סיכומי הרצאות - מתמטיקה בדידה

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

1 שונות

1.1 יוטא

תהא $P(x)$ יחס חד מקומי.
האיבר היחידי $a \to A$ המקיים את הטענה $\iota x \in A.\varphi(x) = \varphi(a)$.
למשל 2 =ראשוני $\iota x \in \mathbb{N}.x \in \mathbb{N}_{even} \wedge$ x.
הערה: כאשר מגדירים ι צריך לוודא **שקיים ויחיד** $a \in A$ המקיים את הטענה $\varphi(a)$.
למשל $min = \lambda x \in P(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}.\iota n \in x.\forall m \in x.n \leq m$.

1.2 תלות בבחירת הנציגים

דוגמא: נגדיר $S_n = \left\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid n \mid x-y\right\}$. אם כך $\mathbb{Z}/S_n = \left\{[0]_{S_n},\ldots,[n-1]_{S_n}\right\}$. נמצא $f : \mathbb{Z}/S_n \to \mathbb{Z}$.
הבעיה נמצאת ב־$f = \lambda [k]_{S_n} \in \mathbb{Z}/S_n.k+1$. יש תלות בבחירת הנציגים, כי אין רק k יחיד שמייצג מחלקת שקילות וזה משנה איזה k נבחר.
כדי להוכיח שאין תלות בבחירת הנציגים, נוכיח חד ערכיות.

1.3 משפט האינדוקציה

נניח כי A קבוצה ו־$<_A$ יחס סדר טוב על A ו־$P(x)$ טענה עם משתנה חופשי x (x נקרא חופשי אם אין כמת שמזכיר את x. למשל אם $\exists y.x+1 = y$ אז x חופשי, ו־y אינו חופשי). נניח כי מתקיים כי $\forall a \in A.\left(\forall b \in A.b <_A a \implies P(b)\right) \implies P(a)$. אזי $\forall a \in A.P(a)$.

חלק I
קבוצות

2 איחוד וחיתוך בין כל כמות של קבוצות

כתיב כללי

תהא F קבוצה של קבוצות.

הגדרה 1.2 $\bigcup F = \{x \mid \exists y \in F.x \in y\}$
כלומר, כדי שאיבר x כלשהו יהיה איבר באיחוד כל האיברים ב־F, צריך שתהיה קבוצה y ב־F כך ש־$x \in y$.

הגדרה 2.2 $\bigcap F = \{x \mid \forall y \in F.x \in y\}$
כלומר, כדי שאיבר x כלשהו יהיה איבר בחיתוך כל האיברים ב־F, צריך שהוא יהיה שייך לכל האיברים ב־F.

כתיב אלטרנטיבי

הגדרה 3.2 תהא $F = \{A_i \mid i \in I\}$ קבוצה של קבוצות.

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I.x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I.x \in A_i\}$$

כתיב בסיסי

הגדרה 4.2

$$\bigcup_{i=1}^{100} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots \cup A_{100}$$
$$\bigcap_{i=1}^{100} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_{100}$$

3 זוגות סדורים

יש דרכים רבות להגדיר זוגות סדורים. הדרך שאנחנו נשתמש בה היא הדרך הזו:

הגדרה 1.3 $\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$

כדי שדרך לכתיבת זוג סדור תהיה נכונה, צריך שתמיד תתקיים התכונה הבאה של זוגות סדורים:

$$\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle \iff a=c \wedge b=d$$

3.1 nיה סדורה

נגדיר nיה סדורה כך:

$$\langle a,b,c\rangle = \langle a,\langle b,c\rangle\rangle$$
$$\langle a,b,c,d\rangle = \langle a,\langle b,c,d\rangle\rangle$$

3.2 הוכחה באינדוקציה

1. נוכיח עבור ה־n הרלוונטי הראשון (בסיס האינדוקציה)
2. לוקחים n כללי, מניחים שהטענה נכונה לגביו (הנחת האינדוקציה)
3. מוכיחים עבור $n+1$ ומסתמכים על בסיס האינדוקציה (צעד האינדוקציה)

נוכיח את **התכונה המרכזית** לגבי nיה סדורה, שהיא

$$\langle a_1,\ldots,a_n\rangle = \langle b_1,\ldots b_n\rangle \iff a_1=b_1 \wedge \cdots \wedge a_n=b_n$$

בסיס האינדוקציה ־ $\langle a_1,a_2\rangle = \langle b_1,b_2\rangle \iff a_1=b_1 \wedge a_2=b_2$. נניח כי זה מתקיים עבור n. נוכיח כי זה מתקיים עבור $n+1$. נגדיר: $\langle a_1,\ldots a_{n+1}\rangle = \langle a_1,\langle a_2,\ldots a_{n+1}\rangle\rangle$. הטענה המרכזית מתקיימת כי כל האיברים שווים בזוגות הסדורים.

3.3 מכפלה קרטזית

הגדרה 2.3 יהיו A ו־B קבוצות. $A \times B = \{\langle a,b\rangle \mid a \in A, b \in B\}$

דוגמא: $\{1,2\} \times \{1,3\} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

הגדרה 3.3

$$\begin{aligned} A^1 &= A \\ A^{n+1} &= A \times A^n \end{aligned}$$

המישור הממשי הוא $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (כל זוג של שני מספרים ממשיים זה כל נקודה בדו מימד).
נשים לב לקשר עם nיה סדורה כאשר נגדיר $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \{\langle a,b,c\rangle \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$.

3.4 יחסים

הגדרה 4.3 יהיו A ו־B קבוצות. R נקרא יחס מעל A,B $\iff$ $R \subseteq A \times B$
דוגמות: $R = \{\langle 1,7\rangle, \langle 2,7\rangle\}$ יחס מעל $\mathbb{N},\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} <_{\mathbb{N}} &= \left\{\langle n,m\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid \exists k \in \mathbb{N}_+, n+k=m\right\} \\ \leq_{\mathbb{N}} &= \left\{\langle n,m\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid \exists k \in \mathbb{N}, n+k=m\right\} \\ (=_{\mathbb{N}}) = Id_{\mathbb{N}} &= \{\langle n,n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\} \\ f(x) = 2x &= \{\langle x,2x\rangle \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

הגדרה 5.3 יהי R יחס מעל A,B. $\langle a,b\rangle \in R \iff aRb$, ונאמר "$a$ מתייחס ביחס R ל־b". אם $A = B$ נאמר כי R יחס מעל A.

- התחום של R הוא $Dom(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B. aRb\}$
לדוגמא,

$$\begin{aligned} &Dom(\{\langle 1,7\rangle, \langle 2,7\rangle\}) = \{1,2\} \\ &Dom(<_{\mathbb{N}}) = \mathbb{N} \end{aligned}$$

- התמונה של R היא $Im(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A. aRb\}$
לדוגמא,

$$\begin{aligned} &Im(\{\langle 1,7\rangle, \langle 2,7\rangle\}) = \{7\} \\ &Im(<_{\mathbb{N}}) = \mathbb{N}_+ \end{aligned}$$

- $Id_A = \{\langle a,a\rangle \mid a \in A\}$
- היחס ההופכי של R הוא $R^{-1} = \{\langle b,a\rangle \mid \langle a,b\rangle \in R\}$
לדוגמא,

$$\{\langle 1,7\rangle, \langle 2,7\rangle\}^{-1} = \{\langle 7,1\rangle, \langle 7,2\rangle\}$$

- הרכבת יחסים - יהי $R \subseteq A\times B$ ו־$S \subseteq B\times C$. נגדיר $S\circ R = \{\langle a,c\rangle \in A\times C \mid \exists b\in B.\, \langle a,b\rangle \in R \land \langle b,c\rangle \in S\}$ (S מורכב על R). זה כל זוגות האיברים שניתן "לחבר", כלומר ה־$b=b$ כאשר b ימני ב־R ושמאלי ב־S (b אינו ביחס ההרכבה).
  - אסוציאטיביות ההרכבה - $(S\circ R)\circ T = S\circ(R\circ T)$ עבור $T\subseteq A\times B$, $R\subseteq B\times C$, $S\subseteq C\times D$
  - $(S\circ R)^{-1} = R^{-1}\circ S^{-1}$
  - $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$
  - $Id_B\circ R = R$
  - $R\circ Id_A = R$
  - $(g\circ f)(x) = g(f(x))$

3.5 פונקציות

3.5.1 הגדרות לגבי יחסים

יחס R נקרא:

- **חד ערכי:** $\forall a\in A.\forall b_1,b_2\in B.\, \langle a,b_1\rangle \in R\land \langle a,b_2\rangle \in R\to b_1=b_2$ (לכל $a\in A$ יש $b\in B$ יחיד כך ש־$\langle a,b\rangle \in R$)
- **מלא ב־A:** R $\forall a\in A.\exists b\in B.\, \langle a,b\rangle \in R$ (לכל $a\in A$ יש $b\in B$ מתאים)
- **פונקציה:** אם R יחס חד ערכי ומלא. באופן שקול, R $\forall a\in A.\exists! b\in B.\, \langle a,b\rangle \in R$. ($\exists!$ זה קיים ויחיד).
  - "**פונקציה חלקית**": יחס חד ערכי שאינו מלא.

3.5.2 הגדרות לגבי פונקציות

תהא $f:A\to B$ פונקציה.

- **חד־חד־ערכי:** $\forall a_1,a_2\in A.f(a_1)=f(a_2)\to a_1=a_2$. זה שקול לכך ש־$f^{-1}$ חד ערכית.
- **על:** $\forall b\in B.\exists a\in A.f(a)=b$. זה שקול לכך ש־$f^{-1}$ יחס מלא.
- **זיווג:** אם f יחס חד־חד־ערכי ועל. נקרא גם **חחע"ל** או **פונקציה הפיכה**.
  - "**פונקציה הפיכה**" אומר שקיימת פונקצייה $g:B\to A$ כך ש:

$$f\circ g = id_B \land g\circ f = id_A$$

3.5.3 קבוצת הפונקציות מ־A ל־B

מסומנת: $A\to B$ או B^A.

הגדרה 6.3

$$A\to B = \{f\in P(A\times B) \mid \text{f is a function}\}$$

אם פונקציה f מעל A,B, נסמן את זה ככה: $f:A\to B$.

3.5.4 טענות לגבי פונקציות

1. $dom\left(f\right)=A$
2. $range(f)=B$
3. $im\left(f\right)=\left\{ f\left(x\right)\mid x\in A\right\}$

משפט שוויון של פונקציות: יהיו f,g פונקציות. אזי $f=g\iff dom\left(f\right)=dom\left(g\right)\wedge\forall x\in dom\left(f\right).f\left(x\right)=g\left(x\right)$

הפונקציה **אינה** מוגדרת ע"פ הנוסחה.

3.5.5 תמונה איבר־איבר

תהא $f:A\to B$ פונקציה. נגדיר:

- **תמונה איבר־איבר של x ע"י f:**

$$f\left[x\right]=\left\{ f\left(a\right)\mid a\in x\right\} \subseteq B$$

- **קבוצת המקורות של y ע"י f:**

$$f^{-1}\left[y\right]=\left\{ a\in A\mid f\left(a\right)\in y\right\} \subseteq A$$

3.5.6 פונקציה מותלית

נכתוב פונקציה מותלית כך:

$$\lambda x\in\mathbb{R}.\begin{cases}
2 & x=1\\
4 & x=2\\
x & else
\end{cases}$$

מימין זה התנאי, ו־$else$ אומר כך שאר המקרים. משמאל זה מה שהפונקציה "מחזירה".

3.5.7 צמצום

מסומן: $f_{|}$, או f_{ι} אבל היוטא הפוכה. עבור $f:A\to B$, $f_{|C}=C\times B\cap f$

3.6 יחסי שקילות

יחסי שקילות הם **תמיד יחסים מעל A.**

3.6.1 הגדרות לגבי יחסים

יחס R נקרא:

- **רפלקסיבי -** $\forall x\in A.\left\langle x,x\right\rangle \in R$. זה שקול ל־$id_{A}\subseteq R$.
  - **אנטי־רלפקסיבי -** $\forall x\in A.\left\langle x,x\right\rangle \notin R$. למשל היחס $<$ הוא אנטי־רפלקסיבי. בנוסף רק אם $A\neq\emptyset$ אז יחס A רפלקסיבי $\iff$ יחס A לא אנטי־רפלקסיבי.
- **סימטרי -** $\left\langle b,a\right\rangle \in R\impliedby\left\langle a,b\right\rangle \in R$ $\forall a,b\in A.$ זה אומר שאם a,b ביחס אז b,a ביחס.

- **אנטי־סימטרי חלש** ־ $\forall x,y\in A.\left(\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R\right)\implies x=y$
- **אנטי־סימטרי חזק** ־ $\forall x,y\in A.\,\langle x,y\rangle\in R\implies\langle y,x\rangle\notin R$. נובע ש: אנטי סימטרי חזק $\Longleftarrow$ אנטי־רפלקסיבי. זו הסיבה שקיים אנטי־סימטרי חלש.

- **טרנזיטיבי** ־ $\forall a,b,c\in A.\,\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in R\implies\langle a,c\rangle\in R$. זה כמו כלל המעבר.
- **יחס שקילות** ־ יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי. למשל היחס $=$.
  - **יחס סדר חלש** ־ יחס רפלקסיבי + טרנזטיבי + אנטי־סימטרי חלש. למשל היחס $\subseteq,\le$.
  - **יחס סדר חזק** ־ יחס טרנזטיבי + אנטי־סימטרי חזק. למשל היחס $\subset,<$.
- **יחס קווי/לינארי/טוטאלי/מלא** ־ $\forall a,b\in A.aRb\vee bRa\vee a=b$. למשל היחס $<$ הוא קווי אך היחס $\subseteq$ אינו קווי, כי ל־$\subseteq$ יש "התפצלויות" בסינגלטונים שאינם מוכלים זה בזה ולא שווים זה לזה.

3.6.2 מחלקות שקילות

הגדרה 7.3 מחלקת השקילות של a מוגדרת להיות $[a]_R=\{b\in A\mid aRb\}$. אינטואיטיבית, מחלקת שקילות היא כל האיברים b ששקולים ל־a ביחס השקילות R.

למה 8.3 יהי R יחס שקילות ב־A. לכל $a,b\in A$,

- $[a]_R=[b]_R\vee[a]_R\cap[b]_R=\emptyset$
- $[a]_R=[b]_R$ מתקיים $\iff aRb$
  $[a]_R\cap[b]_R=\emptyset$ מתקיים $\iff\neg(aRb)$

3.6.3 מערכת נציגים

תת קבוצה $A'\subseteq A$ נקראת מערכת נציגים אם:

- $\forall a,b\in A'.a\neq b\implies\neg(aRb)$ (כל שני איברים שונים ב־A' לא נמצאים ביחס)
- $\forall a\in A.\exists b\in A'.aRb$ (במערכת הנציגים יש איבר שקול לכל איבר ב־A)

3.6.4 חלוקה

הגדרה 9.3 $\Pi\subseteq P(A)$ נקראת חלוקה של A אם:

1. $\emptyset\notin\Pi$
2. $\forall x,y\in\Pi.x\neq y\implies x\cap y=\emptyset$ (כל האיברים בחלוקה זרים)
3. $\bigcup\Pi=A$ (כל איברי A נמצאים בחלוקה)

משפט 10.3 יהי R יחס שקילות ב־A. מתקיים כי $A/_R=\{[a]_R\mid a\in A\}$ (קבוצת המנה) היא חלוקה של A.

הגדרה 11.3 תהא Π חלוקה של A. נגדיר את "היחס המושרה מהחלוקה" שנסמן ב־R_Π כ־$\bigcup\limits_{y\in\Pi}y\times y$.

משפט 12.3

- R_Π יחס שקילות.
- $A/_{R_\Pi}=\Pi$

- $R_{\left(A/_R\right)} = R$

משפט 13.3 יהי R יחס שקילות ב־A ותהא $T \subseteq P(A)$. אם מתקיים כי:

- T חלוקה של A, ו־
- $\forall a, b \in A.aRb \iff \exists t \in T.a, b \in t$

אזי $A/_R = T$.

3.7 יחסי סדר

סימון: $\prec$ יחס סדר חזק על A. $\preceq$ יחס סדר חלש על A.
בהינתן $\prec$, ניתן להגדיר יחס סדר חלש על A: $a \prec b \vee a = b$.
בהינתן $\preceq$, ניתן להגדיר יחס סדר חזק על A: $a \preceq b \wedge a \neq b$.
נגדיר:

- $x \in X$ יקרא האיבר גדול ביותר ב־X אם $\forall y \in X.y \preceq x$. $x \in X$ יקרא איבר קטן ביותר (מינימלי) ב־X אם $\forall y \in X.x \preceq y$.
- $x \in X$ ייקרא איבר מירבי (מקסימום) ב־X אם $\forall y \in X.\neg(x \prec y)$. איבר מזערי (מינימום): $\forall y \in X.\neg(y \prec x)$.
- חסם עליון (מלעל/מלמעלה). $x \in A$ ייקרא חסם עליון ל־X אם $\forall y \in X.y \preceq x$. לדוגמה $A = \mathbb{R}, X = [0,1]$, ואז $x = 3$ או כל מספר אחר שגדול או שווה ל־1. יש גם חסם תחתון.
- X נקראת חסומה מלמעלה אם קיים חסם עליון.
  חסומה מלמטה אם קיים חסם תחתון
  חסומה אם X חסומה מלמטה ומלמעלה.
- $x \in A$ נקרא סופרמום של X אם x החסם העליון הקטן ביותר.
  - x חסם עליון ל־X
  - $\forall y \in A.\text{y hasam elion le X} \to x \preceq y$
- $x \in A$ נקרא אינפימום (החסם התחתון הקטן ביותר) אם:
  - x חסם תחתון ל־X
  - $\forall y \in A.\text{y hasam tahton le X} \to y \preceq x$

טענה:

- אם x איבר גדול ביותר ב־X אז x איבר מרבי ב־X
- אם $x \in A$ חסם עליון קטן ביותר של X אז x יחיד ומסומן $x = sup(X)$.
- אם $x \in X$ איבר גדול ביותר אז $x = sup(x)$ ומסמנים $x = max(X)$.
- אם α יחס סדר קווי ו־x איבר מירבי ב־X אז x איבר גדול ביותר.

יחס סדר טוב: R יחס סדר חזק וקווי על A מקיים את התכונה הבאה:

$$\forall X \subseteq A.x \neq \emptyset \implies \exists x \in X.\forall y \in X.x \leq_A y$$

כלומר לכל תת קבוצה של A שאינה $\emptyset$ יש איבר מינימלי.
דוגמה: $<$ על $\mathbb{N}$.
עקרון הסדר הטוב: לכל קבוצה A קיים סדר טוב.

משפט 14.3 אקסיומת הבחירה שקולה לעקרון הסדר הטוב.

חלק II
עוצמות

4 הקדמה לעוצמות

4.1 הגדרות

- $|A|=|B| \iff$ קיימת $f:A\to B$ זיווג.
- $|A|\le|B| \iff$ קיימת $f:A\to B$ חח"ע.
- $|A|<|B| \iff |A|\le|B| \wedge |A|\neq|B|$. כדי להוכיח שעוצמות לא שוות צריך להוכיח שלא קיים זיווג.

4.1.1 טענות בסיסיות

- אם $f:A\to B$ חח"ע אז $|A|=|Im\left(f\right)|$
- **לגבי** $|A|=|B|$**:**
  - רפלקסיביות: $|A|=|A|$
  - סימטריה: $|A|=|B| \iff |B|=|A|$
  - טרנזיטיביות: $|A|=|C| \implies |A|=|B| \wedge |B|=|C|$
- **לגבי** $|A|\le|B|$**:**
  - $A\le B \implies |A|=|B|$
  - $|A|\le|C| \implies |A|\le|B| \wedge |B|\le|C|$
  - $|A|\le|B| \implies A\subseteq B$
  - קיימת f על מ־B ל־A אמ"ם $|A|\le|B|$.
- **לגבי** $|A|<|B|$**:**
  - $|A|<|B|=|C| \implies |A|<|C|$
  - $|A|<|C| \implies |A|=|B|<|C|$

4.1.2 טענות לגבי קבוצות שוות עוצמות

יהיו A,B,A',B' קבוצות כך ש־$|A|=|A'| \wedge |B|=|B'|$. אזי:

- $|A\times B|=|A'\times B'|$
- $|A\to B|=|A'\to B'|$
- $|P\left(A\right)|=|P\left(A'\right)|$
- אם A,B זרות וגם A',B' זרות: $|A\uplus B|=|A'\uplus B'|$

4.1.3 משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין

משפט זה אומר ש:

$$|A| \leq |B| \land |B| \leq |A| \iff |A| = |B|$$

5 עוצמות סופיות

5.1 הגדרות

לחלק הזה, נסמן: $[0] = \emptyset$, $[n] = \{0, \dots, n-1\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$

הגדרה 1.5 קבוצה A נקראת סופית אם קיים (הוא גם יחיד) $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$|[n]| = |A|$. קבוצה A נקראת אינסופית אם A איננה סופית.

$\leq, <, =$ מוגדר עבור עוצמות, אבל גם מתואר עבור $\mathbb{N}$. לשם ההגבלה, בחלק הזה נסמן $<_{\mathbb{N}}, =_{\mathbb{N}}$, $\leq_{\mathbb{N}}$.

5.2 משפטים

- יהיו $n, m \in \mathbb{N}$. נניח כי $n <_{\mathbb{N}} m$. אז $|[n]| < |[m]|$.
- אם $Y \subseteq X$ ו־X סופית אז Y סופית.
- אם $X \subsetneq Y$ ו־X, Y סופיות אז $|X| < |Y|$.
- אם X, Y סופיות, $|X| = |Y|$, ו־$f : X \to Y$ אז f חח"ע $\iff$ f על.

הגדרה: עבור A סופית, נסמן $|A| = n$ עבור ה־n היחידי כך ש־$|[n]| = |A|$. (אותו הדבר לגבי $|A| < n, |A| \leq n$)

מסקנה: יהיו A, B קבוצות כך ש־$|A| = n, |B| = m$:

- $n =_{\mathbb{N}} m \iff |A| = |B|$
- $n \leq_{\mathbb{N}} m \iff |A| \leq |B|$
- $n <_{\mathbb{N}} m \iff |A| < |B|$

6 עוצמות אינסופיות

6.1 עוצמות בנות מניה

משפט: העוצמה של קבוצות בנות מניה מסומנת ב־$\aleph_0$. הקבוצות הבאות בנות מניה:

- $\mathbb{N}$
- $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Q}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^+. |\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}|$

6.1.1 שיטת הלכסון

משפט האלכסון של קנטור: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{N} \to \{0,1\}|$.

הגדרה: $\aleph = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{N} \to \{0,1\}|$. (באופן כללי יותר, $2^{|A|} = |A \to \{0,1\}|$).

הוכחה לדוגמה של משפט האלכסון של קנטור: $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N} \to \{0,1\}|$: ראינו. נוכיח כי $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{N} \to \{0,1\}|$. נניח בשלילה כי $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \to \{0,1\}|$, כלומר קיימת $F \in \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \{0,1\})$ זיווג.

נוכיח שקיים איבר בטווח $g \in \mathbb{N} \to \{0,1\}$ שאין לה מקור, כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$, $F(n) \neq g$. אם כך $g \notin Im(F)$, וזו תהיה סתירה לכך ש־F על.

נמצא את g (אנחנו מחפשים איזשהו g ששונה מכל דבר ב־$Im(F)$, וכדי לעשות זאת כל איבר יסתור את השוויון לאחד מהם).

לכסון:

$$
\begin{aligned}
F(0) &= \left\langle \overbrace{(F(0))(0)}^{x}, (F(0))(1), (F(0))(2), \ldots \right\rangle \\
F(1) &= \left\langle (F(1))(0), \overbrace{(F(1))(1)}^{y}, (F(1))(2), \ldots \right\rangle \\
&\ldots \\
F(n) &= \langle (F(n))(0), (F(n))(1), (F(n))(2), \ldots \rangle \\
g &= \langle 1-x, 1-y, \ldots \rangle \\
g &= \lambda n \in \mathbb{N}.1 - (F(n))(n)
\end{aligned}
$$

צ"ל: $g \in \mathbb{N} \to \{0,1\}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$, $g \neq F(n)$.

6.2 עוצמות שאינן בנות מניה

השערת הרצף (CH)**:** לא קיימת עוצמה בין $\aleph_0$ ל־$\aleph$. הוכח שאי אפשר להוכיח את השערת הרצף ואי אפשר להפריך את השערת הרצף. בקורס שלנו **לא** נכון להגיד כי $(\aleph_0 \leq |A| < \aleph) \implies |A| = \aleph_0$.

משפטים:

- $|A| < 2^{|A|}$
- $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{\left(2^{\aleph_0}\right)} < 2^{\left(2^{\left(2^{\aleph_0}\right)}\right)} < \ldots$, ולכן אין עוצמה גדולה ביותר.
- $|\mathbb{R}| = \aleph = 2^{\aleph_0}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^+ . |\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים: $|\mathbb{R}| = |(\alpha,\infty)| = |(-\infty,\alpha)| = |[\alpha,\beta]| = |(\alpha,\beta]| = |[\alpha,\beta)| = |(\alpha,\beta)|$.

7 חשבון עוצמות

יהיו A, B קבוצות. נגדיר:

- $|A| + |B| = |A \times \{0\} \uplus B \times \{1\}|$
- $|A| \cdot |B| = |A \times B|$
- $|A|^{|B|} = |B \to A|$

הערה: מכיוון וניתן להוכיח אי־תלות בבחירת הנציגים, כשנרצה לדבר על $a+b$ עבור $a+b$ עוצמות, נוכל לבחור את הנציגים עבור עוצמות אלה כקבוצות זרות A,B ואז ההגדרה היא $a+b=|A\uplus B|$.

חוקים בסיסיים:

לכל a,b,c עוצמות מתקיימים:

- קומוטטיביות: $a+b=b+a$
- קומוטטיביות: $a\cdot b=b\cdot a$
- אסוציאטיביות: $a+(b+c)=(a+b)+c$
- אסוציאטיביות: $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
- חוק הפילוג: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
- $a+0=a$
- $a\cdot 1=a$
- $a\cdot 0=0$
- $a^1=a$
- $a^0=1$
- $0^a=\begin{cases}0 & a\neq 0\\ 1 & a=0\end{cases}$
- מונוטוניות: אם $a\leq b, c\leq d$ אז:
  - $a+c\leq b+d$
  - $a\cdot c\leq b\cdot d$
  - $a^c\leq b^c$
  - $a^c\leq a^d$

משפט:

- $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$
- $\aleph+\aleph=\aleph\cdot\aleph=\aleph$
- $\aleph_0\cdot\aleph=\aleph_0+\aleph=\aleph$

חוקי חזקות:

- $\left(a^b\right)^c=a^{b\cdot c}$
- $a^{b+c}=a^b\cdot a^c$
- $(a\cdot b)^c=a^c\cdot b^c$

טענה 1.7 אם a עוצמה אינסופית אז $a+\aleph_0=a$.

מסקנה 2.7 אם $\aleph_0\leq a$ אז $\forall n\in\mathbb{N}.a+n=a$.

משפט 3.7 איחוד לכל היותר בן מניה של קבוצות לכל היותר בנות מניה הוא לכל היותר בן מניה: תהא A קבוצה של קבוצות כך ש־$|A|\leq\aleph_0$ וגם $\forall x\in A.\,|x|\leq\aleph_0$. אזי $|\bigcup A|\leq\aleph_0$.

משפט 4.7 תהא A קבוצה של קבוצות כך ש־$|A|=\aleph_0$ וגם $\forall x,y\in A.x\neq y\implies x\cap y=\emptyset$ וגם $\forall x\in A.\,|x|\leq\aleph_0$ אזי $|\bigcup A|=\aleph_0$.

חלק III
קומבינטוריקה

8 קומבינטוריקה בסיסית

8.1 בינום, מולטינום, ...

בינום ־ מקדם בינומי: יהיו $n \geq k \geq 0$. נגדיר: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. זה שווה למספר האפשרויות לבחור קבוצה של k ילדים מתוך n ילדים (ללא חשיבות לסדר).

חלוקה לתאים: $S(n,k)$ זה מספר המולטי קבוצות (בלי חשיבות לסדר, עם החזרה) בגודל k בתור $\{1,2,\ldots,n\}$, שזה שקול לחלוקת k כדורים זהים ל־n תאים. מחשבים באמצעות:

$$S(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$$

זהויות חשובות:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. **זהות פסקל:** $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. זה נכון כי לבחור k מתוך הקבוצה $\{1,\ldots,n\}$ זה כמות האפשרויות אם לא נבחר את 1 (שזה $\binom{n-1}{k}$) ועוד כמות האפשרויות אם נבחר את 1 (שזה $\binom{n-1}{k-1}$).

8.2 סדרת הפרשים

דרך נפוצה לפתור בעיות של ספירת סדרות. עבור סדרה a, סדרת ההפרשים y מוגדרת כך: $y_1 = a_1, y_{i+1} = a_{i+1} - a_i$. במילים אחרות סדרת ההפרשים היא $a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots$.

8.3 הוכחות קומבינטוריות

דרך להוכיח כי שני ביטויים שווים. נמצא בעיה ששני הצדדים בשוויון פותרים ואז נוכיח ששני הצדדים פותרים את אותה הבעיה.

8.4 הבינום של ניוטון

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

לכל $x, y \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$.

8.4.1 המקדם המולטינומי

נגדיר את המקדם המולטינומי: עבור $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ כך ש־$k_1 + \cdots + k_m = n$ נגדיר את המקדם המולטינומי:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdot \cdots \cdot k_m!}$$

הגדרה קומבינטורית: המקדם המולטינומי $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ עבור $k_1 + \cdots + k_m = n$ הינו מספר האפשרויות להרכיב מילה באורך n מעל א"ב $\{1,\ldots,m\}$ עם בדיוק k_1 1ים, k_2 2ים, ...

זה שווה ל־$\binom{k_m}{k_m} \cdot \dots \cdot \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdot \binom{n}{k_1}$.

נוסחת המולטינום:

$$(x_1+\dots+x_m)^n = \sum_{k_1+\dots+k_m=n} \binom{n}{k_1,\dots,k_m} x^{k_1} \cdot x^{k_2} \cdot \dots \cdot x^{k_m}$$

8.4.2 המקדם הבינומי הכללי

לכל $r \in \mathbb{R}$, ולכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר $r^{\overline{k}} = r \cdot (r-1) \cdot \dots \cdot (r-k+1)$. בנוסף $n^{\overline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$, $n^{\overline{n}} = n!$, $n^{\overline{0}} = 1, n^{\overline{1}} = n$. $\frac{1}{2}^{\overline{3}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8}$.

הגדרה 1.8 לכל $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ נגדיר את הבינום השלילי להיות $\binom{r}{k} = \frac{r^{\overline{k}}}{k!} = \frac{r(r-1)\cdot \dots \cdot (r-k+1)}{k!}$.

8.4.3 נוסחת הבינום השלילי

עבור $r, x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$$

8.5 הכלה והדחה

נוסחת ההכלה וההדחה: יהיו $A_1, \dots, A_n$ קבוצות סופיות.

$$\begin{aligned} \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \\ &- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_i \cap A_j| - \dots \\ &+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots + |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \\ &- \dots \\ &+ \dots \end{aligned}$$

בנוסחה זו יש $2^n - 1$ מחוברים (כל תתי הקבוצות חוץ מהקבוצה הריקה). הנוסחה הזו רלוונטית אם הרבה מהמחוברים הם 0.

המקרה הסימטרי (בכל שורה בנוסחת ההכלה וההדחה, הגורמים יוצאים שווים): הגודל של חיתוך המאורעות אינו תלוי באילו מאורעות אנו חותכים, אלא רק בכמות המאורעות. במקרה זה נפשט את הנוסחה להיות:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \cdot |A_1 \cap \dots \cap A_k|$$

8.6 עקרון שובך היונים

אם מחלקים m יונים ל־n שובכים, אז קיים שובך עם לפחות $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ יונים.

8.7 מספרי קטלן C_n

הגדרה: הפתרון לבעיות הבאות:

- כמה הילוכים שמתחילים בנקודה $(0,0)$ ומסתיימים ב־(n,n) יש כך שבכל שלב קופצים צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה, ואסור לעבור את האלכסון $y=x$?
- כמה סדרות של 0 ו־1 באורך $2n$ יש כך שלכל $1 \le k \le 2n$, מספר האפסים לא עולה על מספר האחדים עד המקום ה־k ויש בדיוק n אפסים ו־n אחדים?
- כמה דרכים חוקיות יש לשים n סוגריים ו־$2n$ תווים? (למשל עבור $n=3$ משהו כמו $(())()(())$ נחשב לחוקי)

חישוב: $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n}$
נוסחת נסיגה: עבור $n \ge 1$,

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} \cdot C_{n-i}$$

9 פונקציות יוצרות

תהא $\bar{a} = \lambda n \in \mathbb{N}.a_n$ סדרת מספרים. <u>הפונקציה היוצרת את הסדרה $\bar{a}$</u> היא הפונקציה $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (טור חזקות). בכיוון ההפוך, בהינתן פונקציה f שניתן לפתח לטור חזקות, כלומר, שניתן לבטא על ידי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, סדרת המקדמים $\lambda n \in \mathbb{N}.a_n$ נקראת ה<u>סדרה הנוצרת</u>.

9.1 נוסחאות

הגדרה 1.9 תהא $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרת מספרים כלשהי. נגדיר טור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$$

רשימת נוסחאות:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} S(m,n)\, x^n$$

הפונקציה $\alpha f(x) \pm \beta g(x)$ יוצרת את הסדרה $\lambda n \in \mathbb{N}.\alpha a_n \pm \beta b_n$.
הפונקציה $f(cx)$ יוצרת את הסדרה $\lambda n \in \mathbb{N}.c^n \cdot a_n$.
הפונקציה $x^m \cdot f(x)$ יוצרת את הסדרה $\lambda n \in \mathbb{N}.\begin{cases} 0 & n<m \\ a_{n-m} & n \ge m \end{cases}$.

$f(x)\cdot g(x)$ יוצרת את הקונבולוציה של הסדרות: $\lambda n \in \mathbb{N}.\overbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}}^{a_0\cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \cdots + a_n \cdot b_0}$.

מקרה פרטי של 4: $\frac{f(x)}{1-x}$ יוצרת את סדרת הסכומים החלקיים $\lambda n \in \mathbb{N}.\sum_{k=0}^{n} a_k$.

9.2 פירוק לשברים חלקיים

הסיבה שאנחנו עושים פירוק לשברים חלקיים היא שהפונקציה $\alpha f(x) \pm \beta g(x)$ נוצרת מהסדרה $\lambda n \in \mathbb{N}.\alpha a_n \pm \beta b_n$, לכן יותר קל לנו למצוא פונקציה יוצרת לסכום של כמה שברים מאשר שבר אחד גדול.

הפירוק לשברים חלקיים הכי פשוט הוא כאשר כל הגורמים במכנה שונים. למשל:

$$\frac{x+3}{x^2-3x-40}=\frac{x+3}{(x-8)(x+5)}=\frac{A}{x-8}+\frac{B}{x+5}$$
$$x+3=A(x+5)+B(x-8)$$

ואז מוצאים את A,B לפי המשוואה. אם יש ביטוי שאינו פריק במכנה, למשל:

$$\frac{10x^2+12x+20}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

עבור כל גורם ממעלה שנייה נוסיף מונה מהצורה $ax+b$. לאחר מכן נקבל את המשוואה: $10x^2+12x+2=A\left(x^2+2x+4\right)+(Bx+C)(x-2)$ שאותה צריך לפתור.

אם יש גורמים שחוזרים על עצמם במכנה, למשל:

$$\frac{P(x)}{(x+2)(x^2+1)^5}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^3}+\frac{Hx+I}{(x^2+1)^4}+\frac{Jx+K}{(x^2+1)^5}$$

אז נסכום את הגורם שחוזר על עצמו מ־1 עד המעריך של החזקה.

10 נוסחאות נסיגה

הגדרה 1.10 נוסחת נסיגה היא ביטוי של איבר בסדרה באמצעות איברים קודמים בסדרה.

דוגמא: פיבונאצ'י. $a_0=1, a_1=1, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$.

לנוסחת נסיגה יש משמעות רק החל מ־n מסוים (כי היא דורשת מספרים קודמים שלא קיימים קודם לכן).

הגדרה: עומק הרקורסיה הוא כמות האינדקסים שצריך לנסוג (לחזור אחורה) על מנת לחשב את האיבר בסדרה.

תנאי התחלה: השמה נתונה במשוואת הרקורסיה מעומק k. השמה של $a_0,\ldots,a_{k-1}$ היא תנאי התחלה.

בעיית התחלה: נוסחה רקורסיבית מעומק k ותנאי התחלה.

פתרון של בעיית התחלה: סדרה $\lambda n \in \mathbb{N}.a_n$ נקראת פתרון לבעיית התחלה אם הסדרה מקיימת את כל תנאי ההתחלה ואת המשוואה הרקורסיבית לכל n שעבורו יש משמעות למשוואה. לבעיית התחלה תמיד יש פתרון יחיד.

פתרון לנוסחת נסיגה: כל סדרה $\lambda n \in \mathbb{N}$ המקיימת את המשוואה לכל n עבורו יש משמעות למשוואה.

10.1 נוסחאות נסיגה לינאריות

10.1.1 נוסחאות נסיגה לינאריות הומוגניות

נוסחאות נסיגה מהצורה $a_n=\alpha_1\cdot a_{n-1}+\cdots+\alpha_k\cdot a_{n-k}$. כאשר $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}$.

10.1.2 נוסחאות נסיגה לינאריות לא הומוגניות

נוסחאות נסיגה מהצורה $a_n=\alpha_1 a_{n-1}+\cdots+\alpha_k a_{n-k}+\beta$ כאשר $\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta\in\mathbb{R}$. ניתן לעבור מנוסחת נסיגה לינארית לא הומוגנית (למשל $a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}+5$) לנוסחת נסיגה לינארית

הומוגנית באופן הבא: נוסיף את a_{n-1} משני אגפי המשוואה ונקבל:

$$a_n + 2a_{n-2} + 3a_{n-3} + 5 = 3a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5$$
$$a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2} - 3a_{n-3}$$

10.2 פתרון נוסחאות נסיגה ליניאריות

10.2.1 פתרון נוסחאות נסיגה ליניאריות באמצעות פונקציות יוצרות

למשל: $a_{n+1} = (1.1)\, a_n + 1000$. נסמן ב־$f(x)$ את הפונקציה היוצרת של איזשהו פתרון. ננסה להבין מתנאי הנסיגה מהי $f(x)$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (1.1 \cdot a_{n-1} + 1000)\, x^n = a_0 + (1.1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + 1000 \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$
$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x \cdot f(x) \right) = a_0 + 1.1x \cdot f(x) + \frac{1000x}{1-x}$$
$$f(x) \cdot (1 - 1.1x) = \frac{a_0 (1-x) + 1000x}{1-x}$$
$$f(x) = \frac{a_0 (1-x) + 1000x}{(1-x)(1-1.1x)}$$

ומכאן מוצאים את הסדרה שהפונקציה יוצרת.

10.2.2 פתרון נוסחאות נסיגה ליניאריות הומוגניות באמצעות פולינום אופייני

עבור נוסחה $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, a_0 = 0, a_1 = 1$, נעבור לפולינום האופייני כך: $\overbrace{a_{n+1}}^{x^2} - \overbrace{a_n}^{x^1} - \overbrace{a_{n-1}}^{x_0} = 0$, $x^2 - x - 1 = 0$. נמצא את שורשי הפולינום (הם $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$). אם כך הפתרונות הבסיסיים (שמקיימים את נוסחת הנסיגה אך לא את תנאי ההתחלה) הם $\lambda n \in \mathbb{N}. \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \lambda n \in \mathbb{N}. \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. נמצא את הפתרון של בעיית ההתחלה:

$$a_n = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

נמצא את A, B באמצעות תנאי ההתחלה ונקבל כי $A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

פירוט על פתרונות בסיסיים:

- אם אין שורשים ממשיים, כרגע אנחנו לא יודעים מה לעשות.
- אם עומק הרקורסיה הוא 2:
  - ויש שני שורשים שונים λ_1, λ_2, אז הפתרונות הבסיסיים הם כפי שעשינו בתרגיל הזה שזה $\lambda n \in \mathbb{N}. (\lambda_1)^n, \lambda n \in \mathbb{N}. (\lambda_2)^n$.
  - ויש שורש יחיד λ_1, אז הפתרונות הבסיסיים הם $\lambda n \in \mathbb{N}. n \cdot \lambda_1^n, \lambda n \in \mathbb{N}. \lambda_1^n$.
- אם עומק הרקורסיה הוא 3:
  - ויש שלושה שורשים שונים $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, אז הפתרונות הבסיסיים הם $\lambda n \in \mathbb{N}. \lambda_1^n, \lambda n \in \mathbb{N}. \lambda_2^n, \lambda n \in \mathbb{N}. \lambda_3^n$.
  - ויש שני שורשים $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, אז הפתרונות הבסיסיים הם גם $\lambda n \in \mathbb{N}. \lambda_1^n, \lambda n \in \mathbb{N}. \lambda_2^n, \lambda n \in \mathbb{N}. \lambda_3^n$.
  - ויש שורש יחיד λ_1, אז הפתרונות הבסיסיים הם $\lambda n \in \mathbb{N}. n^2 \cdot \lambda_1^n, \lambda n \in \mathbb{N}. n \cdot \lambda_1^n, \lambda n \in \mathbb{N}. \lambda_1^n$.
- ...וכך הלאה.

10.2.3 מעבר מפתרון יחיד של נוסחת נסיגה לא הומוגנית לקבוצת הפתרונות

נשתמש במשפט הבא:

$$\{\lambda n\in\mathbb{N}.a_n+x_n\mid\text{solution for }a_n=\alpha_1a_{n-1}+\cdots+\alpha_ka_{n-k}\}=\{f\in\mathbb{N}\to\mathbb{R}\mid a_n=\alpha_1a_{n-1}+\cdots+\alpha_ka_{n-k}+\beta\}$$

כאשר x_n פתרון נתון אחד למשוואה $a_n=\alpha_1a_{n-1}+\cdots+\alpha_ka_{n-k}+\beta$. כלומר ברגע שיש לנו פתרון אחד לנוסחת נסיגה לא הומוגנית ניתן למצוא את כל הפתרונות באמצעות פתרון נוסחת הנסיגה ההומוגנית.

10.3 סדרות עזר

שיטה שימושית לפתרון נוסחאות נסיגה. נגדיר סדרות עזר (סדרות שאנחנו לא צריכים לחשב) שיתבטלו בנוסחה הסופית, אך עוזרות להגדיר את הקשרים בין הנוסחאות. למשל, כמה מחרוזות באורך n ישנן מעל א"ב $\{A,B,C\}$ ללא הרצפים BB,CC? הפתרון הוא x_n. נסמן ב־a_n את המחרוזות שמסתיימות ב־A, וב־b_n את המחרוזות שנגמרות ב־B וב־c_n את אלה שנגמרות ב־C. נמצא קשרים בין הנוסחאות:

$$\begin{aligned}&x_n=a_n+b_n+c_n=x_{n-1}+b_n+c_n=x_{n-1}+2b_n\\&a_n=x_{n-1}\\&b_n=a_{n-1}+c_{n-1}=x_{n-2}+c_{n-1}\\&c_n=b_n\end{aligned}$$

ונקבל כי $\frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{2}+x_{n-2}=b_n=\frac{x_n-x_{n-1}}{2}$ כלומר $x_n=2x_{n-1}+x_{n-2}$.

חלק IV

תורת הגרפים

11 הגדרות בסיסיות

$G=\langle V,E\rangle$, כאשר V זה הצמתים ו־E זה הקשתות. $E\subseteq P_2(V)=\{X\subseteq V\mid |X|=2\}$.

הגדרה 1.11 $N(v\in V)=\{u\in V\mid\{v,u\}\in E\}$ זה קבוצת השכנים.

הגדרה 2.11 $d_G(v\in V)=|\{e\in E\mid v\in e\}|$ זו הדרגה.

הגדרה 3.11 תת־גרף של G הינו גרף $G'=\langle V',E'\rangle$ כך ש־$V'\subseteq V$ ו־$E'\subseteq E$ (וגם $E'\subseteq P_2(V')$ כי אחרת זה לא גרף).

הגדרה 4.11 יהי $K\subseteq V$. הגרף הנפרש על ידי K מסומן $G[K]=\langle K,P_2(K)\cap E\rangle$ תת גרף של G.

הגדרה 5.11 הגרף המשלים $\overline{G}$ הינו הגרף $\overline{G}=\langle V,P_2(V)\setminus E\rangle$.

11.1 מסלול, טיול, וכל הדברים האלה

- טיול הוא סדרת קודקודים $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle\in V^n$ כך שלכל $1\le i\le n-1$, $\{a_i,a_{i+1}\}\in E$. לא קיים טיול ריק.
- מסלול הוא טיול $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ כך שאין קשת שחוזרת פעמיים.
- מעגל הוא מסלול שמתחיל ונגמר באותה הנקודה.

- מסלול פשוט הוא מסלול חסר מעגלים, כלומר מסלול שלא חוזר על קודקוד פעמיים.
- מעגל פשוט הוא מעגל $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ כך ש־$\langle a_1,\ldots,a_n,a_1\rangle$ הוא מסלול פשוט. כלומר הפעם היחידה שהמעגל הזה חוזר על נקודה זה בנקודת ההתחלה.
- מסלול אוילר הוא מסלול שעובר בכל קשת בדיוק פעם אחת.
- מעגל אוילר הוא מעגל שעובר בכל קשת בדיוק פעם אחת.
  - ב־G יש מעגל אוילר $\iff$ דרגת כל הקודקודים היא זוגית.
  - ב־G יש מסלול אוילר $\iff$ יש 0 או 2 קודקודים מדרגה אי זוגית.
- מסלול המילטון הוא מסלול שעובר בכל קודקוד בדיוק פעם אחת.
- מעגל המילטון הוא מעגל פשוט שעובר על כל הקודקודים.

משפט 6.11 יהי $G=\langle V,E\rangle$ גרף, $v\neq u\in V$. אזי יש טיול מ־v ל־u $\iff$ יש מסלול פשוט מ־v ל־u.

11.2 קשירות

יהי G גרף, על V אפשר להגדיר יחס שקילות ("יחס הקשירות"): עבור $v_1,v_2\in V$ נגדיר כי $v_1\sim v_2$ $\iff$ קיים טיול מ־v_1 ל־v_2 ($\iff$ קיים מסלול פשוט מ־v_1 ל־v_2).

הגדרה 7.11 כל מחלקת שקילות ביחס הקשירות נקראת "רכיב קשירות".

הגדרה 8.11 גרף G נקרא קשיר אם יש בדיוק רכיב קשירות אחד. או באופן שקול אם בין כל שני קודקודים $v_1.v_2\in V$ קיים טיול.

משפט 9.11 יהי G גרף ונניח כי $k_1,\ldots,k_n$ הם רכיבי הקשירות של G.

1. לכל $1\leq i\leq n$, $G\left[k_i\right]$ הינו תת־גרף קשיר של G.
2. אין קשתות בין קודקודים מרכיבי קשירות שונים.
3. אם מוסיפים לגרף G קשת בין קודקוד $v\in k_1$ ו־$u\in k_2$ אז בגרף החדש רכיבי הקשירות יהיו $k_1\cup k_2,k_3,k_4,\ldots,k_n$.
4. אם מוסיפים לגרף G קשת בין שני קודקודים באותו רכיב הקשירות, רכיבי הקשירות לא משתנים.

מסקנה 10.11 לכל גרף G, מספר רכיבי הקשירות ב־$G\leq |E|-|V|$.

מסקנה 11.11 אם $|E|<|V|-1$ אז G לא קשיר.

מסקנה 12.11 אם G קשיר אז $|E|\geq|V|-1$.

הגדרה 13.11 צביעות של גרפים: צביעה היא פונקציה. יש שתי סוגים של צביעות:

1. צביעת קודקודים. $f:V\to C$ נקראת צביעת קודקודים.
2. צביעת קשתות. $G=\langle V,E\rangle$, $f:E\to C$ כאשר C קבוצת הצבעים. f נקראת צביעת קשתות ב־C צבעים.
3. צביעת קודקודים $f:A\to C$ נקראת חוקית אם $\forall\{v,u\}\in E.f\left(v\right)\neq f\left(u\right)$ (הצבעים שונים בין קודקודים שכנים).
4. אין חוק דומה לצביעת קשתות.

הגדרה 14.11 יהי $G = \langle V, E\rangle$ גרף. מספר הצביעה של G, מסומן $\chi(G)$ הינו מספר הצבעים הקטן ביותר הדרוש על מנת לצבוע את G בצביעת קודקודים חוקית.

הערה: $1 \leq \chi(G) \leq |V|$, יתר על כן:

1. $G = K_V \iff \chi(g) = |V|$.
2. $E = \emptyset \iff \chi(g) = 1$.

הגדרה 15.11 נאמר כי גרף G הוא n־צביע אם קיימת צביעת קודקודים חוקית ב־n צבעים. $\chi(G)$ הוא ה־n הקטן ביותר כש ש־G הוא n־צביע.

12 עצים

הגדרה 1.12 עץ הינו גרף קשיר וחסר מעגלים.

הגדרה 2.12 יער הינו גרף חסר מעגלים.

מסקנה 3.12 ביער מספר הקשתות קטן ממספר הקודקודים.

מסקנה 4.12 רכיבי הקשירות של יער הם עצים.

משפט 5.12 אם $G = \langle V, E\rangle$ עץ אז $|E| = |V| - 1$.

משפט 6.12 משפט האפיון (משפט מרכזי בקורס): יהי $G = \langle V, E\rangle$ גרף, הבאים שקולים:

1. G עץ.
2. G קשיר וגם $|E| = |V| - 1$
3. G חסר מעגלים ו־$|E| = |V| - 1$.
4. G קשיר מינימלי (כלומר אם נחסיר קשת מ־G נקבל גרף לא קשיר).
5. G חסר מעגלים מקסימלי (כלומר כל קשת חדשה שנוסיף ל־G תסגור מעגל כלשהו).
6. בין כל שני קודקודים $v_1, v_2 \in V$, קיים מסלול פשוט יחיד.

הגדרה 7.12 יהי $G = \langle V, E\rangle$ גרף. עץ פורש של G, הוא תת גרף $T = \langle V, E'\rangle$ של G כך ש־T עץ.

משפט 8.12 לכל גרף קשיר קיים עץ פורש.

12.1 קידוד פרופר

הגדרה 9.12 קידוד פרופר: ישנה התאמה חח"ע ועל בין קבוצת הקודקודים $\{1, \ldots, n\}$ לבין מחרוזות באורך $n-2$ מעל א"ב $\{1, \ldots, n\}$. ההתאמה לוקחת עץ, ומקודדת אותו כמחרוזת. הקידוד מוגדר באופן הבא:

טענה 10.12 עבור כל קודקוד, מספר המופעים במחרוזת שווה לדרגת הקודקוד פחות אחד.

בכל שלב מבצעים את הפעולות הבאות כל עוד מספר הקודקודים גדול מ־2.

1. בודקים מהי קבוצת העלים.
2. בוחרים את העלה בעל הערך המספרי המינימלי. נסמנו ב־x.
3. מוסיפים את הקודקוד היחיד אליו x מחובר למחרוזת. נסמנו ב־y. y נקרא האב של x ו־x נקרא ילד של y.

4. נמחק את x ואת הקשת היחידה $\{x,y\}$.

הגדרה 11.12 קידוד פרופר ההפוך: בהנתן מחרוזת הקידוד ההפוך משחזר את העץ. הקידוד ההפוך מתבצע באופן הבא:

1. אורך המחרוזת הינו $n-2$. ולכן מספר הקודקודים בגרף הינו אורך המחרוזת ועוד שתיים.
2. אנו בונים את העץ מעלים לכיוון השורש, בכל שלב נבצע את הפעולות הבאות:
   (א) נמצא את קבוצת העלים ע"י איתור של כל התווים שלא מופיעים במחרוזת.
   (ב) את העלה בעל הערך הקטן ביותר, נחבר לתו השמאלי ביותר במחרוזת.
   (ג) נמחק את העלה שחובר מרשימת העלים, ונמחק את התו השמאלי ביותר מהמחרוזת.
   (ד) את העלה האחרון מחברים לקודקוד n.

13 איזומורפיזם

יהיו $G_1=\langle V_1,E_1\rangle$, $G_2=\langle V_2,E_2\rangle$. פונקציה $f:V_1\to V_2$ נקראת איזומורפיזם של גרפים אם:

1. f חח"ע ועל.
2. $\forall v,u\in V_1.\{v,u\}\in E_1\iff\{f(v),f(u)\}\in E_2$.

משפט 1.13 אם $G_1\simeq G_2$ (ע"י $f:V_1\to V_2$)

1. $|V_1|=|V_2|\wedge|E_1|=|E_2|$
2. $d_{G_1}(v)=d_{G_2}(f(v))$
3. אם $\langle v_1,\ldots,v_n\rangle$ טיול/מסלול/... ב־G_1 אז $\langle f(v_1),\ldots,f(v_n)\rangle$ אותו הדבר ב־G_2.
4. מספר רכיבי הקשירות ב־G_1 ו־G_2 זהה.
5. G_1 עץ $\iff$ G_2 עץ.

הערה: אם נקבע את הקודקודים להיות $\{1,\ldots,n\}$, אז על קבוצת הגרפים $Graph(\{1,\ldots,n\})=\{\langle V,E\rangle\mid V=\{1,\ldots,n\}\}$, אז $\simeq$ הוא יחס שקילות.

הגדרה 2.13 $[G]_\simeq$ זה גרף לא מסומן, כלומר גרף בלי שמות לקודקודים.

14 נוסחאות

נוסחת לחיצות הידיים: לכל גרף $G=\langle V,E\rangle$ מתקיים:

$$2|E|=\sum_{v\in V}d(v)$$

משפט 1.14 יהי $G=\langle V,E\rangle$ גרף חסר מעגלים (אין אף מעגל ב־G) אזי $|E|<|V|$.

מסקנה 2.14 אם $|E|\le|V|$ אז ב־G יש מעגל.
מספר העצים על $\{1,\ldots,n\}$ הוא n^{n-2}.