

# סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

## תוכן עניינים

|       |                                   |   |
|-------|-----------------------------------|---|
| 1     | דברים חשובים מלינארית 1           | 2 |
| 1.1   | מטריצות דומות                     | 2 |
| 2     | לכסון                             | 2 |
| 2.1   | וקטורים עצמיים                    | 2 |
| 3     | פולינום אופייני                   | 2 |
| 4     | אינווריאנטיות                     | 3 |
| 5     | מרחב מנה                          | 3 |
| 6     | חוגים                             | 4 |
| 6.1   | הגדרות מלינארית 1                 | 4 |
| 6.1.1 | חבורה                             | 4 |
| 6.1.2 | חוג                               | 4 |
| 6.1.3 | שדה                               | 4 |
| 6.2   | הגדרות חדשות מלינארית 2           | 5 |
| 6.2.1 | חוגי הפולינומים, המטריצות והעתקות | 5 |
| 6.2.2 | הומומורפיזמים                     | 5 |
| 6.2.3 | חילוק בחוגים                      | 5 |
| 6.2.4 | חברים                             | 5 |
| 6.3   | אידאלים                           | 6 |
| 6.3.1 | אידאל מאפס                        | 6 |
| 6.4   | תחום שלמות                        | 7 |
| 6.5   | תחום ראשי                         | 7 |
| 7     | קבוצת הפולינומים                  | 7 |

# 1 דברים חשובים מלינארית 1

## 1.1 מטריצות דומות

יהיו  $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ , נאמר כי  $A$  ו- $B$  דומות אם קיימת מטריצה הפיכה  $P$  כך ש- $A = P^{-1} \cdot B \cdot P$ .  
**משפט:** נתון  $A, B \in M_n(\mathbb{F})$  ריבועיות, הבאים שקולים:

1.  $A, B$  דומות.

2. קיימת  $T: V \rightarrow V$  ובסיסים  $C, C'$  של  $V$  כך ש- $[T]_C = A, [T]_{C'} = B$ .

3. לכל  $T: V \rightarrow V$ , אם קיים בסיס  $C$  של  $V$  כך ש- $[T]_C = A$ , אז קיים בסיס  $C'$  של  $V$  כך ש- $[T]_{C'} = B$ .

ואם  $A, B$  דומות אז:

$$1. \text{Rank}(A) = \text{Rank}(B), \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$$

$$2. \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \text{ כאשר } \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n (A)_{i,i}$$

$$3. \det(A) = \det(B)$$

## 2 לכסון

נגדיר מטריצה אלכסונית להיות מטריצה ריבועית  $A \in M_n(\mathbb{F})$  שבה עבור  $i \neq j, A_{i,j} = 0$ . נסמן אותן בתור  $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

מטריצה לכסינה היא מטריצה שדומה למטריצה אלכסונית, והעתקה לכסינה היא העתקה לינארית כך שקיים בסיס  $B$  כך ש- $[T]_B^B$  אלכסונית.

אם  $T$  העתקה לכסינה (כלומר מטריצה מייצגת כלשהי לכסינה) אז כל מטריצה מייצגת שלה היא לכסינה.

## 2.1 וקטורים עצמיים

נגדיר וקטור עצמי של  $A$  לערך עצמי  $\lambda$  להיות  $\bar{v}$  כך ש- $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ . באופן הפוך, ערך עצמי של  $A$  הוא  $\lambda$  כך שקיים וקטור עצמי  $\bar{v} \neq \bar{0}$  של  $A$  לערך עצמי  $\lambda$ .

הערכים העצמיים הם האיברים שנמצאים על האלכסון במטריצה האלכסונית שדומה ל- $A$ , עד כדי סידורם על האלכסון.

המרחב של הוקטורים העצמיים הוא  $V_\lambda = \{\bar{v} \in V \mid A\bar{v} = \lambda\bar{v}\}$ , שזה שווה בעצם ל- $\text{Sols}(A - \lambda I)$ . זה תמ"ו של  $V$ .

הסכום של ה- $V_\lambda$  השונים הוא סכום ישר.

**משפט 1.2**  $A$  לכסינה  $\iff$  קיים בסיס  $B \subseteq \mathbb{F}^n$  שמורכב מוקטורים עצמיים של  $A$ .

## 3 פולינום אופייני

נסמן ב- $P_A(\lambda) = |\lambda I - A|$  את הפולינום האופייני של  $A$ . מתקיים:

• זה פולינום מתוקן, כלומר המקדם המוביל הוא 1.

•  $\lambda$  ערך עצמי של  $A \iff \lambda$  שורש של  $P_A(\lambda)$ .

• אם  $A, B$  דומות אז  $P_A = P_B$ .

• עבור מטריצת בלוקים אלכסונית  $A = \text{Diag}(A_1, \dots, A_n)$ ,  $P_A = P_{A_1} \cdot \dots \cdot P_{A_n}$ .

**משפט 1.3 המשפט המרכזי:** תהא  $A \in M_n(\mathbb{F})$ .

נגדיר את הריבוי האלגברי של  $\alpha$ ,  $\rho_\alpha$  (רו), להיות כמות הפעמים ש- $(\lambda - \alpha)$  מופיע בפולינום  $P_A(\lambda)$ . כלומר אם הפולינום הוא  $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^{\rho_1} (\lambda - 3)^{\rho_3}$  אז  $\rho_1 = 1, \rho_3 = 2$ .

בנוסף נגדיר את הריבוי הגיאומטרי של  $\alpha$ ,  $\mu_\alpha$ , להיות  $\dim(V_\alpha)$ .  
לכסינה מעל  $\mathbb{F}$  אמ"ם:

1.  $P_A(\lambda)$  מתפרק לגורמים לינאריים מעל  $\mathbb{F}$ .

2. לכל ערך עצמי  $\lambda$  של  $A$ ,  $\rho_\lambda = \mu_\lambda$ .

**משפט 2.3** לכל ערך עצמי  $\lambda$ ,  $\mu_\lambda \leq \rho_\lambda$ .

**משפט 3.3** עבור  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  הערכים העצמיים,  $\rho_{\lambda_1} + \dots + \rho_{\lambda_k} \leq n$  ואם  $P_A(\lambda)$  מתפרק לגורמים לינאריים אז גם  $\rho_{\lambda_1} + \dots + \rho_{\lambda_k} = n$ .

## 4 אינווריאנטיות

תהא  $T: V \rightarrow V$  העתקה לינארית, תת מרחב  $U \subseteq V$  נקרא  $T$ -אינווריאנטי ( $T$ -שמור) אם  $T[U] \subseteq U$ , או באופן שקול אם  $T$  מצומצם ל- $U$  ט"ל.

דוגמאות למרחבים  $T$ -אינווריאנטים הן  $\ker(T)$ ,  $\text{Im}(T)$  ו- $V_\lambda$  לכל  $\lambda$ .

בנוסף נגדיר תת מרחב  $U \subseteq V$  אי פריק להיות תת מרחב  $T$ -אינווריאנטי כך שלא קיימים  $W_1, W_2 \neq \{0\}$   $T$ -אינווריאנטים שמקיימים  $U = W_1 \oplus W_2$ .

**מטריצה מייצגת:** אם  $U \subseteq V$   $T$ -אינווריאנטי, יהי  $B$  בסיס של  $U$ . יהי  $C$  השלמה לבסיס של  $V$ . אז  $[T]_{B \cup C} = \begin{pmatrix} [T|_U]_B & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ . זה כי המקדמים שלמטה לא מופיעים ב- $U$  ולכן גם לא בתמונה של  $U$  (כי היא מוכלת ב- $U$ ).

ואם  $V = U_1 \oplus U_2$  כאשר  $U_1, U_2$   $T$ -אינווריאנטיים אז  $[T]_{B_1 \cup B_2} = \begin{pmatrix} [T|_{U_1}]_{B_1} & 0 \\ 0 & [T|_{U_2}]_{B_2} \end{pmatrix}$ .

אזי הפולינום  $P_{T|_U}$  מחלק את  $P_T$ , ואם  $V = U_1 \oplus U_2$  עבור  $U_1, U_2$   $T$ -אינווריאנטיים אז  $P_T = P_{T|_{U_1}} \cdot P_{T|_{U_2}}$ . בנוסף באופן מוכלל אם  $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$  כאשר כל  $V_i$  הוא  $T$ -אינווריאנטי אז יהי הבסיס  $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$ , מתקיים  $P_T = \prod_{i=1}^n P_{T|_{V_i}}$  ו- $[T]_B = \text{Diag}([T|_{V_1}]_{B_1}, \dots, [T|_{V_n}]_{B_n})$ .

## 5 מרחב מנה

נגדיר את יחס השקילות הבא:  $v \sim u \iff v - u \in W$  עבור  $u, v \in V$  ו- $W$  כלשהו.

את קבוצת המנה,  $V/W$ , שהיא הקבוצה של  $[v] = \{u \in V \mid u \sim v\}$  לכל  $v$ , ניתן בעצם להגדיר לפי פעולת חיבור  $[v] + [u] = [v + u]$  וכפל  $\lambda \cdot [v] = [\lambda \cdot v]$ .

זה יוצא מרחב וקטורי, שמקיים גם  $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$ .

## 6 חוגים

### 6.1 הגדרות מלינארית 1



#### 6.1.1 חבורה

$\langle G, * \rangle$  נקראת חבורה אם:

1.  $G$  סגורה לפעולה  $*$ .
2.  $*$  פעולה אסוצייטיבית.
3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר  $\exists e \in G. \forall g \in G. e * g = g * e = g$ . האיבר הזה יחיד ומסומן  $e_G$ .
4. קיים איבר הופכי, כלומר  $\forall g \in G. \exists h \in G. g * h = h * g = e$  כאשר  $e$  איבר יחידה. האיבר ההופכי של  $g$  מסומן  $g^{-1}$ .

#### 6.1.2 חוג

$\langle R, *, + \rangle$  נקראת חוג אם:

1.  $\langle R, + \rangle$  חבורה חילופית.
2.  $*$  פעולה אסוצייטיבית על  $R$ .
3. מתקיים חוג הפילוג:

$$\forall a, b, c \in R. a * (b + c) = a * b + a * c$$

$$(b + c) * a = b * a + c * a$$

בנוסף יש חוג חילופי, (הכפל חילופי), חוג עם יחידה (קיים איבר ניטרלי לכפל), ותחום שלמות הוא חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0.

#### 6.1.3 שדה

חוג חילופי עם יחידה כך ש- $\langle R \setminus \{0\}, * \rangle$  חבורה חילופית. שדה הוא תחום שלמות, ותחום שלמות סופי הוא שדה.

## 6.2 הגדרות חדשות מלינארית 2

### 6.2.1 חוגי הפולינומים, המטריצות והעתקות

נגדיר את חוג הפולינומים מעל חוג  $R$  להיות  $R[x] \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . נגדיר בנוסף  $\deg(0) = \infty, \deg(p) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \neq 0\}$ .

• מתקיימת נוסחת המעלות:  $\deg(p + q) \leq \max(\deg(p), \deg(q)), \deg(p \cdot q) \leq \deg(p) + \deg(q)$ .

אם  $R$  תחום שלמות אז  $\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$ .

• אם  $R$  תחום שלמות אז  $R[x]$  תחום ראשי.

• חילוק בחוג הפולינומים: יהי  $R$  חוג חילופי, ו- $f, g \in R[x]$  פולינומים כך שהמקדם המוביל של  $g$  הפיך ב- $R$ . אז קיימים ויחידים  $q, r \in R[x]$  כך ש- $f = q \cdot g + r$ .

• ב- $R[x]$  ההפיכים היחידים הם הפולינומים הקבועים של ההפיכים מ- $R$ .

נגדיר את חוג המטריצות הריבועיות להיות  $M_n(R)$  כאשר  $R$  חוג, לפי פעולות כפל וחיבור של מטריצות. זה חוג לא חילופי.

נגדיר את חוג ההעתקות ממרחב לעצמו להיות  $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$  יחד עם הרכבה ועם חיבור פונקציות. זה חוג לא חילופי עם יחידה  $\text{Id}_V$ .

השילובים הנפוצים הם  $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)[x], M_n(R)[x], M_n(R[x])$ .

**משפט:** כל פולינום בשדה ניתן לכתוב בתור מכפלה של אי-פריקים. תהא  $\{q_i \mid i \in I\}$  קבוצת כל הפולינומים הא"פ המתוקנים מעל  $\mathbb{F}[x]$  באשר  $\mathbb{F}$  שדה. כל פולינום  $0 \neq p \in \mathbb{F}[x]$  ניתן לרשום באופן יחיד  $p = c \cdot \prod_{i \in I} q_i^{n_i}$  באשר  $c \in \mathbb{F}^\times = \mathbb{F} \setminus \{0\}$ .

### 6.2.2 הומומורפיזמים

הומומורפיזם של חוגים זו פונקציה  $\varphi : R_1 \rightarrow R_2$  כך ש- $\varphi(1_{R_1}) = 1_{R_2}$  ו- $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$  ו- $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$  (ולכן גם  $\varphi(0_{R_1}) = 0_{R_2}$ ). יש למשל הומומורפיזם בין  $M_n(R)[x]$  לבין  $M_n(R[x])$ .

### 6.2.3 חילוק בחוגים

יהי  $R$  חוג. יהיו  $a, b \in R$ , נאמר כי  $a \mid b$  אם  $\exists c \in R. b = a \cdot c$ . בנוסף נקרא ל- $a \in R$  הפיך ב- $R$  אם קיים  $b \in R$  כך ש- $a \cdot b = 1 = b \cdot a$ . בנוסף ההופכי יסומן  $b = a^{-1}$  והוא יחיד.

ונסמן את קבוצת האיברים ההפיכים ב- $R$  בסימון  $R^\times$ . לדוגמה ב- $\mathbb{Z}$  האיברים ההפיכים היחידים הם  $\pm 1$ . **טענה:** בתחום שלמות, אם  $a = bu$  ו- $b = av$  אז  $u, v$  הפיכים, ובפרט  $u \cdot v = 1$  (כלומר  $u = v^{-1}$ ).

### 6.2.4 חברים

נאמר ש- $a, b$  חברים אם קיים  $u \in R^\times$  כך ש- $a = ub$ . זה יחס שקילות.

### 6.3 אידאלים

יהי  $R$  חוג חילופי עם יחידה,  $I \subseteq R$  נקרא אידאל אם:

$$1. I \neq \emptyset$$

$$2. I \text{ סגור לחיבור.}$$

$$3. I \text{ סגור לכפל באיבר מ-} R.$$

או באופן שקול  $I$  תת מרחב וקטורי של מרחב ה- $n$ יות  $R^n$ . דוגמה לאידאל היא  $\mathbb{Z}_{\text{even}}$ .  
האידאל שנוצר ע"י  $X \subseteq R$  הוא  $\text{sp}(X)$  והוא תמיד אידאל כי זה מרחב וקטורי ב- $R^n$ .  
אידאל ראשי הוא אידאל של איבר אחד -  $\text{sp}(a) = \{ab \mid b \in R\}$ .

מתקיים:

$$\bullet a \mid b \iff \text{sp}(b) \subseteq \text{sp}(a)$$

$$\bullet a, b \text{ חברים. } \iff \text{sp}(a) = \text{sp}(b)$$

$$\bullet a \text{ הפיך } \iff \text{sp}(a) = R \text{ בפרט } \text{sp}(1) = R$$

$$\bullet I \subseteq R$$

$$\bullet \text{ אידאל } \iff \text{קיים הומומורפיזם } \varphi : R \rightarrow S \text{ (חוג } S) \text{ כך ש-} \ker \varphi = I$$

#### 6.3.1 אידאל מאפס

האידאל המאפס של מטריצה  $A \in M_n(\mathbb{F})$  הוא האידאל הבא:  $Z(A) = \{p \in \mathbb{F}[x] \mid p(A) = 0\}$ .  
זה אידאל כי  $\ker(\varphi_A) = Z(A)$  כאשר  $\varphi_A : \mathbb{F}[x] \rightarrow M_n(A)$  העתקת ההצבה. לכל  $A$ ,

$$\bullet Z(A) \neq \{0\}, \text{ ולמעשה יש פולינום } 0 \neq p \in Z(A) \text{ כך ש-} \deg(p) \leq n^2.$$

$$\bullet \text{ הפולינום האופייני תמיד ב-} Z(A) \text{ - משפט קיילי המילטון.}$$

$$\text{בנוסף אם } A, B \text{ דומות אז } Z(A) = Z(B).$$

נסמן את הפולינום המינימלי של  $A$  ב- $\mathbb{F}[x]$   $m_A \in \mathbb{F}[x]$ , להיות הפולינום המתוקן היחיד כך ש- $\text{sp}(m_A) = Z(A)$ . מתקיים:

$$\bullet m_A(A) = 0$$

$$\bullet m_A \mid P_A \text{ הפולינום האופייני. בפרט הפולינום האופייני מאפס.}$$

$$\bullet \text{ לכל } q \in \mathbb{F}[x] \text{ א"פ, } q \mid m_T \iff q \mid P_T$$

$$\text{לכן אם } P_T = \prod_{i \in I} q_i^{r_i} \text{ (אי פריקים) אז } m_T = \prod_{i \in I} q_i^{r_i} \text{ כאשר } 1 \leq m_i \implies 1 \leq r_i \leq m_i$$

בנוסף במטריצת בלוקים אלכסונית  $\text{Diag}(A_1, \dots, A_n)$  מתקיים:

$$\bullet P_A = P_{A_1} \cdots P_{A_n}$$

$$\bullet m_A = \text{lcm}(m_{A_1}, \dots, m_{A_n})$$

## 6.4 תחום שלמות

תחום שלמות הוא חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0. בחוג חילופי עם יחידה (לא דרוש שאין מחלקי 0) מתקיים:

$$\begin{aligned} \bullet \quad a \in R, a \neq 0 \text{ יקרא ראשוני} &\iff (a \mid b \cdot c \implies (a \mid c \vee a \mid b)) \\ \bullet \quad a \in R \text{ יקרא אי־פריק} &\iff (a = b \cdot c \implies b \in R^\times \vee c \in R^\times) \end{aligned}$$

בתחום שלמות מתקיים:

• אם  $a \in R$  ראשוני אז  $a$  אי־פריק.

## 6.5 תחום ראשי

תחום שלמות  $R$  נקרא תחום ראשי אם כל אידאל  $I \subseteq R$  נוצר על ידי איבר, כלומר קיים לו  $a \in R$  כך ש- $I = \text{sp}(a)$ .

נגדיר לתחום ראשי  $R$  ואיברים  $r_1, \dots, r_k \in R$

$$\gcd(r_1, \dots, r_k) = \{d \in R \mid \text{sp}(d) = \text{sp}(r_1, \dots, r_k)\}$$

בנוסף מתקיים:

- עבור  $d$  כלשהו ב- $\gcd(r_1, \dots, r_k)$ ,  $\gcd(r_1, \dots, r_k) = \{d \cdot u \mid u \in R^\times\}$ .
- $d \in \gcd(r_1, \dots, r_k) \iff (\forall 1 \leq i \leq k. d \mid r_i) \wedge (q \mid r_1, \dots, r_k \implies q \mid d)$ .
- $a, b \in R$  יקראו זרים אם  $\gcd(a, b) = 1$  או באופן שקול 1 צירוף לינארי של  $a, b$ .
- $a \in R$  אי־פריק  $\iff$  ראשוני.

נגדיר בנוסף  $\text{lcm}(r_1, \dots, r_k) = \{d \in R \mid \text{sp}(d) = \bigcap_{i=1}^r \text{sp}(r_i)\}$ , lowest common multiplier, אידאל מינימלי.

## 7 קבוצת הפולינומים

אם  $T : V \rightarrow V$  מעל שדה  $\mathbb{F}$  ו- $p \in \mathbb{F}[x]$  הגדרנו  $p(T) \in \text{Hom}(V, V)$ .

אם  $A \in M_n(\mathbb{F})$  ו- $p \in \mathbb{F}[x]$  אז  $p(A) \in M_n(\mathbb{F})$  זו מטריצה.

הקשר בין  $[T]_B$  ל- $[p(T)]_B$  הוא ש- $[p(T)]_B = p([T]_B)$ .

מתקיים בנוסף:

- אם  $\lambda$  ערך עצמי של  $A$  אז  $p(\lambda)$  ערך עצמי של  $p(A)$ .
- אם  $A, B$  דומות אז  $p(A)$  ו- $p(B)$  דומות, ליתר דיוק,  $p(QAQ^{-1}) = Qp(A)Q^{-1}$ .
- לכן אם  $A, B$  דומות אז לכל  $p \in \mathbb{F}[x]$ ,  $p(A) = 0 \iff p(B) = 0$ , כלומר אם  $A, B$  דומות אז  $Z(A) = Z(B)$ .