

## מעגלים בוליאניים

**הגדרה (מעגל בוליאני):** תהי  $B$  קבוצה של פונקציות בוליאניות. מעגל בוליאני מעל  $B$  עם ביטי קלט  $x_1, \dots, x_n$  וביטי פלט  $y_1, \dots, y_m$  הוא גרף מכוון וחסר מעגלים שמקיים את התכונות הבאות: • כל צומת מסומן ע"י ביט קלט  $x_i$ , ביט פלט  $y_i$ , או  $g \in B$  • לכל ביט פלט  $y_i$ , בדיוק צומת אחד מסומן ע"י  $y_i$  עם דרגת כניסה 1 ודרגת יציאה 0 • דרגת הכניסה של כל צומת קלט - 0 • לכל צומת המסומן בפונקציה  $g \in B$  אם  $g$  מוגדרת על  $\{0, 1\}^k$  אז דרגת הכניסה  $k$ . כל צומת נכנסת מקבלת אינדקס.

צומת שמסומן בפונקציה נקרא "שער" וקשתות "חוטים". ה־fan-out של המעגל הוא דרגת היציאה המקסימלית. מעגלים עם fan-out=1 נקראים "נוסחאות".

**טענה:** יש תהליך שהופך מעגל לנוסחה, אבל צריך כמה עותקים של הקלטים.

**טענה:** כל  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  חשיבה מעל דה מורגן  $(\neg, \wedge, \vee)$

**הגדרה (משפחה של מעגלים):**  $\mathcal{C} = \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  מוגדר על קלטים באורך  $n$ .

$\mathcal{C}$  מכריעה שפה  $L \subseteq \{0, 1\}^*$  אם לכל  $n \in \mathbb{N}$  ולכל  $x \in \{0, 1\}^n$ ,  $c_n(x) = 1 \iff x \in L$

**הגדרה (גודל):** גודל של מעגל הוא מספר השערים בו.

**טענה (מתרגול):** כל  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  ניתנת לחישוב ע"י מעגל בגודל  $O(2^n)$ .

**טענה (שאנון):** עבור  $n$  גדול מספיק קיימות פונקציות שלא ניתנות לחישוב ע"י מעגלים בגודל  $s < \frac{2^n}{10n}$ .

## אוטומטיים סופיים

**הגדרה (אס"ד):** אס"ד הוא חמישיה  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

•  $Q$  קבוצה סופית של מצבים •  $\Sigma$  אלפאבית •  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$  פונקציית המעברים •  $q_0$  מצב תחילי •  $F \subseteq Q$  קבוצת המצבים המקבלים.

פונקציית המעברים המורחבת  $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$  מוגדרת באינדוקציה:

$$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q, \quad \hat{\delta}(q, x_1, \dots, x_n) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$$

האוטומט מקבל מילה  $x \in \Sigma^*$  אם  $\hat{\delta}(q_0, x) \in F$ .

שפה נקראת רגולרית אם קיים אס"ד שמקבל אותה.

**תכונות סגירות:** • איחוד • חיתוך • משלים • שרשור • חזקה • סגור קליני

**הגדרה (אסל"ד):** אסל"ד הוא חמישיה  $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$

•  $Q$  קבוצה סופית של מצבים •  $\Sigma$  אלפאבית •  $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow Q$  פונקציית המעברים •  $S \subseteq Q$  מצבים תחיליים •  $F \subseteq Q$  מצבים מקבלים.

כדי להגדיר את  $\hat{\delta} : 2^Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$  נגדיר סביבת אפסילון  $E(q)$  להיות:

$$E(q) = \{q' \in Q \mid \exists q_0, \dots, q_k \in Q. q_0 = q, \forall i. \delta(q_{i-1}, q_i) = \varepsilon, q_k = q'\}$$

$$\hat{\delta}(Q', w) = \begin{cases} E(Q') & w = \varepsilon \\ E\left(\bigcup_{r \in \hat{\delta}(Q', w_n)} \delta(r, w_n)\right) & n = |w| \geq 1 \end{cases}$$

האסל"ד מקבל מילה  $x \in \Sigma^*$  אם  $\hat{\delta}(S, x) \cap F \neq \emptyset$

**משפט:** לכל אסל"ד קיים אס"ד כש  $L(A) = L(B)$ . (הוכחה: כל מצב מייצג קבוצה של מצבים)

**ביטויים רגולריים:**  $a \in \Sigma, \varepsilon, \emptyset, (R_1 \cup R_2), (R_1 R_2), (R^*)$

**טענה:** שפה רגולרית  $\iff$  קיים לה ביטוי רגולרי.

**למת הניפוח:** לכל שפה רגולרית  $\mathcal{L}$  קיים  $\ell > 0$  כך שלכל  $s \in \mathcal{L}$  עם  $|s| \geq \ell$ ,

$$s = xyz \text{ כך ש: } |xy| \leq \ell \bullet |y| > 0 \bullet i \geq 0 \text{ לכל } xy^i z \in \mathcal{L}$$

אבל, לא כל שפה שמקיימת את למת הניפוח היא רגולרית. למשל,

$$\mathcal{L} = \{a^i b^n c^n \mid n \geq 0, i \geq 1\} \cup \{b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$$

**מירהיל-נרוד:** נאמר ש- $x \sim_{\mathcal{L}} y$  אם לכל  $z \in \Sigma^*$ ,  $yz \in \mathcal{L} \iff xz \in \mathcal{L}$ , אז,

$\mathcal{L}$  רגולרית  $\iff$  יש כמות סופית של מחלקות שקילות ב- $\sim_{\mathcal{L}}$ .

## מכונות טיורינג וכריעות

**הגדרה (מכונת טיורינג):** מכונת טיורינג היא שביעייה  $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$  •  $Q$  קבוצת מצבים סופית •  $\Gamma$  אלפאבית סרט,  $\Sigma \subset \Gamma$  •  $\delta : (Q \setminus \{q_a, q_r\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$  פונקציית מעברים •  $q_0 \in Q$  מצב התחלתי,  $q_a \in Q$  מצב מקבל,  $q_r \in Q$  מצב דוחה •  $q_r \neq q_a$

**הגדרה (קונפיגורציה):** קונפיגורציה מייצגת את המצב של מ"ט ברגע מסוים. למשל 1011q70111 אומר שהתוכן של הסרט הוא 10110111, שהמצב הוא q7, ושהמ"ט נמצאת בתא החמישי של הסרט (על 0). הקונפיגורציה ההתחלית עבור קלט  $w$  היא  $q_0 w$ .

## סיבוכיות זמן

## סיבוכיות מקום

...

...