

סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

1	דברים חשובים מלינארית 1	2
1.1	מטריצות דומות	2
2	לכסון	2
2.1	וקטורים עצמיים	2
2.2	פולינום אופייני	2
3	אינווריאנטיות	3
4	מרחב מנה	3
5	חוגים	4
5.1	הגדרות מלינארית 1	4
5.1.1	חבורה	4
5.1.2	חוג	4
5.1.3	שדה	4
5.2	הגדרות חדשות מלינארית 2	4
5.2.1	חוגי הפולינומים והמטריצות	4
5.2.2	הומומורפיזמים	5
5.2.3	חילוק בחוגים	5
5.2.4	חברים	5
5.3	אידאלים	5
5.4	חוג ראשי	5

1 דברים חשובים מלינארית 1

1.1 מטריצות דומות

יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, נאמר כי A ו- B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $A = P^{-1} \cdot B \cdot P$.

משפט: נתון $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ריבועיות, הבאים שקולים:

1. A, B דומות.

2. קיימת $T: V \rightarrow V$ ובסיסים C, C' של V כך ש- $[T]_C = A, [T]_{C'} = B$.

3. לכל $T: V \rightarrow V$, אם קיים בסיס C של V כך ש- $[T]_C = A$, אז קיים בסיס C' של V כך ש- $[T]_{C'} = B$.

ואם A, B דומות אז:

1. $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(B), \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$.

2. $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ כאשר $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n (A)_{i,i}$.

3. $\det(A) = \det(B)$.

2 לכסון

נגדיר מטריצה אלכסונית להיות מטריצה ריבועית $A \in M_n(\mathbb{F})$ שבה עבור $i \neq j, A_{i,j} = 0$. נסמן אותן בתור $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

מטריצה לכסינה היא מטריצה שדומה למטריצה אלכסונית, והעתקה לכסינה היא העתקה לינארית כך שקיים בסיס B כך ש- $[T]_B^B$ אלכסונית.

אם T העתקה לכסינה (כלומר מטריצה מייצגת כלשהי לכסינה) אז כל מטריצה מייצגת שלה היא לכסינה.

2.1 וקטורים עצמיים

נגדיר וקטור עצמי של A לערך עצמי λ להיות \bar{v} כך ש- $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$. באופן הפוך, ערך עצמי של A הוא λ כך שקיים וקטור עצמי $\bar{v} \neq \bar{0}$ של A לערך עצמי λ .

הערכים העצמיים הם האיברים שנמצאים על האלכסון במטריצה האלכסונית שדומה ל- A , עד כדי סידורם על האלכסון.

המרחב של הוקטורים העצמיים הוא $V_\lambda = \{\bar{v} \in V \mid A\bar{v} = \lambda\bar{v}\}$, שזה שווה בעצם ל- $\text{Sols}(A - \lambda I)$. זה תמ"ו של V .

הסכום של ה- V_λ השונים הוא סכום ישר.

2.2 פולינום אופייני

נסמן ב- $P_A(\lambda) = |\lambda I - A|$ את הפולינום האופייני של A . מתקיים:

• זה פולינום מתוקן, כלומר המקדם המוביל הוא 1.

• λ ערך עצמי של $A \iff \lambda$ שורש של $P_A(\lambda)$.

• אם A, B דומות אז $P_A = P_B$.

משפט 1.2 המשפט המרכזי: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$.

נגדיר את הריבוי האלגברי של α, ρ_α (רו), להיות כמות הפעמים ש- $(\lambda - \alpha)$ מופיע בפולינום $P_A(\lambda)$. כלומר אם הפולינום הוא $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 3)$ אז $\rho_1 = 1, \rho_3 = 2$.

בנוסף נגדיר את הריבוי הגיאומטרי של α, μ_α , להיות $\dim(V_\lambda)$.
 A לכסינה מעל \mathbb{F} אמ"ם:

1. $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל \mathbb{F} .

2. לכל ערך עצמי λ של A , $\rho_\lambda = \mu_\lambda$.

משפט 2.2 לכל ערך עצמי λ , $\mu_\lambda \leq \rho_\lambda$.

משפט 3.2 עבור $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ הערכים העצמיים, $\rho_{\lambda_1} + \dots + \rho_{\lambda_k} \leq n$, ואם $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים אז גם $\rho_{\lambda_1} + \dots + \rho_{\lambda_k} = n$.

משפט 4.2 A לכסינה \iff קיים בסיס $B \subseteq \mathbb{F}^n$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A .

3 אינווריאנטיות

תהא $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית, תת מרחב $U \subseteq V$ נקרא T -אינווריאנטי (T -שמור) אם $T[U] \subseteq U$, או באופן שקול אם T מצומצם ל- U ט"ל.

דוגמאות למרחבים T -אינווריאנטיים הן $\ker(T)$, $Im(T)$ ו- V_λ לכל λ .

בנוסף נגדיר תת מרחב $U \subseteq V$ אי פריק להיות תת מרחב T -אינווריאנטי כך שלא קיימים $W_1, W_2 \neq \{0\}$ T -אינווריאנטיים שמקיימים $U = W_1 \oplus W_2$.

מטריצה מייצגת: אם $U \subseteq V$ T -אינווריאנטי, יהי B בסיס של U . יהי C השלמה לבסיס של V . אז $[T]_{B \cup C} = \begin{pmatrix} [T|_U]_B & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$. זה כי המקדמים שלמטה לא מופיעים ב- U ולכן גם לא בתמונה של U (כי היא מוכלת ב- U).

ואם $V = U_1 \oplus U_2$ כאשר U_1, U_2 T -אינווריאנטיים אז $[T]_{B_1 \cup B_2} = \begin{pmatrix} [T|_{U_1}]_{B_1} & 0 \\ 0 & [T|_{U_2}]_{B_2} \end{pmatrix}$.

אזי הפולינום $P_{T|_U}$ מחלק את P_T , ואם $V = U_1 \oplus U_2$ עבור U_1, U_2 T -אינווריאנטיים אז $P_T = P_{T|_{U_1}} \cdot P_{T|_{U_2}}$.

בנוסף באופן מוכלל אם $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ כאשר כל V_i הוא T -אינווריאנטי אז יהי הבסיס $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$, מתקיים $P_T = \prod_{i=1}^n P_{T|_{V_i}}$ ו- $[T]_B = \text{Diag}([T|_{V_1}]_{B_1}, \dots, [T|_{V_n}]_{B_n})$.

4 מרחב מנה

נגדיר את יחס השקילות הבא: $v \sim u \iff v - u \in W$ עבור $u, v \in V$ ו- W כלשהו.

את קבוצת המנה, V/W , שהיא הקבוצה של $[v] = \{u \in V \mid u \sim v\}$ לכל v , ניתן בעצם להגדיר לפי פעולת חיבור $[v] + [u] = [v + u]$ וכפל בסקלר $[\lambda \cdot v] = \lambda \cdot [v]$.

זה יוצא מרחב וקטורי, שמקיים גם $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$.

5 חוגים

5.1 הגדרות מלינארית 1

5.1.1 חבורה

$\langle G, * \rangle$ נקראת חבורה אם:

1. G סגורה לפעולה $*$.

2. $*$ פעולה אסוציאטיבית.

3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר $\exists e \in G. \forall g \in G. e * g = g * e = g$. האיבר הזה יחיד ומסומן e_G .

4. קיים איבר הופכי, כלומר $\forall g \in G. \exists h \in G. g * h = h * g = e$ כאשר e איבר יחידה. האיבר ההופכי של g מסומן g^{-1} .

5.1.2 חוג

$\langle R, *, + \rangle$ נקראת חוג אם:

1. $\langle R, + \rangle$ חבורה חילופית.

2. $*$ פעולה אסוציאטיבית על R .

3. מתקיים חוג הפילוג:

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in R. a * (b + c) &= a * b + a * c \\ (b + c) * a &= b * a + c * a \end{aligned}$$

בנוסף יש חוג חילופי, (הכפל חילופי), חוג עם יחידה (קיים איבר ניטרלי לכפל), ותחום שלמות הוא חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0.

5.1.3 שדה

חוג חילופי עם יחידה כך ש- $\langle R \setminus \{0\}, * \rangle$ חבורה חילופית. שדה הוא תחום שלמות, ותחום שלמות סופי הוא שדה.

5.2 הגדרות חדשות מלינארית 2

5.2.1 חוגי הפולינומים והמטריצות

נגדיר את חוג הפולינומים מעל חוג R להיות $R[x] \subseteq \mathbb{N} \rightarrow R$. נגדיר בנוסף $\deg(0) = \infty, \deg(p) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \neq 0\}$.

• מתקיימת נוסחת המעלות: $\deg(p + q) \leq \max(\deg(p), \deg(q)), \deg(p \cdot q) \leq \deg(p) + \deg(q)$

• אם R תחום שלמות אז $R[x]$ תחום שלמות.

נגדיר את חוג המטריצות הריבועיות להיות $M_n(R)$ כאשר R חוג, לפי פעולות כפל וחיבור של מטריצות. זה חוג לא חילופי.

5.2.2 הומומורפיזמים

הומומורפיזם של חוגים זו פונקציה $\varphi : R_1 \rightarrow R_2$ כך ש- $\varphi(1_{R_1}) = 1_{R_2}$ ו- $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ ו- $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ (ולכן גם $\varphi(0_{R_1}) = 0_{R_2}$). יש למשל הומומורפיזם בין $M_n(R)$ לבין $M_n(R[x])$.

5.2.3 חילוק בחוגים

יהי R חוג. יהיו $a, b \in R$, נאמר כי $a \mid b$ אם $\exists c \in R. b = a \cdot c$. בנוסף נקרא ל- $a \in R$ הפיך ב- R אם קיים $b \in R$ כך ש- $a \cdot b = 1 = b \cdot a$. בנוסף ההופכי יסומן $b = a^{-1}$ והוא יחיד. ונסמן את קבוצת האיברים ההפיכים ב- R בסימון R^\times .

5.2.4 חברים

נאמר ש- a, b חברים אם קיים $u \in R^\times$ כך ש- $a = ub$. זה יחס שקילות.

5.3 אידאלים

יהי R חוג חילופי עם יחידה, $I \subseteq R$ נקרא אידאל אם:

1. $I \neq \emptyset$.

2. I סגור לחיבור.

3. I סגור לכפל באיבר מ- R .

או באופן שקול I תת מרחב וקטורי של מרחב ה- R^1 . דוגמה לאידאל היא \mathbb{Z}_{even} . האידאל שנוצר ע"י $X \subseteq R$ הוא $\text{sp}(X)$ והוא תמיד אידאל כי זה מרחב וקטורי ב- R^1 . מתקיים:

- $a \mid b \iff \text{sp}(b) \subseteq \text{sp}(a)$

- $\text{sp}(a) = \text{sp}(b) \iff a, b$ חברים

- a הפיך $\iff \text{sp}(a) = R$.

- $I \subseteq R$

- אידאל \iff קיים הומומורפיזם $\varphi : R \rightarrow S$ (חוג S) כך ש- $\ker \varphi = I$.

5.4 חוג ראשי

תחום שלמות R נקרא תחום ראשי אם כל אידאל $I \subseteq R$ נוצר על ידי איבר, כלומר קיים לו $a \in R$ כך ש- $I = \text{sp}(a)$.

נגדיר לתחום ראשי R ואיברים $r_1, \dots, r_k \in R$

$$\gcd(r_1, \dots, r_k) = \{d \in R \mid \text{sp}(d) = (r_1, \dots, r_k)\}$$

בנוסף מתקיים:

- עבור d כלשהו ב- $\gcd(r_1, \dots, r_k)$, $\gcd(r_1, \dots, r_k) = \{d \cdot u \mid u \in R^x\}$
- $d \in \gcd(r_1, \dots, r_k) \iff (\forall 1 \leq i \leq k. d \mid r_i) \wedge (q \mid r_1, \dots, r_k \implies q \mid d)$
- $a, b \in R$ יקראו זרים אם $\gcd(a, b) = 1$ או באופן שקול 1 צירוף לינארי של a, b .
- $0 \neq a \in R$ יקרא ראשוני $\iff (a \mid b \cdot c \implies (a \mid c \vee a \mid b))$
- נגדיר בנוסף $\text{lcm}(r_1, \dots, r_k) = \{d \in R \mid \text{sp}(d) = \bigcap_{i=1}^r r_i\}$, lowest common multiplier.