

סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 1

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

2	I מונואידים, חבורות, חוגים ושדות	1
2	הגדרות	1
2	תכונות של פעולות	1.1
2	מונואיד	1.2
2	חבורה	1.3
2	חוג	1.4
3	שדה	1.5
3	II מרכיבים	
3	הגדרות בסיסיות	2
3	הצגה פולארית	3
4	III מטריצות	
4	הגדרות	4
4	פעולות בסיסיות	4.1
4	כפל מטריצה בוקטור	4.1.1
5	כפל מטריצה במטריצה	4.1.2
5	טענות לגבי כפל מטריצות:	4.1.3
5	פעולות אלמנטריות על מטריצה	4.2
6	שונות	4.3
6	דירוג ודירוג קנוני	5
6	הגדרות	5.1
7	מציאת פתרונות	5.2
7	מציאת מספר הפתרונות לפי צורה מדורגת (לא בהכרח קנונית)	5.2.1
7	מציאת הפתרונות עצמם לפי צורה מדורגת קנונית	5.2.2
7	תת מרחב	6
7	צירופים לינאריים	7
7	בת"ל	7.1
8	קבוצת הצירופים הלינאריים	7.2
8	בסיס	7.3
9	שחלוף והפיכות	8
9	שחלוף - Transpose:	8.1
9	הפיכות מטריצה	8.2

חלק I

מונואידים, חבורות, חוגים ושדות

1 הגדרות

1.1 תכונות של פעולות

תהא $*$ פעולה בינארית על A (כלומר ה־domain הוא $A \times A$).

1. $*$ אסוציאטיבית: $\forall a, b, c \in A. (a * b) * c = a * (b * c)$.

2. $*$ חילופית: $\forall a, b. a * b = b * a$.

3. קבוצה A סגורה לפעולה $*$: $*$: $A \times A \rightarrow A$.

1.2 מונואיד

מונואיד הוא זוג $\langle G, * \rangle$ כאשר G קבוצה כלשהי ו־ $*$ פעולה בינארית על G , כך ש:

1. G סגורה לפעולה $*$.

2. $*$ פעולה אסוציאטיבית.

3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר $\exists e \in G. \forall g \in G. e * g = g * e = g$. האיבר הזה יחיד ומסומן e_G .

1.3 חבורה

מקרה פרטי של מונואיד שמקיימת גם:

4. קיים איבר הופכי, כלומר $\forall g \in G. \exists h \in G. g * h = h * g = e$ כאשר e איבר יחידה. האיבר ההופכי של g מסומן g^{-1} .

1.4 חוג

שלשה $\langle R, +, * \rangle$ נקראת חוג אם:

1. $\langle R, + \rangle$ חבורה חילופית, כלומר $\forall a, b \in R. a + b = b + a$.

2. $*$ היא פעולה בינארית על R ו־ R סגורה לפעולה $*$.

3. חוק הפילוג:

$$\forall a, b, c \in R. a * (b + c) = a * b + a * c \\ (b + c) * a = b * a + c * a$$

חוג חילופי - אם $*$ פעולה חילופית (כלומר $a * b = b * a$).

חוג עם יחידה - אם $\langle R, * \rangle$ מונואיד.

סימונים: 0_R ניטרלי לחיבור, 1_R ניטרלי לכפל אם קיים.

מחלק 0 - איבר $a \in R, a \neq 0_R$ נקרא "מחלק 0" אם יש $b \neq 0_R$ כך ש־ $a * b = 0_R$. בממשיים אין מחלק 0.

חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0 נקרא תחום שלמות. הוא מקיים את חוק הצמצום (לכל $a, b, c \in R$, אם $a * b = c * b$ אז $a = c$)

1.5 שדה

$\langle F, +, * \rangle$ מקרה פרטי של חוג שמקיים גם:

1. $\langle F \setminus \{0_F\}, * \rangle$ חבורה חילופית.

כל שדה הוא תחום שלמות, אבל ההפך אינו נכון. תחומי שלמות סופיים הם כן שדות. הרבה פעמים בהגדרת שדה מוסיפים את הדרישה $0_F \neq 1_F$.

חלק II

מרוכבים

2 הגדרות בסיסיות

נסמן $i = \sqrt{-1}$. ההגדרה הפורמלית של מרוכבים היא: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, כאשר המספר הראשון הוא החלק הממשי (שמסומן $Re(c)$) והמספר השני הוא החלק הדמיוני (שמסומן $Im(c)$).
עובדות: עבור $z \in \mathbb{C}$,

1. הגודל של z : $||z|| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$. כלומר המרחק של z מראשית הצירים.

2. זהות אוילר: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, לכן $z = ||z|| e^{i \cdot \arg(z)}$.

3. חיבור: מחברים את החלק הממשי והדמיוני בנפרד.

4. כפל: $(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + da)$. משתמשים בזה ש- $i^2 = -1$.

5. כל שורש של פולינום מרוכב הוא מרוכב.

6. נגדיר \bar{z} להיות $\bar{z} = a - ib$. כלומר להפוך את החלק הדמיוני.

$$\bar{\bar{z}} = z \quad (\text{א})$$

$$z \cdot \bar{z} = ||z||^2 \quad (\text{ב})$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad (\text{ג})$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad (\text{ד})$$

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (\text{ה})$$

7. $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$ שדה סגור אלגברית (כלומר כל שורש של כל פולינום מרוכב הוא מרוכב).

8. איבר הופכי: $w = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$ (אם מכפילים בהופכי מקבלים 1).

3 הצגה פולארית

נגדיר מרוכב בתור זוג $\langle r, \theta \rangle$ כאשר r המרחק מראשית הצירים ו- θ הזווית שהוא יוצר, שנקראת הארגומנט.

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r \cdot e^{i\theta}$$

עובדות:

1. הארגומנט של z : נסמן $\arg(z)$ להיות הזווית שהמספר יוצר עם ציר הממשיים (לרוב נסמן כ- θ). ניתן לחשב אותו בעזרת $\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ ברוב המקרים.

$$\bar{z} = r \cdot e^{-i\theta}, z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \quad 2.$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad 3.$$

4. להכפיל מספרים מרוכבים על הגרף נראה כמו להכפיל את האורכים זה בזה ולחבר את הזוויות.

פתרון משוואה $z^n = a + ib$. נמצא הצגה פולארית $z^n = r e^{i\theta}$. נשתמש בעובדה ש- $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi k)}$ עבור $k \in \mathbb{Z}$. אזי:

$$z = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi \frac{k}{n}\right)}$$

עבור $k \in \mathbb{Z}$. ולכל $k \in \{0, \dots, n-1\}$ נקבל פתרונות שונים.

חלק III מטריצות

4 הגדרות

וקטור הוא n יה של איברים ב- \mathbb{F} . מטריצה היא m יה של וקטורים. מטריצה מסדר $m \times n$ היא מטריצה עם m שורות ו- n עמודות (קודם y ואז x). נגדיר מערכת משוואות כמטריצה באופן הבא:

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \dots + \alpha_{1,n}x_n &= b_1 \\ \vdots & \\ \alpha_{m,1}x_1 + \dots + \alpha_{m,n}x_n &= b_m \end{cases} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \dots & \alpha_{m,n} & b_m \end{array} \right)$$

4.1 פעולות בסיסיות

חיבור וקטורים:

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 + \beta_0 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

4.1.1 כפל מטריצה בוקטור

כמו להציב את הוקטור בעמודות המטריצה.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 a_{1,1} + \dots + \beta_n a_{1,n} \\ \dots + \dots + \dots \\ \beta_1 a_{m,1} + \dots + \beta_n a_{m,n} \end{pmatrix}$$

בנוסף, הפתרונות של $\bar{x} \in \text{Sols}(A | b)$ שקולים ל- $\bar{A}\bar{x}$. את פתרונות המטריצה נסמן ב- Sols . מטריצות נקראות שקולות אם הפתרונות שלהן זהים. **משפטים לגבי כפל מטריצה בוקטור:**

$$A(\bar{x} + \bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y} \quad \bullet$$

$$A(\alpha \cdot \bar{x}) = \alpha \cdot (A \cdot \bar{x}) \quad \bullet$$

$$\bullet \text{ עבור } I_n \text{ מרטיצת היחידה, } \bar{b} = I_n \cdot \bar{b} \text{ עבור } 0 \text{ מטריצת ה-} 0, 0 \cdot b = 0.$$

4.1.2 כפל מטריצה במטריצה

הגדרה 1.4 יהא R חוג ויהיו $A \in M_{n \times m}(R), B \in M_{m \times p}(R)$ מטריצות. נגדיר כפל מטריצות $(A \cdot B) \in M_{p \times n}(R)$ בצורה הבאה:

$$(A \cdot B)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

$$A \cdot B = \left(\begin{array}{c|ccc} & A \cdot C_1(B) & \cdots & A \cdot C_n(B) \\ \hline \end{array} \right) \quad \text{משפט 2.4}$$

$$A \cdot B = \left(\begin{array}{ccc} - & R_1(A) \cdot B & - \\ & \vdots & \\ - & R_n(A) \cdot B & - \end{array} \right) \quad \text{משפט 3.4}$$

כלומר כפל מטריצות הוא כפל וקטורים של העמודות של B ב- A , או כפל של השורות של A ב- B .

4.1.3 טענות לגבי כפל מטריצות:

1. **אסוציאטיביות הכפל:** $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ עבור $A \in M_{m \times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k \times t}(\mathbb{F}), C \in M_{t \times n}(\mathbb{F})$.

2. **חוק הפילוג:**

(א) $A \in M_{m \times k}(\mathbb{F}), B_1, B_2 \in M_{k \times n}(\mathbb{F})$ עבור $A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2$

(ב) $A_1, A_2 \in M_{m \times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k \times n}(\mathbb{F})$ עבור $(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B$

3. **הוצאת סקלר:** $A \cdot (\alpha \cdot B) = \alpha \cdot (A \cdot B)$ עבור $A \in M_{m \times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k \times n}(\mathbb{F}), \alpha \in \mathbb{F}$

4. **כפל ב-0 וב-1:** לכל מטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$, נוסף לכך $A \cdot I_n = A$, $I_m \cdot A = A$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{הערה: יש מחלקי אפס, לדוגמה}$$

4.2 פעולות אלמנטריות על מטריצה

הפעולות האלה הן:

1. להחליף סדר בין משוואות. $R_i \leftrightarrow R_j$

2. להכפיל משוואה בקבוע. $R_i \rightarrow \alpha \cdot R_i$

3. לחבר משוואות. $R_i \rightarrow R_i + R_j$

כולן משמרות את הפתרונות של המטריצה.

מטריצות ששקולות באמצעות סדרת פעולות אלמנטריות נקראות שקולות שורה.

4.3 שונות

מטריצה ריבועית: מטריצה שכמות העמודות בה שווה לכמות השורות.

משפט 4.4 הבאים שקולים עבור מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ (מטריצה ריבועית):

1. A שקולת שורות ל- I_n .
2. לכל $\bar{b} \in \mathbb{F}^n$ למערכת $A\bar{x} = \bar{b}$ יש פתרון יחיד.
3. לכל $b \in \mathbb{F}^n$ למערכת $A\bar{x} = \bar{b}$ קיים פתרון.
4. למערכת $A\bar{x} = \bar{0}$ יש פתרון יחיד.
5. קיים b כך שלמערכת $A\bar{x} = \bar{b}$ יש פתרון יחיד.

מטריצת היחידה: מסומנת I_n . היא מטריצה ריבועית שבה $a_{i,j} = 1$ אם $i = j$, ואם $i \neq j$ אז $a_{i,j} = 0$. לדוגמה:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וקטור e_i :

$$(e_i)_i = \begin{cases} 0 & x \neq i \\ 1 & x = i \end{cases}$$

זה בעצם 0 בכל מקום חוץ מהמקום ה- i .

מטריצת הסיבוב:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

אם מכפילים וקטור במטריצת הסיבוב, זה מסובב את הוקטור θ מעלות.

5 דירוג ודירוג קנוני

5.1 הגדרות

בצורה מדורגת:

1. משוואות 0 (מהצורה $0 = b$) נמצאות למטה.
 2. המשתנה הפותח בכל משוואה נמצא מימין ממש למשתנים הפותחים במשוואות מעליו.
- משתנה חופשי הוא משתנה שלא מקדם פותח של אף שורה.
- בנוסף, בצורה מדורגת קנונית:**

3. המקדם של כל משתנה פותח הוא 1
 4. לכל משתנה פותח של משוואה, המקדם של המשתנה בשאר המשוואות הוא 0.
- לכל מטריצה קיימת צורה מדורגת קנונית יחידה ששקולה לה.

5.2 מציאת פתרונות

5.2.1 מציאת מספר הפתרונות לפי צורה מדורגת (לא בהכרח קנונית)

עבור $(A | b)$ מטריצה מדורגת:

1. אם $(A | b)^-$ יש שורת סתירה ($0 = b$ כאשר $b \neq 0$) - אין פתרון.
2. אחרת, יש $|\mathbb{F}|^k$ פתרונות כאשר k מספר המשתנים החופשיים.

5.2.2 מציאת הפתרונות עצמם לפי צורה מדורגת קנונית

$(A' | b')$ מטריצה מדורגת קנונית מסדר $m \times n$ ששקולה ל- $(A | b)$ אז:

1. אם $(A' | b')^-$ יש שורת סתירה אז $\text{Sols}((A' | b')) = \emptyset$.
2. אחרת: נעשה החלפה על המשתנים החופשיים (אלה שאינם מקדם פותח של אף שורה). כל משתנה שאינו חופשי יוגדר לפי משוואה מסוימת. דוגמה:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

המקדמים החופשיים הם 1, 4, 6. הפתרון הוא:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 2 - 4x_4 \\ x_4 \\ 3 - 3x_6 \\ x_6 \end{pmatrix} \mid x_1, x_4, x_6 \in \mathbb{R} \right\}$$

6 תת מרחב

טענה (בוחן תת מרחב): $U \subseteq F^n$ היא תת מרחב אמ"מ:

1. U סגורה לחיבור.
 2. U סגירה לכפל בסקלר.
 3. $\bar{0} \in U$. ניתן להחליף את התנאי ב- $U \neq \emptyset$.
- נובע מכאן גם שחיתוך של תתי מרחבים הוא תת מרחב.

7 צירופים לינאריים

7.1 בת"ל

הגדרה 1.7 יהיו $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) \in (\mathbb{F}^n)^k$, סדרת מקדמים $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^k$ נקראת תלות לינארית של

(v_1, \dots, v_k) אם $\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k = 0$.

נגדיר את מרחב התלויות של (v_1, \dots, v_k) להיות:

$$LD((v_1, \dots, v_k)) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \mid \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_k = 0 \right\}$$

$$LD((v_1, \dots, v_k)) = \text{Sols}((v_1, \dots, v_k \mid 0))$$

מסקנה 2.7 v_1, \dots, v_k בת"ל $\iff LD(v_1, \dots, v_k) = \{0\}$

הגדרה 3.7 סדרת m תלויות $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) \in (\mathbb{F}^m)^k$ תקרא בלתי תלויה לינארית (בת"ל) אם לכל $\bar{b} \in \mathbb{F}^m$ יש לכל היותר פתרון אחד למשוואה $\sum_{i=1}^k x_i \bar{v}_i = \bar{b}$.

1. $S \subseteq \mathbb{F}^n$ תהי אם $0 \in S$ אז S תלויה לינארית.
2. $S \subseteq \mathbb{F}^n$ תהי $S = (x, y)^-$ כך ש- $S = (x, y)^-$ \iff הוקטורים פרופורציונליים.
3. סדרת וקטורים $(v_1, \dots, v_m) \subseteq \mathbb{F}^n$ בלתי תלויה לינארית \iff כל איבר אינו צירוף לינארי של קודמיו.

7.2 קבוצת הצירופים הלינאריים

הגדרה 4.7 עבור סדרת n תלויות, $(v_1, \dots, v_k) \in (\mathbb{F}^n)^k$,

$$\text{sp}(v_1, \dots, v_k) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F} \right\}$$

זה המרחב הנפרש על ידי v_1, \dots, v_k . ההגדרה לקבוצות $K \subseteq \mathbb{F}^n$ היא:

$$\text{sp}(K) = \left\{ b \in \mathbb{F}^n \mid \exists k \in \mathbb{N}. \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}. \exists t_1, \dots, t_k \in K. b = \sum_{i=1}^k \alpha_i t_i \right\}$$

קבוצה A פורשת את B אם $\text{span}(A) = B$.

7.3 בסיס

הגדרה 5.7 יהי \mathbb{F} שדה, B תת קבוצה של \mathbb{F}^n . אז B נקראת בסיס של \mathbb{F}^n אם שניים מהתנאים הבאים מתקיימים:

1. B בת"ל.
2. B פורשת את \mathbb{F}^n .
3. $m = n$.

כל שניים מוכיחים גם את השלישי.
התנאים הבאים שקולים לכך ש- B בסיס:

1. B בת"ל וכל קבוצה המכילה ממש את B הינה תלויה לינארית. (B בת"ל מקסימלית).
2. B פורשת וכל קבוצה שמוכלת ממש ב- B אינה פורשת. (פורשת מינימלית).
3. לכל $v \in \mathbb{F}^n$ יש הצגה יחידה כצירוף של וקטורים מ- B .

8 שחלוף והפיכות

8.1 שחלוף - Transpose:

הגדרה 1.8 בהינתן מטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ נגדיר $A^T \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ (לפעמים מסומן גם A^t) את השחלוף של A :

$$(A^T)_{i,j} = (A)_{j,i}.$$

באופן אינטואיטיבי, הפעולה מחליפה בין השורות לעמודות. לדוגמה: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 16 & 32 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 2 & 8 & 32 \end{pmatrix}$

משפט 2.8 חוקי Transpose:

• **חיבור:** $(A + B)^T = A^T + B^T$ (אם החיבור מוגדר, כלומר A, B מאותו הסדר).

• **כפל בסקלר:** $(\alpha A)^T = \alpha (A^T)$ עבור $\alpha \in \mathbb{F}$.

• $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ עבור $A \in M_{m \times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k \times n}(\mathbb{F})$.

8.2 הפיכות מטריצה

הגדרה 3.8 מטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ תיקרא:

1. **הפיכה משמאל:** אם קיימת מטריצה $B \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ כך ש $B \cdot A = I_n$.
2. **הפיכה מימין:** אם קיימת מטריצה $B \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ כך ש $A \cdot B = I_m$.
3. **הפיכה:** אם קיימת מטריצה $B \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ כך ש $A \cdot B = I_m$ וגם $B \cdot A = I_n$.
בפרט המטריצה B היא יחידה ומסומנת A^{-1} , ומקיימת $(A^{-1})^{-1} = A$.

הערה: המטריצה 0 אינה הפיכה, מימין או משמאל.
טענות:

1. אם במטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ יש שורת אפסים אז A לא הפיכה מימין.
2. אם A הפיכה A^T הפיכה.
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
4. אם $A \in M_{m \times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k \times n}(\mathbb{F})$ הפיכות, אז $A \cdot B$ הפיכה ו- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

משפט 4.8 תהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$

1. הפיכה מימין אם ורק אם למערכת $A \cdot \bar{x} = b$ יש פתרון לכל b (כלומר סדרת העמודות של A פורשת, ו- $m \leq n$).
 2. הפיכה משמאל אם ורק אם למערכת $A \cdot \bar{x} = 0$ יש פתרון יחיד (כלומר סדרת העמודות של A בת"ל, ולכן $m \geq n$).
 3. הפיכה אם ורק אם למערכת $A \cdot \bar{x} = b$ יש פתרון יחיד לכל b (כלומר סדרת העמודות של A בסיס, ולכן $m = n$).
- בפרט מטריצה הפיכה היא ריבועית.