא בת"ל.

4.3.1 משלים אורתוגונלי

יהי $U \subseteq V$. נגדיר $U^{\perp}$ להיות המרחב שניצב לכל איבר ב־U. נסמן $\dim U = k$. נחשב אותו באמצעות השלמת בסיס של U לבסיס של V, גראם־שמידט על הבסיס שיוצא, ואז ניקח את האיברים ה־$k+1, \ldots, n$ וזה הבסיס של $U^{\perp}$. מתקיים:

1. $U \oplus U^{\perp} = V$
2. $U \subseteq \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ ואם V נוצר סופית אז $U = \left(U^{t}\right)^{t}$.
3. $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$
4. $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$
5. אם $U \subseteq W$ אז $W^{\perp} \subseteq U^{\perp}$
6. $\langle v, u\rangle = \langle P_U(v), P_U(u)\rangle + \langle P_{U^{\perp}}(v), P_{U^{\perp}}(u)\rangle$

4.4 נורמה

נגדיר $||a|| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$. מתקיים:

- $||a|| \geq 0$ ו־$a = 0 \iff ||a|| = 0$
- $||\lambda a|| = |\lambda|\cdot||a||$ לכל $a \in L, \lambda \in \mathbb{R}$
- $|||a|| - ||b||| \leq ||a+b|| \leq ||a|| + ||b||$
- משפט פיתגורס: $||a+b||^2 = ||a||^2 + ||b||^2 \iff a \perp b$

5 סוגים של העתקות לינאריות

5.1 העתקות אוניטריות

העתקה מעל $\mathbb{C}$ המקיימת $(Tu, Tv) = (u, v)$ נקראת <u>העתקה אוניטרית</u>. היא משמרת <u>אורכים וזוויות</u>, כלומר $||Tv|| = ||v||$.
משפט: כל דבר פה שקול לכך ש־T אוניטרית.

1. T מעתיקה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי.

2. $T^*T=I$. לכן אם T אוניטרית אז היא הפיכה כך ש־$T^*=T^{-1}$.

3. T נורמלית וכל הערכים העצמיים על מעגל היחידה.

5.2 העתקות אורתוגונליות

דומה אבל מעל $\mathbb{R}$.

משפט: T אורתוגונלית $\Longleftrightarrow$ T מעתיקה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי. בפרט אם T אוניטרית היא הפיכה.

משפט: יהי V מרחב וקטורי, מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, עם מכפלה פנימית. התנאים הבאים שקולים:

1. $T^*=T^{-1}$, כלומר $TT^*=T^*T=I$.

2. לכל u,v, $(Tu,Tv)=(u,v)$, כלומר אוניטרית/אורתוגונלית לפי השדה.

3. לכל v, $||Tv||=||v||$, כלומר T שומרת על אורכים.

5.3 העתקות נורמליות

העתקה נקראת נורמלית אם $TT^*=T^*T$.

משפט: מטריצה נורמלית ניתנת ללכסון אוניטרי, כלומר קיים בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של T ו־$T=P^*DP$ כאשר D אלכסונית.

משפט: המרחבים העצמיים ניצבים זה לזה.

טענה: $|T(v)|=|T^*(v)|$.

6 תבניות בילינאריות

הגדרה: תבנית בילינארית היא $f:(V\times W)\to\mathbb{F}$ שלינארית על פי הרכיב השמאלי ועל פי הרכיב הימני.

נסמן את קבוצת התבניות הבילינאריות ב־$\mathrm{Bil}(V,W)$, או $\mathrm{Bil}(V):=\mathrm{Bil}(V,V)$.

מטריצה מייצגת: נגדיר $\left([f]_{B,C}\right)_{i,j}=f(b_i,c_j)$. מתקיים $f(v,w)=[v]_B^t\cdot[f]_{B,C}\cdot[w]_C$ לכל v,w.

מעבר בסיסים: $[f]_{B',C'}=\left([Id]_B^{B'}\right)^t\cdot[f]_{B,C}\cdot[Id]_C^{C'}$

הגדרה: נגדיר את הדרגה $\mathrm{rk}(f)$ להיות $\mathrm{rk}\left([f]_{B,C}\right)$ עבור B,C בסיסים כלשהם.

הגדרה: f נקראת אי מנוונת אם $\mathrm{rk}f=\dim V=\dim W$. לכן גם $[f]_{B,C}$ הפיכה.

6.1 חפיפת מטריצות

שתי מטריצות A,B נקראות שקולות אם $A=P^tBQ$, וחופפות אם $A=P^tBP$........ יש המון משפטים.......

6.2 תבניות בילינאריות סימטריות

תבנית בילינארית תקרא סימטרית אם לכל v,w, $f(v,w)=f(w,v)$. המטריצה המייצגת היא אלכסונית.

משפט ההתמדה של סילבסטר: מעל $\mathbb{R}$. תהי f תבנית בילינארית סימטרית כך ש־$\mathrm{rk}f=r\le n=\dim V$. אז קיים בסיס $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ כך ש־$[f]_{B,B}$ אלכסונית, ועל האלכסון יש רק $0,-1,1$. הכמויות שלהם אינן תלויות בבחירת הבסיס.

כדי לחשב את אינדקסי ההתמדה הללו, P_+ כמות ה־1ים ו־P_- כמות ה־(-1)ים (ההפרש שלהם גם נקרא הסיגנטורה), ממטריצה מייצגת, יש שתי דרכים:

1. דירוג בו זמנית של השורות ושל העמודות, עד שמגיעים לצורה אלכסונית.

2. נחשב את $\Delta_0,\dots,\Delta_r$ הדטרמיננטות של חתכים של המטריצה (r זה rk) - למשל עבור $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ זה יהיה:

$$\Delta_0=1,\Delta_1=\det\begin{vmatrix}1\end{vmatrix},\Delta_2=\det\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix},\Delta_3=\det\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$$

כמות הפעמים שהסימן לא משתנה מהקודם היא P_+, כמות הפעמים שהסימן כן משתנה היא P_-.

טענה: תבנית בילינארית חיובית לחלוטין וסימטרית היא בעצם מכפלה פנימית.

(חיובית לחלוטין זו תכונה של תבניות ריבועיות/סימטריות כך ש־$f(v,v)>0$ לכל v, או באופן שקול שבמטריצה המייצגת כל הע"ע חיוביים, או באופן שקול ש־$\Delta_i>0$ לכל i)

6.2.1 תבנית ריבועית

תהי $f\in\mathrm{Bil}(V)$ תבנית סימטרית. נגדיר $Q(v)=f(v,v)$ ונקרא לה תבנית ריבועית. כל תבנית ריבועית מיוצגת ביחידות על ידי תבנית בילינארית סימטרית. ניתן למצוא את f ע"י:

$$2f(v,w)=Q(v+w)-Q(v)-Q(w)$$

6.3 תבניות בילינאריות אנטי־סימטריות

תבנית בילינארית תקרא סימטרית אם לכל v,w, $f(v,w)=-f(w,v)$. המטריצה המייצגת היא:

$$\mathrm{Diag}\left(\overbrace{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}^{\frac{1}{2}\mathrm{rk}(f)\text{ times}},0,\dots,0\right)$$

בפרט $\mathrm{rk}f$ זוגי, ומספר האפסים הוא $n-\mathrm{rk}f$.