סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 1

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

חלק I
מונואידים, חבורות, חוגים ושדות

1 הגדרות

1.1 תכונות של פעולות

תהא $*$ פעולה בינארית על A (כלומר ה־domain הוא $A \times A$).

1. $*$ אסוצייטיבית: $\forall a, b, c \in A. (a * b) * c = a * (b * c)$.
2. $*$ חילופית: $\forall a, b. a * b = b * a$.
3. קבוצה A סגורה לפעולה $*$: $* : A \times A \to A$.

1.2 מונואיד

מונואיד הוא זוג $\langle G, * \rangle$ כאשר G קבוצה כלשהי ו־$*$ פעולה בינארית על G, כך ש:

1. G סגורה לפעולה $*$.
2. $*$ פעולה אסוצייטיבית.
3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר $\exists e \in G. \forall g \in G. e * g = g * e = g$. האיבר הזה יחיד ומסומן e_G.

1.3 חבורה

מקרה פרטי של מונואיד שמקיימת גם:

4. קיים איבר הופכי, כלומר $\forall g \in G. \exists h \in G. g * h = h * g = e$ כאשר e איבר יחידה. האיבר ההופכי של g מסומן g^{-1}.

1.4 חוג

שלשה $\langle R, +, * \rangle$ נקראת חוג אם:

1. $\langle R, + \rangle$ חבורה חילופית, כלומר $\forall a, b \in R. a + b = b + a$.
2. $*$ היא פעולה בינארית על R ו־R סגורה לפעולה $*$.
3. חוק הפילוג:

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in R. a * (b + c) &= a * b + a * c \\ (b + c) * a &= b * a + c * a \end{aligned}$$

חוג חילופי ־ אם $*$ פעולה חילופית (כלומר $a * b = b * a$).

חוג עם יחידה ־ אם $\langle R, * \rangle$ מונואיד.

סימונים: 0_R ניטרלי לחיבור, 1_R ניטרלי לכפל אם קיים.

מחלק 0 ־ איבר $0_R \neq a \in R$ נקרא "מחלק 0" אם יש $b \neq 0_R$ כך ש־$a * b = 0_R$. בממשיים אין מחלק 0.

חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0 נקרא **תחום שלמות**. הוא מקיים את חוק הצמצום (לכל $a, b, c \in R$, אם $a * b = c * b$ אז $a = c$)

1.5 שדה

מקרה פרטי של חוג $\langle F,+,*\rangle$ שמקיים גם:

1. $\langle F\setminus\{0_F\},*\rangle$ חבורה חילופית.

כל שדה הוא תחום שלמות, אבל ההפך אינו נכון. תחומי שלמות סופיים הם כן שדות.
הרבה פעמים בהגדרת שדה מוסיפים את הדרישה $0_F\neq 1_F$.

חלק II
מרוכבים

2 הגדרות בסיסיות

נסמן $i=\sqrt{-1}$. ההגדרה הפורמלית של מרוכבים היא: $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$, כאשר המספר הראשון הוא החלק הממשי (שמסומן $Re\left(c\right)$) והמספר השני הוא החלק הדמיוני (שמסומן $Im\left(c\right)$).
עובדות: עבור $z\in\mathbb{C}$,

1. **הגודל של z:** $||z||=\sqrt{Re\left(z\right)^2+Im\left(z\right)^2}$. כלומר המרחק של z מראשית הצירים.
2. **זהות אוילר:** $e^{i\theta}=\cos\left(\theta\right)+i\sin\left(\theta\right)$, לכן $z=||z||\,e^{i\cdot\arg(z)}$.
3. **חיבור:** מחברים את החלק הממשי והדמיוני בנפרד.
4. **כפל:** $(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i\left(bc+da\right)$. משתמשים בזה ש־$i^2=-1$.
5. כל שורש של פולינום מרוכב הוא מרוכב.
6. נגדיר $\overline{z}$ להיות $\overline{z}=a-ib$. כלומר להפוך את החלק הדמיוני.
   (א) $\overline{\overline{z}}=z$
   (ב) $z\cdot\overline{z}=||z||^2$
   (ג) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
   (ד) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
   (ה) $Re\left(z\right)=\frac{z+\overline{z}}{2},Im\left(z\right)=\frac{z-\overline{z}}{2i},$
7. $\langle\mathbb{C},+,\cdot\rangle$ שדה סגור אלגברית (כלומר כל שורש של כל פולינום מרוכב הוא מרוכב).
8. **איבר הופכי:** $w=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$ (אם מכפילים בהופכי מקבלים 1).

3 הצגה פולארית

נגדיר מרוכב בתור זוג $\langle r,\theta\rangle$ כאשר r המרחק מראשית הצירים ו־θ הזווית שהוא יוצר, שנקראת הארגומנט.

$$z=r\cos\theta+ir\sin\theta=r\cdot e^{i\theta}$$

עובדות:

1. **הארגומנט של z:** נסמן $\arg\left(z\right)$ להיות הזווית שהמספר יוצר עם ציר הממשיים (לרוב נסמן כ־θ). ניתן לחשב אותו בעזרת $\arg\left(z\right)=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ ברוב המקרים.

2. $\overline{z}=r\cdot e^{-i\theta},z^{-1}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$
3. $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$
4. להכפיל מספרים מרוכבים על הגרף נראה כמו להכפיל את האורכים זה בזה ולחבר את הזוויות.

פתרון משוואה $z^n=a+ib$. נמצא הצגה פולארית $z^n=re^{i\theta}$. נשתמש בעובדה ש־$e^{i\theta}=e^{i(\theta+2\pi k)}$ עבור $k\in\mathbb{Z}$. אזי:

$$z=\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\frac{k}{n}\right)}$$

עבור $k\in\mathbb{Z}$. ולכל $k\in\{0,\ldots,n-1\}$ נקבל פתרונות שונים.

חלק III
מטריצות

4 הגדרות

וקטור הוא nיה של איברים ב־$\mathbb{F}$. מטריצה היא mיה של וקטורים. מטריצה מסדר $m\times n$ היא מטריצה עם m שורות ו־n עמודות (קודם y ואז x).
נגדיר מערכת משוואות כמטריצה באופן הבא:

$$\begin{cases}\alpha_{1,1}x_1+\cdots+\alpha_{1,n}x_n & =b_1\\ \vdots & =\vdots\\ \alpha_{m,1}x_1+\cdots+\alpha_{m,n}x_n & =b_m\end{cases}\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}\alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} & b_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \alpha_{m,1} & \cdots & \alpha_{m,n} & b_m\end{array}\right)$$

4.1 שונות

מטריצה ריבועית: מטריצה שכמות העמודות בה שווה לכמות השורות.

מטריצת היחידה: מסומנת I_n. היא מטריצה ריבועית שבה $a_{i,j}=1$ אם $i=j$, ואם $i\neq j$ אז $a_{i,j}=0$. לדוגמה:

$$I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

וקטור e_i:

$$(e_i)_i=\begin{cases}0 & x\neq i\\ 1 & x=i\end{cases}$$

זה בעצם 0 בכל מקום חוץ מהמקום ה־i.

מטריצת הסיבוב:

$$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

אם מכפילים וקטור במטריצת הסיבוב, זה מסובב את הוקטור θ מעלות.

4.2 פעולות בסיסיות

חיבור וקטורים:

$$\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_0\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_0+\beta_0\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}$$

4.2.1 כפל מטריצה בוקטור

כמו להציב את הוקטור בעמודות המטריצה.

$$\begin{pmatrix}a_{1,1} & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1 a_{1,1}+\dots+\beta_n a_{1,n}\\ \dots+\dots+\dots\\ \beta_1 a_{m,1}+\dots+\beta_n a_{m,n}\end{pmatrix}$$

בנוסף, הפתרונות של $\overline{x}\in \mathrm{Sols}\left(A\mid b\right)$ שקולים ל־$A\overline{x}=\overline{b}$.
את פתרונות המטריצה נסמן ב־Sols. מטריצות נקראות <u>שקולות</u> אם הפתרונות שלהן זהים.
משפטים לגבי כפל מטריצה בוקטור:

- $A\left(\overline{x}+\overline{y}\right)=A\overline{x}+A\overline{y}$
- $A\left(\alpha\cdot\overline{x}\right)=\alpha\cdot\left(A\cdot\overline{x}\right)$.
- עבור I_n מרטיצת היחידה, $I_n\cdot\overline{b}=\overline{b}$. עבור 0 מטריצת ה־0, $0\cdot b=0$.

4.2.2 כפל מטריצה במטריצה

הגדרה 1.4 יהא R חוג ויהיו $A\in M_{n\times m}\left(R\right),B\in M_{m\times p}\left(R\right)$ מטריצות. נגדיר כפל מטריצות $\left(A\cdot B\right)\in M_{p\times n}(R)$ בצורה הבאה:

$$\left(A\cdot B\right)_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\cdot b_{k,j}$$

משפט 2.4 $A\cdot B=\begin{pmatrix} | & | & | \\ A\cdot C_1(B) & \cdots & A\cdot C_n(B)\\ | & | & |\end{pmatrix}$.

משפט 3.4 $A\cdot B=\begin{pmatrix} - & R_1(A)\cdot B & -\\ & \vdots & \\ - & R_n(A)\cdot B & -\end{pmatrix}$.

כלומר כפל מטריצות הוא כפל וקטורים של העמודות של B ב־A, או כפל של השורות של A ב־B.

4.2.3 טענות לגבי כפל מטריצות:

1. **אסוציאטיביות הכפל:** $\left(A\cdot B\right)\cdot C=A\cdot\left(B\cdot C\right)$ עבור $A\in M_{m\times k}(\mathbb{F}),B\in M_{k\times t}(\mathbb{F}),C\in M_{t\times n}(\mathbb{F})$.
2. **חוק הפילוג:**

(א) $A\cdot(B_1+B_2)=A\cdot B_1+A\cdot B_2$ עבור $A\in M_{m\times k}(\mathbb{F}),B_1,B_2\in M_{k\times n}(\mathbb{F})$.

(ב) $(A_1+A_2)\cdot B=A_1\cdot B+A_2\cdot B$ עבור $A_1,A_2\in M_{m\times k}(\mathbb{F}),B\in M_{k\times n}(\mathbb{F})$.

3. **הוצאת סקלר:** $A\cdot(\alpha\cdot B)=\alpha\cdot(A\cdot B)$ עבור $A\in M_{m\times k}(\mathbb{F}),B\in M_{k\times n}(\mathbb{F}),\alpha\in\mathbb{F}$.
4. **כפל ב־0 וב־1:** לכל מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $A\cdot 0=0\cdot A=0$. נוסף לכך $A\cdot I_n=A$, $I_m\cdot A=A$.

הערה: יש מחלקי אפס, לדוגמה $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

4.3 פעולות אלמנטריות על מטריצה

הפעולות האלה הן:

1. להחליף סדר בין משוואות. $R_i\leftrightarrow R_j$.
2. להכפיל משוואה בקבוע. $R_i\to\alpha\cdot R_i$.
3. לחבר משוואות. $R_i\to R_i+R_j$.

כולן משמרות את הפתרונות של המטריצה.
מטריצות ששקולות באמצעות סדרת פעולות אלמנטריות נקראות <u>שקולות שורה</u>.

משפט 4.4 יהיו A,B מטריצות כך ש־$A\cdot B$ מוגדר, ותהא φ פעולה אלמנטרית. אזי:

$$\varphi(A\cdot B)=\varphi(A)\cdot B$$

הגדרה 5.4 המטריצה האלמנטרית: לכל פעולה אלמנטרית φ על מטריצות עם m שורות, נגדיר מטריצה אלמנטרית E_φ על ידי $E_\varphi\coloneqq\varphi(I_m)$.

לכל מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, ופעולה אלמנטרית φ, מתקיים ש־$\varphi(A)=E_\varphi\cdot A$.
בנוסף מטריצות אלמנטריות הפיכות, והמטריצה של הפעולה ההופכית של φ היא $(E_\varphi)^{-1}$.

5 דירוג ודירוג קנוני

5.1 הגדרות

בצורה מדורגת:

1. משוואות 0 (מהצורה $0=b$) נמצאות למטה.
2. המשתנה הפותח בכל משוואה נמצא מימין ממש למשתנים הפותחים במשוואות מעליו.

<u>משתנה חופשי</u> הוא משתנה שלא מקדם פותח של אף שורה.
בנוסף, בצורה מדורגת קנונית:

3. המקדם של כל משתנה פותח הוא 1
4. לכל משתנה פותח של משוואה, המקדם של המשתנה בשאר המשוואות הוא 0.

לכל מטריצה קיימת צורה מדורגת קנונית יחידה ששקולה לה.

5.2 מציאת פתרונות

5.2.1 מציאת מספר הפתרונות לפי צורה מדורגת (לא בהכרח קנונית)

עבור $(A \mid b)$ מטריצה מדורגת:

1. אם ב־$(A \mid b)$ יש שורת סתירה ($0 = b$ כאשר $b \neq 0$) ־ אין פתרון.
2. אחרת, יש $|\mathbb{F}|^k$ פתרונות כאשר k מספר המשתנים החופשיים.

5.2.2 מציאת הפתרונות עצמם לפי צורה מדורגת קנונית

$(A' \mid b')$ מטריצה מדורגת קנונית מסדר $m \times n$ ששקולה ל־$(A \mid b)$ אז:

1. אם ב־$(A' \mid b')$ יש שורת סתירה אז $\text{Sols}\left((A' \mid b')\right) = \emptyset$.
2. אחרת: נעשה החלפה על המשתנים החופשיים (אלה שאינם מקדם פותח של אף שורה). כל משתנה שאינו חופשי יוגדר לפי משוואה מסוימת. דוגמה:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

המקדמים החופשיים הם $1, 4, 6$. הפתרון הוא:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 2 - 4x_4 \\ x_4 \\ 3 - 3x_6 \\ x_6 \end{pmatrix} \mid x_1, x_4, x_6 \in \mathbb{R} \right\}$$

6 תת מרחב

טענה (בוחן תת מרחב): $U \subseteq F^n$ היא תת מרחב אמ"מ:

1. U סגורה לחיבור.
2. U סגורה לכפל בסקלר.
3. $\bar{0} \in U$. ניתן להחליף את התנאי ב־$U \neq \emptyset$.

נובע מכאן גם שחיתוך של תתי מרחבים הוא תת מרחב.

7 צירופים ליניאריים

7.1 בת"ל

הגדרה 1.7 יהיו $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k}) \in (\mathbb{F}^n)^k$, סדרת מקדמים $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^k$ נקראת <u>תלות ליניארית של</u> <u>$(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k})$</u> אם $\alpha_1 \overline{v_1} + \cdots + \alpha_k \overline{v_k} = 0$.

נגדיר את מרחב התלויות של $(\overline{v_1},\dots,\overline{v_k})$ להיות:

$$LD\left((\overline{v_1},\dots,\overline{v_k})\right)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n \mid \alpha_1\overline{v_1}+\dots+\alpha_k\overline{v_k}=0\right\}$$

ו־$LD\left((\overline{v_1},\dots,\overline{v_k})\right)=\text{Sols}\left((\overline{v_1},\dots,\overline{v_k}\mid 0)\right)$.

מסקנה 2.7 $\overline{v_1},\dots,\overline{v_k}$ בת"ל $\iff$ $LD\left(\overline{v_1},\dots,\overline{v_k}\right)=\{0\}$.

הגדרה 3.7 סדרת mיות $(\overline{v_1},\dots,\overline{v_k})\in(\mathbb{F}^m)^k$ תקרא <u>בלתי תלויה לינארית</u> (בת"ל) אם לכל $\bar{b}\in\mathbb{F}^m$ יש לכל היותר פתרון אחד למשוואה $\sum_{i=1}^k x_i\overline{v_i}=\bar{b}$.

1. תהי $S\subseteq\mathbb{F}^n$. אם $\bar{0}\in S$ אז S תלויה לינארית.
2. תהי $S\subseteq\mathbb{F}^n$ כך ש־$S=(x,y)$ אז S תלויה לינארית $\iff$ הוקטורים פרופורציונים.
3. סדרת וקטורים $(v_1,\dots,v_m)\subseteq\mathbb{F}^n$ בלתי תלויה לינארית $\iff$ כל איבר אינו צירוף לינארי של קודמיו.

7.2 קבוצת הצירופים הלינאריים

הגדרה 4.7 עבור סדרת nיות, $(\overline{v_1},\dots,\overline{v_k})\in(\mathbb{F}^n)^k$,

$$\text{sp}\left(v_1,\dots,v_k\right)=\left\{\sum_{i=1}^k\alpha_i\overline{v_i}\mid\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{F}\right\}$$

זה המרחב הנפרש על ידי $v_1,\dots,v_k$. ההגדרה לקבוצות $K\subseteq\mathbb{F}^n$ היא:

$$\text{sp}\left(k\right)=\left\{b\in\mathbb{F}^n\mid\exists k\in\mathbb{N}.\exists\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{F}.\exists t_1,\dots,t_k\in K.b=\sum_{i=1}^k\alpha_i t_i\right\}$$

<u>קבוצה A פורשת</u> את B אם $\text{span}\left(A\right)=b$.

7.3 בסיס

הגדרה 5.7 יהי $\mathbb{F}$ שדה, B תת קבוצה של $\mathbb{F}^n$. אז B נקראת <u>בסיס</u> של $\mathbb{F}^n$ אם שניים מהתנאים הבאים מתקיימים:

1. B בת"ל.
2. B פורשת את $\mathbb{F}^n$.
3. $m=n$.

כל שניים מוכיחים גם את השלישי.
התנאים הבאים שקולים לכך ש־B בסיס:

1. בת"ל מקסימלית - B בת"ל וכל קבוצה המכילה ממש את B הינה תלויה לינארית.
2. פורשת מינימלית - B פורשת וכל קבוצה שמוכלת ממש ב־B אינה פורשת.
3. לכל $v\in\mathbb{F}^n$ יש הצגה יחידה כצירוף של וקטורים מ־B.

8 שחלוף והפיכות

8.1 שחלוף - Transpose:

הגדרה 1.8 בהינתן מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ נגדיר $A^T\in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ (לפעמים מסומן גם A^t) את השחלוף של A:
$\left(A^T\right)_{i,j}=(A)_{j,i}$.

באופן אינטואטיבי, הפעולה מחליפה בין השורות לעמודות. לדוגמה: $\begin{pmatrix}1&4&16\\2&8&32\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\4&8\\16&32\end{pmatrix}^T$.

משפט 2.8 חוקי Transpose:

- **חיבור:** $(A+B)^T=A^T+B^T$ (אם החיבור מוגדר, כלומר A,B מאותו הסדר).
- **כפל בסקלר:** $(\alpha A)^T=\alpha\left(A^T\right)$ עבור $\alpha\in\mathbb{F}$.
- $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$ עבור $A\in M_{m\times k}(\mathbb{F}),B\in M_{k\times n}(F)$.
- $\left(A^T\right)^T=A$.

8.2 הפיכות מטריצה

הגדרה 3.8 מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ תיקרא:

1. **הפיכה משמאל:** אם קיימת מטריצה $B\in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ כך ש $B\cdot A=I_n$.
2. **הפיכה מימין:** אם קיימת מטריצה $B\in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ כך ש $A\cdot B=I_m$.
3. **הפיכה:** אם קיימת מטריצה $B\in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ כך ש $A\cdot B=I_m$ וגם $B\cdot A=I_n$.
   בפרט המטריצה B היא יחידה ומסומנת A^{-1}, ומקיימת $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

משפט 4.8 תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

1. A הפיכה משמאל $\Longleftrightarrow$ למערכת $A\cdot\bar{x}=0$ יש פתרון יחיד (כלומר סדרת העמודות של A בת"ל, ולכן $m\geq n$).
2. A הפיכה מימין $\Longleftrightarrow$ למערכת $A\cdot\bar{x}=\bar{b}$ יש פתרון לכל $\bar{b}\in\mathbb{F}^m$ (כלומר סדרת העמודות של A פורשת, ו־$m\leq n$).
3. A הפיכה $\Longleftrightarrow$ למערכת $A\cdot\bar{x}=\bar{b}$ יש פתרון יחיד לכל $\bar{b}\in\mathbb{F}^m$ (כלומר סדרת העמודות של A בסיס, ולכן $m=n$).
   בפרט מטריצה הפיכה היא ריבועית.

הערה: המטריצה 0 אינה הפיכה, מימין או משמאל.
טענות:

1. אם במטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ יש שורת אפסים אז A לא הפיכה מימין.
2. אם A הפיכה A^T הפיכה.
3. $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$.
4. אם $A\in M_{m\times k}(\mathbb{F}),B\in M_{k\times n}(\mathbb{F})$ הפיכות, אז $A\cdot B$ הפיכה ו־$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

משפט 5.8 הבאים שקולים עבור מטריצה $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ (מטריצה ריבועית):

1. A הפיכה.
2. A שקולת שורות ל־I_n.
3. לכל $\bar{b} \in \mathbb{F}^n$ למערכת $A\bar{x} = \bar{b}$ יש פתרון יחיד.
4. למערכת $A\bar{x} = \bar{0}$ יש פתרון יחיד.
5. קיים $b \in \mathbb{F}^n$ כך שלמערכת $A\bar{x} = \bar{b}$ יש פתרון יחיד.
6. A הפיכה משמאל ־ כלומר עמודות A בת"ל. אפשר גם שורות לפי 8.
7. A הפיכה מימין ־ כלומר עמודות A פורשות. אפשר גם שורות לפי 8.
8. A^T הפיכה.

ובנוסף A, B ריבועיות והפיכות $\iff$ $A \cdot B$ הפיכה.

9 פונקציית נפח

9.1 הגדרות

פונקציה $N : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ נקראת פונקציית נפח אם:

1. לינאריות לפי שורה: עבור $A \in M_n(\mathbb{F})$,

$$N\left(\begin{pmatrix} -A_1- \\ \vdots \\ -\alpha \cdot B + \beta \cdot C- \\ \vdots \\ -A_n- \end{pmatrix}\right) = \alpha \cdot N\left(\begin{pmatrix} -A_1- \\ \vdots \\ -B- \\ \vdots \\ -A_n- \end{pmatrix}\right) + \beta \cdot N\left(\begin{pmatrix} -A_1- \\ \vdots \\ -C- \\ \vdots \\ -A_n- \end{pmatrix}\right)$$

2. אם יש $i \neq j$ כך ש־$R_i(A) = R_j(A)$ (יש שתי שורות שוות), אז $N(A) = 0$.
3. נרמול: $N(I) = 1$.

9.2 דטרמיננטה

הגדרת עזר: תהא $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה. המינור ה־i, j של A יסומן $A_{(ij)} = M_{m-1\times n-1}(\mathbb{F})$ שמתקבלת מ־A על ידי מחיקת השורה ה־i והעמודה ה־j. למשל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{(2\,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

הגדרה: פיתוח דטרמיננטה לפי עמודה j: זו הגדרה רקורסיבית.

$$\det{}_j^{(n)}(A) = \sum_{k=1}^{n} (A)_{k,j} \cdot (-1)^{k+j} \cdot \det{}^{(n-1)}\left(A_{(k\,j)}\right)$$

דטרמיננטה מסומנת גם $|A|$.

9.3 טענות

1. יש רק פונקצית נפח אחת (ששווה ל־$\det$). הדטרמיננטה לפי j היא פונקציית נפח, וזהה לכל j.
2. אם φ פעולה אלמנטרית אז $\det(\varphi(A)) = x_\varphi \cdot \det(A)$ כאשר אם φ החלפת שורה $x_\varphi = -1$, אם φ כפל בסקלר λ אז $x_\varphi = \lambda$, ואם φ הוספת שורה אז 1.
3. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
4. אם A לא הפיכה אז $\det(A) = 0$. ואם A הפיכה אז $\det(A) \neq 0$ ו־$\det(A) = x_{\varphi_1} \cdot \dots \cdot x_{\varphi_n}$ כאשר $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ פעולות הדירוג.
5. $\det(A) = \det\left(A^T\right)$. לכן אפשר גם להפעיל פעולות עמודה, שהן פעולות שורה על השחלוף.
6. במטריצה משולשית עליונה או תחתונה ($\forall i < j. (A)_{i,j} = 0$ או $\forall j < i. (A)_{i,j} = 0$), הדטרמיננטה היא מכפלת האלכסון, $\prod_{i=1}^{n} (A)_{j\,i}$.

כלל קרמר: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה, אז לכל $\bar{b} \in \mathbb{F}^n$ למערכת $A\bar{x} = \bar{b}$ יש פתרון יחיד והפתרון הינו: (שתי דרכים לתאר אותו)

1. $c = A^{-1} \cdot \bar{b}$.
2. $c_j = \frac{|B_j|}{|A|}$ כאשר $B_j\left(C_1(A), \dots, C_{j-1}(A), \bar{b}, \dots, C_n(A)\right)$.

9.4 מטריצה מוצמדת

נגדיר: $(\mathrm{adj}(A))_{i,j} = (-1)^{j+i} \cdot \det\left(A_{(j\,i)}\right)$.
מתקיים:

1. $(\mathrm{adj}(A))^T = \mathrm{adj}\left(A^T\right)$.
2. $A \cdot \mathrm{adj}(A) = I \cdot \det(A)$.
3. אם A לא הפיכה אז: מטריצת האפס $= A \cdot \mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A) \cdot A$.
4. אם A הפיכה אז $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{adj}(A)$.

10 תמורות

10.1 הגדרות

פורמלית, S_n זה קבוצת הפונקציות החח"ע ועל ב־$J_n \to J_n$ כאשר $J_n = \{1, \dots, n\}$.
סימונים לתמורות:

1. $\sigma : J_n \to J_n$ חח"ע ועל.
2. רישום ישיר: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \end{pmatrix}$.

הגדרה 1.10 (מטריצה תמורה): מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ נקראת מטריצת תמורה אם קיימת תמורה $\sigma \in S_n$ כך ש־$P(\sigma) = A = \begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\sigma(1)} & \dots & e_{\sigma(n)} \\ | & & | \end{pmatrix}$.

למשל עבור $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$ מטריצת התמורה תהיה $P\left(\sigma\right)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

הגדרה שקולה: בכל שורה יש 1 יחיד, בכל עמודה יש 1 יחיד, וכל האיברים במטריצה הם $0,1$.
טענות:

1. המינור ה־$(i\,j)$ של מטריצת תמורה הוא מטריצת תמורה $\iff A_{i,j}=1$.
2. $P\left(\sigma\tau\right)=P\left(\sigma\right)\cdot P\left(\tau\right)$.

10.2 sign

הגדרה 2.10 עבור $\sigma\in S_n$, $\text{sign}\left(\sigma\right)$ (הסיגנטורה של σ) מוגדרת כ־$\text{sign}\left(\sigma\right)=\left|P\left(\sigma\right)\right|$.

הגדרה שקולה: תהא $\sigma\in S_n$ תמורה. לכל $1\leq i\leq n$ נגדיר את $N\left(\sigma\right)=\left|\left\{ \left(i,j\right)\mid j>i\wedge\sigma\left(j\right)<\sigma\left(i\right)\right\} \right|$ ו־$z_\sigma\left(i\right)=\left|\left\{ \left(i,j\right)\mid j>i,\sigma\left(i\right)<\sigma\left(j\right)\right\} \right|$ (ו־$N\left(\sigma\right)=\sum_{i=1}^{n}z_\sigma\left(i\right)$). נגדיר את sign להיות: $\text{sign}\left(\sigma\right)=\left(-1\right)^{N\left(\sigma\right)}$.

הגדרה 3.10 (תמורה זוגית): $\sigma\in S_n$ נקראת תמורה זוגית $\iff\text{sign}\left(\sigma\right)=1$. מסמנים ב־$A_n=\left\{ \sigma\in S_n\mid\text{sign}\left(\sigma\right)=1\right\}$. זו תת חבורה ביחס להרכבת תמורות.

הערה: התמורות האי זוגיות אינן חבורה, כי אין תמורה ניטרלית באי זוגיות.

מסקנה 4.10 $\text{sign}\left(\sigma\tau\right)=\text{sign}\left(\sigma\right)\cdot\text{sign}\left(\tau\right)$.

משפט 5.10 תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$, אז:

$$\left|A\right|=\sum_{\sigma\in S_n}\text{sign}\left(\sigma\right)\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(A\right)_{i,\sigma(i)}$$

11 מרחב וקטורי

11.1 הגדרות

הגדרה 1.11 (מרחב וקטורי): מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ זו שלשה $\left(V,+,\cdot\right)$ כך ש:

1. $\left\langle V,+\right\rangle$ חבורה חילופית.
2. $\cdot:\mathbb{F}\times V\to V$ כפל בסקלר, פעולה שמקיימת:
   (א) אסוצייטיביות. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}.\forall\overline{v}\in V.\beta\cdot\left(\alpha\cdot\overline{v}\right)=\left(\beta\cdot\alpha\right)\cdot v$.
   (ב) $\forall\overline{v}\in V.1_{\mathbb{F}}\cdot\overline{v}=\overline{v}$.
3. חוק הפילוג:
   (א) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}.\forall\overline{v}\in V.\left(\alpha+\beta\right)\cdot\overline{v}=\alpha\cdot\overline{v}+\beta\cdot\overline{v}$.
   (ב) $\forall a\in\mathbb{F}.\forall\overline{v_1},\overline{v_2}\in V.\alpha\cdot\left(\overline{v_1}+\overline{v_2}\right)=\alpha\cdot\overline{v_1}+\alpha\cdot\overline{v_2}$.

וקטור הוא איבר במרחב וקטורי. כל nיה היא וקטור, אבל **לא כל וקטור הוא nיה**.
הגדרות לבת"ל ופורשת:

- תת קבוצה $X\subseteq V$ נקראת בת"ל אם לכל $v_1,\ldots,v_n\in X$, $v_1,\ldots,v_n$ בת"ל. כלומר אין צירוף לינארי לא טריויאלי של איברים מ־X שיוצא 0.
- תת קבוצה $X\subseteq V$ נקראת פורשת אם $\text{sp}\left(X\right)=V$.
- קבוצה $X\subseteq V$ נקראת בסיס האמל אם היא בת"ל ופורשת.

11.2 למת ההחלפה של ריס

הגדרה 2.11 (למת ההחלפה של ריס): גיהי V מ"ו, ותהא $(v_1,\ldots,v_n)$ סדרה פורשת ב־V, ו־$(u_1,\ldots,u_m)$ סדרה בת"ל. אזי:

1. $m \le n$.
2. קיימים $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n$ כך ש־$(v_j \mid j \notin \{i_1,\ldots,i_m\}) \frown (u_1,\ldots,u_m)$ פורשת.

כלומר אפשר להחליף איברים כלשהם של סדרה פורשת באיבריה של כל סדרה בת"ל.

מסקנה 3.11 אם V מ"ו בעל בסיס, אז בכל בסיס של V יש את אותו מספר איברים.

11.3 מימד

הגדרה 4.11 (מימד): יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ בעל בסיס, המימד של V הינו עוצמת בסיס כלשהו (והמימד יחיד). מסמנים כ־$\dim_{\mathbb{F}}(V)$.

מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F}$ נקרא <u>נוצר סופית</u> אם קיימת סדרה סופית פורשת של V, או באופן שקול אם $\dim_{\mathbb{F}}(V) \in \mathbb{N}$.

משפט המימדים הראשון: יהי V מ"ו, ו־$U_1, U_2 \subseteq V$ תמ"ו של V. אז:

$$\dim(U_1+U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

מסקנה: אם $U \subseteq V$ ו־$\dim U = \dim V$, אז $U = V$.

11.4 הכללה של משפט 2 מתוך 3

יהי V מ"ו ממימד n, בפרט נוצר סופית, ותהא $(v_1,\ldots,v_m) \in V^m$. אז הבאים שקולים:

1. B בסיס.
2. B בת"ל + $m = n$.
3. B פורשת + $m = n$.
4. B בת"ל מקסימלית.
5. B פורשת מינימלית.
6. לכל וקטור $v \in V$ יש הצגה יחידה כצירוף לינארי של B.

11.5 סכום ישר

הגדרה: נאמר כי $U_1+\cdots+U_n$ הוא סכום ישר $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ אם לכל $\overline{v} \in U_1+\cdots+U_n$ קיימת ויחידה סדרה $\overline{u_1},\ldots,\overline{u_n} \in U_i$ כך ש־$\overline{v} = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i}$. נקרא גם הצגה יחידה.

משפט האיפיון: יהיו $U_1,\ldots,U_n \subseteq U$ תמ"ו, הבאים שקולים:

1. $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$.
2. לכל סדרות בת"ל B_i ב־U_i, השרשור $B_1 \frown B_2 \frown \cdots \frown B_n$ בת"ל.
3. לכל $1 \le i \le n$, $U_i \cap \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} U_j\right) = \{\overline{0}\}$.

   בפרט אם $n = 2$, $U_1 \cap U_2 = \{\overline{0}\}$.

12 מרחב העמודות והשורות

הגדרה: תהא $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, נגדיר:

1. מרחב הפתרונות: $\mathrm{Sols}(A) = \left\{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = \overline{0}\right\}$
2. מרחב העמודות: $C(A) = \mathrm{sp}(C_1(A), \ldots, C_n(A))$.
3. מרחב השורות: $R(A) = \mathrm{sp}(R_1(A), \ldots, R_m(A))$.

משפט: $\dim(R(A)) = \dim(C(A))$. יסומן גם כ־$\mathrm{Rank}(A)$.
בנוסף נסמן $\mathcal{N}(A) = \dim(\mathrm{Sols}(A))$.
משפט הדרגה והאפסות: $\mathrm{Rank}(A) + \mathcal{N}(A) = n$.
מסקנה: A הפיכה $\iff$ $\mathrm{Rank}(A) = n$.

12.1 חוקי rank

לכל מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$,

1. $\mathrm{Rank}(A) \le \min(n, m)$.
2. $\mathrm{Rank}(A\cdot B) \le \min(\mathrm{Rank}(A), \mathrm{Rank}(B))$.
3. $\mathrm{Rank}(A+B) \le \mathrm{Rank}(A) + \mathrm{Rank}(B)$.
4. אם A הפיכה אז $\mathrm{Rank}(A\cdot B) = \mathrm{Rank}(B), \mathrm{Rank}(B\cdot A) = \mathrm{Rank}(B)$ (אם מוגדר).

משפט (משפט הדרגה): תהא $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה, ו־B שקולת שורות ל־A, אזי $R(A) = R(B)$ (בפרט $\mathrm{Rank}(A) = \mathrm{Rank}(B)$), אבל מרחב העמודות $C(A), C(B)$ לא נשמר.

13 העתקות לינאריות

13.1 הגדרות

הגדרה: יהיו V, U מ"ו מעל $\mathbb{F}$, נאמר כי $T: V \to U$ העתקה לינארית אם:

1. חיבוריות - $\forall v_1, v_2 \in V. T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$.
2. הומוגניות - $\forall \alpha \in \mathbb{F}. \forall v \in V. T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v)$.

הגדרות נוספות:

1. $\ker(T) = T^{-1}[\{0\}] = \{\overline{v} \in V \mid T(\overline{v}) = 0\}$ הגרעין של T, kernel.
2. $Im(T) = \{T(\overline{v}) \mid \overline{v} \in V\} \subseteq U$ התמונה של T.

בנוסף $\ker(T), Im(T)$ תמ"ו של T.

13.2 תכונות בסיסיות

תהא $T: V \to U$ לינארית,

1. $T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i)$ - כל צירוף לינארי נשמר.
2. $T(-\overline{v}) = -T(\overline{v})$ - מכפליות.
3. $T\left(\overline{0}_V\right) = \overline{0}_U$.

4. T חח"ע $\iff$ $\ker(T)=\{\overline{0}\}$.
5. T על $\iff$ $\mathrm{Im}(T)=U$ (טריויאלי).
6. אם $(u_1,\ldots,u_n)$ סדרה פורשת של V אז $(T(u_1),\ldots,T(u_k))$ סדרה פורשת של $Im(T)$.
7. עבור $(v_1,\ldots,v_n)$, $LD(v_1,\ldots,v_n)\subseteq LD(T(v_1),\ldots,T(v_n))$. לכן:
   (א) אם $(T(v_1),\ldots,T(v_n))$ בת"ל אז $(v_1,\ldots,v_n)$ בת"ל.
   (ב) אם $v_i\in\mathrm{sp}(v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_n)$ אז גם $T(v_i)\in\mathrm{sp}(T(v_1),\ldots,T(v_{i-1}),T(v_{i+1}),\ldots,T(v_n))$.
   (ג) אם T חח"ע, אז $LD(T(v_1),\ldots,T(v_n))=LD(v_1,\ldots,v_n)$.
   אם T חח"ע, אז T מעבירה סדרה פורשת של V לסדרה פורשת של U.
8. יהיו V,U מ"ו. יהי $B=(b_1,\ldots,b_n)$ בסיס של V. יהיו $u_1,\ldots,u_n\in U$ וקטורים כלשהם. אז קיימת ויחידה העתקה לינארית $T:V\to U$ כך שלכל $1\le i\le n$, $T(b_i)=u_i$. כלומר העתקה לינארית נקבעת ביחידות לפי $\dim(V)$ איברים.

משפט המימדים השני: $\dim(V)=\dim(\ker(T))+\dim(Im(T))$.

13.3 הטלה

יהי V מ"ו, ו־$U,W\subseteq V$ תמ"ו כך ש־$V=U\oplus W$. ראינו כי כל וקטור $\overline{v}\in V$ ניתן להציג באופן יחיד:

$$\overline{v}=\overline{u}+\overline{w},\overline{u}\in U,\overline{w}\in W$$

נגדיר את ההטלה של V על U:

$$P_{(U,W)}:V\to U$$
$$P_{(W,U)}:V\to W$$
$$P_{(U,W)}(\overline{v})=\iota x\in U.\exists y\in W.\overline{v}=x+y$$

כלומר זה ייצוג לאחד מהאיברים בהצגה היחידה של וקטור.
טענות:

1. הטלה $P_{(U,W)}$ היא העתקה לינארית.
2. $P_{(U,W)}\circ P_{(U,W)}=P$, $P_{(U,W)}+P_{(W,U)}=Id_V$.
3. $\mathrm{Im}\left(P_{(U,W)}\right)=U$, $P^{-1}_{(U,W)}[\{0\}]=W$.

13.4 איזומורפיזם

13.4.1 הגדרות

הגדרה: יהיו V,U מ"ו מעל $\mathbb{F}$, נאמר כי $f:V\to U$ היא איזומורפיזם של מ"ו אם:

1. f חח"ע ועל.
2. f העתקה לינארית (חיבורית והומוגנית).

איזומורפיזם משמר את הפתרונות של $v=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{u_i}$ כאשר $v,\overline{u_1},\ldots,\overline{u_n}\in V$.
משפט: יהיו V,U מ"ו נוצרים סופית, אז $\dim(V)=\dim(U)\iff V\simeq U$.
משפט 2 מתוך 3 להעתקות לינאריות: כל 2 מתוך 3 הבאים שקולים לכך ש־T איזומורפיזם.

1. $\dim(V)=\dim(U)$.
2. T חח"ע.
3. T על.

שני מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה נקראים איזומורפיים ומסומנים $U\simeq V$ אז קיים איזומורפיזם $T:V\to U$. זה "יחס שקילות".

13.4.2 קואורדינטות

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, B בסיס של V. נסמן $\dim V = n$, ויהי $B = (b_1, \ldots, b_n)$ בסיס. על פי משפט, לכל $\overline{v} \in V$ קיימים ויחידים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ כך ש־$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$. נגדיר את הקואורדינטות של $\overline{v}$ לפי B להיות:

$$[\overline{v}]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

זה איזומורפיזם מ־V ל־$\mathbb{F}^n$. העתקת הקואורדינטות תסומן גם בתור $[\cdot]_B : V \to \mathbb{F}^n$.

13.5 מרחב ההעתקות

הגדרה: $\mathrm{Hom}\,(V, U) = \left\{T \in U^V \mid \text{T is linear}\right\}$ מרחב ההעתקות. זה תת מרחב של $\left\langle U^V, +, \cdot \right\rangle$.

משפט: $\dim\left(\mathrm{Hom}\,(V, U)\right) = \dim\,(V) \cdot \dim\,(U)$ ־ זה נכון אפילו אם V, U לא נוצרים סופית.

13.6 מטריציונית

הגדרה: לכל מטריצה $A \in M_{m\times n}\,(\mathbb{F})$, נגדיר את ההעתקה המטריציונית המתאימה ל־A, $T_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$:

$$T_A\,(\overline{v}) = A\overline{x}$$

פונקציה f נקראת מטריציונית אם קיימת מטריצה $A \in M_{m\times n}\,(\mathbb{F})$ כך ש־$f = T_A$, ונסמן $A = [f]$.
השיטה למצוא את המטריצה $[T]$ היא:

$$[T] = \left(T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

משפט: תהא $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, אזי T העתקה לינארית $\iff$ T מטריציונית.
טענות:

1. $\mathrm{Sols}\,(A) = T_A^{-1}\left[\left\{\overline{0}\right\}\right] = \ker\,(T_A)$.
2. $C\,(A) = Im\,(T_A)$.
3. T_A על $\iff$ עמודות A פורשות. אם היא ריבועית אז גם הפיכה.
4. T_A חח"ע $\iff$ עמודות A בת"ל. כי אין שתי דרכים להגיע לאותו הדבר.
5. T_A הפיכה $\iff$ עמודות A בסיס $\iff$ A הפיכה.
6. אם $T, S : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ מטריציונית אז $T + S : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ מטריציונית. יתר על כן $[T + S] = [T] + [S]$.
7. אם $T \in \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ מטריציונית ו־$\alpha \in \mathbb{F}$ אז $\alpha \cdot T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^{>}$ מטריציונית. יתר על כן $[\alpha \cdot T] = \alpha \cdot [T]$.
8. אם $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m, S : \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^k$ מטריציוניות אז $S \circ T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^k$ מטריציונית, ו־$[S \circ T] = [S] \cdot [T]$ (כפל המטריצות הוא ההרכבה).

13.7 מטריצה מייצגת

13.7.1 הגדרות

הגדרה: תהא $T:V\to U$ צ"ל V,U נוצר סופית. יהי B בסיס של V, ו־C בסיס של U. נגדיר את ההעתקה המייצגת $T_C^B:\mathbb{F}^{\dim(V)}\to\mathbb{F}^{\dim(U)}$:

$$T_C^B=Q_C\circ T\circ Q_B$$
$$[T]_C^B=\left[T_C^B\right]$$

בעצם מעבירים ל־nיות כדי לעבוד עם מטריציוניות.

13.7.2 טענות

1. $C_i\left(\left[T_C^B\right]\right)=T_C^B\left(e_i\right)$. כלומר $\begin{pmatrix} | & & | \\ \left[T\left(b_1\right)\right]_C & \dots & \left[T\left(b_n\right)\right]_C \\ | & & | \end{pmatrix}=[T]_C^B$.
2. $[T]_C^B\cdot[v]_B=\left[T\left(v\right)\right]_C$.
3. לכל $\overline{v}\in V$, $\overline{v}\in\ker\left(T\right)\iff[\overline{v}]_B\in\text{Sols}\left([T]_C^B\right)$.
4. לכל $\overline{u}\in U$, $\overline{u}\in Im\left(T\right)\iff[\overline{u}]_C\in\text{Cols}\left([T]_C^B\right)$
לכן מסיקים ש־$\dim\left(Im\left(T\right)\right)=\text{Rank}\left([T]_C^B\right),\dim\left(\ker\left(T\right)\right)=\mathcal{N}\left([T]_C^B\right)$.
5. T הפיכה $\iff$ T_C^B הפיכה $\iff$ $[T]_C^B$ הפיכה, בנוסף $\left[T^{-1}\right]_B^C=\left([T]_C^B\right)^{-1}$.
6. $[S\circ T]_D^B=[S]_D^C\cdot[T]_C^B$.

אלגוריתם לחישוב המטריצה המייצגת: נתונה העתקה $T:V\to U$, בסיסים $B=\left(b_1,\dots,b_n\right)$ של V ו־$C=\left(c_1,\dots,c_n\right)$ של U. נרצה לחשב $[T]_C^B$ באופן יעיל.
נבחר בסיס שנוח לחשב בו קוארדינטות ב־U - בדרך כלל הבסיס הסטנדרטי. $W=\left(w_1,\dots,w_n\right)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & & | & | & & | \\ [u_1]_W & \dots & [u_m]_W & \left[T\left(b_1\right)\right]_W & \dots & \left[T\left(b_n\right)\right]_W \\ | & & | & | & & | \end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to\dots}\dots\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & | \\ & \ddots & & | \quad [T]_C^B \\ & & 1 & | \end{array}\right)$$

באופן דומה לאיך שמחשבים מטריצה הופכית.

מטריצות שינוי הקואורדינטות: יהיו B,C שני בסיסים של מ"ו V. אז נגדיר את מטריצת שינוי הקואורדינטות מ־B ל־C על ידי: $[Id_V]_C^B$.

1. $\overline{v}\in V$, $[Id_V]_C^B\cdot[\overline{v}]_B=[\overline{v}]_C$.
2. $[T]_C^B=[Id]_C^{C'}\cdot[T]_{C'}^{B'}\cdot[Id_V]_{B'}^B$.

הגדרה: יהיו $A,B\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$, נאמר כי A ו־B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש־$A=P^{-1}\cdot B\cdot P$.

משפט: נתון $A,B\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ ריבועיות, הבאים שקולים:

1. A,B דומות.
2. קיימת העתקה לינארית $T:V\to V$ ובסיסים C,C' של V כך ש־$[T]_C=A,[T]_{C'}=B$.

3. כל העתקה לינארית $T: V \to V$, אם קיים בסיס C של V כך ש־$[T]_C = A$, אז קיים בסיס C' של V כך ש־$[T]_{C'} = B$.

אם A, B דומות אז:

1. $\text{Rank}\,(A) = \text{Rank}\,(B)$.
2. $\mathcal{N}\,(A) = \mathcal{N}\,(B)$.
3. $\text{tr}\,(A) = \text{tr}\,(B)$ כאשר $\text{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} (A)_{i,i}$.
4. $\det(A) = \det(B)$.
5. ... נראה עוד בלינארית 2.

14 אלגוריתמים

14.1 צמצום סדרה לבת״ל

14.1.1 לפי שורות

יהיו $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{F}^m$. נשים את $v_1, \ldots, v_n$ כשורות, $B = \begin{pmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_n^t \end{pmatrix} \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$, ונדרג בלי להחליף שורות (כלומר, בעמודה של מקדם הפותח יש רק 1 במקום אחד והשאר אפסים, אבל המקדמים הפותחים לא ממוינים). השורות שהתאפסו מתאימות לוקטורים שהיו תלוים לינארית באחרים, וסדרת השורות שלא התאפסו הן סדרה בת״ל.

14.1.2 לפי עמודות

נשים את $v_1, \ldots, v_n$ כעמודות, $A = (v_1 \ldots v_n)$, נדרג ונבדוק שיש רק פתרון טריויאלי למערכת ההומוגנית $(A \mid 0)$, כלומר שאין אף משתנה חופשי.

14.2 השלמה של סדרה בת״ל לבסיס

תהא $(v_1, \ldots, v_k)$ סדרה בת״ל, ו־$(u_1, \ldots, u_m)$ סדרה פורשת. נבנה מטריצה שעמודותיה:

$$(v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_m)$$

נדרג את המטריצה, ונסתכל על העמודות מ־u שנפתחה בהן מדרגה. את ה־uים המתאימים נוסיף לסדרת ה־vים, ונקבל בסיס.