סיכומי הרצאות - חדו״א 1א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

1 נוסחאות כלליות

בינום: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

א"ש הממוצעים: $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \cdots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$

א"ש ברנולי: לכל $x > -1, n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(1+x)^n \geq 1+nx$

א"ש המשולש: $|a+b| \leq |a|+|b|$

2 חסמים עליונים ותחתונים

M יקרא **חסם מלעיל** של A אם לכל $x \in A$, $x \leq M$.
M יקרא **חסם מלרע** של A אם לכל $x \in A$, $M \leq x$.

אקסיומת השלמות: לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל קיים חסם עליון קטן ביותר, ונסמן אותו ב־$\sup A$.

טענה שימושית: אם $b = \sup A$ אז לכל $\varepsilon > 0$, קיים $a \in A$ כך ש־$b - \varepsilon < a \leq b$.

הגדרה: נאמר ש־A צפופה ב־B אם לכל $b \in B$ ולכל $\varepsilon > 0$, קיים $a \in A$ כך ש־$|b-a| < \varepsilon$.

טענה: $S \subseteq \mathbb{R}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$ $\iff$ לכל $a < b \in \mathbb{R}$, $(a,b) \cap S \neq \emptyset$.

טענה: לכל $a < b$, קיים q כך ש־$q \in (a,b)$.

הוכחה: נניח ש־$a > 0$. יהי k כך ש־$0 < \frac{1}{k} < b-a$. יהי m המספר הקטן ביותר כך ש־$\frac{m}{k} \geq b$. אז $\frac{m-1}{k} < b$. בנוסף, $a + \frac{1}{k} < a + (b-a) = b$ ולכן $a < \frac{m-1}{k}$. אם כך, $a < \frac{m-1}{k} < b$ וסיימנו. אם $a \leq 0$, נוסיף את $x = \lceil |a| + 17 \rceil$ ל־a, b ועבור $c = a+x, d = b+x$ קיים $q \in (a+x, b+x)$, ולכן $\mathbb{Q} \ni q - x \in (a,b)$ מש"ל.

טענה: $\mathbb{Q}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$ ו־$[a,b] \cap \mathbb{Q}$ צפופה ב־$[a,b]$.

3 סדרות

נסמן סדרות ב־(a_n) או $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

נאמר שסדרה **חסומה מלעיל** אם קיים M כך שלכל n, $a_n \leq M$.

נאמר שסדרה **חסומה מלרע** אם קיים M כך שלכל n, $M \leq a_n$.

נאמר שסדרה **חסומה** אם קיים M כך שלכל n, $|a_n| \leq M$.

3.1 הגדרת הגבול

נאמר שהגבול של (a_n) הוא L, ונסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ או $a_n \to L$, אם:

$$\forall \varepsilon > 0 . \exists n_0 \in \mathbb{N} . \forall n > n_0 . \, |a_n - L| < \varepsilon$$

נאמר שהגבול של (a_n) הוא ∞, ונסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ או $a_n \to \infty$, אם:

$$\forall M > 0 . \exists n_0 \in \mathbb{N} . \forall n > n_0 . a_n > M$$

משפט (יחידות הגבול): אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L, \lim_{n\to\infty} a_n = L'$ אז $L = L'$.

סדרות קושי: זהו תנאי שקול להתכנסות, שלא צריך לדעת בשבילו את L:

$$\forall \varepsilon > 0 . \exists n_0 \in \mathbb{N} . \forall m, n \geq n_0 . \, |a_m - a_n| < \varepsilon$$

3.2 חשבון גבולות

יהיו $(a_n), (b_n)$ סדרות כך ש־$a_n \to a, b_n \to b$. אזי:

- $a_n + b_n \to a + b$
- $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ אם $b_n \neq 0$ לכל n ו־$b \neq 0$
  - אם $b_n \neq 0$ לכל n ו־$b = 0$ אז $\frac{1}{b_n} \to \infty$
- $|a_n| \to |a|$
- $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$ אם $a_n \geq 0$ לכל n

3.3 טענות על גבולות

טענה: יהיו $(a_n) \to a, (b_n) \to b$ סדרות מתכנסות כך ש־$a_n \leq b_n$. אז: $a \leq b$.

כלל הסנדוויץ': יהיו x_n, y_n, z_n סדרות כך ש־$x_n \leq z_n \leq y_n$ (כמעט) לכל n. אם $x_n \to x, y_n \to x$, אז $z_n \to x$.

הרחבה: אם $x_n \geq y_n$ ו־$y_n \to \infty$ אז $x_n \to \infty$.

טענה: תהי (a_n) כך ש־$a_n \to L \neq 0$ ויהי $0 < r < |L|$. אז קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$, $|a_n| > r$.

משפט (שטולץ): יהיו a_n, b_n סדרות כך ש־b_n מונוטונית עולה ו־$b_n \to \infty$, או ש־a_n, b_n סדרות מונוטוניות מתכנסות ל־0.

אזי, אם $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$ במובן הרחב אז $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$.

3.4 מבחן ה[(שורש)(מנה)] (הגבולי)?

מבחן השורש: $a_n \geq 0$ וקיים $0 \leq \alpha < 1$ כך ש־$(a_n)^{1/n} \leq \alpha$ לכל n. אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

מבחן השורש הגבולי: $a_n > 0$ ו־$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = L$. אזי,

- אם $L < 1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- אם $L > 1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

משפט המנה הגבולי: $a_n > 0$ ו־$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. אזי,

- אם $L < 1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- אם $L > 1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

משפט המנה הכללי: $a_n > 0$

- אם קיים $L < 1$ כך שהחל ממקום מסוים $a_{n+1} < La_n$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- אם קיים $L > 1$ כך שהחל ממקום מסוים $a_{n+1} > La_n$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

3.5 סדרות מונוטוניות

טענה: תהי (a_n) מונוטונית עולה וחסומה מלעיל. אזי: $a_n \to \sup a_n$.

טענה: תהי (a_n) מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל. אזי: $a_n \to \infty$.

3.6 תתי סדרות

תהי (a_n) סדרה ו־(n_k) סדרה עולה ממש של טבעיים. אז $b_k = a_{n_k}$ תת סדרה של (a_n) ונסמן ב־$(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$.

משפט הירושה: תהי (a_n) סדרה ו־(a_{n_k}) תת־סדרה.

- אם $a_n \to L$ אז $a_{n_k} \to L$
- אם a_n מונוטונית עולה אז a_{n_k} מונוטונית עולה
- אם a_n חסומה אז a_{n_k} חסומה

משפט בולצנו־ויירשטראס: לכל סדרה חסומה יש תת־סדרה מתכנסת ומונוטונית.
אם הסדרה לא חסומה יש תת־סדרה מונוטונית מתבדרת ל־$\pm\infty$.

3.6.1 גבולות חלקיים

הגדרה: L יקרא גבול חלקי אם קיימת $a_{n_k} \to L$. נסמן ב־$\hat{\mathcal{P}}(a_n)$ את קבוצת הגבולות החלקיים, ונסמן ב־$\mathcal{P}(a_n)$ את קבוצת הגבולות החלקיים בלי $\pm\infty$.

בנוסף, נגדיר: $\liminf a_n = \underline{\lim} a_n = \inf \hat{\mathcal{P}}(a_n)$, $\limsup a_n = \overline{\lim} a_n = \sup \hat{\mathcal{P}}(a_n)$.

הערה: על פי בולצנו־ויירשטראס, תמיד קיים גבול חלקי

טענה שימושית: תהי (a_n) חסומה. $L = \limsup a_n \iff$:

1. לכל $\varepsilon > 0$, $a_n < L + \varepsilon$ כמעט תמיד (חוץ ממספר סופי של איברים)
2. לכל $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon < a_n$ תופעה שכיחה (באינסוף איברים)

טענה: L גבול חלקי של (a_n) $\iff$ לכל $\varepsilon > 0$, $\{n \mid |a_n - L| < \varepsilon\}$ אינסופית

טענה: (a_n) חסומה $\Longleftarrow$ $\limsup a_n, \liminf a_n$ קיימים והם גבולות חלקיים

טענה: (a_n) אינה חסומה מלעיל/מלרע $\iff$ $\infty/-\infty$ גבול חלקי

טענה: (a_n) מתכנסת במובן הרחב $\iff$ יש גבול חלקי יחיד

טענה: בסדרה חסומה, $\inf a_n \le \liminf a_n \le \limsup a_n \le \sup a_n$

קבוצה סגורה: תהי $B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה. נאמר ש־B קבוצה סגורה אם לכל סדרה $(x_n) \subseteq B$, $x_n \to x \implies x \in B$.
משפט: אם (a_n) חסומה אז $\mathcal{P}(a_n)$ קבוצה סגורה.

4 טורים

תהי (a_n) סדרה. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.
הגדרה: נאמר ש־$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס $\iff$ סדרת הסכומים החלקיים s_n מתכנסת.

הערה: הטור הוא עצם נפרד מסדרת הסכומים החלקיים, אסור לבלבל ביניהם

הטור הגיאומטרי: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ עבור $|q| < 1$.

טענה: אם $\sum a_n$ מתכנס אז $a_n \to 0$.

קריטריון קושי להתכנסות טורים: $\forall\varepsilon > 0.\exists n_0.\forall m \geq n_0.\forall p \in \mathbb{N}. \left|\sum_{k=m}^{m+p} a_k\right| < \varepsilon$

חשבון טורים:

- אם $\sum a_n = K, \sum b_n = L$ מתכנסים אז $\sum (a_n + b_n) = K + L$ מתכנס
- אם $\sum a_n = L, \alpha \in \mathbb{R}$ מתכנס אז $\sum \alpha a_n = \alpha L$ מתכנס

4.1 טור חיובי

נאמר ש־$\sum a_n$ **טור חיובי** אם $a_n \geq 0$ לכל n

משפט: טור חיובי מתכנס $\iff$ s_n חסומה מלעיל

משפט: יהי $\sum a_n$ טור חיובי. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז כל טור שמתקבל מסידור מחדש של האיברים בו גם מתכנס ולאותו הגבול.

4.2 מבחן ה[(השוואה)(שורש)(מנה)] (הגבולי)? (לטורים חיוביים)?

סימון: יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים. אם החל ממקום מסוים, $a_n \geq b_n$, נסמן $\sum a_n \succcurlyeq \sum b_n$.

מבחן ההשוואה לטורים חיוביים: יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים חיוביים כך ש־$\sum a_n \succcurlyeq \sum b_n$. אז:

1. אם $\sum a_n$ מתכנס, $\sum b_n$ מתכנס
2. אם $\sum b_n$ מתבדר, $\sum a_n$ מתבדר

מבחן ההשוואה הגבולי לטורים חיוביים: יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים חיוביים כך ש־$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

1. אם $L = 0$, אז אם $\sum b_n$ מתכנס גם $\sum a_n$ מתכנס ואם $\sum a_n$ מתבדר אז גם $\sum b_n$ מתבדר
2. אם $L = \infty$, אז אם $\sum b_n$ מתבדר גם $\sum a_n$ מתבדר ואם $\sum a_n$ מתכנס אז גם $\sum b_n$ מתכנס

מבחן השורש לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי ויהי $0 < q < 1$.
אם החל ממקום מסוים, $\sqrt[n]{a_n} < q$, אז $\sum a_n$ מתכנס.
מבחן השורש הגבולי לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי.

1. אם $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$ אז $\sum a_n$ מתכנס
2. אם $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$ אז $\sum a_n$ מתבדר

מבחן המנה לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי כך ש־$a_n > 0$ לכל n.

1. אם קיים $0 < q < 1$ כך שהחל ממקום מסוים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ אז הטור מתכנס
2. אם החל ממקום מסוים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ אז הטור מתבדר

מבחן המנה הגבולי לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי כך ש־$a_n > 0$ לכל n.

1. אם $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, $\sum a_n$ מתכנס
2. אם $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, $\sum a_n$ מתבדר

4.3 טור מתכנס בהחלט

נאמר ש־$\sum a_n$ **מתכנס בהחלט** אם $\sum |a_n|$ מתכנס.
אם טור לא מתכנס בהחלט נאמר שהוא "**מתכנס בתנאי**"

טענה: אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אז $\sum a_n$ מתכנס

טענה שימושית: נסמן $\overline{a}_n = \frac{|a_n|+a_n}{2}, \underline{a}_n = \frac{|a_n|-a_n}{2}$.

$$\begin{array}{lll} a_n \geq 0 & \overline{a}_n = a_n & \underline{a}_n = 0 \\ a_n \leq 0 & \overline{a}_n = 0 & \underline{a}_n = -a_n \end{array}$$

ומתקיים ש־$a_n = \overline{a}_n - \underline{a}_n$.

טענה: אם $\sum \overline{a}_n, \sum \underline{a}_n$ מתכנסים אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
טענה: אם $\sum a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum \overline{a}_n, \sum \underline{a_n} \to \infty$.

4.4 טורי חזקות

טור חזקות הוא טור מהצורה $\sum a_n x^n$ (או $\sum a_n (x-x_0)^n$, אבל פחות מתייחסים אליו).

טור חזקות בהכרח מתכנס באיזשהו x, למשל 0.

משפט Abel: לכל טור חזקות $\sum a_n x^n$ קיים "מספר" $R \in [0, \infty]$ (שנקרא רדיוס ההתכנסות) כך שלכל $x \in (-R, R)$ הטור מתכנס בהחלט, ול־$x > R, x < -R$ הטור מתבדר.

משפט Cauchy-Hadamard: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות, רדיוס ההתכנסות הוא: $R = \dfrac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$

(כאשר $\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0$).

הערה: משפט Abel לא מתייחס ל־$\pm R$, צריך לבדוק עבורם בנפרד

4.5 טענות נוספות על טורים

טענה (הכנסת סוגריים): יהי $\sum a_n$ טור מתכנס ו־n_k סדרה עולה של אינדקסים. נסמן $A_1 = a_1 + \cdots + a_{n_1}, A_2 = a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}, \ldots$. אז הטור $\sum A_n$ מתכנס ולאותו הגבול.

טענה הפוכה: תהי (a_n) סדרה ו־n_k סדרה עולה של אינדקסים. אם כל האיברים בתוך כל סוגריים, $(a_j)_{n_k+1}^{n_{k+1}}$, בעלי אותו סימן אז הטענה ההפוכה נכונה ־ אם $\sum A_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס.

שימוש: בתנאים הנכונים, $\sum a_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + \ldots$

משפט לייבניץ על טורים מתכנסים: תהי (a_n) סדרה אי־שלילית יורדת ל־0. אזי הטור $\sum (-1)^n a_n$ מתכנס.

טענה: יהיו $(a_n), (b_n)$ סדרות. $\sum a_n b_n$ מתכנס אם אחד מהניסוחים הבאים מתקיים:

תנאי Dirichlet: $b_n \nearrow 0$ או $b_n \searrow 0$ ו־$|s_n^a| < M$

תנאי Abel: b_n מונוטונית וחסומה ו־$\sum a_n$ מתכנס

משפט Riemann: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בתנאי. אזי לכל $-\infty \leq s \leq \infty$ ניתן לסדר את איברי הטור כך שיתכנס ל־s או שאפילו לא יתכנס במובן הרחב.

5 פונקציות

5.1 הגדרת הגבול

בשביל $\lim_{x\to x_0} f(x)$ נדרוש ש־$f(x)$ מוגדרת בסביבה נקובה כלשהי.

Cauchy	$\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}.\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$
Heine	לכל $\{x_0\} \setminus (x_n)\subseteq I$ ו־I סביבה נקובה, אם $x_n\to x_0$ אז $f(x_n)\to L$	
Cauchy	$\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in(x_0,x_0+\delta).\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$
Heine	$(x_n)\subseteq I\setminus\{x_0\}$ ו־$x_0<x_n\to x_0$ אז $f(x_n)\to L$	
Cauchy	$\forall\varepsilon>0.\exists M>0.\forall x>M.\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$
Heine	$x_n\to\infty$ אז $f(x_n)\to L$	
Cauchy	$\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in(x_0,x_0+\delta).f(x)<-M$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$
Heine	$(x_n)\subseteq I\setminus\{x_0\}$ ו־$x_0<x_n\to x_0$ אז $f(x_n)\to-\infty$	

5.2 חשבון גבולות (דומה לסדרות)

יהיו $f,g:I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ ו־$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L_1,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L_2$. אזי:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+g(x)=L_1+L_2$
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=L_1\cdot L_2$
- אם $L_2\neq 0$ (ואם קיימת סביבה נקובה בה $g(x)\neq 0$): $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$

משפט (הרכבה): יהיו I,J קטעים פתוחים ו־$x_0\in I, y_0\in J$. תהיינה $f:I\setminus\{x_0\}\to J\setminus\{y_0\}$ ו־$g:J\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$. אם $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$ ו־$\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=L$, אז: $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=L$.

5.3 גבולות שימושיים

- **פולינומים:** בגלל ש־$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(x_0)}{q(x_0)}$ (מחשבון גבולות).
- עבור $a>0$, $\lim_{x\to\infty} a^{1/x}=1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$

5.4 רציפות

הגדרה: יהי I קטע פתוח ויהי $x_0\in I$. תהי $f:I\to\mathbb{R}$. אז:

- נאמר ש־f רציפה ב־x_0 אם $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$
- נאמר ש־f רציפה ב־I אם f רציפה בכל נקודה ב־I

חשבון רציפות (נובע מחשבון גבולות): יהי I קטע פתוח ו־$x_0\in I$ (נכון גם לחד־צדדי), ויהיו $f,g:I\to\mathbb{R}$ רציפות.

1. $f+g$ רציפה ב־x_0
2. $f\cdot g$ רציפה ב־x_0
3. אם $g(x_0)\neq 0$ אז $\frac{f}{g}$ רציפה ב־x_0

משפט (הרכבה): יהיו $f:A\to\mathbb{R}, g:B\to\mathbb{R}, x_0\in A$ כך ש־$B\subseteq f(A)$. אם f רציפה ב־x_0 ו־g רציפה ב־$g(x_0)$, אז $g\circ f$ רציפה ב־x_0.

רציפה מימין/שמאל: תהי $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, אז f רציפה מימין ב־a $\iff$ $\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$.

טענה: f רציפה ב־x_0 $\iff$ f רציפה מימין ומשמאל ב־x_0

מיון נקודות אי רציפות: תהי f מוגדרת ב־I ו־x_0 נקודה פנימית.

1. אם קיים $\lim_{x\to x_0}f(x)$ אבל $\lim_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$, נאמר שיש ב־$x_0$ **אי רציפות סליקה** כי אפשר לסלק אותה עם החלפת ערך אחד.
2. אם קיימים $\lim_{x\to x_0^+}f(x),\lim_{x\to x_0^-}f(x)$ אבל $\lim_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim_{x\to x_0^-}f(x)$ נאמר שיש נקודת אי־רציפות **ממין ראשון**.
3. אם $\lim_{x\to x_0}f(x)$ אינו קיים מכל סיבה אחרת, היא **ממין שני**.

משפט: תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ עולה.

- אם f חסומה מלעיל: $\lim_{x\to b^-}f(x)=\sup(f(a,b))$
- אם f אינה חסומה מלעיל ב־(a,b): $\lim_{x\to b^-}f(x)=\infty$

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהי $f:I\to\mathbb{R}$ רציפה ומונוטונית חזק. אזי $f(I)$ קטע מוכלל ו־$f^{-1}:f(I)\to I$ רציפה.

טענה: תהי $f:I\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית, I קטע פתוח ו־$x_0\in I$. אזי קיימים וסופיים $\lim_{x\to x_0^+}f(x),\lim_{x\to x_0^-}f(x)$.

פונקציית Riemann: $R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & x=\frac{p}{q},p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N},\gcd(p,q)=1\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

מתקיים ש־$\lim_{x\to x_0}R(x)=0$ לכל x_0, ולכן פונקציית רימן **רציפה באי־רציונאלים ואינה רציפה ברציונאלים**.

משפט ויירשטראס: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה. אזי: f חסומה ומשיגה את חסמיה (כלומר משיגה מינימום ומקסימום בקטע).

משפט ערך הביניים של קושי: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ויהי $f(a)\leq t\leq f(b)$. אזי קיים $x\in[a,b]$ כך ש־$f(x)=t$.

מסקנה: אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה אז $f[a,b]$ קטע סגור.

קטע מוכלל: אם $x_1,x_2\in I$ אז כל מספר ביניהם ($\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$) גם ב־$I$.

משפט: אם $f:I\to\mathbb{R}$ רציפה ו־I קטע מוכלל אז $f(I)$ קטע מוכלל.

5.5 רציפות במ"ש (במידה שווה)

הגדרה: תהי $f : A \to \mathbb{R}$, נאמר ש־f רציפה במידה שווה ב־A אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in A$,

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

משפט קנטור: תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה, אזי f רציפה במ"ש ב־$[a,b]$.

משפט: אם $f : [0,\infty)$ רציפה כך שקיים וסופי $\lim_{x\to\infty} f(x)$ אז f רציפה במ"ש.

5.6 נגזרת

תהי f מוגדרת בקטע פתוח I ו־$x_0 \in I$. אם קיים וסופי $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (הגדרות שקולות), נאמר ש־f גזירה ב־x_0 ונסמן את הגבול ב־$f'(x_0)$.

טענה: פונקציה גזירה ב־x_0 רציפה ב־x_0.

משפט רול: תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־(a,b). אם $f(a) = f(b)$ אז קיים $c \in (a,b)$ כך ש־$f'(c) = 0$.
משפט Lagrange: תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־(a,b). קיימת $c \in (a,b)$ עבורה $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
המשפטים האלה חזקים כי הם מקשרים בין הנגזרת לבין ערכים קונקרטיים של f.

משפט ערך הביניים של Darboux: יהי I קטע מוכלל ותהי $f : I \to \mathbb{R}$ גזירה. יהיו $u, v \in I$ כך ש־$f'(v) \neq f'(u)$. אזי לכל c בין $f'(u)$ ל־$f'(v)$ קיים w בין u ל־v כך ש־$f'(w) = c$.

כלומר, למרות שנגזרת לא בהכרח רציפה, היא עדיין תמיד מקיימת את משפט ערך הביניים.

גזירה n פעמים: אם $f, f^{(1)}, \dots, f^{(n-1)}$ גזירות בסביבה של x_0, ו־$f^{(n)}$ גזירה ב־x_0.

כלל לייבניץ: יהי I קטע פתוח, $x_0 \in I$ ו־$f, g : I \to \mathbb{R}$ גזירות n פעמים ב־x_0. אז:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0)$$

שזו הכללה של הכלל $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$.

כלל השרשרת: תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ו־U סביבה של X_0. תהי $f : U \to \mathbb{R}$ גזירה ב־x_0 ותהי $g : V \to \mathbb{R}$ כך ש־$f(U) \subseteq V$ גזירה ב־$f(x_0) = y_0$. אזי $g(f(x_0))$ גזירה ומתקיים:

$$(g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

מדריך למהנדסים

$(\alpha f(x) + \beta g(x))'$	$\alpha f'(x) + \beta g'(x)$
$(f(g(x)))'$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$(f(x) \cdot g(x))'$	$f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$
$(x^n)'$	$n \cdot x^{n-1}$
$(\ln x)'$	$\frac{1}{x}$
$(\sin(x))'$	$\cos(x)$
$(\cos(x))'$	$-\sin(x)$

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהיינה $f,g:I\to\mathbb{R}$ רציפות ב־I וגזירות בפנימו. אם $f'(x)=g'(x)$ בפנימו אז קיים c כך שלכל x,

$$f(x)=g(x)+c$$

משפט: תהי $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ רציפה ב־$[a,b)$ וגזירה ב־(a,b). כמו כן קיים וסופי $\lim_{x\to a^+}f'(x)=l$. אזי f גזירה מימין ב־a ומתקיים: $f'_+(a)=l$.

דיפרנציאביליות: תהי f מוגדרת ב־I קטע פתוח ו־$x_0\in I$. נאמר ש־f דיפרנציאבילית ב־x_0 אם:

1. $f(x)$ רציפה ב־x_0
2. קיים ישר $ax+b$ שהוא קירוב ראשון ב־x_0 (כלומר, $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-(ax+b)}{x-x_0}=0$).

משפט: f דיפרנציאבלית ב־x_0 $\iff$ גזירה ב־x_0. הקירוב הוא $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

משפט: יהי I קטע פתוח, $x_0\in I$, $f:I\to\mathbb{R}$ <u>מונוטונית חזק ורציפה</u>.
אם f גזירה ב־x_0 אז $f^{-1}:f(I)\to\mathbb{R}$ גזירה ב־$y_0=f(x_0)$ ו: $\left(f^{-1}(y_0)\right)'=\frac{1}{f'(x_0)}$.

5.7 חקירת פונקציות

5.7.1 מינימום ומקסימום מקומי

הגדרה: $x_0\in I$ פנימית מינימום מקומי אם לכל $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, $f(x)\ge f(x_0)$.

משפט Fermat: יהי I קטע מוכלל ותהי $x_0\in I$ פנימית. תהי $f:I\to\mathbb{R}$ גזירה בכל נקודה פנימית ב־I. <u>אם x_0 מינימום/מקסימום מקומי אז $f'(x_0)=0$.</u>

משפט: יהי I קטע מוכלל, $x_0\in I$ פנימית, f גזירה פעמיים ב־x_0 ו־$f'(x_0)=0$. אזי, <u>אם $f''(x_0)>0$ אז x_0 מינימום מקומי, אם $f''(x_0)<0$ אז x_0 מקסימום מקומי, ואחרת לא ידוע.</u>

5.7.2 עליה וירידה

משפט: יהי I קטע מוכלל, $f:I\to\mathbb{R}$ רציפה וגזירה בפנים I. אם לכל x בפנים I, $f'(x)\ge 0$ ($>$), אז f עולה (ממש) בכל I.

טענה: תהי $f:I\to\mathbb{R}$ גזירה ו־$x_0\in I$ נקודה פנימית. אם f' רציפה ב־x_0 ו־$f'(x_0)>0$ אז קיימת סביבה של x_0 בה f עולה ממש.

5.8 כלל לופיטל

5.8.1 $\frac{"0"}{"0"}$

יהי I קטע מוכלל ו־f,g גזירות בסביבה נקובה של x_0 כך שמתקיימים התנאים הבאים:

1. $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$
2. $\lim_{x\to x_0}g(x)=0$
3. $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in I$
4. קיים $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (סופי או אינסופי)

אז $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

5.8.2 $\frac{"\infty"}{"\infty"}$

יהי I קטע מוכלל ו־f,g גזירות בסביבה נקובה של x_0 כך שמתקיימים התנאים הבאים:

2. $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$
3. $g'(x) \neq 0$ לכל $x \in I$
4. קיים $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (סופי או אינסופי)

אז $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

6 טורי טיילור

6.1 היי זה לא הזה ממבוא מורחב?

(בניגוד לחלקים הקודמים אני לא במצב רוח לכתוב באופן יותר מדי פורמלי)

יהיו $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$.

$f(x) = o(g(x))$	אם $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
$f(x) = O(g(x))$	קיים $c > 0$ כך שבסביבה של x_0, $\lvert f(x)\rvert \leq c \cdot \lvert g(x)\rvert$
$f(x) = \Theta(g(x))$	$f(x) = O(g(x)) \wedge g(x) = O(f(x))$ (אין באמת שימושים ל־O עצמו)

6.2 באמת טורי טיילור אני מבטיח

הגדרה: יהי I קטע פתוח, $x_0 \in I$, $f,g : I \to \mathbb{R}$. נאמר ש־f ו־g מזדהות עד סדר n ב־x_0 אם שתיהן גזירות n פעמים ב־x_0 ומתקיים $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$ עבור $k = 1, \ldots, n$.

טענה: אם f,g מזדהות עד סדר n ב־x_0 אז $f(x) - g(x) = o((x-x_0)^n)$.

הגדרה: יהי I קטע פתוח, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ גזירה n פעמים ב־x_0. נאמר ש־$p_n(x)$ פולינום טיילור של f ב־x_0 אם $p_n(x)$ מזדהה עם f ב־x_0 עד סדר n.

משפט: קיים ויחיד $p_n(x)$ והנוסחה היא:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

הגדרה: נגדיר את השארית להיות $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$.
משפט פאנו: $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$.
משפט טיילור עם שארית לגרנז': יהי I קטע פתוח, $x_0 \in I$, f גזירה $n+1$ פעמים ב־I.
אז לכל $x_0 \neq x \in I$, קיים c_x בין x_0 ל־x כך ש:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

מסקנה: אם f גזירה אינסוף פעמים ב־I וקיים $M(x)$ כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ ולכל y בין x ל־x_0, $\left|f^{(k)}(y)\right| < M(x)$, אז $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

לפי טיעון כזה מוכיחים שהשארית שואפת ל־0 ב־e^x, ולכן בעצם $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, ואפשר אפילו להעריך את השגיאה.