

# סיכומי הרצאות - חדו"א 1א

מיכאל פרבר ברודסקי

## תוכן עניינים

2	נוסחאות כלליות . . . . .	1
2	חסמים עליונים ותחתונים . . . . .	2
2	סדרות . . . . .	3
2	3.1 הגדרת הגבול . . . . .	
3	3.2 חשבון גבולות . . . . .	
3	3.3 טענות על גבולות . . . . .	
3	3.4 מבחן ה[שורש](מנה) [(הגבולי)?] . . . . .	
4	3.5 סדרות מונוטוניות . . . . .	
4	3.6 תתי סדרות . . . . .	
4	3.6.1 גבולות חלקיים . . . . .	
5	טורים . . . . .	4
5	4.1 טור חיובי . . . . .	
5	4.2 מבחן ה[השוואה](שורש)(מנה) [(הגבולי)?] לטורים חיוביים . . . . .	
6	4.3 טור מתכנס בהחלט . . . . .	
6	4.4 טורי חזקות . . . . .	
7	4.5 טענות נוספות על טורים . . . . .	
7	פונקציות . . . . .	5
7	5.1 הגדרת הגבול . . . . .	
7	5.2 חשבון גבולות (דומה לסדרות) . . . . .	
8	5.3 גבולות שימושיים . . . . .	
8	5.4 רציפות . . . . .	
9	5.5 רציפות במ"ש (במידה שווה) . . . . .	
9	5.6 נגזרת . . . . .	
11	5.7 חקירת פונקציות . . . . .	
11	5.7.1 מינימום ומקסימום מקומי . . . . .	
11	5.7.2 עליה וירידה . . . . .	
11	5.8 כלל לופיטל . . . . .	
11	5.8.1 $\frac{0}{0}$ . . . . .	
11	5.8.2 $\frac{\infty}{\infty}$ . . . . .	
12	טורי טיילור . . . . .	6
12	6.1 היי זה לא הזה ממבוא מורחב? . . . . .	
12	6.2 באמת טורי טיילור אני מבטיח . . . . .	

## 1 נוסחאות כלליות

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$	בינום:
$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \geq \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$	א"ש הממוצעים:
$(1+x)^n \geq 1+nx$ לכל $x > -1, n \in \mathbb{N}$ מתקיים	א"ש ברנולי:
$ a+b  \leq  a  +  b $	א"ש המשולש:

## 2 חסמים עליונים ותחתונים

$M$  יקרא חסם מלעיל של  $A$  אם לכל  $x \in A, x \leq M$ .  
 $M$  יקרא חסם מלרע של  $A$  אם לכל  $x \in A, M \leq x$ .

אקסיומת השלמות: לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל קיים חסם עליון קטן ביותר, ונסמן אותו ב- $\sup A$ .

**טענה שימושית:** אם  $b = \sup A$  אז לכל  $\varepsilon > 0$ , קיים  $a \in A$  כך ש- $b - \varepsilon < a \leq b$ .

**הגדרה:** נאמר ש- $A$  צפופה ב- $B$  אם לכל  $b \in B$  ולכל  $\varepsilon > 0$ , קיים  $a \in A$  כך ש- $|b - a| < \varepsilon$ .

**טענה:**  $S \subseteq \mathbb{R}$  צפופה ב- $\mathbb{R} \iff (a, b) \cap S \neq \emptyset, a < b \in \mathbb{R}$  לכל.

**טענה:** לכל  $a < b$ , קיים  $q$  כך ש- $q \in (a, b)$ .

**הוכחה:** נניח ש- $a > 0$ . יהי  $k$  כך ש- $0 < \frac{1}{k} < b - a$ . יהי  $m$  המספר הקטן ביותר כך ש- $\frac{m}{k} \geq b$ . אז  $\frac{m-1}{k} < b$ . בנוסף,  $a + \frac{1}{k} < a + (b - a) = b$  ולכן  $a < \frac{m-1}{k}$ . אם כך,  $a < \frac{m-1}{k} < b$  וסיימנו. אם  $a \leq 0$ , נוסיף את  $x = \lceil |a| + 17 \rceil$  ל- $a, b$  ועבור  $c = a + x, d = b + x$  קיים  $q \in (a + x, b + x)$  ולכן  $q - x \in (a, b)$  מש"ל.

**טענה:**  $\mathbb{Q}$  צפופה ב- $\mathbb{R}$  ו- $\mathbb{Q} \cap [a, b]$  צפופה ב- $[a, b]$ .

## 3 סדרות

נסמן סדרות ב- $(a_n)$  או  $(a_n)_{n=1}^\infty$ .

נאמר שסדרה חסומה מלעיל אם קיים  $M$  כך שלכל  $n, a_n \leq M$ .

נאמר שסדרה חסומה מלרע אם קיים  $M$  כך שלכל  $n, M \leq a_n$ .

נאמר שסדרה חסומה אם קיים  $M$  כך שלכל  $n, |a_n| \leq M$ .

### 3.1 הגדרת הגבול

נאמר שהגבול של  $(a_n)$  הוא  $L$ , ונסמן  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  או  $a_n \rightarrow L$ , אם:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall n > n_0. |a_n - L| < \varepsilon$$

נאמר שהגבול של  $(a_n)$  הוא  $\infty$ , ונסמן  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  או  $a_n \rightarrow \infty$ , אם:

$$\forall M > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall n > n_0. a_n > M$$

**משפט (יחידות הגבול):** אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L'$  אז  $L = L'$ .

**סדרות קושי:** זהו תנאי שקול להתכנסות, שלא צריך לדעת בשבילו את  $L$ :

$$\forall \varepsilon > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall m, n \geq n_0. |a_m - a_n| < \varepsilon$$

### 3.2 חשבון גבולות

יהיו  $(a_n), (b_n)$  סדרות כך ש- $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$  אזי:

- $a_n + b_n \rightarrow a + b$
- $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$
- אם  $b_n \neq 0$  לכל  $n$  ו- $b \neq 0$  אז  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$
- אם  $b_n \neq 0$  לכל  $n$  ו- $b = 0$  אז  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \infty$
- $|a_n| \rightarrow |a|$
- אם  $a_n \geq 0$  לכל  $n$  אז  $\sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{a}$

### 3.3 טענות על גבולות

**טענה:** יהיו  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$  סדרות מתכנסות כך ש- $a_n \leq b_n$  אז:  $a \leq b$ .  
**כלל הסנדוויץ':** יהיו  $x_n, y_n, z_n$  סדרות כך ש- $x_n \leq z_n \leq y_n$  (כמעט) לכל  $n$ . אם  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$  אז  $z_n \rightarrow x$ .

**הרחבה:** אם  $x_n \geq y_n$  ו- $y_n \rightarrow \infty$  אז  $x_n \rightarrow \infty$ .  
**טענה:** תהי  $(a_n)$  כך ש- $a_n \rightarrow L \neq 0$  ויהי  $0 < r < |L|$  אז קיים  $n_0$  כך שלכל  $n > n_0$ ,  $|a_n| > r$ .  
**משפט (שטולץ):** יהיו  $a_n, b_n$  סדרות כך ש- $b_n$  מונוטונית עולה ו- $b_n \rightarrow \infty$  או ש- $a_n, b_n$  סדרות מונוטוניות מתכנסות ל-0.

אזי, אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$  במובן הרחב אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ .

### 3.4 מבחן ה[שורש](מנה) (הגבולי)?

**מבחן השורש:**  $a_n \geq 0$  וקיים  $0 \leq \alpha < 1$  כך ש- $(a_n)^{1/n} \leq \alpha$  לכל  $n$ . אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .  
**מבחן השורש הגבולי:**  $a_n > 0$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = L$ . אזי,

• אם  $L < 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

• אם  $L > 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

**משפט המנה הגבולי:**  $a_n > 0$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ . אזי,

• אם  $L < 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

• אם  $L > 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

**משפט (דלאמבר):** תהי  $(a_n)$  סדרה חיובית כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$ , סופי או אינסופי. אזי,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = c$ .

**משפט המנה הכללי:**  $a_n > 0$

• אם קיים  $L < 1$  כך שהחל ממקום מסוים  $a_{n+1} < La_n$  אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

• אם קיים  $L > 1$  כך שהחל ממקום מסוים  $a_{n+1} > La_n$  אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

### 3.5 סדרות מונוטוניות

**טענה:** תהי  $(a_n)$  מונוטונית עולה וחסומה מלעיל. אזי:  $a_n \rightarrow \sup a_n$ .

**טענה:** תהי  $(a_n)$  מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל. אזי:  $a_n \rightarrow \infty$ .

### 3.6 תתי סדרות

תהי  $(a_n)$  סדרה ו- $(n_k)$  סדרה עולה ממש של טבעיים. אז  $b_k = a_{n_k}$  תת סדרה של  $(a_n)$  ונסמן ב- $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ .

**משפט הירושה:** תהי  $(a_n)$  סדרה ו- $(a_{n_k})$  תת-סדרה.

• אם  $a_n \rightarrow L$  אז  $a_{n_k} \rightarrow L$

• אם  $a_n$  מונוטונית עולה אז  $a_{n_k}$  מונוטונית עולה

• אם  $a_n$  חסומה אז  $a_{n_k}$  חסומה

**משפט בולצנו-וירשטראס:** לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת ומונוטונית. אם הסדרה לא חסומה יש תת-סדרה מונוטונית מתבדרת ל- $\pm\infty$ .

#### 3.6.1 גבולות חלקיים

**הגדרה:**  $L$  יקרא גבול חלקי אם קיימת  $a_{n_k} \rightarrow L$ . נסמן ב- $\hat{\mathcal{P}}(a_n)$  את קבוצת הגבולות החלקיים, ונסמן ב- $\mathcal{P}(a_n)$  את קבוצת הגבולות החלקיים בלי  $\pm\infty$ .

בנוסף, נגדיר:  $\limsup a_n = \overline{\lim} a_n = \sup \hat{\mathcal{P}}(a_n)$ ,  $\liminf a_n = \underline{\lim} a_n = \inf \hat{\mathcal{P}}(a_n)$ .

**הערה:** על פי בולצנו-וירשטראס, תמיד קיים גבול חלקי

**טענה שימושית:** תהי  $(a_n)$  חסומה.  $L = \limsup a_n \iff$ :

1. לכל  $\varepsilon > 0$ ,  $a_n < L + \varepsilon$  כמעט תמיד (חוץ ממספר סופי של איברים)

2. לכל  $\varepsilon > 0$ ,  $L - \varepsilon < a_n$  תופעה שכיחה (באינסוף איברים)

**טענה:**  $L$  גבול חלקי של  $(a_n) \iff$  לכל  $\varepsilon > 0$ ,  $\{n \mid |a_n - L| < \varepsilon\}$  אינסופית

**טענה:**  $(a_n)$  חסומה  $\iff \limsup a_n, \liminf a_n$  קיימים והם גבולות חלקיים

**טענה:**  $(a_n)$  אינה חסומה מלעיל/מלרע  $\iff -\infty/\infty$  גבול חלקי

**טענה:**  $(a_n)$  מתכנסת במובן הרחב  $\iff$  יש גבול חלקי יחיד

**טענה:** בסדרה חסומה,  $\inf a_n \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq \sup a_n$

**קבוצה סגורה:** תהי  $B \subseteq \mathbb{R}$  קבוצה. נאמר ש- $B$  קבוצה סגורה אם לכל סדרה  $(x_n) \subseteq B$ ,  $x_n \rightarrow x \implies x \in B$ .

**משפט:** אם  $(a_n)$  חסומה אז  $\mathcal{P}(a_n)$  קבוצה סגורה.

## 4 טורים

תהי  $(a_n)$  סדרה. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ .  
הגדרה: נאמר ש- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  מתכנס  $\iff$  סדרת הסכומים החלקיים  $s_n$  מתכנסת.

**הערה:** הטור הוא עצם נפרד מסדרת הסכומים החלקיים, אסור לבלבל ביניהם

הטור הגיאומטרי:  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$  עבור  $|q| < 1$ .

טענה: אם  $\sum a_n$  מתכנס אז  $a_n \rightarrow 0$ .

קריטריון קושי להתכנסות טורים:  $\forall \varepsilon > 0. \exists n_0. \forall m \geq n_0. \forall p \in \mathbb{N}. \left| \sum_{k=m}^{m+p} a_k \right| < \varepsilon$

חשבון טורים:

• אם  $\sum a_n = K, \sum b_n = L$  מתכנסים אז  $\sum (a_n + b_n) = K + L$  מתכנס

• אם  $\sum a_n = L, \alpha \in \mathbb{R}$  מתכנס אז  $\sum \alpha a_n = \alpha L$  מתכנס

### 4.1 טור חיובי

נאמר ש- $\sum a_n$  טור חיובי אם  $a_n \geq 0$  לכל  $n$

משפט: טור חיובי מתכנס  $\iff s_n$  חסומה מלעיל

משפט: יהי  $\sum a_n$  טור חיובי. אם  $\sum a_n$  מתכנס, אז כל טור שמתקבל מסידור מחדש של האיברים בו גם מתכנס ולאותו הגבול.

### 4.2 מבחן ה[השוואה](שורש)(מנה)? (הגבולי) לטורים חיוביים

סימון: יהיו  $\sum a_n, \sum b_n$  טורים. אם החל ממקום מסוים,  $a_n \geq b_n$ , נסמן  $\sum a_n \succcurlyeq \sum b_n$ .  
מבחן ההשוואה לטורים חיוביים: יהיו  $\sum a_n, \sum b_n$  טורים חיוביים כך ש- $\sum a_n \succcurlyeq \sum b_n$ . אז:

1. אם  $\sum a_n$  מתכנס,  $\sum b_n$  מתכנס

2. אם  $\sum b_n$  מתבדר,  $\sum a_n$  מתבדר

מבחן ההשוואה הגבולי לטורים חיוביים: יהיו  $\sum a_n, \sum b_n$  טורים חיוביים כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ .

1. אם  $L = 0$ , אז אם  $\sum b_n$  מתכנס גם  $\sum a_n$  מתכנס ואם  $\sum a_n$  מתבדר אז גם  $\sum b_n$  מתבדר

2. אם  $L = \infty$ , אז אם  $\sum b_n$  מתבדר גם  $\sum a_n$  מתבדר ואם  $\sum a_n$  מתכנס אז גם  $\sum b_n$  מתכנס

3. אם  $L \in (0, \infty)$ , אז הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

מבחן השורש לטורים חיוביים: יהי  $\sum a_n$  טור חיובי ויהי  $0 < q < 1$ .

אם החל ממקום מסוים,  $\sqrt[n]{a_n} < q$ , אז  $\sum a_n$  מתכנס.

מבחן השורש הגבולי לטורים חיוביים: יהי  $\sum a_n$  טור חיובי.

1. אם  $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$  אז  $\sum a_n$  מתכנס

2. אם  $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$  אז  $\sum a_n$  מתבדר

**מבחן המנה לטורים חיוביים:** יהי  $\sum a_n$  טור חיובי כך ש- $a_n > 0$  לכל  $n$ .

1. אם קיים  $0 < q < 1$  כך שהחל ממקום מסוים  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$  אז הטור מתכנס

2. אם החל ממקום מסוים  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  אז הטור מתבדר

**מבחן המנה הגבולי לטורים חיוביים:** יהי  $\sum a_n$  טור חיובי כך ש- $a_n > 0$  לכל  $n$ .

1. אם  $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  אז  $\sum a_n$  מתכנס

2. אם  $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  אז  $\sum a_n$  מתבדר

**מבחן העיבוי לטורים חיוביים:** יהי  $\sum a_n$  טור חיובי כך ש- $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$  (מונוטוני יורד חלש). אזי,  $\sum a_n$  מתכנס אם ורק אם  $\sum 2^n a_{2^n}$  מתכנס.

### 4.3 טור מתכנס בהחלט

נאמר ש- $\sum a_n$  מתכנס בהחלט אם  $\sum |a_n|$  מתכנס. אם טור לא מתכנס בהחלט נאמר שהוא "מתכנס בתנאי"

**טענה:** אם  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט אז  $\sum a_n$  מתכנס

**טענה שימושית:** נסמן  $\bar{a}_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}$ ,  $\underline{a}_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$

$$\begin{aligned} a_n \geq 0 & \quad \bar{a}_n = a_n \quad \underline{a}_n = 0 \\ a_n \leq 0 & \quad \bar{a}_n = 0 \quad \underline{a}_n = -a_n \end{aligned}$$

ומתקיים ש- $a_n = \bar{a}_n - \underline{a}_n$ .

**טענה:** אם  $\sum \bar{a}_n$ ,  $\sum \underline{a}_n$  מתכנסים אז  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט.

**טענה:** אם  $\sum a_n$  מתכנס בתנאי, אז  $\sum \bar{a}_n, \sum \underline{a}_n \rightarrow \infty$ .

### 4.4 טורי חזקות

טור חזקות הוא טור מהצורה  $\sum a_n x^n$  או  $\sum a_n (x - x_0)^n$ , אבל פחות מתייחסים אליו.

טור חזקות בהכרח מתכנס באיזשהו  $x$ , למשל 0.

**משפט Abel:** לכל טור חזקות  $\sum a_n x^n$  קיים "מספר"  $R \in [0, \infty]$  (שנקרא רדיוס ההתכנסות) כך שלכל  $x \in (-R, R)$  הטור מתכנס בהחלט, ול- $x > R, x < -R$  הטור מתבדר.

**משפט Cauchy-Hadamard:** יהי  $\sum a_n x^n$  טור חזקות, רדיוס ההתכנסות הוא:  $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$  (כאשר  $\frac{1}{\infty} = 0, \frac{1}{0} = \infty$ ).

**הערה:** משפט Abel לא מתייחס ל- $\pm R$ , צריך לבדוק עבורם בנפרד

## 4.5 טענות נוספות על טורים

**טענה (הכנסת סוגריים):** יהי  $\sum a_n$  טור מתכנס ו- $n_k$  סדרה עולה של אינדקסים. נסמן  $A_1 = a_1 + \dots + a_{n_1}, A_2 = a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}, \dots$  אז הטור  $\sum A_n$  מתכנס ולאחריו הגבול.

**טענה הפוכה:** תהי  $(a_n)$  סדרה ו- $n_k$  סדרה עולה של אינדקסים. אם כל האיברים בתוך כל סוגריים,  $(a_j)_{n_k+1}^{n_{k+1}}$ , בעלי אותו סימן אז הטענה ההפוכה נכונה - אם  $\sum A_n$  מתכנס אז  $\sum a_n$  מתכנס.

**שימוש:** בתנאים הנכונים,  $\sum a_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + \dots$

**משפט לייבניץ על טורים מתכנסים:** תהי  $(a_n)$  סדרה אי-שלילית יורדת ל-0. אזי הטור  $\sum (-1)^n a_n$  מתכנס.

**טענה:** יהיו  $(a_n), (b_n)$  סדרות.  $\sum a_n b_n$  מתכנס אם אחד מהניסוחים הבאים מתקיים:

**תנאי Dirichlet:**  $b_n \nearrow 0$  או  $b_n \searrow 0$  ו- $|s_n^a| < M$   
**תנאי Abel:**  $b_n$  מונוטונית וחסומה ו- $\sum a_n$  מתכנס

**משפט Riemann:** יהי  $\sum a_n$  טור מתכנס בתנאי. אזי לכל  $-\infty \leq s \leq \infty$  ניתן לסדר את איברי הטור כך שיתכנס ל- $s$  או שאפילו לא יתכנס במובן הרחב.

## 5 פונקציות

### 5.1 הגדרת הגבול

בשביל  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  נדרוש ש- $f(x)$  מוגדרת בסביבה נקובה כלשהי.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$	$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.  f(x) - L  < \varepsilon$	Cauchy
	כלל $(x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}$ ו- $I$ סביבה נקובה, אם $x_n \rightarrow x_0$ אז $f(x_n) \rightarrow L$	Heine
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$	$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0, x_0 + \delta).  f(x) - L  < \varepsilon$	Cauchy
	כלל $(x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}$ ו- $x_0 < x_n \rightarrow x_0$ אז $f(x_n) \rightarrow L$	Heine
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$	$\forall \varepsilon > 0. \exists M > 0. \forall x > M.  f(x) - L  < \varepsilon$	Cauchy
	כלל $x_n \rightarrow \infty$ אז $f(x_n) \rightarrow L$	Heine
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$	$\forall M > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0, x_0 + \delta). f(x) < -M$	Cauchy
	כלל $x_0 < x_n \rightarrow x_0$ ו- $(x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}$ אז $f(x_n) \rightarrow -\infty$	Heine

### 5.2 חשבון גבולות (דומה לסדרות)

יהיו  $f, g : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  ו- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$ . אזי:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2 \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2 \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} : (g(x) \neq 0 \text{ בסביבה נקובה בה } g(x) \neq 0) \text{ ואם } L_2 \neq 0 \quad \bullet$$

**משפט (הרכבה):** יהיו  $I, J$  קטעים פתוחים ו- $x_0 \in I, y_0 \in J$ . תהייה  $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow J \setminus \{y_0\}$  ו- $g : J \setminus \{y_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ . אם  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$  ו- $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$ , אז:  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L$ .

## 5.3 גבולות שימושיים

• פולינומים: בגלל ש- $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$  (מחשבון גבולות).

• עבור  $a > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^{1/x} = 1$

•  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

## 5.4 רציפות

הגדרה: יהי  $I$  קטע פתוח ויהי  $x_0 \in I$ . תהי  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . אז:

• נאמר ש- $f$  רציפה ב- $x_0$  אם  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

• נאמר ש- $f$  רציפה ב- $I$  אם  $f$  רציפה בכל נקודה ב- $I$

חשבון רציפות (נובע מחשבון גבולות): יהי  $I$  קטע פתוח ו- $x_0 \in I$  (נכון גם לחד-צדדי), ויהיו  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  רציפות.

1.  $f + g$  רציפה ב- $x_0$

2.  $f \cdot g$  רציפה ב- $x_0$

3. אם  $g(x) \neq 0$  בסביבת  $x_0$  אז  $\frac{f}{g}$  רציפה ב- $x_0$

משפט (הרכבה): יהיו  $f: A \rightarrow \mathbb{R}, g: B \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A$  כך ש- $B \subseteq f(A)$ . אם  $f$  רציפה ב- $x_0$  ו- $g$  רציפה ב- $g(x_0)$ , אז  $g \circ f$  רציפה ב- $x_0$ .

רציפה מימין/שמאל: תהי  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , אז  $f$  רציפה מימין ב- $a$   $\iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ .

טענה:  $f$  רציפה ב- $x_0 \iff f$  רציפה מימין ומשמאל ב- $x_0$

מיון נקודות אי רציפות: תהי  $f$  מוגדרת ב- $I$  ו- $x_0$  נקודה פנימית.

1. אם קיים  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  אבל  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ , נאמר שיש ב- $x_0$  אי רציפות סליקה כי אפשר לסלק אותה עם החלפת ערך אחד.

2. אם קיימים  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  אבל  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  נאמר שיש נקודת אי-רציפות ממין ראשון.

3. אם  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  אינו קיים מכל סיבה אחרת, היא ממין שני.

משפט: תהי  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  עולה.

• אם  $f$  חסומה מלעיל:  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup(f(a, b))$

• אם  $f$  אינה חסומה מלעיל ב- $(a, b)$ :  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$

משפט: יהי  $I$  קטע מוכלל ותהי  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ומונוטונית חזק. אזי  $f(I)$  קטע מוכלל ו- $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$  רציפה.

טענה: תהי  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה מונוטונית,  $I$  קטע פתוח ו- $x_0 \in I$ . אזי קיימים וסופיים  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$



$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \gcd(p, q) = 1 \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{פונקציית Riemann:}$$

מתקיים ש- $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$  לכל  $x_0$ , ולכן פונקציית רימן רציפה באי-רציונאלים ואינה רציפה ברציונאלים.

**משפט ויירשטראס:** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה. אזי:  $f$  חסומה ומשיגה את חסמיה (כלומר משיגה מינימום ומקסימום בקטע).

**משפט ערך הביניים של קושי:** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה ויהי  $f(a) \leq t \leq f(b)$ . אזי קיים  $x \in [a, b]$  כך ש- $f(x) = t$ .

**מסקנה:** אם  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה אז  $f$  קטע סגור.

**קטע מוכלל:** אם  $x_1, x_2 \in I$  אז כל מספר ביניהם  $(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2)$  גם ב- $I$ .

**משפט:** אם  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ו- $I$  קטע מוכלל אז  $f(I)$  קטע מוכלל.

## 5.5 רציפות במ"ש (במידה שווה)

**הגדרה:** תהי  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , נאמר ש- $f$  רציפה במידה שווה ב- $A$  אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $\delta > 0$  כך שלכל  $x, y \in A$ ,

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

**משפט קנטור:** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה, אזי  $f$  רציפה במ"ש ב- $[a, b]$ .

**קטע פתוח:** תהי  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה, אזי  $f$  רציפה במ"ש ב- $(a, b) \iff$  קיים וסופי  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

**משפט:** אם  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה כך שקיים וסופי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  אז  $f$  רציפה במ"ש.

**איחוד קטעים:** אם  $f$  רציפה במ"ש ב- $(a, b)$ ,  $[b, c)$ , אז  $f$  רציפה במ"ש ב- $(a, c)$ .

**מסקנה:** אפשר לעשות את כל הוריאציות של קטעים באמצעות איחוד קטעים - למשל, אם  $f$  רציפה ב- $(a, b)$  ו- $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  קיימים וסופיים אז  $f$  רציפה במ"ש ב- $(a, b)$  באמצעות איחוד הקטעים  $(a, \frac{a+b}{2}]$ ,  $[\frac{a+b}{2}, b)$ .

**טענה:** פונקציה רציפה במ"ש בקטע פתוח היא חסומה.

**שיטת הפרכה:** למצוא שתי סדרות  $(x_n), (y_n)$  כך ש- $|x_n - y_n| \rightarrow 0$  אבל  $|f(x_n) - f(y_n)| \not\rightarrow 0$ .

## 5.6 נגזרת

תהי  $f$  מוגדרת בקטע פתוח  $I$  ו- $x_0 \in I$ . אם קיים וסופי  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$  אז קיים וסופי  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  (הגדרות שקולות), נאמר ש- $f$  גזירה ב- $x_0$  ונסמן את הגבול ב- $f'(x_0)$ .

**טענה:** פונקציה גזירה ב- $x_0$  רציפה ב- $x_0$ .

**משפט רול:** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ב- $[a, b]$  וגזירה ב- $(a, b)$ . אם  $f(a) = f(b)$  אז קיים  $c \in (a, b)$  כך ש- $f'(c) = 0$ .

**משפט Lagrange:** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ב- $[a, b]$  וגזירה ב- $(a, b)$ . קיימת  $c \in (a, b)$  עבורה  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

**משפט הערך הממוצע של קושי:** יהיו  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפות ב- $[a, b]$  וגזירות ב- $(a, b)$ , ונניח ש- $g'(x) \neq 0$  לכל  $x \in (a, b)$ . קיימת  $c \in (a, b)$  עבורה  $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ . המשפטים האלה חזקים כי הם מקשרים בין הנגזרת לבין ערכים קונקרטיים של  $f$ .

**משפט ערך הביניים של Darboux:** יהי  $I$  קטע מוכלל ותהי  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה. יהיו  $u, v \in I$  כך ש- $f'(u) \neq f'(v)$ . אזי לכל  $c$  בין  $f'(u)$  ל- $f'(v)$  קיים  $w$  בין  $u$  ל- $v$  כך ש- $f'(w) = c$ . כלומר, למרות שנגזרת לא בהכרח רציפה, היא עדיין תמיד מקיימת את משפט ערך הביניים.

**גזירה  $n$  פעמים:** אם  $f, f^{(1)}, \dots, f^{(n-1)}$  גזירות בסביבה של  $x_0$ , ו- $f^{(n)}$  גזירה ב- $x_0$ . כלל לייבניץ: יהי  $I$  קטע פתוח,  $x_0 \in I$  ו- $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  גזירות  $n$  פעמים ב- $x_0$ . אז:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0)$$

שזו הכללה של הכלל  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$ .

**כלל השרשרת:** תהי  $x_0 \in \mathbb{R}$  ו- $U$  סביבה של  $x_0$ . תהי  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה ב- $x_0$  ותהי  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש- $f(U) \subseteq V$  גזירה ב- $y_0 = f(x_0)$ . אזי  $g(f(x_0))$  גזירה ומתקיים:

$$(g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

### מדריך למהנדסים

$(\alpha f(x) + \beta g(x))'$	$\alpha f'(x) + \beta g'(x)$
$(f(g(x)))'$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$(f(x) \cdot g(x))'$	$f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$
$(x^n)'$	$n \cdot x^{n-1}$
$(\ln x)'$	$\frac{1}{x}$
$(\sin(x))'$	$\cos(x)$
$(\cos(x))'$	$-\sin(x)$

**משפט:** יהי  $I$  קטע מוכלל ותהינה  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  רציפות ב- $I$  וגזירות בפנימו. אם  $f'(x) = g'(x)$  בפנימו אז קיים  $c$  כך שלכל  $x$ ,

$$f(x) = g(x) + c$$

**משפט:** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ב- $[a, b]$  וגזירה ב- $(a, b)$ . כמו כן קיים וסופי  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = l$ . אזי  $f$  גזירה מימין ב- $a$  ומתקיים:  $f'_+(a) = l$ .

**דיפרנציאביליות:** תהי  $f$  מוגדרת ב- $I$  קטע פתוח ו- $x_0 \in I$ . נאמר ש- $f$  דיפרנציאבילית ב- $x_0$  אם:

$$1. f \text{ רציפה ב-} x_0$$

$$2. \text{קיים ישר } ax + b \text{ שהוא קירוב ראשון ב-} x_0 \text{ (כלומר, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (ax + b)}{x - x_0} = 0 \text{)}$$

**משפט:**  $f$  דיפרנציאבילית ב- $x_0 \iff$  גזירה ב- $x_0$ . הקירוב הוא  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .

**משפט:** יהי  $I$  קטע פתוח,  $x_0 \in I$  ו- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  מונוטונית חזק ורציפה.

אם  $f$  גזירה ב- $x_0$  אז  $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה ב- $y_0 = f(x_0)$  ו:  $(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$ .

## 5.7 חקירת פונקציות

## 5.7.1 מינימום ומקסימום מקומי

**הגדרה:**  $x_0 \in I$  פנימית מינימום מקומי אם לכל  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $f(x) \geq f(x_0)$ .  
**משפט Fermat:** יהי  $I$  קטע מוכלל ותהי  $x_0 \in I$  פנימית. תהי  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה בכל נקודה פנימית ב- $I$ . אם  $x_0$  מינימום/מקסימום מקומי אז  $f'(x_0) = 0$ .  
**משפט:** יהי  $I$  קטע מוכלל,  $x_0 \in I$  פנימית,  $f$  גזירה פעמיים ב- $x_0$  ו- $f'(x_0) = 0$ . אזי, אם  $f''(x_0) > 0$  אז  $x_0$  מינימום מקומי, אם  $f''(x_0) < 0$  אז  $x_0$  מקסימום מקומי, ואחרת לא ידוע.

## 5.7.2 עליה וירידה

**משפט:** יהי  $I$  קטע מוכלל,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה וגזירה בפנים  $I$ . אם לכל  $x$  בפנים  $I$ ,  $f'(x) \geq 0$  ( $>$ ), אז  $f$  עולה (ממש) בכל  $I$ .  
**טענה:** תהי  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה ו- $x_0 \in I$  נקודה פנימית. אם  $f'$  רציפה ב- $x_0$  ו- $f'(x_0) > 0$  אז קיימת סביבה של  $x_0$  בה  $f$  עולה ממש.

## 5.8 כלל לופיטל

5.8.1  $\frac{0}{0}$ 

יהיו  $f, g$  גזירות בסביבה מנוקבת  $I$  של  $x_0$  כך שמתקיימים התנאים הבאים:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

$$3. g'(x) \neq 0 \text{ לכל } x \in I$$

$$4. \text{קיים } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ (סופי או אינסופי)}$$

$$\text{אז } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

5.8.2  $\frac{\infty}{\infty}$ 

יהיו  $f, g$  גזירות בסביבה מנוקבת  $I$  של  $x_0$  כך שמתקיימים התנאים הבאים:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$$

$$2. g'(x) \neq 0 \text{ לכל } x \in I$$

$$3. \text{קיים } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ (סופי או אינסופי)}$$

$$\text{אז } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

## 6 טורי טיילור

## 6.1 היי זה לא הזה ממבוא מורחב?

(בניגוד לחלקים הקודמים אני לא במצב רוח לכתוב באופן יותר מדי פורמלי)

יהיו  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  אם  $f(x) = o(g(x))$

$f(x) = O(g(x))$  קיים  $c > 0$  כך שבסביבה של  $x_0$ ,  $|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$

$f(x) = \Theta(g(x))$   $f(x) = O(g(x)) \wedge g(x) = O(f(x))$  (אין באמת שימושים ל- $O$  עצמו)

## 6.2 באמת טורי טיילור אני מבטיח

**הגדרה:** יהי  $I$  קטע פתוח,  $x_0 \in I, f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ . נאמר ש- $f$  ו- $g$  מזדהות עד סדר  $n$  ב- $x_0$  אם שתיהן גזירות  $n$  פעמים ב- $x_0$  ומתקיים  $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$  עבור  $k = 1, \dots, n$ .

**טענה:** אם  $f, g$  מזדהות עד סדר  $n$  ב- $x_0$  אז  $f(x) - g(x) = o((x - x_0)^n)$ .

**הגדרה:** יהי  $I$  קטע פתוח,  $x_0 \in I, f : I \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה  $n$  פעמים ב- $x_0$ . נאמר ש- $p_n(x)$  פולינום טיילור של  $f$  ב- $x_0$  אם  $p_n(x)$  מזדהה עם  $f$  ב- $x_0$  עד סדר  $n$ .

**משפט:** קיים ויחיד  $p_n(x)$  והנוסחה היא:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

**הגדרה:** נגדיר את השארית להיות  $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ .

**משפט פאנו:**  $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ .

**משפט טיילור עם שארית לגרנז':** יהי  $I$  קטע פתוח,  $x_0 \in I$  גזירה  $n+1$  פעמים ב- $I$ . אז לכל  $x \in I, x \neq x_0$  קיים  $c_x$  בין  $x_0$  ל- $x$  כך ש:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

**מסקנה:** אם  $f$  גזירה אינסוף פעמים ב- $I$  וקיים  $M(x)$  כך שלכל  $k \in \mathbb{N}$  ולכל  $y$  בין  $x$  ל- $x_0$ ,  $|f^{(k)}(y)| < M(x)$  אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ .

לפי טיעון כזה מוכיחים שהשארית שואפת ל-0 ב- $e^x$ , ולכן בעצם  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ , ואפשר אפילו להעריך את השגיאה.