סיכום מינימלי למבחן - אלגברה לינארית 1

מיכאל פרבר ברודסקי

1 מטריצות בסיסיות

1.1 כפל מטריצה במטריצה

הגדרה 1.1 יהא R חוג ויהיו $A \in M_{n\times m}(R), B \in M_{m\times p}(R)$ מטריצות. נגדיר כפל מטריצות $(A\cdot B) \in M_{p\times n}(R)$ בצורה הבאה:

$$(A\cdot B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\cdot b_{k,j}$$

1.1.1 טענות לגבי כפל מטריצות:

משפט 2.1 $A\cdot B = \begin{pmatrix} | & & | \\ A\cdot C_1(B) & \cdots & A\cdot C_n(B) \\ | & & | \end{pmatrix}$.

משפט 3.1 $A\cdot B = \begin{pmatrix} - & R_1(A)\cdot B & - \\ & \vdots & \\ - & R_n(A)\cdot B & - \end{pmatrix}$.

1. **אסוציאטיביות הכפל:** $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$.
2. **חוק הפילוג.**
3. **הוצאת סקלר:** $A\cdot(\alpha\cdot B) = \alpha\cdot(A\cdot B)$.
4. **כפל ב־0 וב־1:** $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $A\cdot 0 = 0\cdot A = 0$ ו־ $A\cdot I_n = A$, $I_m\cdot A = A$.

1.2 פעולות אלמנטריות

1. להחליף סדר בין משוואות. $R_i \leftrightarrow R_j$.
2. להכפיל משוואה בקבוע. $R_i \to \alpha\cdot R_i$.
3. לחבר משוואות. $R_i \to R_i + R_j$.

כולן משמרות את הפתרונות של המטריצה, ואת המרחב $R(A)$ ואת $\operatorname{rank}(A)$.

משפט 4.1 יהיו A, B מטריצות כך ש־$A\cdot B$ מוגדר, ותהא φ פעולה אלמנטרית. אזי:

$$\varphi(A\cdot B) = \varphi(A)\cdot B$$

הגדרה 5.1 המטריצה האלמנטרית: לכל פעולה אלמנטרית φ על מטריצות עם m שורות, נגדיר מטריצה אלמנטרית E_φ על ידי $E_\varphi := \varphi(I_m)$.

לכל מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, ופעולה אלמנטרית φ, מתקיים ש־$\varphi(A) = E_\varphi\cdot A$.

בנוסף מטריצות אלמנטריות הפיכות, והמטריצה של הפעולה ההופכית של φ היא $(E_\varphi)^{-1}$.

2 דירוג ודירוג קנוני

2.1 הגדרות

בצורה מדורגת:

1. משוואות 0 (מהצורה $b = 0$) נמצאות למטה.
2. המשתנה הפותח בכל משוואה נמצא מימין ממש למשתנים הפותחים במשוואות מעליו.

משתנה חופשי הוא משתנה שלא מקדם פותח של אף שורה.

בנוסף, בצורה מדורגת קנונית:

3. המקדם של כל משתנה פותח הוא 1
4. לכל משתנה פותח של משוואה, המקדם של המשתנה בשאר המשוואות הוא 0.

לכל מטריצה קיימת צורה מדורגת קנונית **יחידה** ששקולה לה.

3 בוחן תת מרחב

$U \subseteq F^n$ היא תת מרחב אמ"מ:

1. U סגורה לחיבור.
2. U סגורה לכפל בסקלר.
3. $\bar{0} \in U$. ניתן להחליף את התנאי ב־$U \neq \emptyset$.

נובע מכאן גם שחיתוך של תתי מרחבים הוא תת מרחב.

4 צירופים לינאריים

הגדרה 1.4 סדרת mיות $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k}) \in (\mathbb{F}^m)^k$ תקרא בלתי תלויה לינארית (בת"ל) אם לכל $\bar{b} \in \mathbb{F}^m$ יש לכל היותר פתרון אחד למשוואה $\sum_{i=1}^{k} x_i\overline{v_i} = \bar{b}$.

משפט 2.4 סדרת וקטורים $(v_1,\dots,v_m)\subseteq \mathbb{F}^n$ בלתי תלויה לינארית $\iff$ כל איבר אינו צירוף לינארי של קודמיו.

הגדרה 3.4 נגדיר את מרחב התלויות של $(\overline{v_1},\dots,\overline{v_k})$ להיות:

$$LD\left((\overline{v_1},\dots,\overline{v_k})\right) = \left\{ \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n \mid \alpha_1\overline{v_1}+\dots+\alpha_k\overline{v_k}=0\right\}$$

בנוסף $\overline{v_1},\dots,\overline{v_k}$ בת"ל $\iff$ $LD\left(\overline{v_1},\dots,\overline{v_k}\right)=\{0\}$.

4.1 בסיס

הגדרה 4.4 (משפט 2 מתוך 3) יהי $\mathbb{F}$ שדה, B תת קבוצה של $\mathbb{F}^n$. אז B נקראת <u>בסיס</u> של $\mathbb{F}^n$ אם שניים מהתנאים הבאים מתקיימים:

1. B בת"ל.
2. B פורשת את $\mathbb{F}^n$.
3. $m=n$.

כל שניים מוכיחים גם את השלישי.

התנאים הבאים שקולים לכך ש־B בסיס:

1. בת"ל מקסימלית - B בת"ל וכל קבוצה המכילה ממש את B הינה תלויה לינארית.
2. פורשת מינימלית - B פורשת וכל קבוצה שמוכלת ממש ב־B אינה פורשת.
3. לכל $v\in\mathbb{F}^n$ יש הצגה יחידה כצירוף של וקטורים מ־B.

4.1.1 למת ההחלפה של ריס

יהי V מ"ו, ותהא $(v_1,\dots,v_n)$ סדרה פורשת ב־V, ו־$(u_1,\dots,u_m)$ סדרה בת"ל. אזי:

1. קיימים $1\le i_1<i_2<\dots<i_m\le n$ כך ש־$(u_1,\dots,u_m)\frown(v_j\mid j\notin\{i_1,\dots,i_m\})$ פורשת.
2. $m\le n$.

כלומר אפשר להחליף איברים כלשהם של סדרה פורשת באיבריה של כל סדרה בת"ל.

5 שחלוף והפיכות

משפט 1.5 חוקי Transpose:

- **חיבור:** $(A+B)^T=A^T+B^T$ (אם החיבור מוגדר).
- **כפל בסקלר:** $(\alpha A)^T=\alpha\left(A^T\right)$.
- $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$.

הגדרה 2.5 מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ תיקרא:

1. **הפיכה משמאל:** אם קיימת מטריצה $B\in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ כך ש$B\cdot A=I_n$.
2. **הפיכה מימין:** אם קיימת מטריצה $B\in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ כך ש$A\cdot B=I_m$.
3. **הפיכה:** אם קיימת מטריצה $B\in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ כך ש$A\cdot B=I_m$ וגם $B\cdot A=I_n$. קיימת הופכית יחידה.

משפט 3.5 תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

1. A הפיכה משמאל $\iff$ למערכת $A\cdot\overline{x}=0$ יש פתרון יחיד (כלומר סדרת העמודות של A בת"ל, ולכן $m\ge n$).
2. A הפיכה מימין $\iff$ למערכת $A\cdot\overline{x}=\overline{b}$ יש פתרון לכל $\overline{b}\in\mathbb{F}^m$ (כלומר סדרת העמודות של A פורשת, ו־$m\le n$).
3. A הפיכה $\iff$ למערכת $A\cdot\overline{x}=\overline{b}$ יש פתרון יחיד לכל $\overline{b}\in\mathbb{F}^m$ (כלומר סדרת העמודות של A בסיס, ולכן $m=n$).

   בפרט מטריצה הפיכה היא ריבועית.

טענות:

1. אם במטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ יש שורת אפסים אז A לא הפיכה מימין.
2. אם A הפיכה A^T הפיכה.
3. $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$.
4. אם $A\in M_{m\times k}(\mathbb{F}),B\in M_{k\times n}(\mathbb{F})$ הפיכות, אז $A\cdot B$ הפיכה ו־$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

5.1 תנאים שקולים להפיכות במטריצה ריבועית

1. A שקולת שורות ל־I_n.
2. קיים $\overline{b}\in\mathbb{F}^n$ כך שלמערכת $A\overline{x}=\overline{b}$ יש פתרון יחיד.
3. לכל $\overline{b}\in\mathbb{F}^n$ למערכת $A\overline{x}=\overline{b}$ יש פתרון יחיד.
4. A הפיכה משמאל - כלומר עמודות A בת"ל. אפשר גם שורות לפי 6.
5. A הפיכה מימין - כלומר עמודות A פורשות. אפשר גם שורות לפי 6.
6. A^T הפיכה.

ובנוסף A,B ריבועיות והפיכות $\iff$ $A\cdot B$ הפיכה.

6 פונקציית נפח

1. לינאריות לפי שורה: עבור $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$,

$$N\left(\begin{pmatrix}-A_1-\\ \vdots\\ -\alpha\cdot B+\beta\cdot C-\\ \vdots\\ -A_n-\end{pmatrix}\right)=\alpha\cdot N\left(\begin{pmatrix}-A_1-\\ \vdots\\ -B-\\ \vdots\\ -A_n-\end{pmatrix}\right)+\beta\cdot N\left(\begin{pmatrix}-A_1-\\ \vdots\\ -C-\\ \vdots\\ -A_n-\end{pmatrix}\right)$$

2. אם יש $i\neq j$ כך ש־$R_i\left(A\right)=R_j\left(A\right)$ (יש שתי שורות שוות), אז $N\left(A\right)=0$.
3. נרמול: $N\left(I\right)=1$.

7 דטרמיננטה

פיתוח דטרמיננטה לפי עמודה j:

$$\det_j^{(n)}(A)=\sum_{k=1}^{n}(A)_{k,j}\cdot(-1)^{k+j}\cdot\det^{(n-1)}\left(A_{(k\,j)}\right)$$

טענות:

1. אם φ פעולה אלמנטרית אז $\det(\varphi(A))=x_{\varphi}\cdot\det(A)$ כאשר אם φ החלפת שורה $x_{\varphi}=-1$, אם φ כפל בסקלר λ אז $x_{\varphi}=\lambda^{-1}$, ואם φ הוספת שורה אז 1.
2. $\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$.
3. אם A לא הפיכה אז $\det(A)=0$. ואם A הפיכה אז $\det(A)\neq 0$ ו־$\det(A)=x_{\varphi_1}\cdot\dots\cdot x_{\varphi_n}$ כאשר $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ פעולות הדירוג.
4. $\det(A)=\det\left(A^T\right)$. לכן אפשר גם להפעיל פעולות עמודה, שהן פעולות שורה על השחלוף.
5. במטריצה משולשית עליונה או תחתונה ($\forall j<i.\,(A)_{i,j}=0$ או $\forall i<j.\,(A)_{i,j}=0$), הדטרמיננטה היא מכפלת האלכסון.

משפט 1.7 (דטרמיננטה לפי תמורות):

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sign}(\sigma)\cdot\prod_{i=1}^{n}(A)_{i,\sigma(i)}$$

כלל קרמר: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה, אז לכל $\bar{b}\in\mathbb{F}^n$ למערכת $A\bar{x}=\bar{b}$ יש פתרון יחיד והפתרון הינו: (שתי דרכים לתאר אותו)

1. $c=A^{-1}\cdot\bar{b}$.
2. $c_j=\frac{|B_j|}{|A|}$ כאשר $B_j\left(C_1(A),\dots,C_{j-1}(A),\bar{b},\dots,C_n(A)\right)$.

7.1 מטריצה מוצמדת

נגדיר: $(\operatorname{adj}(A))_{i,j}=(-1)^{j+i}\cdot\det\left(A_{(j\,i)}\right)$.
מתקיים:

1. $(\operatorname{adj}(A))^T=\operatorname{adj}\left(A^T\right)$.
2. $A\cdot\operatorname{adj}(A)=I\cdot\det(A)$.
3. אם A לא הפיכה אז: $A\cdot\operatorname{adj}(A)=$ מטריצת האפס $=\operatorname{adj}(A)\cdot A$.
4. אם A הפיכה אז $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\operatorname{adj}(A)$.

8 תמורות

8.1 הגדרות

פורמלית, S_n זה קבוצת הפונקציות החח"ע ועל ב־$J_n\to J_n$ כאשר $J_n=\{1,\dots,n\}$.
סימונים לתמורות:

1. $\sigma:J_n\to J_n$ חח"ע ועל.
2. רישום ישיר: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4)\end{pmatrix}$.

הגדרה 1.8 (מטריצה תמורה): מטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$ נקראת מטריצת תמורה אם קיימת תמורה $\sigma\in S_n$ כך ש־$P(\sigma)=A=\begin{pmatrix}| & & |\\ e_{\sigma(1)} & \dots & e_{\sigma(n)}\\ | & & |\end{pmatrix}$.

8.2 sign

הגדרה 2.8 עבור $\sigma\in S_n$, $\operatorname{sign}(\sigma)$ (הסיגנטורה של σ) מוגדרת כ־$\operatorname{sign}(\sigma)=|P(\sigma)|$.

הגדרה שקולה: תהא $\sigma\in S_n$ תמורה. לכל $1\le i\le n$ נגדיר את $z_{\sigma}(i)=|\{(i,j)\mid j>i\wedge\sigma(j)<\sigma(i)\}|$ ו־$N(\sigma)=|\{(i,j)\mid j>i,\sigma(i)<\sigma(j)\}|$ (ו־$N(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}z_{\sigma}(i)$). נגדיר את sign להיות: $\operatorname{sign}(\sigma)=(-1)^{N(\sigma)}$.

משפט 3.8 $\operatorname{sign}(\sigma\tau)=\operatorname{sign}(\sigma)\cdot\operatorname{sign}(\tau)$.

9 מרחב וקטורי

9.1 הגדרות

הגדרה 1.9 (מרחב וקטורי): מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ זו שלשה $(V,+,\cdot)$ כך ש:

1. $\langle V,+\rangle$ חבורה חילופית.
2. $\cdot:\mathbb{F}\times V\to V$ כפל בסקלר, פעולה שמקיימת:
   (א) אסוצייטיביות. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}.\forall\bar{v}\in V.\beta\cdot(\alpha\cdot\bar{v})=(\beta\cdot\alpha)\cdot v$.
   (ב) $\forall\bar{v}\in V.1_{\mathbb{F}}\cdot\bar{v}=\bar{v}$.
3. חוק הפילוג:
   (א) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}.\forall\bar{v}\in V.(\alpha+\beta)\cdot\bar{v}=\alpha\cdot\bar{v}+\beta\cdot\bar{v}$.
   (ב) $\forall a\in\mathbb{F}.\forall\overline{v_1},\overline{v_2}\in V.\alpha\cdot(\overline{v_1}+\overline{v_2})=\alpha\cdot\overline{v_1}+\alpha\cdot\overline{v_2}$.

10 בסיס האמל

- תת קבוצה $X\subseteq V$ נקראת בת"ל אם לכל $v_1,\dots,v_n\in X$, $v_1,\dots,v_n$ בת"ל. כלומר אין צירוף לינארי לא טריויאלי של איברים מ־X שיוצא 0.
- תת קבוצה $X\subseteq V$ נקראת פורשת אם $\operatorname{sp}(X)=V$.
- קבוצה $X\subseteq V$ נקראת בסיס האמל אם היא בת"ל ופורשת.

11 מימד

הגדרה 1.11 (מימד): יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ בעל בסיס, המימד של V הינו עוצמת בסיס כלשהו (והמימד יחיד). מסמנים כ־$\dim_{\mathbb{F}}(V)$.

משפט 2.11 (משפט המימדים הראשון):

$$\dim(U_1+U_2)=\dim(U_1)+\dim(U_2)-\dim(U_1\cap U_2)$$

מסקנה: אם $U\subseteq V$ ו־$\dim U=\dim V$, אז $U=V$.

משפט 3.11 (משפט המימדים השני): עבור $T:V\to U$,

$$\dim(V)=\dim(\ker(T))+\dim(Im(T))$$

12 סכום ישר

הגדרה: נאמר כי $U_1+\cdots+U_n$ הוא סכום ישר $U_1\oplus\cdots\oplus U_n$ אם לכל $\overline{v}\in U_1+\cdots+U_n$ קיימת ויחידה סדרה $\overline{u_1},\ldots,\overline{u_n}\in U_i$ כך ש־$\overline{v}=\sum_{i=1}^{n}\overline{u_i}$. נקרא גם הצגה יחידה.

משפט האיפיון: יהיו $U_1,\ldots,U_n\subseteq U$ תמ"ו, הבאים שקולים:

1. $U_1\oplus\cdots\oplus U_n$.
2. לכל סדרות בת"ל B_i ב־U_i, השרשור $B_1\frown B_2\frown\cdots\frown B_n$ בת"ל.
3. לכל $1\leq i\leq n$, $U_i\cap\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}U_j\right)=\left\{\overline{0}\right\}$.

   בפרט אם $n=2$, $U_1\cap U_2=\left\{\overline{0}\right\}$.

13 מרחב העמודות והשורות

הגדרה: תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, נגדיר:

1. מרחב הפתרונות: $\text{Sols}(A)=\left\{x\in\mathbb{F}^n\mid Ax=\overline{0}\right\}$.
2. מרחב העמודות: $C(A)=\text{sp}(C_1(A),\ldots,C_n(A))$.
3. מרחב השורות: $R(A)=\text{sp}(R_1(A),\ldots,R_m(A))$.

משפט 1.13 $\dim(R(A))=\dim(C(A))$. יסומן גם כ־$\text{Rank}(A)$.

בנוסף נסמן $\mathcal{N}(A)=\dim(\text{Sols}(A))$.

משפט 2.13 (משפט הדרגה): פעולות דירוג משמרות את $R(A)$ (ולכן גם את $\text{Rank}(A)$), אבל לא בהכרח משמרות את $C(A)$.

(משפט הדרגה והאפסות): $\text{Rank}(A)+\mathcal{N}(A)=n$.

מסקנה: A הפיכה $\iff$ $\text{Rank}(A)=n$.

חוקי rank: לכל מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$,

1. $\text{Rank}(A)\leq\min(n,m)$.
2. $\text{Rank}(A\cdot B)\leq\min(\text{Rank}(A),\text{Rank}(B))$.
3. $\text{Rank}(A+B)\leq\text{Rank}(A)+\text{Rank}(B)$.
4. אם A הפיכה אז $\text{Rank}(A\cdot B)=\text{Rank}(B),\text{Rank}(B\cdot A)=\text{Rank}(B)$ (אם מוגדר).

14 העתקות לינאריות

הגדרה: יהיו V,U מ"ו מעל $\mathbb{F}$, נאמר כי $T:V\to U$ העתקה לינארית אם:

1. חיבוריות - $\forall v_1,v_2\in V.T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$.
2. הומוגניות - $\forall\alpha\in\mathbb{F}.\forall v\in V.T(\alpha\cdot v)=\alpha\cdot T(v)$.

הגדרות נוספות:

1. $\ker(T)=T^{-1}[\{0\}]=\{\overline{v}\in V\mid T(\overline{v})=0\}$ הגרעין של T, kernel.
2. $Im(T)=\{T(\overline{v})\mid\overline{v}\in V\}\subseteq U$ התמונה של T.

בנוסף $\ker(T),Im(T)$ תמ"ו של T.

14.1 תכונות בסיסיות

תהא $T:V\to U$ לינארית,

1. $T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iT(v_i)$ - כל צירוף לינארי נשמר.
2. $T(-\overline{v})=-T(\overline{v})$ - מכפליות.
3. $T\left(\overline{0}_V\right)=\overline{0}_U$.
4. T חח"ע $\iff$ $\ker(T)=\left\{\overline{0}\right\}$.
5. T על $\iff$ $\text{Im}(T)=U$ (טריויאלי).
6. אם $(u_1,\ldots,u_n)$ סדרה פורשת של V אז $(T(u_1),\ldots,T(u_k))$ סדרה פורשת של $Im(T)$.
7. עבור $(v_1,\ldots,v_n)$, $LD(v_1,\ldots,v_n)\subseteq LD(T(v_1),\ldots,T(v_n))$. לכן:

   (א) אם $(T(v_1),\ldots,T(v_n))$ בת"ל אז $(v_1,\ldots,v_n)$ בת"ל.

   (ב) אם $v_i\in\text{sp}(v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_n)$ אז גם $T(v_i)\in\text{sp}(T(v_1),\ldots,T(v_{i-1}),T(v_{i+1}),\ldots,T(v_n))$.

   (ג) אם T חח"ע, אז $LD(T(v_1),\ldots,T(v_n))=LD(v_1,\ldots,v_n)$.

   אם T חח"ע, אז T מעבירה סדרה פורשת של V לסדרה פורשת של U.
8. יהיו V,U מ"ו. יהי $B=(b_1,\ldots,b_n)$ בסיס של V. יהיו $u_1,\ldots,u_n\in U$ וקטורים כלשהם. אז קיימת ויחידה העתקה לינארית $T:V\to U$ כך שלכל $1\leq i\leq n$, $T(b_i)=u_i$. כלומר העתקה לינארית נקבעת ביחידות לפי $\dim(V)$ איברים.

משפט המימדים השני: $\dim(V)=\dim(\ker(T))+\dim(Im(T))$.

14.2 הטלה

יהי V מ"ו, ו־$U,W\subseteq V$ תמ"ו כך ש־$V=U\oplus W$. ראינו כי כל וקטור $\overline{v}\in V$ ניתן להציג באופן יחיד:

$$\overline{v}=\overline{u}+\overline{w},\overline{u}\in U,\overline{w}\in W$$

נגדיר את ההטלה של V על U:

$$P_{(U,W)} : V \to U$$
$$P_{(W,U)} : V \to W$$
$$P_{(U,W)}\left(\overline{v}\right) = \iota x \in U. \exists y \in W. \overline{v} = x + y$$

כלומר זה ייצוג לאחד מהאיברים בהצגה היחידה של וקטור.

טענות:

1. הטלה $P_{(U,W)}$ היא העתקה לינארית.
2. $P_{(U,W)} \circ P_{(U,W)} = P$, $P_{(U,W)} + P_{(W,U)} = Id_V$.
3. $\text{Im}\left(P_{(U,W)}\right) = U$, $P^{-1}_{(U,W)}\left[\{0\}\right] = W$.

14.3 איזומורפיזם

14.3.1 הגדרות

הגדרה: יהיו V, U מ"ו מעל $\mathbb{F}$, נאמר כי $f : V \to U$ היא איזומורפיזם של מ"ו אם:

1. f חח"ע ועל.
2. f העתקה לינארית (חיבורית והומוגנית).

איזומורפיזם משמר את הפתרונות של $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{u_i}$ כאשר $v, \overline{u_1}, \ldots, \overline{u_n} \in V$.

שני מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה נקראים <u>איזומורפיים</u> ומסומנים $V \simeq U$ אז קיים איזומורפיזם $T : V \to U$. זה "יחס שקילות".

משפט: יהיו V, U מ"ו נוצרים סופית, אז $V \simeq U \iff \dim(V) = \dim(U)$.

משפט 1.14 (2 מתוך 3 להעתקות לינאריות): כל 2 מתוך 3 הבאים שקולים לכך ש־T איזומורפיזם.

1. $\dim(V) = \dim(U)$.
2. T חח"ע.
3. T על.

14.3.2 קואורדינטות

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, B בסיס של V. נסמן $\dim V = n$, ויהי $B = (b_1, \ldots, b_n)$ בסיס. על פי משפט, לכל $\overline{v} \in V$ קיימים ויחידים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ כך ש־$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$. נגדיר את הקואורדינטות של $\overline{v}$ לפי B להיות:

$$\left[\overline{v}\right]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

זה איזומורפיזם מ־V ל־$\mathbb{F}^n$. העתקת הקואורדינטות תסומן גם בתור $[\cdot]_B : V \to \mathbb{F}^n$.

14.4 מרחב ההעתקות

הגדרה: $\text{Hom}(V, U) = \left\{T \in U^V \mid \text{T is linear}\right\}$ מרחב ההעתקות. זה תת מרחב של $\langle U^V, +, \cdot \rangle$.

משפט: $\dim(\text{Hom}(V, U)) = \dim(V) \cdot \dim(U)$ - זה נכון אפילו אם V, U לא נוצרים סופית.

14.5 מטריציונית

הגדרה: לכל מטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, נגדיר את ההעתקה המטריציונית המתאימה ל־A, $T_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$:

$$T_A\left(\overline{v}\right) = A\overline{x}$$

פונקציה f נקראת מטריציונית אם קיימת מטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ כך ש־$f = T_A$, ונסמן $A = [f]$.

השיטה למצוא את המטריצה $[T]$ היא:

$$[T] = \left(T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

משפט: תהא $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, אזי T העתקה לינארית $\iff$ T מטריציונית.

טענות:

1. $\text{Sols}(A) = T_A^{-1}\left[\left\{\overline{0}\right\}\right] = \ker(T_A)$.
2. $C(A) = Im(T_A)$.
3. T_A על $\iff$ עמודות A פורשות. אם היא ריבועית אז גם הפיכה.
4. T_A חח"ע $\iff$ עמודות A בת"ל. כי אין שתי דרכים להגיע לאותו הדבר.
5. T_A הפיכה $\iff$ עמודות A בסיס $\iff$ A הפיכה.
6. $[T + S] = [T] + [S], [\alpha \cdot T] = \alpha \cdot [T], [S \circ T] = [S] \cdot [T]$.

15 מטריצה מייצגת

הגדרה: תהא $T : V \to U$ צ"ל V, U נוצר סופית. יהי B בסיס של V, ו־C בסיס של U. נגדיר את ההעתקה המייצגת $T_C^B : \mathbb{F}^{\dim(V)} \to \mathbb{F}^{\dim(U)}$:

$$T_C^B = Q_C \circ T \circ Q_B$$
$$[T]_C^B = \left[T_C^B\right]$$

טענות:

1. $C_i\left(\left[T_C^B\right]\right) = T_C^B(e_i)$. כלומר $[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(b_1)]_C & \ldots & [T(b_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix}$.
2. $[T]_C^B \cdot [v]_B = [T(v)]_C$.
3. לכל $\overline{v} \in V$, $\overline{v} \in \ker(T) \iff \left[\overline{v}\right]_B \in \text{Sols}\left([T]_C^B\right)$.
4. לכל $\overline{u} \in U$, $\overline{u} \in Im(T) \iff [\overline{u}]_C \in \text{Cols}\left([T]_C^B\right)$.

   לכן מסיקים ש־ $\mathcal{N}\left([T]_C^B\right) = \dim(\ker(T)), \text{Rank}\left([T]_C^B\right) = \dim(Im(T))$.

5. T הפיכה $\iff$ T_C^B הפיכה $\iff$ $[T]_C^B$ הפיכה, בנוסף $\left([T]_C^B\right)^{-1} = \left[T^{-1}\right]_B^C$.
6. $[S \circ T]_D^B = [S]_D^C \cdot [T]_C^B$.

אלגוריתם לחישוב המטריצה המייצגת: נבחר בסיס שנוח לחשב בו קואורדינטות ב־U - בדרך כלל הבסיס הסטנדרטי. $W = (w_1, \dots, w_n)$. נשתמש בדירוג:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & & | & | & & | \\ [u_1]_W & \dots & [u_m]_W & [T(b_1)]_W & \dots & [T(b_n)]_W \\ | & & | & | & & | \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \dots} \dots \to \Bigg($$

באופן דומה לאיך שמחשבים מטריצה הופכית.

הגדרה 1.15 מטריצות שינוי הקואורדינטות: יהיו B, C שני בסיסים של מ"ו V. אז נגדיר את מטריצת שינוי הקואורדינטות מ־B ל־C על ידי: $[Id_V]_C^B$.

1. $\overline{v} \in V$, $[Id_V]_C^B \cdot [\overline{v}]_B = [\overline{v}]_C$.
2. $[T]_C^B = [Id]_C^{C'} \cdot [T]_{C'}^{B'} \cdot [Id_V]_{B'}^B$.

16 מטריצות דומות

יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, נאמר כי A ו־B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש־$A = P^{-1} \cdot B \cdot P$.

משפט: נתון $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ריבועיות, הבאים שקולים:

1. A, B דומות.
2. קיימת $T : V \to V$ ובסיסים C, C' של V כך ש־$[T]_C = A, [T]_{C'} = B$.
3. לכל $T : V \to V$, אם קיים בסיס C של V כך ש־$[T]_C = A$, אז קיים בסיס C' של V כך ש־$[T]_{C'} = B$.

ואם A, B דומות אז:

1. $\mathrm{Rank}(A) = \mathrm{Rank}(B), \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$..
2. $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ כאשר $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n (A)_{i,i}$.
3. $\det(A) = \det(B)$.

17 אלגוריתמים

17.1 צמצום סדרה לבת"ל

17.1.1 לפי שורות

יהיו $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{F}^m$. נשים את $v_1, \dots, v_n$ כשורות, $M_{n \times m}(\mathbb{F}) \ni \begin{pmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_n^t \end{pmatrix} = B$, ונדרג בלי להחליף שורות (כלומר, בעמודה של מקדם הפותח יש רק 1 במקום אחד והשאר אפסים, אבל המקדמים הפותחים לא ממוינים). השורות שהתאפסו מתאימות לוקטורים שהיו תלוים לינארית באחרים, וסדרת השורות שלא התאפסו הן סדרה בת"ל.

17.1.2 לפי עמודות

נשים את $v_1, \dots, v_n$ כעמודות, $A = (v_1 \dots v_n)$, נדרג ונבדוק שיש רק פתרון טריויאלי למערכת ההומוגנית $(A \mid 0)$, כלומר שאין אף משתנה חופשי.

17.2 השלמה של סדרה בת"ל לבסיס

תהא $(v_1, \dots, v_k)$ סדרה בת"ל, ו־$(u_1, \dots, u_m)$ סדרה פורשת. נבנה מטריצה ש<u>עמודותיה</u>:

$$(v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m)$$

נדרג את המטריצה, ונסתכל על העמודות מ־u שנפתחה בהן מדרגה. את ה־uים המתאימים נוסיף לסדרת ה־vים, ונקבל בסיס.