# **סיכומי הרצאות** ־ חדו״א 1א

מיכאל פרבר ברודסקי

## תוכן עניינים

# 1 נוסחאות כלליות

**בינום:** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

**א"ש הממוצעים:** $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \cdots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$

**א"ש ברנולי:** לכל $x > -1, n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(1+x)^n \geq 1+nx$

**א"ש המשולש:** $|a+b| \leq |a|+|b|$

# 2 חסמים עליונים ותחתונים

$M$ יקרא **חסם מלעיל** של $A$ אם לכל $x \in A$, $x \leq M$.
$M$ יקרא **חסם מלרע** של $A$ אם לכל $x \in A$, $M \leq x$.

**אקסיומת השלמות:** לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל קיים חסם עליון קטן ביותר, ונסמן אותו ב־$\sup A$.

**טענה שימושית:** אם $b = \sup A$ אז לכל $\varepsilon > 0$, קיים $a \in A$ כך ש־$b - \varepsilon < a \leq b$.

**הגדרה:** נאמר ש־$A$ צפופה ב־$B$ אם לכל $b \in B$ ולכל $\varepsilon > 0$, קיים $a \in A$ כך ש־$|b-a| < \varepsilon$.

**טענה:** $S \subseteq \mathbb{R}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$ $\iff$ לכל $a < b \in \mathbb{R}$, $(a,b) \cap S \neq \emptyset$.

**טענה:** לכל $a < b$, קיים $q$ כך ש־$q \in (a,b)$.

**הוכחה:** נניח ש־$a > 0$. יהי $k$ כך ש־$0 < \frac{1}{k} < b-a$. יהי $m$ המספר הקטן ביותר כך ש־$b \geq \frac{m}{k}$. אז $\frac{m-1}{k} < b$. בנוסף, $a + \frac{1}{k} < a + (b-a) = b$ ולכן $a < \frac{m-1}{k}$. אם כך, $a < \frac{m-1}{k} < b$ וסיימנו. אם $a \leq 0$, נוסיף את $x = \lceil |a| + 17 \rceil$ ל־$a, b$ ועבור $c = a+x, d = b+x$ קיים $q \in (a+x, b+x)$, ולכן $(a,b) \in q - x \ni \mathbb{Q}$ מש"ל.

**טענה:** $\mathbb{Q}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$ ו־$[a,b] \cap \mathbb{Q}$ צפופה ב־$[a,b]$.

# 3 סדרות

נסמן סדרות ב־$(a_n)$ או $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

נאמר שסדרה **חסומה מלעיל** אם קיים $M$ כך שלכל $n$, $a_n \leq M$.

נאמר שסדרה **חסומה מלרע** אם קיים $M$ כך שלכל $n$, $M \leq a_n$.

נאמר שסדרה **חסומה** אם קיים $M$ כך שלכל $n$, $|a_n| \leq M$.

## 3.1 הגדרת הגבול

נאמר שהגבול של $(a_n)$ הוא $L$, ונסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ או $a_n \to L$, אם:

$$\forall \varepsilon > 0 . \exists n_0 \in \mathbb{N} . \forall n > n_0 . \ |a_n - L| < \varepsilon$$

נאמר שהגבול של $(a_n)$ הוא $\infty$, ונסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ או $a_n \to \infty$, אם:

$$\forall M > 0 . \exists n_0 \in \mathbb{N} . \forall n > n_0 . a_n > M$$

**משפט (יחידות הגבול):** אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L, \lim_{n\to\infty} a_n = L'$ אז $L = L'$.

**סדרות קושי:** זהו תנאי שקול להתכנסות, שלא צריך לדעת בשבילו את $L$:

$$\forall \varepsilon > 0 . \exists n_0 \in \mathbb{N} . \forall m, n \geq n_0 . \ |a_m - a_n| < \varepsilon$$

## 3.2 חשבון גבולות

יהיו $(a_n), (b_n)$ סדרות כך ש־$a_n \to a, b_n \to b$. אזי:

- $a_n + b_n \to a + b$
- $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ אם $b_n \neq 0$ לכל $n$ ו־$b \neq 0$
  - אם $b_n \neq 0$ לכל $n$ ו־$b = 0$ אז $\frac{1}{b_n} \to \infty$
- $|a_n| \to |a|$
- $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$ אם $a_n \geq 0$ לכל $n$

## 3.3 טענות על גבולות

**טענה:** יהיו $(a_n) \to a, (b_n) \to b$ סדרות מתכנסות כך ש־$a_n \leq b_n$. אז: $a \leq b$.

**כלל הסנדוויץ':** יהיו $x_n, y_n, z_n$ סדרות כך ש־$x_n \leq z_n \leq y_n$ (כמעט) לכל $n$. אם $x_n \to x, y_n \to x$, אז $z_n \to x$.

**הרחבה:** אם $x_n \geq y_n$ ו־$y_n \to \infty$ אז $x_n \to \infty$.

**טענה:** תהי $(a_n)$ כך ש־$a_n \to L \neq 0$ ויהי $0 < r < |L|$. אז קיים $n_0$ כך שלכל $n > n_0$, $|a_n| > r$.

**משפט (שטולץ):** יהיו $a_n, b_n$ סדרות כך ש־$b_n$ מונוטונית עולה ו־$b_n \to \infty$, או ש־$a_n, b_n$ סדרות מונוטוניות מתכנסות ל־0.

אזי, אם $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$ במובן הרחב אז $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

## 3.4 מבחן ה[(שורש)(מנה)] (הגבולי)?

**מבחן השורש:** $a_n \geq 0$ וקיים $0 \leq \alpha < 1$ כך ש־$(a_n)^{1/n} \leq \alpha$ לכל $n$. אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

**מבחן השורש הגבולי:** $a_n > 0$ ו־$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = L$. אזי,

- אם $L < 1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- אם $L > 1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

**משפט המנה הגבולי:** $a_n > 0$ ו־$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. אזי,

- אם $L < 1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- אם $L > 1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

**משפט המנה הכללי:** $a_n > 0$

- אם קיים $L < 1$ כך שהחל ממקום מסוים $a_{n+1} < La_n$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- אם קיים $L > 1$ כך שהחל ממקום מסוים $a_{n+1} > La_n$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

## 3.5 סדרות מונוטוניות

**טענה:** תהי $(a_n)$ מונוטונית עולה וחסומה מלעיל. אזי: $a_n \to \sup a_n$.

**טענה:** תהי $(a_n)$ מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל. אזי: $a_n \to \infty$.

## 3.6 תתי סדרות

תהי $(a_n)$ סדרה ו־$(n_k)$ סדרה עולה ממש של טבעיים. אז $b_k = a_{n_k}$ תת סדרה של $(a_n)$ ונסמן ב־$(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$.

**משפט הירושה:** תהי $(a_n)$ סדרה ו־$(a_{n_k})$ תת־סדרה.

- אם $a_n \to L$ אז $a_{n_k} \to L$
- אם $a_n$ מונוטונית עולה אז $a_{n_k}$ מונוטונית עולה
- אם $a_n$ חסומה אז $a_{n_k}$ חסומה

**משפט בולצנו־ויירשטראס:** לכל סדרה חסומה יש תת־סדרה מתכנסת ומונוטונית.
אם הסדרה לא חסומה יש תת־סדרה מונוטונית מתבדרת ל־$\pm\infty$.

### 3.6.1 גבולות חלקיים

**הגדרה:** $L$ יקרא גבול חלקי אם קיימת $a_{n_k} \to L$. נסמן ב־$\hat{\mathcal{P}}(a_n)$ את קבוצת הגבולות החלקיים, ונסמן ב־$\mathcal{P}(a_n)$ את קבוצת הגבולות החלקיים בלי $\pm\infty$.

בנוסף, נגדיר: $\liminf a_n = \underline{\lim} a_n = \inf \hat{\mathcal{P}}(a_n)$, $\limsup a_n = \overline{\lim} a_n = \sup \hat{\mathcal{P}}(a_n)$.

**הערה:** על פי בולצנו־ויירשטראס, תמיד קיים גבול חלקי

**טענה שימושית:** תהי $(a_n)$ חסומה. $L = \limsup a_n \iff$:

1. לכל $\varepsilon > 0$, $a_n < L + \varepsilon$ כמעט תמיד (חוץ ממספר סופי של איברים)
2. לכל $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon < a_n$ תופעה שכיחה (באינסוף איברים)

**טענה:** $(a_n)$ חסומה $\Longleftarrow$ $\limsup a_n, \liminf a_n$ קיימים והם גבולות חלקיים.

**טענה:** $(a_n)$ אינה חסומה מלעיל/מלרע $\iff$ $-\infty/\infty$ גבול חלקי

**טענה:** $(a_n)$ מתכנסת במובן הרחב $\iff$ יש גבול חלקי יחיד

**טענה:** בסדרה חסומה, $\inf a_n \le \liminf a_n \le \limsup a_n \le \sup a_n$

**קבוצה סגורה:** תהי $B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה. נאמר ש־$B$ קבוצה סגורה אם לכל סדרה $(x_n) \subseteq B$, $x_n \to x \implies x \in B$.
**משפט:** אם $(a_n)$ חסומה אז $\mathcal{P}(a_n)$ קבוצה סגורה.

# 4 טורים

תהי $(a_n)$ סדרה. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.
**הגדרה:** נאמר ש־$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס $\iff$ סדרת הסכומים החלקיים $s_n$ מתכנסת.

**הערה:** הטור הוא עצם נפרד מסדרת הסכומים החלקיים, אסור לבלבל ביניהם

**הטור הגיאומטרי:** $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ עבור $|q| < 1$.

**טענה:** אם $\sum a_n$ מתכנס אז $a_n \to 0$.

**קריטריון קושי להתכנסות טורים:** $\forall\varepsilon > 0. \exists n_0. \forall m \ge n_0. \forall p \in \mathbb{N}. \left| \sum_{k=m}^{m+p} a_k \right| < \varepsilon$

**חשבון טורים:**

- אם $\sum a_n = K, \sum b_n = L$ מתכנסים אז $\sum (a_n + b_n) = K + L$ מתכנס
- אם $\sum a_n = L, \alpha \in \mathbb{R}$ מתכנס אז $\sum \alpha a_n = \alpha L$ מתכנס

## 4.1 טור חיובי

נאמר ש־$\sum a_n$ **טור חיובי** אם $a_n \geq 0$ לכל $n$

**משפט:** טור חיובי מתכנס $\iff$ $s_n$ חסומה מלעיל

**משפט:** יהי $\sum a_n$ טור חיובי. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז כל טור שמתקבל מסידור מחדש של האיברים בו גם מתכנס ולאותו הגבול.

## 4.2 מבחן ה[(השוואה)(שורש)(מנה)] (הגבולי)? (לטורים חיוביים)?

**סימון:** יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים. אם החל ממקום מסוים, $a_n \geq b_n$, נסמן $\sum a_n \succcurlyeq \sum b_n$.

**מבחן ההשוואה לטורים חיוביים:** יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים חיוביים כך ש־$\sum a_n \succcurlyeq \sum b_n$. אז:

1. אם $\sum a_n$ מתכנס, $\sum b_n$ מתכנס
2. אם $\sum b_n$ מתבדר, $\sum a_n$ מתבדר

**מבחן השורש לטורים חיוביים:** יהי $\sum a_n$ טור חיובי ויהי $0 < q < 1$.
אם החל ממקום מסוים, $\sqrt[n]{a_n} < q$, אז $\sum a_n$ מתכנס.

**מבחן המנה לטורים חיוביים:** יהי $\sum a_n$ טור חיובי כך ש־$a_n > 0$ לכל $n$.

1. אם קיים $0 < q < 1$ כך שהחל ממקום מסוים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ אז הטור מתכנס
2. אם החל ממקום מסוים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ אז הטור מתבדר

**מבחן המנה הגבולי לטורים חיוביים:** יהי $\sum a_n$ טור חיובי כך ש־$a_n > 0$ לכל $n$.

1. אם $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, $\sum a_n$ מתכנס
2. אם $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, $\sum a_n$ מתבדר

**מבחן השורש הגבולי:** יהי $\sum a_n$ טור חיובי.

1. אם $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$ אז $\sum a_n$ מתכנס
2. אם $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$ אז $\sum a_n$ מתבדר

## 4.3 טור מתכנס בהחלט

נאמר ש־$\sum a_n$ **מתכנס בהחלט** אם $\sum |a_n|$ מתכנס.
אם טור לא מתכנס בהחלט נאמר שהוא "**מתכנס בתנאי**"

**טענה:** אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אז $\sum a_n$ מתכנס

**טענה שימושית:** נסמן $\overline{a}_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \underline{a}_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$.

$$\begin{array}{lll} a_n \geq 0 & \overline{a}_n = a_n & \underline{a}_n = 0 \\ a_n \leq 0 & \overline{a}_n = 0 & \underline{a}_n = -a_n \end{array}$$

ומתקיים ש־$a_n = \overline{a}_n - \underline{a}_n$.

**טענה:** אם $\sum \overline{a}_n, \sum \underline{a}_n$ מתכנסים אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
**טענה:** אם $\sum a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum \overline{a}_n, \sum \underline{a}_n \to \infty$.

### 4.4 טורי חזקות

טור חזקות הוא טור מהצורה $\sum a_n x^n$ (או $\sum a_n (x-x_0)^n$, אבל פחות מתייחסים אליו).

טור חזקות בהכרח מתכנס באיזשהו $x$, למשל 0.

**משפט Abel:** לכל טור חזקות $\sum a_n x^n$ קיים "מספר" $R \in [0,\infty]$ (שנקרא רדיוס ההתכנסות) כך שלכל $x \in (-R,R)$ הטור מתכנס בהחלט, ול־$x > R, x < -R$ הטור מתבדר.

**משפט Cauchy-Hadamard:** יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות, רדיוס ההתכנסות הוא: $R = \dfrac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$

(כאשר $\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0$).

**הערה:** משפט Abel לא מתייחס ל־$\pm R$, צריך לבדוק עבורם בנפרד

### 4.5 טענות נוספות על טורים

**טענה (הכנסת סוגריים):** יהי $\sum a_n$ טור מתכנס ו־$n_k$ סדרה עולה של אינדקסים. נסמן $A_1 = a_1 + \dots + a_{n_1}, A_2 = a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}, \dots$. אז הטור $\sum A_n$ מתכנס ולאותו הגבול.

**טענה הפוכה:** תהי $(a_n)$ סדרה ו־$n_k$ סדרה עולה של אינדקסים. אם כל האיברים בתוך כל סוגריים, $(a_j)_{n_k+1}^{n_{k+1}}$, בעלי אותו סימן אז הטענה ההפוכה נכונה ־ אם $\sum A_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס.

**שימוש:** בתנאים הנכונים, $\sum a_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + \dots$

---

**משפט לייבניץ על טורים מתכנסים:** תהי $(a_n)$ סדרה אי־שלילית יורדת ל־0. אזי הטור $\sum (-1)^n a_n$ מתכנס.

---

**טענה:** יהיו $(a_n), (b_n)$ סדרות. $\sum a_n b_n$ מתכנס אם אחד מהניסוחים הבאים מתקיים:

**תנאי Dirichlet:** $b_n \nearrow 0$ או $b_n \searrow 0$ ו־$|s_n^a| < M$

**תנאי Abel:** $b_n \searrow$ או $b_n \nearrow$ ו־$|b_n| < M$ ו־$\sum a_n$ מתכנס

---

**משפט Riemann:** יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בתנאי. אזי לכל $-\infty \le s \le \infty$ ניתן לסדר את איברי הטור כך שיתכנס ל־$s$ או שאפילו לא יתכנס במובן הרחב.

## 5 פונקציות

### 5.1 הגדרת הגבול

בשביל $\lim_{x\to x_0} f(x)$ נדרוש ש־$f(x)$ מוגדרת בסביבה נקובה כלשהי.

| | | |
|---|---|---|
| **Cauchy** | $\forall\varepsilon > 0.\exists\delta > 0.\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}. \|f(x) - L\| < \varepsilon$ | $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ |
| **Heine** | לכל $(x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}$ ו־$I$ סביבה נקובה, אם $x_n \to x_0$ אז $f(x_n) \to L$ | |
| **Cauchy** | $\forall\varepsilon > 0.\exists\delta > 0.\forall x \in (x_0, x_0+\delta). \|f(x) - L\| < \varepsilon$ | $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ |
| **Heine** | $(x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}$ ו־$x_0 < x_n \to x_0$ אז $f(x_n) \to L$ | |
| **Cauchy** | $\forall\varepsilon > 0.\exists M > 0.\forall x > M. \|f(x) - L\| < \varepsilon$ | $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ |
| **Heine** | $x_n \to \infty$ אז $f(x_n) \to L$ | |
| **Cauchy** | $\forall M > 0.\exists\delta > 0.\forall x \in (x_0, x_0+\delta). f(x) < -M$ | $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ |
| **Heine** | $(x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}$ ו־$x_0 < x_n \to x_0$ אז $f(x_n) \to -\infty$ | |

## 5.2 חשבון גבולות (דומה לסדרות)

יהיו $f,g:I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ ו־$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L_1,\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=L_2$. אזי:

- $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+g(x)=L_1+L_2$
- $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=L_1\cdot L_2$
- אם $L_2\neq 0$ (ואם קיימת סביבה נקובה בה $g(x)\neq 0$): $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L_1}{L_2}$

**משפט (הרכבה):** יהיו $I,J$ קטעים פתוחים ו־$x_0\in I, y_0\in J$. תהיינה $f:I\setminus\{x_0\}\to J\setminus\{y_0\}$ ו־$g:J\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$. אם $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=y_0$ ו־$\lim\limits_{y\to y_0}g(y)=L$, אז: $\lim\limits_{x\to x_0}g(f(x))=L$.

## 5.3 גבולות שימושיים

**פולינומים:** בגלל ש־$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{p(x)}{q(x)}=\dfrac{p(x_0)}{q(x_0)}$ (מחשבון גבולות).

עבור $a>0$, $\lim_{x\to\infty}a^{1/x}=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$

## 5.4 רציפות

**הגדרה:** יהי $I$ קטע פתוח ויהי $x_0\in I$. תהי $f:I\to\mathbb{R}$. אז:

- נאמר ש־$f$ רציפה ב־$x_0$ אם $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$
- נאמר ש־$f$ רציפה ב־$I$ אם $f$ רציפה בכל נקודה ב־$I$

---

**רציפה מימין/שמאל:** תהי $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, אז $f$ רציפה מימין ב־$a$ $\iff$ $\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$.

**טענה:** $f$ רציפה ב־$x_0$ $\iff$ $f$ רציפה מימין ומשמאל ב־$x_0$

**מיון נקודות אי רציפות:** תהי $f$ מוגדרת ב־$I$ ו־$x_0$ נקודה פנימית.

1. אם קיים $\lim_{x\to x_0}f(x)$ אבל $\lim_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$, נאמר שיש ב־$x_0$ **אי רציפות סליקה** כי אפשר לסלק אותה עם החלפת ערך אחד.
2. אם קיימים $\lim_{x\to x_0^+}f(x),\lim_{x\to x_0^-}f(x)$ אבל $\lim_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim_{x\to x_0^-}f(x)$ נאמר שיש נקודת אי־רציפות **ממין ראשון**.
3. אם $\lim_{x\to x_0}f(x)$ אינו קיים מכל סיבה אחרת, היא **ממין שני**.

---

**משפט:** תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ עולה.

- אם $f$ חסומה מלעיל: $\lim_{x\to b^-}f(x)=\sup(f(a,b))$
- אם $f$ אינה חסומה מלעיל ב־$(a,b)$: $\lim_{x\to b^-}f(x)=\infty$

**טענה:** תהי $f:I\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית, $I$ קטע פתוח ו־$x_0\in I$. אזי קיימים וסופיים $\lim_{x\to x_0^+}f(x),\lim_{x\to x_0^-}f(x)$.