סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

1 דברים חשובים מלינארית 1

1.1 מטריצות דומות

יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, נאמר כי A ו־B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש־$A = P^{-1} \cdot B \cdot P$.

משפט: נתון $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ריבועיות, הבאים שקולים:

1. A, B דומות.
2. קיימת $T : V \to V$ ובסיסים C, C' של V כך ש־$[T]_C = A, [T]_{C'} = B$.
3. לכל $T : V \to V$, אם קיים בסיס C של V כך ש־$[T]_C = A$, אז קיים בסיס C' של V כך ש־$[T]_{C'} = B$.

ואם A, B דומות אז:

1. $\mathrm{Rank}(A) = \mathrm{Rank}(B), \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$.
2. $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ כאשר $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} (A)_{i,i}$.
3. $\det(A) = \det(B)$.

2 לכסון

נגדיר <u>מטריצה אלכסונית</u> להיות מטריצה ריבועית $A \in M_n(\mathbb{F})$ שבה עבור $i \neq j$, $A_{i,j} = 0$. נסמן אותן בתור $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

<u>מטריצה לכסינה</u> היא מטריצה שדומה למטריצה אלכסונית, ו<u>העתקה לכסינה</u> היא העתקה לינארית כך שקיים בסיס B כך ש־$[T]_B^B$ אלכסונית.

אם T העתקה לכסינה (כלומר מטריצה מייצגת כלשהי לכסינה) אז כל מטריצה מייצגת שלה היא לכסינה.

2.1 וקטורים עצמיים

נגדיר <u>וקטור עצמי של A לערך עצמי λ</u> להיות $\overline{v}$ כך ש־$A\overline{v} = \lambda\overline{v}$. באופן הפוך, <u>ערך עצמי של A</u> הוא λ כך שקיים וקטור עצמי <u>$\overline{v} \neq \overline{0}$</u> של A לערך עצמי λ.

הערכים העצמיים הם האיברים שנמצאים על האלכסון במטריצה האלכסונית שדומה ל־A, עד כדי סידורם על האלכסון.

המרחב של הוקטורים העצמיים הוא $V_\lambda = \{\overline{v} \in V \mid A\overline{v} = \lambda\overline{v}\}$, שזה שווה בעצם ל־$\mathrm{Sols}(A - \lambda I)$. זה תמ"ו של V.

הסכום של ה־V_λ השונים הוא סכום ישר.

2.2 פולינום אופייני

נסמן ב־$P_A(\lambda) = |\lambda I - A|$ את <u>הפולינום האופייני של A</u>. מתקיים:

- זה פולינום מתוקן, כלומר המקדם המוביל הוא 1.
- λ ערך עצמי של A $\iff$ λ שורש של $P_A(\lambda)$.
- אם A, B דומות אז $P_A = P_B$.

משפט 1.2 המשפט המרכזי: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$.

נגדיר את <u>הריבוי האלגברי של α</u>, ρ_α (רו), להיות כמות הפעמים ש־$(\lambda - \alpha)$ מופיע בפולינום $P_A(\lambda)$. כלומר אם הפולינום הוא $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$ אז $\rho_1 = 1, \rho_3 = 2$.

בנוסף נגדיר את <u>הריבוי הגיאומטרי של α</u>, μ_λ, להיות $\dim(V_\lambda)$.

A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אמ"ם:

1. $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$.
2. לכל ערך עצמי λ של A, $\rho_\lambda = \mu_\lambda$.

משפט 2.2 לכל ערך עצמי λ, $\mu_\lambda \leq \rho_\lambda$.

משפט 3.2 עבור $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ הערכים העצמיים, $\rho_{\lambda_1} + \ldots + \rho_{\lambda_k} \leq n$, ואם $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים אז גם $\rho_{\lambda_1} + \ldots + \rho_{\lambda_k} = n$.

משפט 4.2 A לכסינה $\iff$ קיים בסיס $B \subseteq \mathbb{F}^n$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A.

3 אינווריאנטיות

תהא $T : V \to V$ העתקה לינארית, תת מרחב $U \subseteq V$ נקרא <u>T־אינווריאנטי</u> (T־שמור) אם $T[U] \subseteq U$, או באופן שקול אם T מצומצם ל־U ט"ל.

דוגמאות למרחבים T־אינווריאנטים הן $\ker(T), Im(T)$ ו־V_λ לכל λ.

בנוסף נגדיר תת מרחב $U \subseteq V$ <u>אי פריק</u> להיות תת מרחב T־אינווריאנטי כך שלא קיימים $W_1, W_2 \neq \{\bar{0}\}$ T־אינווריאנטים שמקיימים $U = W_1 \oplus W_2$.

מטריצה מייצגת: אם $U \subseteq V$ T־אינווריאנטי, יהי B בסיס של U. יהי C השלמה לבסיס של V. אז $[T]_{B \frown C} = \left(\begin{array}{c|c} [T\lceil_U]_B & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$. זה כי המקדמים שלמטה לא מופיעים ב־U ולכן גם לא בתמונה של U (כי היא מוכלת ב־U).