סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

1 דברים חשובים מלינארית 1

1.1 מטריצות דומות

יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{F})$, נאמר כי A ו־B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש־$A=P^{-1}\cdot B\cdot P$.

משפט: נתון $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ ריבועיות, הבאים שקולים:

1. A,B דומות.
2. קיימת $T:V\to V$ ובסיסים C,C' של V כך ש־$[T]_C=A,[T]_{C'}=B$.
3. לכל $T:V\to V$, אם קיים בסיס C של V כך ש־$[T]_C=A$, אז קיים בסיס C' של V כך ש־$[T]_{C'}=B$.

ואם A,B דומות אז:

1. $\mathrm{Rank}(A)=\mathrm{Rank}(B),\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}(B)$.
2. $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$ כאשר $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}(A)_{i,i}$.
3. $\det(A)=\det(B)$.

2 לכסון

נגדיר מטריצה אלכסונית להיות מטריצה ריבועית $A\in M_n(\mathbb{F})$ שבה עבור $i\neq j$, $A_{i,j}=0$. נסמן אותן בתור $\mathrm{Diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.

מטריצה לכסינה היא מטריצה שדומה למטריצה אלכסונית, והעתקה לכסינה היא העתקה לינארית כך שקיים בסיס B כך ש־$[T]_B^B$ אלכסונית.

אם T העתקה לכסינה (כלומר מטריצה מייצגת כלשהי לכסינה) אז כל מטריצה מייצגת שלה היא לכסינה.

2.1 וקטורים עצמיים

נגדיר וקטור עצמי של A לערך עצמי λ להיות $\overline{v}$ כך ש־$A\overline{v}=\lambda\overline{v}$. באופן הפוך, ערך עצמי של A הוא λ כך שקיים וקטור עצמי $\overline{v}\neq\overline{0}$ של A לערך עצמי λ.

הערכים העצמיים הם האיברים שנמצאים על האלכסון במטריצה האלכסונית שדומה ל־A, עד כדי סידורם על האלכסון.

המרחב של הוקטורים העצמיים הוא $V_\lambda=\{\overline{v}\in V\mid A\overline{v}=\lambda\overline{v}\}$, שזה שווה בעצם ל־$\mathrm{Sols}(A-\lambda I)$. זה תמ"ו של V.

הסכום של ה־V_λ השונים הוא סכום ישר.

2.2 פולינום אופייני

נסמן ב־$P_A(\lambda)=|\lambda I-A|$ את הפולינום האופייני של A. מתקיים:

- זה פולינום מתוקן, כלומר המקדם המוביל הוא 1.
- λ ערך עצמי של A $\iff$ λ שורש של $P_A(\lambda)$.
- אם A,B דומות אז $P_A=P_B$.

משפט 1.2 המשפט המרכזי: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$.

נגדיר את <u>הריבוי האלגברי של α</u>, ρ_α (רו), להיות כמות הפעמים ש־$(\lambda-\alpha)$ מופיע בפולינום $P_A(\lambda)$. כלומר אם הפולינום הוא $P_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-3)^2$ אז $\rho_1=1, \rho_3=2$.

בנוסף נגדיר את <u>הריבוי הגיאומטרי של α</u>, μ_λ, להיות $\dim(V_\lambda)$.

A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אמ"ם:

1. $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$.
2. לכל ערך עצמי λ של A, $\rho_\lambda=\mu_\lambda$.

משפט 2.2 לכל ערך עצמי λ, $\mu_\lambda \le \rho_\lambda$.

משפט 3.2 עבור $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ הערכים העצמיים, $\rho_{\lambda_1}+\dots+\rho_{\lambda_k} \le n$, ואם $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים אז גם $\rho_{\lambda_1}+\dots+\rho_{\lambda_k}=n$.

משפט 4.2 A לכסינה $\iff$ קיים בסיס $B \subseteq \mathbb{F}^n$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A.

3 אינווריאנטיות

תהא $T:V\to V$ העתקה לינארית, תת מרחב $U \subseteq V$ נקרא <u>T־אינווריאנטי</u> (T־שמור) אם $T[U]\subseteq U$, או באופן שקול אם T מצומצם ל־U ט"ל.

דוגמאות למרחבים T־אינווריאנטים הן $\ker(T), Im(T)$ ו־V_λ לכל λ.

בנוסף נגדיר תת מרחב $U\subseteq V$ <u>אי פריק</u> להיות תת מרחב T־אינווריאנטי כך שלא קיימים $W_1,W_2\neq\{\bar{0}\}$ T־אינווריאנטים שמקיימים $U=W_1\oplus W_2$.

מטריצה מייצגת: אם $U\subseteq V$ T־אינווריאנטי, יהי B בסיס של U. יהי C השלמה לבסיס של V. אז $[T]_{B\frown C}=\left(\begin{array}{c|c} [T\restriction_U]_B & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$. זה כי המקדמים שלמטה לא מופיעים ב־U ולכן גם לא בתמונה של U (כי היא מוכלת ב־U).

ואם $V=U_1\oplus U_2$ כאשר U_1,U_2 T־אינווריאנטיים אז $[T]_{B_1\frown B_2}=\left(\begin{array}{c|c} [T\restriction_U]_{B_1} & 0 \\ \hline 0 & [T\restriction_U]_{B_2} \end{array}\right)$.

אזי <u>הפולינום $P_{T\restriction_U}$ מחלק את P_T</u>, ואם $V=U_1\oplus U_2$ עבור U_1,U_2 T־אינווריאנטיים אז $P_T=P_{T\restriction_{U_1}}\cdot P_{T\restriction_{U_2}}$.

בנוסף באופן מוכלל אם $V=\bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ כאשר כל V_i הוא T־אינווריאנטי אז יהי הבסיס $B=\bigvee_{i=1}^{n} B_i$, מתקיים $[T]_B=\mathrm{Diag}\left([T\restriction_{V_1}]_{B_1},\dots,[T\restriction_{V_n}]_{B_n}\right)$, ו־$P_T=\prod_{i=1}^n P_{T\restriction_{U_i}}$.

4 מרחב מנה

נגדיר את יחס השקילות הבא: $v\sim u \iff v-u\in W$ עבור $u,v\in V$ ו־W כלשהו.

את קבוצת המנה, V/W, שהיא הקבוצה של $[v]=\{u\in V \mid u\sim v\}$ לכל v, ניתן בעצם להגדיר לפי פעולת חיבור $[v]+[u]=[v+u]$ וכפל בסקלר $\lambda\cdot[v]=[\lambda\cdot v]$.

זה יוצא מרחב וקטורי, שמקיים גם $\dim(V/W)=\dim(V)-\dim(W)$.

5 חוגים

5.1 הגדרות מלינארית 1

5.1.1 חבורה

$\langle G, *\rangle$ נקראת חבורה אם:

1. G סגורה לפעולה $*$.
2. $*$ פעולה אסוצייטיבית.
3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר $\exists e\in G.\forall g\in G.e*g=g*e=g$. האיבר הזה יחיד ומסומן e_G.
4. קיים איבר הופכי, כלומר $\forall g\in G.\exists h\in G.g*h=h*g=e$ כאשר e איבר יחידה. האיבר ההופכי של g מסומן g^{-1}.

5.1.2 חוג

$\langle R, *, +\rangle$ נקראת חוג אם:

1. $\langle R, +\rangle$ חבורה חילופית.
2. $*$ פעולה אסוצייטיבית על R.
3. מתקיים חוג הפילוג:

$$\forall a,b,c\in R.a*(b+c)=a*b+a*c$$
$$(b+c)*a=b*a+c*a$$

בנוסף יש <u>חוג חילופי</u>, (הכפל חילופי), <u>חוג עם יחידה</u> (קיים איבר ניטרלי לכפל), <u>ותחום שלמות</u> הוא חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0.

5.1.3 שדה

חוג חילופי עם יחידה כך ש־$\langle R\setminus\{0\}, *\rangle$ חבורה חילופית. <u>שדה הוא תחום שלמות</u>, ותחום שלמות <u>סופי</u> הוא שדה.

5.2 הגדרות חדשות מלינארית 2

5.2.1 חוגי הפולינומים והמטריצות

נגדיר את <u>חוג הפולינומים מעל חוג R</u> להיות $R[x]\subseteq\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. נגדיר בנוסף $\deg(0)=\infty, \deg(p)=\max\{n\in\mathbb{N}\mid p(n)\neq 0\}$.

- מתקיימת נוסחת המעלות: $\deg(p+q)\leq\max(\deg(p),\deg(q)), \deg(p\cdot q)\leq\deg(p)+\deg(q)$
- אם R תחום שלמות אז $R[x]$ תחום שלמות.

נגדיר את <u>חוג המטריצות הריבועיות</u> להיות $M_n(R)$ כאשר R חוג, לפי פעולות כפל וחיבור של מטריצות. זה חוג לא חילופי.

5.2.2 הומומורפיזמים

הומומורפיזם של חוגים זו פונקציה $\varphi : R_1 \to R_2$ כך ש־$\varphi(1_{R_1}) = 1_{R_2}$, ו־$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ ו־ $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ (ולכן גם $\varphi(0_{R_1}) = 0_{R_2}$).

יש למשל הומומורפיזם בין $M_n(R)[x]$ לבין $M_n(R[x])$.

5.2.3 חילוק בחוגים

יהי R חוג. יהיו $a, b \in R$, נאמר כי $a \mid b$ אם $\exists c \in R. b = a \cdot c$.

בנוסף נקרא ל־$a \in R$ הפיך ב־R אם קיים $b \in R$ כך ש־$a \cdot b = 1 = b \cdot a$. בנוסף ההופכי יסומן $b = a^{-1}$ והוא יחיד.

ונסמן את קבוצת האיברים ההפיכים ב־R בסימון R^x.

5.2.4 חברים

נאמר ש־a, b חברים אם קיים $u \in R^x$ כך ש־$a = ub$. זה יחס שקילות.

5.3 אידאלים

יהי R חוג חילופי עם יחידה, $I \subseteq R$ נקרא אידאל אם:

1. $I \neq \emptyset$.
2. I סגור לחיבור.
3. I סגור לכפל באיבר מ־R.

או באופן שקול I תת מרחב וקטורי של מרחב ה־nיות R^1. דוגמה לאידאל היא $\mathbb{Z}_{even}$.

בנוסף, $I \subseteq R$ הוא אידאל $\iff$ קיים הומומורפיזם $\varphi : R \to S$ (S חוג) כך ש־$\ker \varphi = I$.

האידאל שנוצר ע"י $X \subseteq R$ הוא $\mathrm{sp}(X)$ ־ והוא תמיד אידאל כי זה מרחב וקטורי ב־R^1.

מתקיים:

- $a \mid b \iff \mathrm{sp}(b) \subseteq \mathrm{sp}(a)$
- a, b חברים $\iff \mathrm{sp}(a) = \mathrm{sp}(b)$
- a הפיך $\iff \mathrm{sp}(a) = R$.