

# סיכומי הרצאות - מתמטיקה בדידה

מיכאל פרבר ברודסקי

## תוכן עניינים

3	שונות	1
3	יוטא	1.1
3	תלות בבחירת הנציגים	1.2
3	משפט האינדוקציה	1.3

<b>3</b>	<b>I קבוצות</b>	
3	איחוד וחיתוך בין כל כמות של קבוצות	2
4	זוגות סדורים	3
4	$n$ סדורה	3.1
4	הוכחה באינדוקציה	3.2
5	מכפלה קרטזית	3.3
5	יחסים	3.4
6	פונקציות	3.5
6	הגדרות לגבי יחסים	3.5.1
6	הגדרות לגבי פונקציות	3.5.2
6	קבוצת הפונקציות מ- $A$ ל- $B$	3.5.3
7	טענות לגבי פונקציות	3.5.4
7	תמונה איבר-איבר	3.5.5
7	פונקציה מותלית	3.5.6
7	צמצום	3.5.7
7	יחסי שקילות	3.6
7	הגדרות לגבי יחסים	3.6.1
8	מחלקות שקילות	3.6.2
8	מערכת נציגים	3.6.3
8	חלוקה	3.6.4
9	יחסי סדר	3.7

<b>10</b>	<b>II עוצמות</b>	
10	הקדמה לעוצמות	4
10	הגדרות	4.1
10	טענות בסיסיות	4.1.1
10	טענות לגבי קבוצות שוות עוצמות	4.1.2
11	משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין	4.1.3

11	עוצמות סופיות . . . . .	5
11	5.1 הגדרות . . . . .	
11	5.2 משפטים . . . . .	
11	עוצמות אינסופיות . . . . .	6
11	6.1 עוצמות בנות מניה . . . . .	
12	6.1.1 שיטת הלכסון . . . . .	
12	6.2 עוצמות שאינן בנות מניה . . . . .	
12	7 חשבון עוצמות . . . . .	

<b>14</b>	<b>קומבינטוריקה</b>	<b>III</b>
14	קומבינטוריקה בסיסית . . . . .	8
14	8.1 בינום, מולטינום, . . . . .	
14	8.2 סדרת הפרשים . . . . .	
14	8.3 הוכחות קומבינטוריות . . . . .	
14	8.4 הבינום של ניוטון . . . . .	
14	8.4.1 המקדם המולטינומי . . . . .	
15	8.4.2 המקדם הבינומי הכללי . . . . .	
15	8.4.3 נוסחת הבינום השלילי . . . . .	
15	8.5 הכלה והדחה . . . . .	
15	8.6 עקרון שובך היונים . . . . .	
16	8.7 מספרי קטלן $C_n$ . . . . .	
16	9 פונקציות יוצרות . . . . .	
16	9.1 נוסחאות . . . . .	
17	9.2 פירוק לשברים חלקיים . . . . .	
17	10 נוסחאות נסיגה . . . . .	
17	10.1 נוסחאות נסיגה לינאריות . . . . .	
17	10.1.1 נוסחאות נסיגה לינאריות הומוגניות . . . . .	
17	10.1.2 נוסחאות נסיגה לינאריות לא הומוגניות . . . . .	
18	10.2 פתרון נוסחאות נסיגה לינאריות . . . . .	
18	10.2.1 פתרון נוסחאות נסיגה לינאריות באמצעות פונקציות יוצרות . . . . .	
18	10.2.2 פתרון נוסחאות נסיגה לינאריות הומוגניות באמצעות פולינום אופייני . . . . .	
18	10.2.3 מעבר מפתרון יחיד של נוסחת נסיגה לא הומוגנית לקבוצת הפתרונות . . . . .	
19	10.3 סדרות עזר . . . . .	

<b>19</b>	<b>תורת הגרפים</b>	<b>IV</b>
19	11 הגדרות בסיסיות . . . . .	
19	11.1 מסלול, טיול, וכל הדברים האלה . . . . .	
20	11.2 קשירות . . . . .	
21	12 עצים . . . . .	
21	12.1 קידוד פרופר . . . . .	
22	13 איזומורפיזם . . . . .	
22	14 נוסחאות . . . . .	

## 1 שונות

### 1.1 יוטא

תהא  $P(x)$  יחס חד מקומי.  
האיבר היחיד  $a \rightarrow A$  המקיים את הטענה  $\varphi(x) = \varphi(a)$   $\iota x \in A$ .  
למשל  $2 = \text{ראשוני} \wedge x \in \mathbb{N}_{\text{even}}$   $\iota x \in \mathbb{N}$ .  
הערה: כאשר מגדירים  $\iota$  צריך לוודא שקיים ויחיד  $a \in A$  המקיים את הטענה  $\varphi(a)$ .  
למשל  $\min = \lambda x \in P(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} . \iota n \in x . \forall m \in x . n \leq m$ .

### 1.2 תלות בבחירת הנציגים

**דוגמא:** נגדיר  $S_n = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid n \mid x - y\}$  אם כך  $\mathbb{Z}/S_n = \{[0]_{S_n}, \dots, [n-1]_{S_n}\}$  נמצא  $f: \mathbb{Z}/S_n \rightarrow \mathbb{Z}$ .  
הבעיה נמצאת ב- $\mathbb{Z}/S_n . k + 1$   $f = \lambda [k]_{S_n} \in \mathbb{Z}/S_n$ . יש תלות בבחירת הנציגים, כי אין רק  $k$  יחיד שמייצג מחלקת שקילות וזה משנה איזה  $k$  נבחר.  
כדי להוכיח שאין תלות בבחירת הנציגים, נוכיח חד ערכיות.

### 1.3 משפט האינדוקציה

נניח כי  $A$  קבוצה ו- $<_A$  יחס סדר טוב על  $A$  ו- $P(x)$  טענה עם משתנה חופשי  $x$  נקרא חופשי אם אין כמות שמזכיר את  $x$ . למשל אם  $\exists y . x + 1 = y$  אז  $x$  חופשי, ו- $y$  אינו חופשי. נניח כי מתקיים כי  $P(a) \implies P(b) \implies P(a)$   $\forall a \in A . (\forall b \in A . b <_A a \implies P(b)) \implies P(a)$  אזי  $\forall a \in A . P(a)$ .

## I חלק

## קבוצות

## 2 איחוד וחיתוך בין כל כמות של קבוצות

### כתיב כללי

תהא  $F$  קבוצה של קבוצות.

**הגדרה 1.2**  $\bigcup F = \{x \mid \exists y \in F . x \in y\}$   
כלומר, כדי שאיבר  $x$  כלשהו יהיה איבר באיחוד כל האיברים ב- $F$ , צריך שתהיה קבוצה  $y$  ב- $F$  כך ש- $x \in y$ .

**הגדרה 2.2**  $\bigcap F = \{x \mid \forall y \in F . x \in y\}$   
כלומר, כדי שאיבר  $x$  כלשהו יהיה איבר בחיתוך כל האיברים ב- $F$ , צריך שהוא יהיה שייך לכל האיברים ב- $F$ .

### כתיב אלטרנטיבי

**הגדרה 3.2** תהא  $F = \{A_i \mid i \in I\}$  קבוצה של קבוצות.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I . x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I . x \in A_i\}$$

## כתיב בסיסי

### 4.2 הגדרה

$$\bigcup_{i=1}^{100} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots \cup A_{100}$$

$$\bigcap_{i=1}^{100} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_{100}$$

## 3 זוגות סדורים

יש דרכים רבות להגדיר זוגות סדורים. הדרך שאנחנו נשתמש בה היא הדרך הזו:

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\} \quad \text{1.3 הגדרה}$$

כדי שדרך לכתיבת זוג סדור תהיה נכונה, צריך שתמיד תתקיים התכונה הבאה של זוגות סדורים:

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \iff a = c \wedge b = d$$

### 3.1 $n$ יה סדורה

נגדיר  $n$ יה סדורה כך:

$$\langle a, b, c \rangle = \langle a, \langle b, c \rangle \rangle$$

$$\langle a, b, c, d \rangle = \langle a, \langle b, c, d \rangle \rangle$$

### 3.2 הוכחה באינדוקציה

1. נוכיח עבור  $n$  הרלוונטי הראשון (בסיס האינדוקציה)
2. לוקחים  $n$  כללי, מניחים שהטענה נכונה לגבינו (הנחת האינדוקציה)
3. מוכיחים עבור  $n+1$  ומסתמכים על בסיס האינדוקציה (צעד האינדוקציה)

נוכיח את התכונה המרכזית לגבי  $n$ יה סדורה, שהיא

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle b_1, \dots, b_n \rangle \iff a_1 = b_1 \wedge \dots \wedge a_n = b_n$$

בסיס האינדוקציה -  $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle \iff a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$ . נניח כי זה מתקיים עבור  $n$ . נוכיח כי זה מתקיים עבור  $n+1$ . נגדיר:  $\langle a_1, \dots, a_{n+1} \rangle = \langle a_1, \langle a_2, \dots, a_{n+1} \rangle \rangle$ . הטענה המרכזית מתקיימת כי כל האיברים שווים בזוגות הסדורים.

## 3.3 מכפלה קרטזית

**הגדרה 2.3** יהיו  $A$  ו- $B$  קבוצות.  $A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$

דוגמא:  $\{1, 2\} \times \{1, 3\} = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$

## 3.3 הגדרה

$$A^1 = A$$

$$A^{n+1} = A \times A^n$$

המישור הממשי הוא  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (כל זוג של שני מספרים ממשיים זה כל נקודה בדו מימד).  
נשים לב לקשר עם  $n$  סדורה כאשר נגדיר  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \{\langle a, b, c \rangle \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

## 3.4 יחסים

**הגדרה 4.3** יהיו  $A$  ו- $B$  קבוצות.  $R$  נקרא יחס מעל  $A, B$   $R \subseteq A \times B \iff$   
דוגמות:  $R = \{\langle 1, 7 \rangle, \langle 2, 7 \rangle\}$  יחס מעל  $\mathbb{N}, \mathbb{N}$

$$<_{\mathbb{N}} = \{\langle n, m \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid \exists k \in \mathbb{N}_+, n + k = m\}$$

$$\leq_{\mathbb{N}} = \{\langle n, m \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid \exists k \in \mathbb{N}, n + k = m\}$$

$$(=\mathbb{N}) = Id_{\mathbb{N}} = \{\langle n, n \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$f(x) = 2x = \{\langle x, 2x \rangle \mid x \in \mathbb{R}\}$$

**הגדרה 5.3** יהי  $R$  יחס מעל  $A, B$ .  $aRb \iff \langle a, b \rangle \in R$ . ונאמר " $a$  מתייחס ביחס  $R$  ל- $b$ ". אם  $A = B$  נאמר כי  $R$  יחס מעל  $A$ .

• התחום של  $R$  הוא  $Dom(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B. aRb\}$  לדוגמא,

$$Dom(\{\langle 1, 7 \rangle, \langle 2, 7 \rangle\}) = \{1, 2\}$$

$$Dom(<_{\mathbb{N}}) = \mathbb{N}$$

• התמונה של  $R$  היא  $Im(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A. aRb\}$  לדוגמא,

$$Im(\{\langle 1, 7 \rangle, \langle 2, 7 \rangle\}) = \{7\}$$

$$Im(<_{\mathbb{N}}) = \mathbb{N}_+$$

•  $Id_A = \{\langle a, a \rangle \mid a \in A\}$

• היחס ההופכי של  $R$  הוא  $R^{-1} = \{\langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R\}$  לדוגמא,

$$\{\langle 1, 7 \rangle, \langle 2, 7 \rangle\}^{-1} = \{\langle 7, 1 \rangle, \langle 7, 2 \rangle\}$$

• הרכבת יחסים - יהי  $R \subseteq A \times B$  ו-  $S \subseteq B \times C$ . נגדיר  $S \circ R = \{ \langle a, c \rangle \in A \times C \mid \exists b \in B. \langle a, b \rangle \in R \wedge \langle b, c \rangle \in S \}$ . (מורכב על  $R$ ). זה כל זוגות האיברים שניתן "לחבר", כלומר  $b = b$  כאשר  $b$  ימני ב-  $R$  ושמאלי ב-  $S$  אינו ביחס ההרכבה).

- אסוציאטיביות ההרכבה -  $(S \circ R) \circ T = S \circ (R \circ T)$  עבור  $R \subseteq B \times C, T \subseteq A \times B$   
 $S \subseteq C \times D$

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1} -$$

$$(R^{-1})^{-1} = R -$$

$$Id_B \circ R = R -$$

$$R \circ Id_A = R -$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) -$$

### 3.5 פונקציות

#### 3.5.1 הגדרות לגבי יחסים

יחס  $R$  נקרא:

• **חד ערכי:**  $\forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B. \langle a, b_1 \rangle \in R \wedge \langle a, b_2 \rangle \in R \rightarrow b_1 = b_2$  (לכל  $a \in A$  יש  $b \in B$  יחיד כך ש-  $\langle a, b \rangle \in R$ )

• **מלא ב- $A$ :**  $\forall a \in A. \exists b \in B. \langle a, b \rangle \in R$  (לכל  $a \in A$  יש  $b \in B$  מתאים)

• **פונקציה:** אם  $R$  יחס חד ערכי ומלא. באופן שקול,  $\forall a \in A. \exists! b \in B. \langle a, b \rangle \in R$ . (! $\exists$ ) זה קיים ויחיד.

- "פונקציה חלקית": יחס חד ערכי שאינו מלא.

#### 3.5.2 הגדרות לגבי פונקציות

תהא  $f: A \rightarrow B$  פונקציה.

• **חד-חד ערכי:**  $\forall a_1, a_2 \in A. f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$ . זה שקול לכך ש-  $f^{-1}$  חד ערכית.

• **על:**  $\forall b \in B. \exists a \in A. f(a) = b$ . זה שקול לכך ש-  $f^{-1}$  יחס מלא.

• **זיווג:** אם  $f$  יחס חד-חד ערכי ועל. נקרא גם **חחע"ל** או **פונקציה הפיכה**.

- "פונקציה הפיכה" אומר שקיימת פונקציית  $g: B \rightarrow A$  כך ש:

$$f \circ g = id_B \wedge g \circ f = id_A$$

#### 3.5.3 קבוצת הפונקציות מ- $A$ ל- $B$

מסומנת:  $A \rightarrow B$  או  $B^A$ .

### 6.3 הגדרה

$$A \rightarrow B = \{ f \in P(A \times B) \mid f \text{ is a function} \}$$

אם פונקציה  $f$  מעל  $A, B$ , נסמן את זה ככה:  $f: A \rightarrow B$ .

## 3.5.4 טענות לגבי פונקציות

$$1. \operatorname{dom}(f) = A$$

$$2. \operatorname{range}(f) = B$$

$$3. \operatorname{im}(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

**משפט שוויון של פונקציות:** יהיו  $f, g$  פונקציות. אזי  $f = g \iff \operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(g) \wedge \forall x \in \operatorname{dom}(f). f(x) = g(x)$   
 הפונקציה אינה מוגדרת ע"פ הנוסחה.

## 3.5.5 תמונה איבר-איבר

תהא  $f : A \rightarrow B$  פונקציה. נגדיר:

• תמונה איבר-איבר של  $x$  ע"י  $f$ :

$$f[x] = \{f(a) \mid a \in x\} \subseteq B$$

• קבוצת המקורות של  $y$  ע"י  $f$ :

$$f^{-1}[y] = \{a \in A \mid f(a) \in y\} \subseteq A$$

## 3.5.6 פונקציה מותלית

נכתוב פונקציה מותלית כך:

$$\lambda x \in \mathbb{R}. \begin{cases} 2 & x = 1 \\ 4 & x = 2 \\ x & \text{else} \end{cases}$$

מימין זה התנאי, ו- $\text{else}$  אומר כך שאר המקרים. משמאל זה מה שהפונקציה "מחזירה".

## 3.5.7 צמצום

מסומן:  $f|_C$ , או  $f|_C$  אבל היוטא הפוכה. עבור  $f : A \rightarrow B$ ,  $f|_C = C \times B \cap f$ .

## 3.6 יחסי שקילות

יחסי שקילות הם תמיד יחסים מעל  $A$ .

## 3.6.1 הגדרות לגבי יחסים

יחס  $R$  נקרא:

• **רפלקסיבי** -  $\forall x \in A. \langle x, x \rangle \in R$ . זה שקול ל- $\operatorname{id}_A \subseteq R$ .

- **אנטי-רפלקסיבי** -  $\forall x \in A. \langle x, x \rangle \notin R$ . למשל היחס  $<$  הוא אנטי-רפלקסיבי. בנוסף רק אם  $A \neq \emptyset$  אז יחס  $A$  רפלקסיבי  $\iff$  יחס  $A$  לא אנטי-רפלקסיבי.

• **סימטרי** -  $\langle a, b \rangle \in R \implies \langle b, a \rangle \in R$ . זה אומר שאם  $a, b$  ביחס אז  $b, a$  ביחס.

- **אנטי-סימטרי חלש** -  $\forall x, y \in A. (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R) \implies x = y$
- **אנטי-סימטרי חזק** -  $\forall x, y \in A. \langle x, y \rangle \in R \implies \langle y, x \rangle \notin R$  נובע ש: אנטי סימטרי חזק  $\iff$  אנטי-רפלקסיבי. זו הסיבה שקיים אנטי-סימטרי חלש.
- **טרנזיטיבי** -  $\forall a, b, c \in A. \langle a, b \rangle \in R \wedge \langle b, c \rangle \in R \implies \langle a, c \rangle \in R$  זה כמו כלל המעבר.
- **יחס שקילות** - יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי. למשל היחס  $=$ .
- **יחס סדר חלש** - יחס רפלקסיבי + טרנזיטיבי + אנטי-סימטרי חלש. למשל היחס  $\leq, \subseteq$ .
- **יחס סדר חזק** - יחס טרנזיטיבי + אנטי-סימטרי חזק. למשל היחס  $<, \subset$ .
- **יחס קווי/לינארי/טוטאלי/מלא** -  $\forall a, b \in A. aRb \vee bRa \vee a = b$ . למשל היחס  $<$  הוא קווי אך היחס  $\subseteq$  אינו קווי, כי ל- $\subseteq$  יש "התפצלויות" בסינגלטונים שאינם מוכלים זה בזה ולא שווים זה לזה.

### 3.6.2 מחלקות שקילות

**הגדרה 7.3** מחלקת השקילות של  $a$  מוגדרת להיות  $[a]_R = \{b \in A \mid aRb\}$ . אינטואיטיבית, מחלקת שקילות היא כל האיברים  $b$  ששקולים ל- $a$  ביחס השקילות  $R$ .

**למה 8.3** יהי  $R$  יחס שקילות ב- $A$ . לכל  $a, b \in A$ ,

- $[a]_R = [b]_R \vee [a]_R \cap [b]_R = \emptyset$
- $aRb \iff [a]_R = [b]_R$  מתקיים
- $\neg(aRb) \iff [a]_R \cap [b]_R = \emptyset$  מתקיים

### 3.6.3 מערכת נציגים

תת קבוצה  $A' \subseteq A$  נקראת מערכת נציגים אם:

- $\forall a, b \in A'. a \neq b \implies \neg(aRb)$  (כל שני איברים שונים ב- $A'$  לא נמצאים ביחס)
- $\forall a \in A. \exists b \in A'. aRb$  (במערכת הנציגים יש איבר שקול לכל איבר ב- $A$ )

### 3.6.4 חלוקה

**הגדרה 9.3**  $\Pi \subseteq P(A)$  נקראת חלוקה של  $A$  אם:

1.  $\emptyset \notin \Pi$
2.  $\forall x, y \in \Pi. x \neq y \implies x \cap y = \emptyset$  (כל האיברים בחלוקה זרים)
3.  $\bigcup \Pi = A$  (כל איברי  $A$  נמצאים בחלוקה)

**משפט 10.3** יהי  $R$  יחס שקילות ב- $A$ . מתקיים כי  $A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$  (קבוצת המנה) היא חלוקה של  $A$ .

**הגדרה 11.3** תהא  $\Pi$  חלוקה של  $A$ . נגדיר את "היחס המושרה מהחלוקה" שנסמן ב- $R_\Pi$  כ-  

$$\bigcup_{y \in \Pi} y \times y$$

### 12.3 משפט

- $R_\Pi$  יחס שקילות.
- $A/R_\Pi = \Pi$



$$R_{(A/R)} = R \bullet$$

**משפט 13.3** יהי  $R$  יחס שקילות ב- $A$  ותהא  $T \subseteq P(A)$  אם מתקיים כי:

$T$  חלוקה של  $A$ , ו-

$$\forall a, b \in A. aRb \iff \exists t \in T. a, b \in t \bullet$$

אזי  $A/R = T$ .

### 3.7 יחסי סדר

**סימון:**  $<$  יחס סדר חזק על  $A$ .  $\preceq$  יחס סדר חלש על  $A$ .

בהינתן  $<$ , ניתן להגדיר יחס סדר חלש על  $A$ :  $a < b \vee a = b$ .

בהינתן  $\preceq$ , ניתן להגדיר יחס סדר חזק על  $A$ :  $a \preceq b \wedge a \neq b$ .  
נגדיר:

$x \in X$  יקרא האיבר גדול ביותר ב- $X$  אם  $\forall y \in X. y \preceq x$ .  $x \in X$  יקרא איבר קטן ביותר (מינימלי) ב- $X$  אם  $\forall y \in X. x \preceq y$ .

$x \in X$  ייקרא איבר מירבי (מקסימום) ב- $X$  אם  $\forall y \in X. \neg(x < y)$ . איבר מזערי (מינימום):  $\forall y \in X. \neg(y < x)$ .

$x \in A$  ייקרא חסם עליון (מלעל/מלמעלה).  $\forall y \in X. y \preceq x$  אם  $x$  חסם עליון ל- $X$ . לדוגמה  $X = [0, 1]$ , ואז  $x = 3$  או כל מספר אחר שגדול או שווה ל-1. יש גם חסם תחתון.

$X$  נקראת חסומה מלמעלה אם קיים חסם עליון.

חסומה מלמטה אם קיים חסם תחתון.

חסומה אם  $X$  חסומה מלמטה ומלמעלה.

$x \in A$  נקרא סופרמום של  $X$  אם  $x$  החסם העליון הקטן ביותר.

$x$  חסם עליון ל- $X$  –

$$\forall y \in A. y \text{ hasam elion le } X \rightarrow x \preceq y -$$

$x \in A$  נקרא אינפימום (החסם התחתון הקטן ביותר) אם:

$x$  חסם תחתון ל- $X$  –

$$\forall y \in A. y \text{ hasam tahton le } X \rightarrow y \preceq x -$$

**טענה:**

אם  $x$  איבר גדול ביותר ב- $X$  אז  $x$  איבר מירבי ב- $X$ .

אם  $x \in A$  חסם עליון קטן ביותר של  $X$  אז  $x$  יחיד ומסומן  $x = \sup(X)$ .

אם  $x \in X$  איבר גדול ביותר אז  $x = \sup(x)$  ומסמנים  $x = \max(X)$ .

אם  $\alpha$  יחס סדר קווי ו- $x$  איבר מירבי ב- $X$  אז  $x$  איבר גדול ביותר.

**יחס סדר טוב:**  $R$  יחס סדר חזק וקווי על  $A$  מקיים את התכונה הבאה:

$$\forall X \subseteq A. x \neq \emptyset \implies \exists x \in X. \forall y \in X. x \leq_A y$$

כלומר לכל תת קבוצה של  $A$  שאינה  $\emptyset$  יש איבר מינימלי.

**דוגמה:**  $<$  על  $\mathbb{N}$ .

**עקרון הסדר הטוב:** לכל קבוצה  $A$  קיים סדר טוב.

משפט 14.3 אקסיומת הבחירה שקולה לעקרון הסדר הטוב.

## חלק II עוצמות

### 4 הקדמה לעוצמות

#### 4.1 הגדרות

- $|A| = |B| \iff$  קיימת  $f : A \rightarrow B$  זיווג.
- $|A| \leq |B| \iff$  קיימת  $f : A \rightarrow B$  חח"ע.
- $|A| < |B| \iff |A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B|$ . כדי להוכיח שעוצמות לא שוות צריך להוכיח שלא קיים זיווג.

##### 4.1.1 טענות בסיסיות

- אם  $f : A \rightarrow B$  חח"ע אז  $|A| = |Im(f)|$ .
- לגבי  $|A| = |B|$ :
- רפלקסיביות:  $|A| = |A|$
- סימטריה:  $|A| = |B| \iff |B| = |A|$
- טרנזיטיביות:  $|A| = |B| \wedge |B| = |C| \implies |A| = |C|$
- לגבי  $|A| \leq |B|$ :
- $|A| = |B| \implies A \leq B$
- $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C| \implies |A| \leq |C|$
- $A \subseteq B \implies |A| \leq |B|$
- קיימת  $f$  על מ- $B$  ל- $A$  אם"ם  $|A| \leq |B|$ .
- לגבי  $|A| < |B|$ :
- $|A| < |C| \implies |A| < |B| = |C|$
- $|A| = |B| < |C| \implies |A| < |C|$

##### 4.1.2 טענות לגבי קבוצות שוות עוצמות

יהיו  $A, B, A', B'$  קבוצות כך ש- $|B| = |A'| \wedge |A| = |B'|$ . אזי:

- $|A \times B| = |A' \times B'|$
- $|A \rightarrow B| = |A' \rightarrow B'|$
- $|P(A)| = |P(A')|$
- אם  $A, B$  זרות וגם  $A', B'$  זרות:  $|A' \uplus B'| = |A \uplus B|$

### 4.1.3 משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין

משפט זה אומר ש:

$$|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \iff |A| = |B|$$

## 5 עוצמות סופיות

### 5.1 הגדרות

לחלק הזה, נסמן:  $[n] = \{0, \dots, n-1\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$ ,  $[0] = \emptyset$

**הגדרה 1.5** קבוצה  $A$  נקראת סופית אם קיים (הוא גם יחיד)  $n \in \mathbb{N}$  כך ש- $|A| = |[n]|$ . קבוצה  $A$  נקראת אינסופית אם  $A$  איננה סופית.

$=, <, \leq$  מוגדר עבור עוצמות, אבל גם מתואר עבור  $\mathbb{N}$ . לשם ההגבלה, בחלק הזה נסמן  $=_{\mathbb{N}}, <_{\mathbb{N}}, \leq_{\mathbb{N}}$ .

### 5.2 משפטים

- יהיו  $n, m \in \mathbb{N}$ . נניח כי  $n <_{\mathbb{N}} m$ . אז  $|[n]| < |[m]|$ .
- אם  $Y \subseteq X$  ו- $X$  סופית אז  $Y$  סופית.
- אם  $X \subsetneq Y$  ו- $X, Y$  סופיות אז  $|X| < |Y|$ .
- אם  $X, Y$  סופיות,  $|X| = |Y|$ , ו- $f: X \rightarrow Y$  אז  $f$  חח"ע  $\iff f$  על.
- **הגדרה:** עבור  $A$  סופית, נסמן  $|A| = n$  עבור ה- $n$  היחיד כך ש- $|A| = |[n]|$ . (אותו הדבר לגבי  $|A| < n, |A| \leq n$ )
- **מסקנה:** יהיו  $A, B$  קבוצות כך ש- $|A| = n, |B| = m$ :

$$|A| = |B| \iff n =_{\mathbb{N}} m$$

$$|A| \leq |B| \iff n \leq_{\mathbb{N}} m$$

$$|A| < |B| \iff n <_{\mathbb{N}} m$$

## 6 עוצמות אינסופיות

### 6.1 עוצמות בנות מניה

**משפט:** העוצמה של קבוצות בנות מניה מסומנת ב- $\aleph_0$ . הקבוצות הבאות בנות מניה:

$$\mathbb{N}$$

$$\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Q}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^+. |\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}|$$

### 6.1.1 שיטת הלכסון

**משפט האלכסון של קנטור:**  $|\mathbb{N}| < |\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}|$ .  
**הגדרה:**  $|\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}| = 2^{\aleph_0} = \aleph$ . (באופן כללי יותר,  $|A \rightarrow \{0, 1\}| = 2^{|A|}$ ).  
**הוכחה לדוגמה של משפט האלכסון של קנטור:**  $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}|$ : ראינו. נוכיח כי  $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}|$ . נניח בשלילה כי  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}|$ , כלומר קיימת  $F \in \mathbb{N} \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\})$  זיווג. נוכיח שקיים איבר בטווח  $\{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N}$  שאין לה מקור, כלומר לכל  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F(n) \neq g$ . אם כך  $g \notin \text{Im}(F)$ , וזו תהיה סתירה לכך ש- $F$  על.  
 נמצא את  $g$  (אנחנו מחפשים איזשהו  $g$  ששונה מכל דבר ב- $\text{Im}(F)$ ), וכדי לעשות זאת כל איבר יסתור את השוויון לאחד מהם).  
**לכסון:**

$$\begin{aligned} F(0) &= \left\langle \overbrace{(F(0))(0), (F(0))(1), (F(0))(2), \dots)}^x \right\rangle \\ F(1) &= \left\langle (F(1))(0), \overbrace{(F(1))(1), (F(1))(2), \dots)}^y \right\rangle \\ &\dots \\ F(n) &= \langle (F(n))(0), (F(n))(1), (F(n))(2), \dots \rangle \\ g &= \langle 1-x, 1-y, \dots \rangle \\ g &= \lambda n \in \mathbb{N}. 1 - (F(n))(n) \end{aligned}$$

צ"ל:  $g \in \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$  ולכל  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g \neq F(n)$ .

### 6.2 עוצמות שאינן בנות מניה

**השערת הרצף (CH):** לא קיימת עוצמה בין  $\aleph_0$  ל- $\aleph$ . הוכח שאי אפשר להוכיח את השערת הרצף ואי אפשר להפריך את השערת הרצף. בקורס שלנו לא נכון להגיד כי  $|A| = \aleph_0 \implies \aleph_0 \leq |A| < \aleph$ .

**משפטים:**

- $|A| < 2^{|A|}$
- $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{(2^{\aleph_0})} < \dots$  ולכן אין עוצמה גדולה ביותר.
- $|\mathbb{R}| = \aleph = 2^{\aleph_0}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^+. |\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  מתקיים:  $|(\alpha, \beta)| = |[\alpha, \beta)| = |(\alpha, \beta]| = |[\alpha, \beta]| = |(-\infty, \alpha)| = |(\alpha, \infty)| = |\mathbb{R}|$ .

## 7 חשבון עוצמות

יהיו  $A, B$  קבוצות. נגדיר:

- $|A| + |B| = |A \times \{0\} \cup B \times \{1\}|$
- $|A| \cdot |B| = |A \times B|$
- $|A|^{|B|} = |B \rightarrow A|$

**הערה:** מכיוון וניתן להוכיח איתלות בבחירת הנציגים, כשנרצה לדבר על  $a + b$  עבור  $a + b$  עוצמות, נוכל לבחור את הנציגים עבור עוצמות אלה כקבוצות זרות  $A, B$  ואז ההגדרה היא  $a + b = |A \uplus B|$ .

**חוקים בסיסיים:**

לכל  $a, b, c$  עוצמות מתקיים:

- קומוטטיביות:  $a + b = b + a$
- קומוטטיביות:  $a \cdot b = b \cdot a$
- אסוציאטיביות:  $a + (b + c) = (a + b) + c$
- אסוציאטיביות:  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- חוק הפילוג:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- $a + 0 = a$
- $a \cdot 1 = a$
- $a \cdot 0 = 0$
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$
- $0^a = \begin{cases} 0 & a \neq 0 \\ 1 & a = 0 \end{cases}$
- מונוטוניות: אם  $a \leq b, c \leq d$  אז:

$$\begin{aligned} a + c &\leq b + d - \\ a \cdot c &\leq b \cdot d - \\ a^c &\leq b^c - \\ a^c &\leq a^d - \end{aligned}$$

**משפט:**

$$\begin{aligned} \aleph_0 + \aleph_0 &= \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \\ \aleph + \aleph &= \aleph \cdot \aleph = \aleph \\ \aleph_0 \cdot \aleph &= \aleph_0 + \aleph = \aleph \end{aligned}$$

**חוקי חזקות:**

$$\begin{aligned} (a^b)^c &= a^{b \cdot c} \\ a^{b+c} &= a^b \cdot a^c \\ (a \cdot b)^c &= a^c \cdot b^c \end{aligned}$$

**טענה 1.7** אם  $a$  עוצמה אינסופית אז  $a + \aleph_0 = a$ .

**מסקנה 2.7** אם  $\aleph_0 \leq a$  אז  $\forall n \in \mathbb{N}. a + n = a$ .

**משפט 3.7** איחוד לכל היותר בן מניה של קבוצות לכל היותר בנות מניה הוא לכל היותר בן מניה: תהא  $A$  קבוצה של קבוצות כך ש- $|A| \leq \aleph_0$  וגם  $\forall x \in A. |x| \leq \aleph_0$ . אזי  $|\bigcup A| \leq \aleph_0$ .

**משפט 4.7** תהא  $A$  קבוצה של קבוצות כך ש- $|A| = \aleph_0$  וגם  $\forall x, y \in A. x \neq y \implies x \cap y = \emptyset$  אזי  $|\bigcup A| = \aleph_0$ .

### חלק III

## קומבינטוריקה

### 8 קומבינטוריקה בסיסית

#### 8.1 בינום, מולטינום, ...

**בינום - מקדם בינומי:** יהיו  $n \geq k \geq 0$ . נגדיר:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . זה שווה למספר האפשרויות לבחור קבוצה של  $k$  ילדים מתוך  $n$  ילדים (ללא חשיבות לסדר).

**חלוקה לתאים:**  $S(n, k)$  זה מספר המולטי קבוצות (בלי חשיבות לסדר, עם החזרה) בגודל  $k$  בתוך  $\{1, 2, \dots, n\}$ , שזה שקול לחלוקת  $k$  כדורים זהים ל- $n$  תאים. מחשבים באמצעות:

$$S(n, k) = \binom{n+k-1}{k}$$

**זהויות חשובות:**

$$1. \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

2. **זהות פסקל:**  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ . זה נכון כי לבחור  $k$  מתוך הקבוצה  $\{1, \dots, n\}$  זה כמות האפשרויות אם לא נבחר את 1 (שזה  $\binom{n-1}{k}$ ) ועוד כמות האפשרויות אם נבחר את 1 (שזה  $\binom{n-1}{k-1}$ ).

#### 8.2 סדרת הפרשים

דרך נפוצה לפתור בעיות של ספירת סדרות. עבור סדרה  $a$ , סדרת ההפרשים  $y$  מוגדרת כך:  $y_1 = a_1, y_{i+1} = a_{i+1} - a_i$ . במילים אחרות סדרת ההפרשים היא  $a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots$ .

#### 8.3 הוכחות קומבינטוריות

דרך להוכיח כי שני ביטויים שווים. נמצא בעיה ששני הצדדים בשוויון פותרים ואז נוכיח ששני הצדדים פותרים את אותה הבעיה.

#### 8.4 הבינום של ניוטון

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

לכל  $x, y \in \mathbb{R}$  ולכל  $n \in \mathbb{N}$ .

##### 8.4.1 המקדם המולטינומי

נגדיר את המקדם המולטינומי: עבור  $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$  כך ש- $k_1 + \dots + k_m = n$  נגדיר את המקדם המולטינומי:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$$

**הגדרה קומבינטורית:** המקדם המולטינומי  $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}$  עבור  $k_1 + \dots + k_m = n$  הינו מספר האפשרויות להרכיב מילה באורך  $n$  מעל א"ב  $\{1, \dots, m\}$  עם בדיוק  $k_1$  ים,  $k_2$  ים,  $\dots$ .

זה שווה ל- $\binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdot \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \cdot \dots \cdot \binom{k_m}{k_m}$  נוסחת המולטינום:

$$(x_1 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} \binom{n}{k_1, \dots, k_m} x^{k_1} \cdot x^{k_2} \cdot \dots \cdot x^{k_m}$$

#### 8.4.2 המקדם הבינומי הכללי

לכל  $r \in \mathbb{R}$ , ולכל  $k \in \mathbb{N}$  נגדיר  $r^{\overline{k}} = r \cdot (r-1) \cdot \dots \cdot (r-k+1)$ . בנוסף  $n^{\overline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ ,  $n^{\overline{n}} = n!$ .  
 $\frac{1}{2}^{\overline{3}} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8}$ .  $n^{\overline{0}} = 1, n^{\overline{1}} = n$

הגדרה 1.8 לכל  $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$  נגדיר את הבינום השלילי להיות  $\binom{r}{k} = \frac{r^{\overline{k}}}{k!} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$

#### 8.4.3 נוסחת הבינום השלילי

עבור  $r, x, y \in \mathbb{R}$

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$$

### 8.5 הכלה והדחה

נוסחת ההכלה וההדחה: יהיו  $A_1, \dots, A_n$  קבוצות סופיות.

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_i \cap A_j| - \dots \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots + |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \\ &\quad - \dots \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

בנוסחה זו יש  $2^n - 1$  מחוברים (כל תתי הקבוצות חוץ מהקבוצה הריקה). הנוסחה הזו רלוונטית אם הרבה מהמחברים הם 0.

**המקרה הסימטרי** (בכל שורה בנוסחת ההכלה וההדחה, הגורמים יוצאים שווים): הגודל של חיתוך המאורעות אינו תלוי באילו מאורעות אנו חותכים, אלא רק בכמות המאורעות. במקרה זה נפשט את הנוסחה להיות:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \cdot |A_1 \cap \dots \cap A_k|$$

### 8.6 עקרון שובך היונים

אם מחלקים  $m$  יונים ל- $n$  שובכים, אז קיים שובך עם לפחות  $\lceil \frac{m}{n} \rceil$  יונים.

8.7 מספרי קטלן  $C_n$ 

הגדרה: הפתרון לבעיות הבאות:

- כמה הילוכים שמתחילים בנקודה  $(0,0)$  ומסתיימים ב- $(n,n)$  יש כך שבכל שלב קופצים צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה, ואסור לעבור את האלכסון  $y=x$ ?
- כמה סדרות של 0 ו-1 באורך  $2n$  יש כך שלכל  $1 \leq k \leq 2n$ , מספר האפסים לא עולה על מספר האחדים עד המקום ה- $k$  ויש בדיוק  $n$  אפסים ו- $n$  אחדים?
- כמה דרכים חוקיות יש לשים  $n$  סוגריים ו- $2n$  תווים? (למשל עבור  $n=3$  משהו כמו  $((()))$  נחשב לחוקי)

**חישוב:**  $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n} \binom{2n}{n}$   
**נוסחת נסיגה:** עבור  $n \geq 1$ ,

$$C_n = \sum_{i=1}^n C_{i-1} \cdot C_{n-i}$$

## 9 פונקציות יוצרות

תהא  $\bar{a} = \lambda n \in \mathbb{N}.a_n$  סדרת מספרים. הפונקציה היוצרת את הסדרה  $\bar{a}$  היא הפונקציה  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  (טור חזקות). בכיוון ההפוך, בהינתן פונקציה  $f$  שניתן לפתח לטור חזקות, כלומר, שניתן לבטא על ידי  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , סדרת המקדמים  $\lambda n \in \mathbb{N}.a_n$  נקראת הסדרה הנוצרת.

## 9.1 נוסחאות

הגדרה 1.9 תהא  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  סדרת מספרים כלשהי. נגדיר טור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n$$

רשימת נוסחאות:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} &= \sum_{k=0}^n x^k \\ \frac{1}{(1-x)^m} &= \sum_{n=0}^{\infty} S(m, n) x^n \end{aligned}$$

הפונקציה  $\alpha f(x) \pm \beta g(x)$  יוצרת את הסדרה  $\lambda n \in \mathbb{N}. \alpha a_n \pm \beta b_n$ .

הפונקציה  $f(cx)$  יוצרת את הסדרה  $\lambda n \in \mathbb{N}. c^n \cdot a_n$ .

הפונקציה  $x^m \cdot f(x)$  יוצרת את הסדרה  $\lambda n \in \mathbb{N}. \begin{cases} 0 & n < m \\ a_{n-m} & n \geq m \end{cases}$

$$a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \dots + a_n \cdot b_0$$

$\lambda n \in \mathbb{N}. \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k}$  : הקונבולוציה של הסדרות:

מקרה פרטי של 4:  $\frac{f(x)}{1-x}$  יוצרת את סדרת הסכומים החלקיים  $\lambda n \in \mathbb{N}. \sum_{k=0}^n a_k$



## 9.2 פירוק לשברים חלקיים

הסיבה שאנחנו עושים פירוק לשברים חלקיים היא שהפונקציה  $\alpha f(x) \pm \beta g(x)$  נוצרת מהסדרה  $\lambda n \in \mathbb{N}, \alpha a_n \pm \beta b_n$ , לכן יותר קל לנו למצוא פונקציה יוצרת לסכום של כמה שברים מאשר שבר אחד גדול.

הפירוק לשברים חלקיים הכי פשוט הוא כאשר כל הגורמים במכנה שונים. למשל:

$$\frac{x+3}{x^2-3x-40} = \frac{x+3}{(x-8)(x+5)} = \frac{A}{x-8} + \frac{B}{x+5}$$

$$x+3 = A(x+5) + B(x-8)$$

ואז מוצאים את  $A, B$  לפי המשוואה. אם יש ביטוי שאינו פריק במכנה, למשל:

$$\frac{10x^2+12x+20}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

עבור כל גורם ממעלה שנייה נוסף מונה מהצורה  $ax+b$ . לאחר מכן נקבל את המשוואה:  $10x^2+12x+20 = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)$  שאותה צריך לפתור.

אם יש גורמים שחוזרים על עצמם במכנה, למשל:

$$\frac{P(x)}{(x+2)(x^2+1)^5} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^3} + \frac{Hx+I}{(x^2+1)^4} + \frac{Jx+K}{(x^2+1)^5}$$

אז נסכום את הגורם שחוזר על עצמו מ-1 עד המעריך של החזקה.

## 10 נוסחאות נסיגה

**הגדרה 1.10** נוסחת נסיגה היא ביטוי של איבר בסדרה באמצעות איברים קודמים בסדרה.

**דוגמא:** פיבונאצ'י.  $a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ .

לנוסחת נסיגה יש משמעות רק החל מ- $n$  מסוים (כי היא דורשת מספרים קודמים שלא קיימים קודם לכן).

**הגדרה:** עומק הרקורסיה הוא כמות האינדקסים שצריך לנסוג (לחזור אחורה) על מנת לחשב את האיבר בסדרה.

**תנאי התחלה:** השמה נתונה במשוואת הרקורסיה מעומק  $k$ . השמה של  $a_0, \dots, a_{k-1}$  היא תנאי התחלה.

**בעיית התחלה:** נוסחה רקורסיבית מעומק  $k$  ותנאי התחלה.

**פתרון של בעיית התחלה:** סדרה  $\lambda n \in \mathbb{N}, a_n$  נקראת פתרון לבעיית התחלה אם הסדרה מקיימת את כל תנאי ההתחלה ואת המשוואה הרקורסיבית לכל  $n$  שעבורו יש משמעות למשוואה. לבעיית התחלה תמיד יש פתרון יחיד.

**פתרון לנוסחת נסיגה:** כל סדרה  $\lambda n \in \mathbb{N}$  המקיימת את המשוואה לכל  $n$  עבורו יש משמעות למשוואה.

## 10.1 נוסחאות נסיגה לינאריות

## 10.1.1 נוסחאות נסיגה לינאריות הומוגניות

נוסחאות נסיגה מהצורה  $a_n = \alpha_1 \cdot a_{n-1} + \dots + \alpha_k \cdot a_{n-k}$  כאשר  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ .

## 10.1.2 נוסחאות נסיגה לינאריות לא הומוגניות

נוסחאות נסיגה מהצורה  $a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \dots + \alpha_k a_{n-k} + \beta$  כאשר  $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta \in \mathbb{R}$ . ניתן לעבור מנוסחת נסיגה לינארית לא הומוגנית (למשל  $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5$ ) לנוסחת נסיגה לינארית

הומוגנית באופן הבא: נוסף את  $a_{n-1}$  משני אגפי המשוואה ונקבל:

$$\begin{aligned} a_n + 2a_{n-2} + 3a_{n-3} + 5 &= 3a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5 \\ a_n &= 3a_{n-1} + a_{n-2} - 3a_{n-3} \end{aligned}$$

## 10.2 פתרון נוסחאות נסיגה לינאריות

### 10.2.1 פתרון נוסחאות נסיגה לינאריות באמצעות פונקציות יוצרות

למשל:  $a_{n+1} = (1.1)a_n + 1000$ . נסמן ב- $f(x)$  את הפונקציה היוצרת של איזשהו פתרון. ננסה להבין מתנאי הנסיגה מהי  $f(x)$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (1.1 \cdot a_{n-1} + 1000) x^n = a_0 + (1.1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + 1000 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x \cdot f(x) \right) = a_0 + 1.1x \cdot f(x) + \frac{1000x}{1-x} \\ f(x) \cdot (1 - 1.1x) &= \frac{a_0(1-x) + 1000x}{1-x} \\ f(x) &= \frac{a_0(1-x) + 1000x}{(1-x)(1-1.1x)} \end{aligned}$$

ומכאן מוצאים את הסדרה שהפונקציה יוצרת.

### 10.2.2 פתרון נוסחאות נסיגה לינאריות הומוגניות באמצעות פולינום אופייני

עבור נוסחה  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$  נעבור לפולינום האופייני כך:  $\overbrace{a_{n+1}}^{x^2} - \overbrace{a_n}^{x^1} - \overbrace{a_{n-1}}^{x_0} = 0$ , נמצא את שורשי הפולינום (הם  $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ ). אם כך הפתרונות הבסיסיים (שמקיימים את נוסחת הנסיגה אך לא את תנאי ההתחלה) הם  $\lambda n \in \mathbb{N}$ .  $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ ,  $\lambda n \in \mathbb{N}$ .  $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$  נמצא את הפתרון של בעיית ההתחלה:

$$a_n = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

נמצא את  $A, B$  באמצעות תנאי ההתחלה ונקבל כי  $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

**פירוט על פתרונות בסיסיים:**

- אם אין שורשים ממשיים, כרגע אנחנו לא יודעים מה לעשות.
- אם עומק הרקורסיה הוא 2:
  - ויש שני שורשים שונים  $\lambda_1, \lambda_2$ , אז הפתרונות הבסיסיים הם כפי שעשינו בתרגיל הזה שזה  $\lambda n \in \mathbb{N}$ .  $(\lambda_1)^n$ ,  $\lambda n \in \mathbb{N}$ .  $(\lambda_2)^n$ .
  - ויש שורש יחיד  $\lambda_1$ , אז הפתרונות הבסיסיים הם  $\lambda n \in \mathbb{N}$ .  $\lambda_1^n$ ,  $\lambda n \in \mathbb{N}$ .  $n \cdot \lambda_1^n$ .
- אם עומק הרקורסיה הוא 3:
  - ויש שלושה שורשים שונים  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , אז הפתרונות הבסיסיים הם  $\lambda n \in \mathbb{N}$ .  $\lambda_1^n$ ,  $\lambda n \in \mathbb{N}$ .  $\lambda_2^n$ ,  $\lambda n \in \mathbb{N}$ .  $\lambda_3^n$ .
  - ויש שני שורשים  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ , אז הפתרונות הבסיסיים הם גם  $\lambda n \in \mathbb{N}$ .  $\lambda_1^n$ ,  $\lambda n \in \mathbb{N}$ .  $\lambda_2^n$ ,  $\lambda n \in \mathbb{N}$ .  $\lambda_3^n$ .
  - ויש שורש יחיד  $\lambda_1$ , אז הפתרונות הבסיסיים הם  $\lambda n \in \mathbb{N}$ .  $\lambda_1^n$ ,  $\lambda n \in \mathbb{N}$ .  $n \cdot \lambda_1^n$ ,  $\lambda n \in \mathbb{N}$ .  $n^2 \cdot \lambda_1^n$ .
- ...וכך הלאה.

### 10.2.3 מעבר מפתרון יחיד של נוסחת נסיגה לא הומוגנית לקבוצת הפתרונות

נשתמש במשפט הבא:

$$\{\lambda n \in \mathbb{N}. a_n + x_n \mid \text{solution for } a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \dots + \alpha_k a_{n-k} + \beta\} = \{f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \dots + \alpha_k a_{n-k} + \beta\}$$

כאשר  $x_n$  פתרון נתון אחד למשוואה  $a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \dots + \alpha_k a_{n-k} + \beta$ . כלומר ברגע שיש לנו פתרון אחד לנוסחת נסיגה לא הומוגנית ניתן למצוא את כל הפתרונות באמצעות פתרון נוסחת הנסיגה ההומוגנית.

### 10.3 סדרות עזר

שיטה שימושית לפתרון נוסחאות נסיגה. נגדיר סדרות עזר (סדרות שאנחנו לא צריכים לחשב) שיתבטלו בנוסחה הסופית, אך עוזרות להגדיר את הקשרים בין הנוסחאות. למשל, כמה מחרוזות באורך  $n$  ישנן מעל א"ב  $\{A, B, C\}$  ללא הרצפים  $BB, CC$ ? הפתרון הוא  $x_n$ . נסמן ב- $a_n$  את המחרוזות שמסתיימות ב- $A$ , וב- $b_n$  את המחרוזות שנגמרות ב- $B$  וב- $c_n$  את אלה שנגמרות ב- $C$ . נמצא קשרים בין הנוסחאות:

$$x_n = a_n + b_n + c_n = x_{n-1} + b_n + c_n = x_{n-1} + 2b_n$$

$$a_n = x_{n-1}$$

$$b_n = a_{n-1} + c_{n-1} = x_{n-2} + c_{n-1}$$

$$c_n = b_n$$

$$\text{ונקבל כי } \frac{x_n - x_{n-1}}{2} = b_n = x_{n-2} + \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{2} \text{ כלומר } x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$$

## חלק IV

## תורת הגרפים

### 11 הגדרות בסיסיות

$G = \langle V, E \rangle$ , כאשר  $V$  זה הצמתים ו- $E$  זה הקשתות.  $E \subseteq P_2(V) = \{X \subseteq V \mid |X| = 2\}$ .

**הגדרה 1.11**  $N(v \in V) = \{u \in V \mid \{v, u\} \in E\}$  זה קבוצת השכנים.

**הגדרה 2.11**  $d_G(v \in V) = |\{e \in E \mid v \in e\}|$  זו הדרגה.

**הגדרה 3.11** תת-גרף של  $G$  הינו גרף  $G' = \langle V', E' \rangle$  כך  $V' \subseteq V$  ו- $E' \subseteq E$  (וגם  $E' \subseteq P_2(V')$ ). כי אחרת זה לא גרף.

**הגדרה 4.11**  $K \subseteq V$  יהי הגרף הנפרש על ידי  $K$  מסומן  $G[K] = \langle K, P_2(K) \cap E \rangle$  תת גרף של  $G$ .

**הגדרה 5.11** הגרף המשלים  $\bar{G}$  הינו הגרף  $\bar{G} = \langle V, P_2(V) \setminus E \rangle$ .

### 11.1 מסלול, טיול, וכל הדברים האלה

• טיול הוא סדרת קודקודים  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in V^n$  כך שלכל  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $\{a_i, a_{i+1}\} \in E$ . לא קיים טיול ריק.

• מסלול הוא טיול  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  כך שאין קשת שחוזרת פעמיים.

• מעגל הוא מסלול שמתחיל ונגמר באותה הנקודה.

- מסלול פשוט הוא מסלול חסר מעגלים, כלומר מסלול שלא חוזר על קודקוד פעמיים.
  - מעגל פשוט הוא מעגל  $\langle a_1, \dots, a_n, a_1 \rangle$  כך ש- $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  הוא מסלול פשוט. כלומר הפעם היחידה שהמעגל הזה חוזר על נקודה זה בנקודת ההתחלה.
  - מסלול אוילר הוא מסלול שעובר בכל קשת בדיוק פעם אחת.
  - מעגל אוילר הוא מעגל שעובר בכל קשת בדיוק פעם אחת.
  - $G$  יש מעגל אוילר  $\iff$  דרגת כל הקודקודים היא זוגית.
  - $G$  יש מסלול אוילר  $\iff$  יש 0 או 2 קודקודים מדרגה אי זוגית.
  - מסלול המילטון הוא מסלול שעובר בכל קודקוד בדיוק פעם אחת.
  - מעגל המילטון הוא מעגל פשוט שעובר על כל הקודקודים.
- משפט 6.11** יהי  $G = \langle V, E \rangle$  גרף,  $u \neq v$ . אזי יש טיול מ- $v$  ל- $u$   $\iff$  יש מסלול פשוט מ- $v$  ל- $u$ .

## 11.2 קשירות

יהי  $G$  גרף, על  $V$  אפשר להגדיר יחס שקילות ("יחס הקשירות"): עבור  $v_1, v_2 \in V$  נגדיר כי  $v_1 \sim v_2 \iff$  קיים טיול מ- $v_1$  ל- $v_2$  ( $\iff$  קיים מסלול פשוט מ- $v_1$  ל- $v_2$ ).

**הגדרה 7.11** כל מחלקת שקילות ביחס הקשירות נקראת "רכיב קשירות".

**הגדרה 8.11** גרף  $G$  נקרא קשיר אם יש בדיוק רכיב קשירות אחד. או באופן שקול אם בין כל שני קודקודים  $v_1, v_2 \in V$  קיים טיול.

**משפט 9.11** יהי  $G$  גרף ונניח כי  $k_1, \dots, k_n$  הם רכיבי הקשירות של  $G$ .

1. לכל  $1 \leq i \leq n$ ,  $G[k_i]$  הינו תת-גרף קשיר של  $G$ .
2. אין קשתות בין קודקודים מרכיבי קשירות שונים.
3. אם מוסיפים לגרף  $G$  קשת בין קודקוד  $v \in k_1$  ו- $u \in k_2$  אז בגרף החדש רכיבי הקשירות יהיו  $k_1 \cup k_2, k_3, k_4, \dots, k_n$ .
4. אם מוסיפים לגרף  $G$  קשת בין שני קודקודים באותו רכיב הקשירות, רכיבי הקשירות לא משתנים.

**מסקנה 10.11** לכל גרף  $G$ , מספר רכיבי הקשירות ב- $G$   $|V| - |E|$ .

**מסקנה 11.11** אם  $|V| - 1 > |E|$  אז  $G$  לא קשיר.

**מסקנה 12.11** אם  $G$  קשיר אז  $|E| \geq |V| - 1$ .

**הגדרה 13.11 צביעות של גרפים:** צביעה היא פונקציה. יש שתי סוגים של צביעות:

1. צביעת קודקודים.  $f: V \rightarrow C$  נקראת צביעת קודקודים.
2. צביעת קשתות.  $G = \langle V, E \rangle$ ,  $f: E \rightarrow C$  כאשר  $C$  קבוצת הצבעים.  $f$  נקראת צביעת קשתות ב- $C$  צבעים.
3. צביעת קודקודים  $f: A \rightarrow C$  נקראת חוקית אם  $\forall \{v, u\} \in E. f(v) \neq f(u)$  (הצבעים שונים בין קודקודים שכנים).
4. אין חוק דומה לצביעת קשתות.

**הגדרה 14.11** יהי  $G = \langle V, E \rangle$  גרף. מספר הצביעה של  $G$ , מסומן  $\chi(G)$  הינו מספר הצבעים הקטן ביותר הדרוש על מנת לצבוע את  $G$  בצביעת קודקודים חוקית.

**הערה:**  $1 \leq \chi(G) \leq |V|$ , יתר על כן:

$$1. \chi(G) = |V| \iff G = K_V.$$

$$2. \chi(G) = 1 \iff E = \emptyset.$$

**הגדרה 15.11** נאמר כי גרף  $G$  הוא  $n$ -צביע אם קיימת צביעת קודקודים חוקית ב- $n$  צבעים.  $\chi(G)$  הוא ה- $n$  הקטן ביותר כש  $G$  הוא  $n$ -צביע.

## 12 עצים

**הגדרה 1.12** עץ הינו גרף קשיר וחסר מעגלים.

**הגדרה 2.12** יער הינו גרף חסר מעגלים.

**מסקנה 3.12** ביער מספר הקשתות קטן ממספר הקודקודים.

**מסקנה 4.12** רכיבי הקשירות של יער הם עצים.

**משפט 5.12** אם  $G = \langle V, E \rangle$  עץ אז  $|E| = |V| - 1$ .

**משפט 6.12 משפט האפיון (משפט מרכזי בקורס):** יהי  $G = \langle V, E \rangle$  גרף, הבאים שקולים:

1.  $G$  עץ.

2.  $G$  קשיר וגם  $|E| = |V| - 1$ .

3.  $G$  חסר מעגלים ו- $|E| = |V| - 1$ .

4.  $G$  קשיר מינימלי (כלומר אם נחסיר קשת מ- $G$  נקבל גרף לא קשיר).

5.  $G$  חסר מעגלים מקסימלי (כלומר כל קשת חדשה שנוסיף ל- $G$  תסגור מעגל כלשהו).

6. בין כל שני קודקודים  $v_1, v_2 \in V$  קיים מסלול פשוט יחיד.

**הגדרה 7.12** יהי  $G = \langle V, E \rangle$  גרף. עץ פורש של  $G$ , הוא תת גרף  $T = \langle V, E' \rangle$  של  $G$  כך ש- $T$  עץ.

**משפט 8.12** לכל גרף קשיר קיים עץ פורש.

### 12.1 קידוד פרופר

**הגדרה 9.12 קידוד פרופר:** ישנה התאמה חח"ע ועל בין קבוצת הקודקודים  $\{1, \dots, n\}$  לבין מחרוזות באורך  $n - 2$  מעל א"ב  $\{1, \dots, n\}$ . ההתאמה לוקחת עץ, ומקודדת אותו כמחרוזת. הקידוד מוגדר באופן הבא:

**טענה 10.12** עבור כל קודקוד, מספר המופעים במחרוזת שווה לדרגת הקודקוד פחות אחד.

בכל שלב מבצעים את הפעולות הבאות כל עוד מספר הקודקודים גדול מ-2.

1. בודקים מהי קבוצת העלים.

2. בוחרים את העלה בעל הערך המספרי המינימלי. נסמנו ב- $x$ .

3. מוסיפים את הקודקוד היחיד אליו  $x$  מחובר למחרוזת. נסמנו ב- $y$ .  $y$  נקרא האב של  $x$  ו- $x$  נקרא ילד של  $y$ .

4. נמחק את  $x$  ואת הקשת היחידה  $\{x, y\}$ .

**הגדרה 11.12 קידוד פרופר ההפוך:** בהנתן מחרוזת הקידוד ההפוך משחזר את העץ. הקידוד ההפוך מתבצע באופן הבא:

1. אורך המחרוזת הינו  $n - 2$ . ולכן מספר הקודקודים בגרף הינו אורך המחרוזת ועוד שתיים.
2. אנו בונים את העץ מעלים לכיוון השורש, בכל שלב נבצע את הפעולות הבאות:
  - (א) נמצא את קבוצת העלים ע"י איתור של כל התווים שלא מופיעים במחרוזת.
  - (ב) את העלה בעל הערך הקטן ביותר, נחבר לתו השמאלי ביותר במחרוזת.
  - (ג) נמחק את העלה שחובר מרשימת העלים, ונמחק את התו השמאלי ביותר מהמחרוזת.
  - (ד) את העלה האחרון מחברים לקודקוד  $n$ .

## 13 איזומורפיזם

יהיו  $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle, G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ . פונקציה  $f: V_1 \rightarrow V_2$  נקראת איזומורפיזם של גרפים אם:

1.  $f$  חח"ע ועל.

2.  $\forall v, u \in V_1. \{v, u\} \in E_1 \iff \{f(v), f(u)\} \in E_2$

**משפט 1.13** אם  $G_1 \simeq G_2$  (ע"י  $f: V_1 \rightarrow V_2$ )

1.  $|V_1| = |V_2| \wedge |E_1| = |E_2|$

2.  $d_{G_1}(v) = d_{G_2}(f(v))$

3. אם  $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$  טיול/מסלול ... ב- $G_1$  אז  $\langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle$  אותו הדבר ב- $G_2$ .

4. מספר רכיבי הקשירות ב- $G_1$  ו- $G_2$  זהה.

5.  $G_1$  עץ  $\iff G_2$  עץ.

**הערה:** אם נקבע את הקודקודים להיות  $\{1, \dots, n\}$ , אז על קבוצת הגרפים  $Graph(\{1, \dots, n\}) = \{\langle V, E \rangle \mid V = \{1, \dots, n\}\}$  הוא יחס שקילות.

**הגדרה 2.13**  $[G]_{\simeq}$  זה גרף לא מסומן, כלומר גרף בלי שמות לקודקודים.

## 14 נוסחאות

**נוסחת לחיצות הידיים:** לכל גרף  $G = \langle V, E \rangle$  מתקיים:

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$$

**משפט 1.14** יהי  $G = \langle V, E \rangle$  גרף חסר מעגלים (אין אף מעגל ב- $G$ ) אזי  $|E| < |V|$ .

**מסקנה 2.14** אם  $|V| \leq |E|$  אז ב- $G$  יש מעגל.

מספר העצים על  $\{1, \dots, n\}$  הוא  $n^{n-2}$ .