

סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 1

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

2	I מונואידים, חבורות, חוגים ושדות	
2	הגדרות	1
2	תכונות של פעולות	1.1
2	מונואיד	1.2
2	חבורה	1.3
2	חוג	1.4
3	שדה	1.5
3	II מרוכבים	
3	הגדרות בסיסיות	2
3	הצגה פולארית	3

חלק I

מונואידים, חבורות, חוגים ושדות

1 הגדרות

1.1 תכונות של פעולות

תהא $*$ פעולה בינארית על A (כלומר ה־domain הוא $A \times A$).

1. $*$ אסוציאטיבית: $\forall a, b, c \in A. (a * b) * c = a * (b * c)$.

2. $*$ חילופית: $\forall a, b. a * b = b * a$.

3. קבוצה A סגורה לפעולה $*$: $*$: $A \times A \rightarrow A$.

1.2 מונואיד

מונואיד הוא זוג $\langle G, * \rangle$ כאשר G קבוצה כלשהי ו־ $*$ פעולה בינארית על G , כך ש:

1. G סגורה לפעולה $*$.

2. $*$ פעולה אסוציאטיבית.

3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר $\exists e \in G. \forall g \in G. e * g = g * e = g$. האיבר הזה יחיד ומסומן e_G .

1.3 חבורה

מקרה פרטי של מונואיד שמקיימת גם:

4. קיים איבר הופכי, כלומר $\forall g \in G. \exists h \in G. g * h = h * g = e$ כאשר e איבר יחידה. האיבר ההופכי של g מסומן g^{-1} .

1.4 חוג

שלשה $\langle R, +, * \rangle$ נקראת חוג אם:

1. $\langle R, + \rangle$ חבורה חילופית, כלומר $\forall a, b \in R. a + b = b + a$.

2. $*$ היא פעולה בינארית על R ו־ R סגורה לפעולה $*$.

3. חוק הפילוג:

$$\forall a, b, c \in R. a * (b + c) = a * b + a * c \\ (b + c) * a = b * a + c * a$$

חוג חילופי - אם $*$ פעולה חילופית (כלומר $a * b = b * a$).

חוג עם יחידה - אם $\langle R, * \rangle$ מונואיד.

סימונים: 0_R ניטרלי לחיבור, 1_R ניטרלי לכפל אם קיים.

מחלק 0 - איבר $a \in R, a \neq 0_R$ נקרא "מחלק 0" אם יש $b \neq 0_R$ כך ש־ $a * b = 0_R$. בממשיים אין מחלק 0.

חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0 נקרא תחום שלמות. הוא מקיים את חוק הצמצום (לכל $a, b, c \in R$, אם $a * b = c * b$ אז $a = c$)

1.5 שדה

$\langle F, +, * \rangle$ מקרה פרטי של חוג שמקיים גם:

1. $\langle F \setminus \{0_F\}, * \rangle$ חבורה חילופית.

כל שדה הוא תחום שלמות, אבל ההפך אינו נכון. תחומי שלמות סופיים הם כן שדות. הרבה פעמים בהגדרת שדה מוסיפים את הדרישה $0_F \neq 1_F$.

חלק II

מרוכבים

2 הגדרות בסיסיות

נסמן $i = \sqrt{-1}$. ההגדרה הפורמלית של מרוכבים היא: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, כאשר המספר הראשון הוא החלק הממשי (שמסומן $Re(c)$) והמספר השני הוא החלק הדמיוני (שמסומן $Im(c)$).
עובדות: עבור $z \in \mathbb{C}$,

1. הגודל של z : $||z|| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$. כלומר המרחק של z מראשית הצירים.

2. זהות אוילר: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, לכן $z = ||z|| e^{i \cdot \arg(z)}$.

3. חיבור: מחברים את החלק הממשי והדמיוני בנפרד.

4. כפל: $(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + da)$. משתמשים בזה ש- $i^2 = -1$.

5. כל שורש של פולינום מרוכב הוא מרוכב.

6. נגדיר \bar{z} להיות $\bar{z} = a - ib$. כלומר להפוך את החלק הדמיוני.

$$\bar{\bar{z}} = z \quad (\text{א})$$

$$z \cdot \bar{z} = ||z||^2 \quad (\text{ב})$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad (\text{ג})$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad (\text{ד})$$

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (\text{ה})$$

7. $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$ שדה סגור אלגברית (כלומר כל שורש של כל פולינום מרוכב הוא מרוכב).

8. איבר הופכי: $w = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$ (אם מכפילים בהופכי מקבלים 1).

3 הצגה פולארית

נגדיר מרוכב בתור זוג $\langle r, \theta \rangle$ כאשר r המרחק מראשית הצירים ו- θ הזווית שהוא יוצר, שנקראת הארגומנט.

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r \cdot e^{i\theta}$$

עובדות:

1. הארגומנט של z : נסמן $\arg(z)$ להיות הזווית שהמספר יוצר עם ציר הממשיים (לרוב נסמן כ- θ). ניתן לחשב אותו בעזרת $\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ ברוב המקרים.

$$2. \quad \bar{z} = r \cdot e^{-i\theta}, z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

$$3. \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

4. להכפיל מספרים מרוכבים על הגרף נראה כמו להכפיל את האורכים זה בזה ולחבר את הזוויות.

פתרון משוואה $z^n = a + ib$. נמצא הצגה פולארית $z^n = r e^{i\theta}$. נשתמש בעובדה ש- $e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2\pi k)}$ עבור $k \in \mathbb{Z}$. אזי:

$$z = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi \frac{k}{n}\right)}$$

עבור $k \in \mathbb{Z}$. ולכל $k \in \{0, \dots, n-1\}$ נקבל פתרונות שונים.