סיכומי הרצאות ־ אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

חלק I
אלגוריתמים

1 לכסון

העתקה לכסינה היא העתקה לינארית כך שקיים בסיס B כך ש-$[T]_B^B$ אלכסונית. אם T העתקה לכסינה, אז כל מטריצה מייצגת שלה גם לכסינה.

1.1 וקטורים עצמיים וערכים עצמיים

נגיד וקטור עצמי של A לערך עצמי λ להיות $\underline{v}$ כך ש-$A\underline{v}=\lambda\underline{v}$. באופן הפוך ערך עצמי של A הוא λ כך שקיים וקטור עצמי $\underline{v}\neq\underline{0}$ לערך עצמי λ.

מרחב הוקטורים העצמיים לכל λ הוא $V_\lambda=\{\underline{v}\in V\mid A\underline{v}=\lambda\underline{v}\}=\mathrm{Sols}\left(A-\lambda I\right)$. הסכום של V_λ שונים הוא סכום ישר.

משפט: A לכסינה $\iff$ קיים בסיס $B\subseteq\mathbb{F}^n$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A.

משפט: במטריצה המלוכסנת, **הערכים העצמיים הם האיברים שנמצאים על האלכסון** עד כדי הסדר שלהם.

1.2 פולינום אופייני ומינימלי

נגדיר את $p_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)$ להיות הפולינום האופייני של A. מתקיים:

- זה פולינום מתוקן, כלומר המקדם המוביל הוא 1.
- λ ערך עצמי של A $\iff$ λ שורש של $p_A(\lambda)$ (כי זה אומר שהמטריצה אינה הפיכה עבור ה-λ הזה כלומר יש פתרונות).
- אם A,B דומות אז $p_A=p_B$.

נגדיר את הריבוי האלגברי של α, ρ_α (רו), להיות כמות הפעמים ש-$(\lambda-\alpha)$ מופיע בפולינום $P_A(\lambda)$. כלומר אם הפולינום הוא $P_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-3)^2$ אז $\rho_1=1,\rho_3=2$.

בנוסף נגדיר את הריבוי הגיאומטרי של α, μ_λ, להיות $\dim(V_\lambda)$.

משפט: לכל ערך עצמי λ, $\mu_\lambda\leq\rho_\lambda$.

משפט: עבור $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ הערכים העצמיים, $\rho_{\lambda_1}+\dots+\rho_{\lambda_k}\leq n$, ואם $p_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים אז גם $\rho_{\lambda_1}+\dots+\rho_{\lambda_k}=n$.

המשפט המרכזי (תנאי ללכסינות): תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$. A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אמ"ם:

1. $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$.
2. לכל ערך עצמי λ של A, $\rho_\lambda=\mu_\lambda$.

נגדיר את הפולינום המינימלי של A, m_A, להיות הפולינום המתוקן היחידי כך ש-$\mathrm{sp}(m_A)$ האידאל המאפס של A. מתקיים:

- m_A מחלק את p_A.
- לכל $q\in\mathbb{F}[x]$ פולינום אי פריק, $q\mid m_A\iff q\mid p_A$.

לכן אם $p_A=\prod_{i\in I}q_i^{m_i}$ (q_i אי פריקים) אז $m_A=\prod_{i\in I}q_i^{r_i}$ כאשר $1\leq r_i\leq m_i$.

משפט: במטריצת בלוקים אלכסונית $A=\mathrm{Diag}(A_1,\dots,A_n)$ מתקיים:

- $p_A=p_{A_1}\cdot\dots\cdot p_{A_n}$.
- $m_A=\mathrm{lcm}(m_{A_1},\dots,m_{A_n})$.

2 ז'ירדון

נגדיר **בלוק ז'ורדן** להיות מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ ואפילו $\begin{pmatrix}\lambda\end{pmatrix}$, כלומר יש אלכסון של λ ומעליו אלכסון של 1ים.

צורת ז'ורדן היא מטריצת בלוקים אלכסונית כך שכל הבלוקים הם בלוקי ז'ורדן.

באופן פרקטי וחישובי:

1. חישוב הפולינום האופייני. נסמן את הערכים העצמיים ב־$\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ ואת הריבויים האלגבריים שלהם ב־$\rho_{\lambda_1},\ldots,\rho_{\lambda_k}$.
2. לכל λ_i:
   (א) נחשב את $\ker\left(A-\lambda_i I\right),\ldots,\ker\left(A-\lambda_i I\right)^{\rho_{\lambda_i}}$ עד שהמימד של זה מפסיק להשתנות (לא כולל). נסמן את המקום שבו המימד מפסיק להשתנות ב־j. זה גם הריבוי בפולינום המינימלי.
   (ב) מ־j עד ל־1:
      i. נשלים את $\ker\left(A-\lambda_i I\right)^{j-1}$ **לבסיס של** $\ker\left(A-\lambda_i I\right)^{j}$.
      ii. יהי v שהוסף בהשלמה. נוסיף לבסיס את $v,v\left(A-\lambda_i I\right)^{1},\ldots,v\left(A-\lambda_i I\right)^{j}$. נספור שצריך איבר אחד פחות מאלה (כלומר ניקח איבר אחד פחות מההשלמות של החזקות הקודמות).
3. אפשר להשתמש בבסיס שקיבלנו ישירות או לשים $P=\begin{pmatrix}B_1 & \ldots & B_n\end{pmatrix}$, ואז $J=P^{-1}AP$ (כי $P=[Id]_E^B$ ואכן $[A]_B^B=[Id]_B^E\cdot[A]_E^E\cdot[Id]_E^B$).

משפט:

- צורת זורדן יחידה עד כדי הסידור של בלוקי הז'ורדן.
- μ_λ הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי כלשהו הוא מספר הבלוקים שלו.
- ρ_λ הריבוי האלגברי באופייני הוא סכום הגדלים של הבלוקים.
- הריבוי האלגברי במינימלי הוא המקסימום של הגדלים של הבלוקים.

3 גראם־שמידט

3.1 הטלה

נגדיר את <u>ההטלה של וקטור v על U</u> להיות:

$$P_U\left(v\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle v,b_i\rangle}{\langle b_i,b_i\rangle}\cdot b_i$$

כאשר $b_1,\ldots,b_n$ בסיס אורתוגונלי, בהמשך נראה שקיים כזה לכל מרחב נוצר סופית.

תכונות:

- $\forall u\in U P_U\left(u\right)=u$, ולכן $P_U^2=P_U$
- P_U העתקה לינארית, כך ש־$\ker\left(P_U\right)=\{v\in V\mid v\perp U\}$. נסמן גם ב־$U^\perp$.
- $\left(v-P_U\left(v\right)\right)\perp U$ לכל v.

משפט הקירוב הטוב ביותר: נגדיר $\mathrm{dist}\left(v,U\right)=\mathrm{dist}\left(v,P_U\left(v\right)\right)$. אז מתקיים ש־$\mathrm{dist}\left(v,U\right)=\inf_{u\in U}\mathrm{dist}\left(v,u\right)=\min_{u\in U}\mathrm{dist}\left(v,u\right)$, כלומר שהמרחק הזה הוא המרחק הכי קצר מ־v ל־U.

3.2 האלגוריתם עצמו

אלגוריתם גראם־שמידט הוא האלגוריתם למציאת סדרה אורתונורמלית $w_1,\dots,w_x$ ל־$\mathrm{sp}\left(b_1,\dots,b_n\right)$ כך ש־$\mathrm{sp}\left(b_1,\dots,b_n\right)=\mathrm{sp}\left(w_1,\dots,w_x\right)$.

נוריד מ־$b_1,\dots,b_n$ את האפסים. נגדיר את $w_1=\frac{1}{||b_1||}b_1$ להיות המנורמל. לכל $i\in 2,\dots,n$, נגדיר $U=\mathrm{sp}\left(b_1,\dots,b_{i-1}\right)$, ואז נחשב $w_i'=b_i-P_U\left(b_i\right)$. אם $w_i'=0$, נתעלם ממנו, אחרת נוסיף לסדרה w את $\frac{1}{||w_i'||}w_i'$ המנורמל.

חלק II

מכפלות פנימיות ותבניות בילינאריות

4 מכפלה פנימית

4.1 הגדרות בסיסיות

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$. מכפלה אוניטרית (נקרא "מכפלה פנימית" מעל $\mathbb{R}$) מעל V היא פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle:V\times V\to\mathbb{C}\left(\mathbb{R}\right)$ כך ש־:

1. לינאריות לפי הרכיב השמאלי: $\left\langle \alpha\underline{v_1}+\beta\underline{v_2},u\right\rangle=\alpha\cdot\left\langle\underline{v_1},\underline{u}\right\rangle+\beta\cdot\left\langle\underline{v_2},\underline{u}\right\rangle$
2. הרמיטיות: $\langle\underline{v},\underline{u}\rangle=\overline{\langle\underline{u},\underline{v}\rangle}$
3. חיוביות: $\langle\underline{v},\underline{v}\rangle\in\mathbb{R}\wedge\langle\underline{v},\underline{v}\rangle\geq0$
4. אפיון 0: $\langle\underline{v},\underline{v}\rangle=0\iff\underline{v}=\underline{0}$

4.2 תכונות

משפט לגבי הרכיב הימני:

- $\langle\underline{u},v_1+v_2\rangle=\langle u,v_1\rangle+\langle u,v_2\rangle$ חיבוריות לפי הימני.
- $\langle v,\alpha u\rangle=\overline{\alpha}\langle v,u\rangle$ כמו הומוגניות ברכיב הימני, אבל עם הצמוד.
- $\langle\underline{v},\underline{0}\rangle=0$ מתאפס גם לפי הרכיב הימני.
- לכן יש לנו כמעט לינאריות לפי הרכיב הימני, אבל עם הסקלר הצמוד.
- ומכאן נובע: $\left\langle\sum_{i=1}^{n}a_i\underline{v_i},\sum_{j=1}^{m}b_j\underline{u_j}\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_i\overline{b_j}\left\langle\underline{v_i},\underline{u_j}\right\rangle$

4.3 אורתוגונליות

4.3.1 הגדרות בסיסיות

$\left(v_1,\dots,v_n\right)$ נקראת <u>אורתוגונלית</u> אמ"ם $\forall i\neq j.v_i\perp v_j$ כלומר $\langle v_i,v_j\rangle=0$.

לדוגמה $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ סדרה אורתוגונלית עם המכפלה האוניטרית הסטנדרטית.

נגדיר וקטור יחידה להיות v כך ש־$||\underline{v}||=1$. אם $\underline{v}\neq0$ אז $\frac{1}{||\underline{v}||}\cdot\underline{v}$ וקטור יחידה, שנקרא גם הוקטור <u>המנורמל</u>.
אז סדרה <u>אורתונורמלית</u> היא סדרה אורתוגונלית של וקטורי יחידה.

5 סוגים של העתקות לינאריות

5.1 העתקות אוניטריות

העתקה מעל $\mathbb{C}$ המקיימת $(Tu,Tv)=(u,v)$ נקראת העתקה אוניטרית. היא משמרת אורכים וזוויות, כלומר $||Tv||=||v||$.

משפט: כל דבר פה שקול לכך ש־T אוניטרית.

1. T מעתיקה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי.
2. $T^*T=I$. לכן אם T אוניטרית אז היא הפיכה כך ש־$T^*=T^{-1}$.
3. T נורמלית וכל הערכים העצמיים על מעגל היחידה.

5.2 העתקות אורתוגונליות

דומה אבל מעל $\mathbb{R}$.

משפט: T אורתוגונלית $\iff$ T מעתיקה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי. בפרט אם T אוניטרית היא הפיכה.

משפט: יהי V מרחב וקטורי, מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, עם מכפלה פנימית. התנאים הבאים שקולים:

1. $T^*=T^{-1}$, כלומר $TT^*=T^*T=I$.
2. לכל u,v, $(Tu,Tv)=(u,v)$, כלומר אוניטרית/אורתוגונלית לפי השדה.
3. לכל v, $||Tv||=||v||$, כלומר T שומרת על אורכים.

5.3 העתקות נורמליות

העתקה נקראת נורמלית אם $TT^*=T^*T$.

משפט: מטריצה נורמלית ניתנת ללכסון אוניטרי, כלומר קיים בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של T ו־$T=P^*DP$ כאשר D אלכסונית.

משפט: המרחבים העצמיים ניצבים זה לזה.

טענה: $|T(v)|=|T^*(v)|$.

6 תבניות בילינאריות

הגדרה: תבנית בילינארית היא $f:(V\times W)\to\mathbb{F}$ שלינארית על פי הרכיב השמאלי ועל פי הרכיב הימני.

נסמן את קבוצת התבניות הבילינאריות ב־$\text{Bil}(V,W)$, או $\text{Bil}(V):=\text{Bil}(V,V)$.

מטריצה מייצגת: נגדיר $\left([f]_{B,C}\right)_{i,j}=f(b_i,c_j)$. מתקיים $f(v,w)=[v]_B^t\cdot[f]_{B,C}\cdot[w]_C$ לכל v,w.

מעבר בסיסים: $[f]_{B',C'}=\left([Id]_B^{B'}\right)^t\cdot[f]_{B,C}\cdot[Id]_C^{C'}$

הגדרה: נגדיר את הדרגה $\text{rk}(f)$ להיות $\text{rk}\left([f]_{B,C}\right)$ עבור B,C בסיסים כלשהם.

הגדרה: f נקראת אי מנוונת אם $\text{rk}f=\dim V=\dim W$. לכן גם $[f]_{B,C}$ הפיכה.

6.1 תבניות בילינאריות סימטריות

תבנית בילינארית תקרא סימטרית אם לכל v,w, $f(v,w)=f(w,v)$. המטריצה המייצגת היא אלכסונית.

משפט ההתמדה של סילבסטר: מעל $\mathbb{R}$. תהי f תבנית בילינארית סימטרית כך ש־$\text{rk}f=r\le n=\dim V$. אז קיים בסיס $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ כך ש־$[f]_{B,B}$ אלכסונית, ועל האלכסון יש רק $0,-1,1$. הכמויות שלהם אינן תלויות בבחירת הבסיס.

6.2 תבניות בילינאריות אנטי־סימטריות

תבנית בילינארית תקרא סימטרית אם לכל v,w, $f\left(v,w\right)=-f\left(w,v\right)$. המטריצה המייצגת היא:

$$\text{Diag}\left(\overbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}^{\frac{1}{2}\text{rk}(f)\text{ times}},0,\ldots,0\right)$$

בפרט $\text{rk}f$ זוגי, ומספר האפסים הוא $n-\text{rk}f$.