

# סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 1

מיכאל פרבר ברודסקי

## תוכן עניינים

<b>3</b>	<b>I מונואידים, חבורות, חוגים ושדות</b>	
3	1 הגדרות	
3	1.1 תכונות של פעולות	
3	1.2 מונואיד	
3	1.3 חבורה	
3	1.4 חוג	
4	1.5 שדה	
<b>4</b>	<b>II מרכיבים</b>	
4	2 הגדרות בסיסיות	
4	3 הצגה פולארית	
<b>5</b>	<b>III מטריצות</b>	
5	4 הגדרות	
5	4.1 שונות	
6	4.2 פעולות בסיסיות	
6	4.2.1 כפל מטריצה בוקטור	
6	4.2.2 כפל מטריצה במטריצה	
6	4.2.3 טענות לגבי כפל מטריצות:	
7	4.3 פעולות אלמנטריות על מטריצה	
7	5 דירוג ודירוג קנוני	
7	5.1 הגדרות	
8	5.2 מציאת פתרונות	
8	5.2.1 מציאת מספר הפתרונות לפי צורה מדורגת (לא בהכרח קנונית)	
8	5.2.2 מציאת הפתרונות עצמם לפי צורה מדורגת קנונית	
8	6 תת מרחב	
8	7 צירופים לינאריים	
8	7.1 בת"ל	
9	7.2 קבוצת הצירופים הלינאריים	
9	7.3 בסיס	
10	8 שחלוף והפיכות	

10	.....	שחלוף - Transpose:	8.1	
10	.....	הפיכות מטריצה	8.2	
11	.....	פונקציית נפח	9	
11	.....	הגדרות	9.1	
11	.....	דטרמיננטה	9.2	
12	.....	טענות	9.3	

## חלק I

## מונואידים, חבורות, חוגים ושדות

## 1 הגדרות

## 1.1 תכונות של פעולות

תהא  $*$  פעולה בינארית על  $A$  (כלומר ה־domain הוא  $A \times A$ ).

1.  $*$  אסוציאטיבית:  $\forall a, b, c \in A. (a * b) * c = a * (b * c)$ .

2.  $*$  חילופית:  $\forall a, b. a * b = b * a$ .

3. קבוצה  $A$  סגורה לפעולה  $*$ :  $*$  :  $A \times A \rightarrow A$ .

## 1.2 מונואיד

מונואיד הוא זוג  $\langle G, * \rangle$  כאשר  $G$  קבוצה כלשהי ו־ $*$  פעולה בינארית על  $G$ , כך ש:

1.  $G$  סגורה לפעולה  $*$ .

2.  $*$  פעולה אסוציאטיבית.

3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר  $\exists e \in G. \forall g \in G. e * g = g * e = g$ . האיבר הזה יחיד ומסומן  $e_G$ .

## 1.3 חבורה

מקרה פרטי של מונואיד שמקיימת גם:

4. קיים איבר הופכי, כלומר  $\forall g \in G. \exists h \in G. g * h = h * g = e$  כאשר  $e$  איבר יחידה. האיבר ההופכי של  $g$  מסומן  $g^{-1}$ .

## 1.4 חוג

שלשה  $\langle R, +, * \rangle$  נקראת חוג אם:

1.  $\langle R, + \rangle$  חבורה חילופית, כלומר  $\forall a, b \in R. a + b = b + a$ .

2.  $*$  היא פעולה בינארית על  $R$  ו־ $R$  סגורה לפעולה  $*$ .

3. חוק הפילוג:

$$\forall a, b, c \in R. a * (b + c) = a * b + a * c \\ (b + c) * a = b * a + c * a$$

חוג חילופי - אם  $*$  פעולה חילופית (כלומר  $a * b = b * a$ ).

חוג עם יחידה - אם  $\langle R, * \rangle$  מונואיד.

סימונים:  $0_R$  ניטרלי לחיבור,  $1_R$  ניטרלי לכפל אם קיים.

מחלק 0 - איבר  $a \in R, a \neq 0_R$  נקרא "מחלק 0" אם יש  $b \neq 0_R$  כך ש־ $a * b = 0_R$ . בממשיים אין מחלק 0.

חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0 נקרא **תחום שלמות**. הוא מקיים את חוק הצמצום (לכל  $a, b, c \in R$ , אם  $a * b = c * b$  אז  $a = c$ )

## 1.5 שדה

$\langle F, +, * \rangle$  מקרה פרטי של חוג שמקיים גם:

1.  $\langle F \setminus \{0_F\}, * \rangle$  חבורה חילופית.

כל שדה הוא תחום שלמות, אבל ההפך אינו נכון. תחומי שלמות סופיים הם כן שדות. הרבה פעמים בהגדרת שדה מוסיפים את הדרישה  $0_F \neq 1_F$ .

## חלק II מרוכבים

## 2 הגדרות בסיסיות

נסמן  $i = \sqrt{-1}$ . ההגדרה הפורמלית של מרוכבים היא:  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , כאשר המספר הראשון הוא החלק הממשי (שמסומן  $Re(c)$ ) והמספר השני הוא החלק הדמיוני (שמסומן  $Im(c)$ ).  
עובדות: עבור  $z \in \mathbb{C}$ ,

1. הגודל של  $z$ :  $||z|| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$ . כלומר המרחק של  $z$  מראשית הצירים.

2. זהות אוילר:  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ , לכן  $z = ||z|| e^{i \cdot \arg(z)}$ .

3. חיבור: מחברים את החלק הממשי והדמיוני בנפרד.

4. כפל:  $(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + da)$ . משתמשים בזה ש- $i^2 = -1$ .

5. כל שורש של פולינום מרוכב הוא מרוכב.

6. נגדיר  $\bar{z}$  להיות  $\bar{z} = a - ib$ . כלומר להפוך את החלק הדמיוני.

$$\bar{\bar{z}} = z \quad (\text{א})$$

$$z \cdot \bar{z} = ||z||^2 \quad (\text{ב})$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad (\text{ג})$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad (\text{ד})$$

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (\text{ה})$$

7.  $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$  שדה סגור אלגברית (כלומר כל שורש של כל פולינום מרוכב הוא מרוכב).

8. איבר הופכי:  $w = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$  (אם מכפילים בהופכי מקבלים 1).

## 3 הצגה פולארית

נגדיר מרוכב בתור זוג  $\langle r, \theta \rangle$  כאשר  $r$  המרחק מראשית הצירים ו- $\theta$  הזווית שהוא יוצר, שנקראת הארגומנט.

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r \cdot e^{i\theta}$$

עובדות:

1. הארגומנט של  $z$ : נסמן  $\arg(z)$  להיות הזווית שהמספר יוצר עם ציר הממשיים (לרוב נסמן כ- $\theta$ ). ניתן לחשב אותו בעזרת  $\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$  ברוב המקרים.

$$\bar{z} = r \cdot e^{-i\theta}, z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \quad 2.$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad 3.$$

4. להכפיל מספרים מרוכבים על הגרף נראה כמו להכפיל את האורכים זה בזה ולחבר את הזוויות.

**פתרון משוואה**  $z^n = a + ib$ . נמצא הצגה פולארית  $z^n = r e^{i\theta}$ . נשתמש בעובדה ש-  $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi k)}$  עבור  $k \in \mathbb{Z}$ . אז:

$$z = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi \frac{k}{n}\right)}$$

עבור  $k \in \mathbb{Z}$ . ולכל  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  נקבל פתרונות שונים.

### חלק III מטריצות

#### 4 הגדרות

וקטור הוא  $n$ יה של איברים ב- $\mathbb{F}$ . מטריצה היא  $m$ יה של וקטורים. מטריצה מסדר  $m \times n$  היא מטריצה עם  $m$  שורות ו- $n$  עמודות (קודם  $y$  ואז  $x$ ). נגדיר מערכת משוואות כמטריצה באופן הבא:

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \dots + \alpha_{1,n}x_n &= b_1 \\ \vdots &= \vdots \\ \alpha_{m,1}x_1 + \dots + \alpha_{m,n}x_n &= b_m \end{cases} \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \dots & \alpha_{m,n} & b_m \end{array} \right)$$

#### 4.1 שונות

**מטריצה ריבועית:** מטריצה שכמות העמודות בה שווה לכמות השורות.  
**מטריצת היחידה:** מסומנת  $I_n$ . היא מטריצה ריבועית שבה  $a_{i,j} = 1$  אם  $i = j$ , ואם  $i \neq j$  אז  $a_{i,j} = 0$ . לדוגמה:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וקטור  $e_i$ :

$$(e_i)_i = \begin{cases} 0 & x \neq i \\ 1 & x = i \end{cases}$$

זה בעצם 0 בכל מקום חוץ מהמקום ה- $i$ .  
**מטריצת הסיבוב:**

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

אם מכפילים וקטור במטריצת הסיבוב, זה מסובב את הוקטור  $\theta$  מעלות.

## 4.2 פעולות בסיסיות

חיבור וקטורים:

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 + \beta_0 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

### 4.2.1 כפל מטריצה בוקטור

כמו להציב את הוקטור בעמודות המטריצה.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 a_{1,1} + \dots + \beta_n a_{1,n} \\ \vdots \\ \beta_1 a_{m,1} + \dots + \beta_n a_{m,n} \end{pmatrix}$$

בנוסף, הפתרונות של  $\bar{x} \in \text{Sols}(A | b)$  שקולים ל- $\bar{b} = A\bar{x}$ . את פתרונות המטריצה נסמן ב- $\text{Sols}$ . מטריצות נקראות שקולות אם הפתרונות שלהן זהים. משפטים לגבי כפל מטריצה בוקטור:

$$A(\bar{x} + \bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y} \bullet$$

$$A(\alpha \cdot \bar{x}) = \alpha \cdot (A \cdot \bar{x}) \bullet$$

$$\bullet \text{ עבור } I_n \text{ מרטיצת היחידה, } I_n \cdot \bar{b} = \bar{b}, \text{ עבור } 0 \text{ מרטיצת ה-} 0, 0 \cdot b = 0.$$

### 4.2.2 כפל מטריצה במטריצה

**הגדרה 1.4** יהא  $R$  חוג ויהיו  $A \in M_{n \times m}(R), B \in M_{m \times p}(R)$  מטריצות. נגדיר כפל מטריצות  $(A \cdot B) \in M_{p \times n}(R)$  בצורה הבאה:

$$(A \cdot B)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A \cdot C_1(B) & \dots & A \cdot C_n(B) \end{pmatrix} \quad \text{משפט 2.4}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} - & R_1(A) \cdot B & - \\ & \vdots & \\ - & R_n(A) \cdot B & - \end{pmatrix} \quad \text{משפט 3.4}$$

כלומר כפל מטריצות הוא כפל וקטורים של העמודות של  $B$  ב- $A$ , או כפל של השורות של  $A$  ב- $B$ .

### 4.2.3 טענות לגבי כפל מטריצות:

1. **אסוציאטיביות הכפל:**  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$  עבור  $A \in M_{m \times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k \times t}(\mathbb{F}), C \in M_{t \times n}(\mathbb{F})$ .

2. **חוק הפילוג:**

(א)  $A \in M_{m \times k}(\mathbb{F}), B_1, B_2 \in M_{k \times n}(\mathbb{F})$  עבור  $A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2$

(ב)  $A_1, A_2 \in M_{m \times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k \times n}(\mathbb{F})$  עבור  $(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B$

3. הוצאת סקלר:  $A \in M_{m \times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k \times n}(\mathbb{F}), \alpha \in \mathbb{F}$  עבור  $A \cdot (\alpha \cdot B) = \alpha \cdot (A \cdot B)$

4. כפל ב-0 ו-1: לכל מטריצה  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ,  $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$ , נוסף לכך  $A \cdot I_n = A$ ,  $I_m \cdot A = A$

הערה: יש מחלקי אפס, לדוגמה  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

### 4.3 פעולות אלמנטריות על מטריצה

הפעולות האלה הן:

1. להחליף סדר בין משוואות.  $R_i \leftrightarrow R_j$

2. להכפיל משוואה בקבוע.  $R_i \rightarrow \alpha \cdot R_i$

3. לחבר משוואות.  $R_i \rightarrow R_i + R_j$

כולן משמרות את הפתרונות של המטריצה.

מטריצות ששקולות באמצעות סדרת פעולות אלמנטריות נקראות שקולות שורה.

משפט 4.4 יהיו  $A, B$  מטריצות כך ש- $A \cdot B^{-1}$  מוגדר, ותהא  $\varphi$  פעולה אלמנטרית. אזי:

$$\varphi(A \cdot B) = \varphi(A) \cdot B$$

הגדרה 5.4 המטריצה האלמנטרית: לכל פעולה אלמנטרית  $\varphi$  על מטריצות עם  $m$  שורות, נגדיר מטריצה אלמנטרית  $E_\varphi$  על ידי  $E_\varphi := \varphi(I_m)$ .

לכל מטריצה  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ , ופעולה אלמנטרית  $\varphi$ , מתקיים  $\varphi(A) = E_\varphi \cdot A$ . בנוסף מטריצות אלמנטריות הפיכות, והמטריצה של הפעולה ההופכית של  $\varphi$  היא  $(E_\varphi)^{-1}$ .

## 5 דירוג ודירוג קנוני

### 5.1 הגדרות

בצורה מדורגת:

1. משוואות 0 (מהצורה  $0 = b$ ) נמצאות למטה.

2. המשתנה הפותח בכל משוואה נמצא מימין ממש למשתנים הפותחים במשוואות מעליו.

משתנה חופשי הוא משתנה שלא מקדם פותח של אף שורה.  
בנוסף, בצורה מדורגת קנונית:

3. המקדם של כל משתנה פותח הוא 1

4. לכל משתנה פותח של משוואה, המקדם של המשתנה בשאר המשוואות הוא 0.

לכל מטריצה קיימת צורה מדורגת קנונית יחידה ששקולה לה.

## 5.2 מציאת פתרונות

## 5.2.1 מציאת מספר הפתרונות לפי צורה מדורגת (לא בהכרח קנונית)

עבור  $(A | b)$  מטריצה מדורגת:

1. אם  $(A | b)^-$  יש שורת סתירה ( $0 = b$  כאשר  $b \neq 0$ ) - אין פתרון.
2. אחרת, יש  $|\mathbb{F}|^k$  פתרונות כאשר  $k$  מספר המשתנים החופשיים.

## 5.2.2 מציאת הפתרונות עצמם לפי צורה מדורגת קנונית

$(A' | b')$  מטריצה מדורגת קנונית מסדר  $m \times n$  ששקולה ל- $(A | b)$  אז:

1. אם  $(A' | b')^-$  יש שורת סתירה אז  $\text{Sols}((A' | b')) = \emptyset$ .
2. אחרת: נעשה החלפה על המשתנים החופשיים (אלה שאינם מקדם פותח של אף שורה). כל משתנה שאינו חופשי יוגדר לפי משוואה מסוימת. דוגמה:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

המקדמים החופשיים הם 1, 4, 6. הפתרון הוא:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 2 - 4x_4 \\ x_4 \\ 3 - 3x_6 \\ x_6 \end{pmatrix} \mid x_1, x_4, x_6 \in \mathbb{R} \right\}$$

## 6 תת מרחב

טענה (בוחן תת מרחב):  $U \subseteq F^n$  היא תת מרחב אמ"מ:

1.  $U$  סגורה לחיבור.
  2.  $U$  סגורה לכפל בסקלר.
  3.  $\bar{0} \in U$ . ניתן להחליף את התנאי ב- $U \neq \emptyset$ .
- נובע מכאן גם שחיתוך של תתי מרחבים הוא תת מרחב.

## 7 צירופים לינאריים

## 7.1 בת"ל

**הגדרה 1.7** יהיו  $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) \in (\mathbb{F}^n)^k$ , סדרת מקדמים  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^k$  נקראת תלות לינארית של

$(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$  אם  $\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k = 0$ .



נגדיר את מרחב התלויות של  $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$  להיות:

$$LD((\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \mid \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k = 0 \right\}$$

$$LD((\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)) = \text{Sols}((\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \mid 0))$$

**מסקנה 2.7**  $LD((\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)) = \{0\} \iff \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$  בת"ל

**הגדרה 3.7** סדרת  $m$  תלויות  $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) \in (\mathbb{F}^m)^k$  תקרא בלתי תלויה לינארית (בת"ל) אם לכל  $\bar{b} \in \mathbb{F}^m$  יש לכל היותר פתרון אחד למשוואה  $\sum_{i=1}^k x_i \bar{v}_i = \bar{b}$ .

1. תהי  $S \subseteq \mathbb{F}^n$ . אם  $\bar{0} \in S$  אז  $S$  תלויה לינארית.
2. תהי  $S \subseteq \mathbb{F}^n$  כך ש- $S = (x, y)$  אז  $S$  תלויה לינארית  $\iff$  הוקטורים פרופורציונלים.
3. סדרת וקטורים  $(v_1, \dots, v_m) \subseteq \mathbb{F}^n$  בלתי תלויה לינארית  $\iff$  כל איבר אינו צירוף לינארי של קודמיו.

## 7.2 קבוצת הצירופים הלינאריים

**הגדרה 4.7** עבור סדרת  $n$  תלויות,  $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) \in (\mathbb{F}^n)^k$ ,

$$\text{sp}(v_1, \dots, v_k) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{v}_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F} \right\}$$

זה המרחב הנפרש על ידי  $v_1, \dots, v_k$ . ההגדרה לקבוצות  $K \subseteq \mathbb{F}^n$  היא:

$$\text{sp}(K) = \left\{ b \in \mathbb{F}^n \mid \exists k \in \mathbb{N}. \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}. \exists t_1, \dots, t_k \in K. b = \sum_{i=1}^k \alpha_i t_i \right\}$$

קבוצה  $A$  פורשת את  $B$  אם  $\text{span}(A) = B$ .

## 7.3 בסיס

**הגדרה 5.7** יהי  $\mathbb{F}$  שדה,  $B$  תת קבוצה של  $\mathbb{F}^n$ . אז  $B$  נקראת בסיס של  $\mathbb{F}^n$  אם שניים מהתנאים הבאים מתקיימים:

1.  $B$  בת"ל.
2.  $B$  פורשת את  $\mathbb{F}^n$ .
3.  $m = n$ .

כל שניים מוכיחים גם את השלישי.  
התנאים הבאים שקולים לכך ש- $B$  בסיס:

1. בת"ל מקסימלית -  $B$  בת"ל וכל קבוצה המכילה ממש את  $B$  הינה תלויה לינארית.
2. פורשת מינימלית -  $B$  פורשת וכל קבוצה שמוכלת ממש ב- $B$  אינה פורשת.
3. לכל  $v \in \mathbb{F}^n$  יש הצגה יחידה כצירוף של וקטורים מ- $B$ .

## 8 שחלוף והפיכות

### 8.1 שחלוף - Transpose:

**הגדרה 1.8** בהינתן מטריצה  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  נגדיר  $A^T \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$  (לפעמים מסומן גם  $A^t$ ) את השחלוף של  $A$ :

$$(A^T)_{i,j} = (A)_{j,i}.$$

באופן אינטואיטיבי, הפעולה מחליפה בין השורות לעמודות. לדוגמה:  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 16 & 32 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 2 & 8 & 32 \end{pmatrix}$ .

**משפט 2.8** חוקי Transpose:

• **חיבור:**  $(A + B)^T = A^T + B^T$  (אם החיבור מוגדר, כלומר  $A, B$  מאותו הסדר).

• **כפל בסקלר:**  $(\alpha A)^T = \alpha (A^T)$  עבור  $\alpha \in \mathbb{F}$ .

•  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$  עבור  $A \in M_{m \times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k \times n}(\mathbb{F})$ .

•  $(A^T)^T = A$ .

### 8.2 הפיכות מטריצה

**הגדרה 3.8** מטריצה  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  תיקרא:

1. **הפיכה משמאל:** אם קיימת מטריצה  $B \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$  כך ש  $B \cdot A = I_n$ .

2. **הפיכה מימין:** אם קיימת מטריצה  $B \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$  כך ש  $A \cdot B = I_m$ .

3. **הפיכה:** אם קיימת מטריצה  $B \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$  כך ש  $A \cdot B = I_m$  וגם  $B \cdot A = I_n$ .

בפרט המטריצה  $B$  היא יחידה ומסומנת  $A^{-1}$ , ומקיימת  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

**משפט 4.8** תהא  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ .

1.  $A$  הפיכה משמאל  $\iff$  למערכת  $A \cdot \bar{x} = 0$  יש פתרון יחיד (כלומר סדרת העמודות של  $A$  בת"ל, ולכן  $m \geq n$ ).

2.  $A$  הפיכה מימין  $\iff$  למערכת  $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$  יש פתרון לכל  $\bar{b} \in \mathbb{F}^m$  (כלומר סדרת העמודות של  $A$  פורשת, ו- $m \leq n$ ).

3.  $A$  הפיכה  $\iff$  למערכת  $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$  יש פתרון יחיד לכל  $\bar{b} \in \mathbb{F}^m$  (כלומר סדרת העמודות של  $A$  בסיס, ולכן  $m = n$ ).

בפרט מטריצה הפיכה היא ריבועית.

**הערה:** המטריצה 0 אינה הפיכה, מימין או משמאל.

**טענות:**

1. אם במטריצה  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  יש שורת אפסים אז  $A$  לא הפיכה מימין.

2. אם  $A$  הפיכה  $A^T$  הפיכה.

3.  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

4. אם  $A \in M_{m \times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k \times n}(\mathbb{F})$  הפיכות, אז  $A \cdot B$  הפיכה ו- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ .

**משפט 5.8** הבאים שקולים עבור מטריצה  $A \in M_n(\mathbb{F})$  (מטריצה ריבועית):

1.  $A$  הפיכה.
  2.  $A$  שקולת שורות ל- $I_n$ .
  3. לכל  $\bar{b} \in \mathbb{F}^n$  למערכת  $A\bar{x} = \bar{b}$  יש פתרון יחיד.
  4. למערכת  $A\bar{x} = \bar{0}$  יש פתרון יחיד.
  5. קיים  $b \in \mathbb{F}^n$  כך שלמערכת  $A\bar{x} = \bar{b}$  יש פתרון יחיד.
  6.  $A$  הפיכה מימין.
  7.  $A$  הפיכה משמאל.
  8. שורות  $A$  בסיס.
  9. שורות  $A$  בת"ל.
  10. שורות  $A$  פורשות.
  11.  $A^T$  הפיכה.
- ובנוסף  $A, B$  ריבועיות והפיכות  $A \cdot B \iff$  הפיכה.

## 9 פונקציית נפח

### 9.1 הגדרות

פונקציה  $N : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}$  נקראת פונקציית נפח אם:

1. לינאריות לפי שורה: עבור  $A \in M_n(\mathbb{F})$ ,

$$N \left( \begin{pmatrix} -A_1- \\ \vdots \\ -\alpha \cdot B + \beta \cdot C- \\ \vdots \\ -A_n- \end{pmatrix} \right) = \alpha \cdot N \left( \begin{pmatrix} -A_1- \\ \vdots \\ -B- \\ \vdots \\ -A_n- \end{pmatrix} \right) + \beta \cdot N \left( \begin{pmatrix} -A_1- \\ \vdots \\ -C- \\ \vdots \\ -A_n- \end{pmatrix} \right)$$

2. אם יש  $i \neq j$  כך ש- $R_i(A) = R_j(A)$  (יש שתי שורות שוות), אז  $N(A) = 0$ .
3. נרמול:  $N(I) = 1$ .

### 9.2 דטרמיננטה

**הגדרת עזר:** תהא  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  מטריצה. המינור ה- $i, j$  של  $A$  יסומן  $A_{(ij)} = M_{m-1 \times n-1}(\mathbb{F})$  שמתקבלת מ- $A$  על ידי מחיקת השורה ה- $i$  והעמודה ה- $j$ . למשל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

**הגדרה:** פיתוח דטרמיננטה לפי עמודה  $j$ : זו הגדרה רקורסיבית.

$$\det_j^{(n)}(A) = \sum_{k=1}^n (A)_{k,j} \cdot (-1)^{k+j} \cdot \det^{(n-1)}(A_{(kj)})$$

## 9.3 טענות

1. יש רק פונקציית נפח אחת (ששווה ל- $\det$ ). הדטרמיננטה לפי  $j$  היא פונקציית נפח, וזהה לכל  $j$ .
2. אם  $\varphi$  פעולה אלמנטרית אז  $\det(\varphi(A)) = x_\varphi \cdot \det(A)$  כאשר אם  $\varphi$  החלפת שורה  $x_\varphi = -1$ , אם  $\varphi$  כפל בסקלר  $\lambda$  אז  $x_\varphi = \lambda$ , ואם  $\varphi$  הוספת שורה אז 1.
3.  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ .
4. אם  $A$  לא הפיכה אז  $\det(A) = 0$ . ואם  $A$  הפיכה אז  $\det(A) \neq 0$  ו- $\det(A) = x_{\varphi_1} \cdot \dots \cdot x_{\varphi_n}$  כאשר  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  פעולות הדירוג.
5.  $\det(A) = \det(A^T)$ .