סי**כומי הרצאות** - אלגברה לינארית 1

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

2	מונואידים, חבורות, חוגים ושדות	Ι
2	 1 הגדרות	
2	 	
3	 	
3	מרוכבים	ΙΙ
3	 	
3	3 הצגה פולארית	

חלק I

מונואידים, חבורות, חוגים ושדות

1 הגדרות

1.1 תכונות של פעולות

A imes A הוא domain תהא A פעולה בינארית על

- $\forall a, b, c \in A. (a*b)*c = a*(b*c)$ אסוצייטיבית: * .1
 - $. \forall a, b.a * b = b * a$ מילופית: * .2
 - $.*: A \times A \rightarrow A :*$ סגורה לפעולה A סגורה לפעולה

1.2 מונואיד

G כך ש: G כלשהי ו־G כאשר כלשהי ו־G כאשר כלשהי ו־G כאשר כלשהי ו־ל

- .* סגורה לפעולה G .1
- 2. * פעולה אסוצייטיבית.
- . האיבר הזה . $\exists e \in G. \forall g \in G. e*g = g*e = g$ האיבר לפעולה, לפעולה, לפעולה, לפעולה. פ e_G האיבר הזה יחיד ומסומן.

1.3 חבורה

מקרה פרטי של מונואיד שמקיימת גם:

4. קיים איבר הופכי, כלומר $g\in G.\exists h\in G.g*h=h*g=e$ ראיבר יחידה. איבר איבר הופכי של g מסומן -g^-1

1.4 חוג

שלשה $\langle R, +, * \rangle$ נקראת חוג אם:

- $. \forall a,b \in R. a+b=b+a$ חבורה חילופית, כלומר $\langle R,+ \rangle$.1
 - .* סגורה לפעולה R ו־R סגורה לפעולה * .2
 - 3. חוק הפילוג:

$$\forall a, b, c \in R.a * (b+c) = a * b + a * c$$

 $(b+c) * a = b * a + c * a$

a*b=b*a חוג חילופית b*a* אם a*b=b*a* חוג חילופית (כלומר

חוג עם יחידה $^{ au}$ אם $\langle R,* \rangle$ מונואיד.

. פיים אם לכפל לכפל ניטרלי לחיבור, 1_R לחיבור, 0_R ניטרלי לכפל אם סיים

מחלק $a*b=0_R$ כך ש־ $b \neq 0_R$ כך שם "מחלק "מחלק (נקרא "מחלק $b \neq a \in R$ מחלק $b \neq a \in R$ מחלק $a*b=0_R$ מחלק (מחלק $a*b=0_R$

חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0 נקרא **תחום שלמות**. הוא מקיים את חוק הצמצום (לכל a=c אז a*b=c*b, אם $a,b,c\in R$

1.5 שדה

גם: מקרה פרטי של חוג שמקיים גם: $\langle F, +, * \rangle$

.1 $\langle F \setminus \{0_F\}, * \rangle$ חבורה חילופית.

כל שדה הוא תחום שלמות, אבל ההפך אינו נכון. תחומי שלמות <u>סופיים</u> הם כן שדות. הרבה פעמים בהגדרת שדה מוסיפים את הדרישה $0_F \neq 1_F$.

חלק II

מרוכבים

2 הגדרות בסיסיות

נסמן הוא המספר המספר היא: $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$, כאשר המספר הראשון הוא . $i=\sqrt{-1}$ נסמן החלק הממשי (שמסומן ($Re\left(c\right)$) והמספר השני הוא החלק הדמיוני (שמסומן , $z\in\mathbb{C}$) עובדות: עבור

- . בירים. z של z מראשית הצירים. $||z||=\sqrt{Re\left(z\right)^{2}+Im\left(z\right)^{2}}$. מראשית הצירים. 1
 - $z=||z||\,e^{i\cdot\arg(z)}$ לכן, $e^{i heta}=\cos\left(heta
 ight)+i\sin\left(heta
 ight)$.2
 - 3. **חיבור:** מחברים את החלק הממשי והדמיוני בנפרד.
 - $.i^2 = -1$ משתמשים בזה ש־ $.(a+ib)\cdot(c+id) = (ac-bd)+i\,(bc+da)$.4.
 - 5. כל שורש של פולינום מרוכב הוא מרוכב.
 - .6 נגדיר \overline{z} להיות $\overline{z}=a-ib$ כלומר להפוך את החלק הדמיוני.
 - $\overline{\overline{z}} = z$ (X)
 - $z\cdot \overline{z} = \left|\left|z\right|\right|^2$ (1)
 - $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ (1)
 - $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ (7)
 - $Re\left(z
 ight)=rac{z+\overline{z}}{2},Im\left(z
 ight)=rac{z-\overline{z}}{2i},$ (こ)
- .(כלומר כל שורש של כל פולינום מרוכב הוא מרוכב). שדה סגור אלגברית (כלומר כל שורש של כל פולינום מרוכב הוא מרוכב).
 - .8 איבר הופכי מקבלים (אם מכפילים בהופכי מקבלים 1). $w = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

3 הצגה פולארית

נגדיר מרוכב בתור אוג $\langle r, \theta \rangle$ כאשר r המרחק מראשית הצירים ו־ θ הארגומנט.

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r \cdot e^{i\theta}$$

עובדות:

1. הארגומנט של z: נסמן $\arg(z)$ להיות הזווית שהמספר יוצר עם ציר הממשיים (לרוב נסמן .1 $\arg(z)=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ בעזרת לחשב אותו בעזרת ל- $\frac{arg}{a}(z)=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

$$\overline{z}=r\cdot e^{-i\theta}, z^{-1}=rac{1}{r}e^{-i\theta}$$
 .2

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$
.3

4. להכפיל מספרים מרוכבים על הגרף נראה כמו להכפיל את האורכים זה בזה ולחבר את הזוויות.

 $e^{i\theta}=e^{i(\theta+2\pi k)}$ יש בעובדה ש־ $z^n=re^{i\theta}$ נמצא הצגה פולארית. נמצא בעובדה ש- $z^n=a+ib$ אזי: עבור $k\in\mathbb{Z}$ עבור

$$z = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right)}$$

עבור $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ולכל ולכל. $k \in \mathbb{Z}$