סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

1 דברים חשובים מלינארית 1 3
1.1 מטריצות דומות 3
2 לכסון 3
2.1 וקטורים עצמיים 3
3 פולינום אופייני 3
4 אינווריאנטיות 4
5 מרחב מנה 4
6 חוגים 5
6.1 הגדרות מלינארית 1 5
6.1.1 חבורה 5
6.1.2 חוג 5
6.1.3 שדה 5
6.2 הגדרות חדשות מלינארית 2 6
6.2.1 חוגי הפולינומים, המטריצות והעתקות 6
6.2.2 הומומורפיזמים 6
6.2.3 חילוק בחוגים 6
6.2.4 חברים 6
6.3 אידאלים 7
6.3.1 אידאל מאפס 7
6.4 תחום שלמות 8
6.5 תחום ראשי 8
7 קבוצת הפולינומים 8
8 ז'ירדון 9
9 מכפלה פנימית 9
9.1 הגדרות בסיסיות 9
9.2 תכונות 10
9.3 נורמה 10
9.3.1 תכונות הנורמה 10

9.3.2 תכונות המרחק 10
9.4 מטריצת גראם 11
9.5 אורתוגונליות 11
9.5.1 הגדרות בסיסיות 11
9.5.2 תכונות 11
9.5.3 ההטלה 11
9.5.4 אלגוריתם גראם־שמידט 12
9.6 מקבילונים 12
9.7 העתקות לינאריות עם ממ"פ/מ"א 13

1 דברים חשובים מלינארית 1

1.1 מטריצות דומות

יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{F})$, נאמר כי A ו־B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש־$A=P^{-1}\cdot B\cdot P$.

משפט: נתון $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ ריבועיות, הבאים שקולים:

1. A,B דומות.
2. קיימת $T:V\to V$ ובסיסים C,C' של V כך ש־$[T]_C=A,[T]_{C'}=B$.
3. לכל $T:V\to V$, אם קיים בסיס C של V כך ש־$[T]_C=A$, אז קיים בסיס C' של V כך ש־$[T]_{C'}=B$.

ואם A,B דומות אז:

1. $\mathrm{Rank}(A)=\mathrm{Rank}(B)\,,\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}(B)$.
2. $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$ כאשר $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}(A)_{i,i}$.
3. $\det(A)=\det(B)$.

2 לכסון

נגדיר <u>מטריצה אלכסונית</u> להיות מטריצה ריבועית $A\in M_n(\mathbb{F})$ שבה עבור $i\neq j$, $A_{i,j}=0$. נסמן אותן בתור $\mathrm{Diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.

<u>מטריצה לכסינה</u> היא מטריצה שדומה למטריצה אלכסונית, ו<u>העתקה לכסינה</u> היא העתקה לינארית כך שקיים בסיס B כך ש־$[T]_B^B$ אלכסונית.

אם T העתקה לכסינה (כלומר מטריצה מייצגת כלשהי לכסינה) אז כל מטריצה מייצגת שלה היא לכסינה.

2.1 וקטורים עצמיים

נגדיר <u>וקטור עצמי של A לערך עצמי λ</u> להיות $\bar{v}$ כך ש־$A\bar{v}=\lambda\bar{v}$. באופן הפוך, <u>ערך עצמי של A</u> הוא λ כך שקיים וקטור עצמי $\underline{\bar{v}\neq\bar{0}}$ של A לערך עצמי λ.

הערכים העצמיים הם האיברים שנמצאים על האלכסון במטריצה האלכסונית שדומה ל־A, עד כדי סידורם על האלכסון.

המרחב של הוקטורים העצמיים הוא $V_\lambda=\{\bar{v}\in V\mid A\bar{v}=\lambda\bar{v}\}$, שזה שווה בעצם ל־$\mathrm{Sols}(A-\lambda I)$. זה תמ"ו של V.

הסכום של ה־V_λ השונים הוא סכום ישר.

משפט 1.2 A לכסינה $\iff$ קיים בסיס $B\subseteq\mathbb{F}^n$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A.

3 פולינום אופייני

נסמן ב־$P_A(\lambda)=|\lambda I-A|$ את <u>הפולינום האופייני של A</u>. מתקיים:

- זה פולינום מתוקן, כלומר המקדם המוביל הוא 1.

- λ ערך עצמי של A $\iff$ λ שורש של $P_A(\lambda)$.
- אם A,B דומות אז $P_A = P_B$.
- עבור מטריצת בלוקים אלכסונית $A = \mathrm{Diag}(A_1,\dots,A_n)$, $P_A = P_{A_1}\cdot\dots\cdot P_{A_n}$.

משפט 1.3 המשפט המרכזי: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$.
נגדיר את הריבוי האלגברי של α, ρ_α (רו), להיות כמות הפעמים ש־$(\lambda-\alpha)$ מופיע בפולינום $P_A(\lambda)$. כלומר אם הפולינום הוא $P_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-3)^2$ אז $\rho_1 = 1, \rho_3 = 2$.

בנוסף נגדיר את הריבוי הגיאומטרי של α, μ_λ, להיות $\dim(V_\lambda)$.
A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אמ"ם:

1. $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$.
2. לכל ערך עצמי λ של A, $\rho_\lambda = \mu_\lambda$.

משפט 2.3 לכל ערך עצמי λ, $\mu_\lambda \le \rho_\lambda$.

משפט 3.3 עבור $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ הערכים העצמיים, $\rho_{\lambda_1}+\dots+\rho_{\lambda_k} \le n$, ואם $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים אז גם $\rho_{\lambda_1}+\dots+\rho_{\lambda_k} = n$.

4 אינווריאנטיות

תהא $T: V \to V$ העתקה לינארית, תת מרחב $U \subseteq V$ נקרא T־אינווריאנטי (T־שמור) אם $T[U] \subseteq U$, או באופן שקול אם T מצומצם ל־U ט"ל.

דוגמאות למרחבים T־אינווריאנטים הן $\ker(T), Im(T)$ ו־V_λ לכל λ.

בנוסף נגדיר תת מרחב $U \subseteq V$ אי פריק להיות תת מרחב T־אינווריאנטי כך שלא קיימים $W_1, W_2 \ne \{\bar{0}\}$ T־אינווריאנטים שמקיימים $U = W_1 \oplus W_2$.

מטריצה מייצגת: אם $U \subseteq V$ T־אינווריאנטי, יהי B בסיס של U. יהי C השלמה לבסיס של V. אז $[T]_{B\frown C} = \left(\begin{array}{c|c} [T\lceil_U]_B & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$. זה כי המקדמים שלמטה לא מופיעים ב־U ולכן גם לא בתמונה של U (כי היא מוכלת ב־U).
ואם $V = U_1 \oplus U_2$ כאשר U_1, U_2 T־אינווריאנטיים אז $[T]_{B_1\frown B_2} = \left(\begin{array}{c|c} [T\lceil_U]_{B_1} & 0 \\ \hline 0 & [T\lceil_U]_{B_2} \end{array}\right)$.
אזי הפולינום $P_{T\lceil_U}$ מחלק את P_T, ואם $V = U_1 \oplus U_2$ עבור U_1, U_2 T־אינווריאנטיים אז $P_T = P_{T\lceil_{U_1}} \cdot P_{T\lceil_{U_2}}$.
בנוסף באופן מוכלל אם $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ כאשר כל V_i הוא T־אינווריאנטי אז יהי הבסיס $B = \bigvee_{i=1}^{n} B_i$, מתקיים $[T]_B = \mathrm{Diag}\left([T\lceil_{V_1}]_{B_1},\dots,[T\lceil_{V_n}]_{B_n}\right)$, ו־$P_T = \prod_{i=1}^{n} P_{T\lceil_{U_i}}$.

5 מרחב מנה

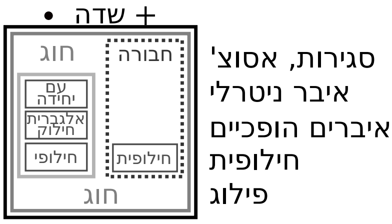
נגדיר את יחס השקילות הבא: $v \sim u \iff v-u \in W$ עבור $u,v \in V$ ו־W כלשהו.

את קבוצת המנה, V/W, שהיא הקבוצה של $[v] = \{u \in V \mid u \sim v\}$ לכל v, ניתן בעצם להגדיר לפי פעולת חיבור $[v]+[u] = [v+u]$ וכפל בסקלר $\lambda\cdot[v] = [\lambda\cdot v]$.

זה יוצא מרחב וקטורי, שמקיים גם $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$.

6 חוגים

6.1 הגדרות מלינארית 1



6.1.1 חבורה

$\langle G, * \rangle$ נקראת חבורה אם:

1. G סגורה לפעולה $*$.
2. $*$ פעולה אסוצייטיבית.
3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר $\exists e \in G . \forall g \in G . e * g = g * e = g$. האיבר הזה יחיד ומסומן e_G.
4. קיים איבר הופכי, כלומר $\forall g \in G . \exists h \in G . g * h = h * g = e$ כאשר e איבר יחידה. האיבר ההופכי של g מסומן g^{-1}.

6.1.2 חוג

$\langle R, *, + \rangle$ נקראת חוג אם:

1. $\langle R, + \rangle$ חבורה חילופית.
2. $*$ פעולה אסוצייטיבית על R.
3. מתקיים חוג הפילוג:

$$\forall a, b, c \in R . a * (b + c) = a * b + a * c$$
$$(b + c) * a = b * a + c * a$$

בנוסף יש חוג חילופי, (הכפל חילופי), חוג עם יחידה (קיים איבר ניטרלי לכפל), ותחום שלמות הוא חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0.

6.1.3 שדה

חוג חילופי עם יחידה כך ש־$\langle R \setminus \{0\}, * \rangle$ חבורה חילופית. שדה הוא תחום שלמות, ותחום שלמות סופי הוא שדה.

6.2 הגדרות חדשות מלינארית 2

6.2.1 חוגי הפולינומים, המטריצות והעתקות

נגדיר את חוג הפולינומים מעל חוג R להיות $R[x] \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. נגדיר בנוסף $\deg(0) = \infty, \deg(p) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \neq 0\}$.

- מתקיימת נוסחת המעלות: $\deg(p+q) \leq \max(\deg(p), \deg(q)), \deg(p \cdot q) \leq \deg(p) + \deg(q)$.
  אם R תחום שלמות אז $\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$.
- אם R תחום שלמות אז $R[x]$ תחום ראשי.
- **חילוק בחוג הפולינומים:** יהי R חוג חילופי, ו־$f, g \in R[x]$ פולינומים כך שהמקדם המוביל של g הפיך ב־R. אז קיימים ויחידים $q, r \in R[x]$ כך ש־$f = q \cdot g + r$.
- ב־$R[x]$ ההפיכים היחידים הם הפולינומים הקבועים של ההפיכים מ־R.

נגדיר את חוג המטריצות הריבועיות להיות $M_n(R)$ כאשר R חוג, לפי פעולות כפל וחיבור של מטריצות. זה חוג לא חילופי.

נגדיר את חוג ההעתקות ממרחב לעצמו להיות $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$ יחד עם הרכבה ועם חיבור פונקציות. זה חוג לא חילופי עם יחידה Id_V.

השילובים הנפוצים הם $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)[x], M_n(R)[x], M_n(R[x])$.

משפט: כל פולינום בשדה ניתן לכתוב בתור מכפלה של אי־פריקים. תהא $\{q_i \mid i \in I\}$ קבוצת כל הפולינומים הא"פ המתוקנים מעל $\mathbb{F}[x]$ באשר $\mathbb{F}$ שדה. כל פולינום $0 \neq p \in \mathbb{F}[x]$ ניתן לרשום באופן יחיד $p = c \cdot \prod_{i \in I} q_i^{n_i}$ באשר $c \in \mathbb{F}^x = \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

6.2.2 הומומורפיזמים

הומומורפיזם של חוגים זו פונקציה $\varphi : R_1 \to R_2$ כך ש־$\varphi(1_{R_1}) = 1_{R_2}$, ו־$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ ו־$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ (ולכן גם $\varphi(0_{R_1}) = 0_{R_2}$).

יש למשל הומומורפיזם בין $M_n(R)[x]$ לבין $M_n(R[x])$.

6.2.3 חילוק בחוגים

יהי R חוג. יהיו $a, b \in R$, נאמר כי $a \mid b$ אם $\exists c \in R. b = a \cdot c$.

בנוסף נקרא ל־$a \in R$ הפיך ב־R אם קיים $b \in R$ כך ש־$a \cdot b = 1 = b \cdot a$. בנוסף ההופכי יסומן $b = a^{-1}$ והוא יחיד.

ונסמן את קבוצת האיברים ההפיכים ב־R בסימון R^x. לדוגמה ב־$\mathbb{Z}$ האיברים ההפיכים היחידים הם ± 1.

טענה: בתחום שלמות, אם $a = bu$ ו־$b = av$ אז u, v הפיכים, ובפרט $u \cdot v = 1$ (כלומר $u = v^{-1}$).

6.2.4 חברים

נאמר ש־a, b חברים אם קיים $u \in R^x$ כך ש־$a = ub$. זה יחס שקילות.

6.3 אידאלים

יהי R חוג חילופי עם יחידה, $I \subseteq R$ נקרא אידאל אם:

1. $I \neq \emptyset$.
2. I סגור לחיבור.
3. I סגור לכפל באיבר מ־R.

או באופן שקול I תת מרחב וקטורי של מרחב ה־n־יות R^1. דוגמה לאידאל היא $\mathbb{Z}_{even}$.
האידאל שנוצר ע"י $X \subseteq R$ הוא $\operatorname{sp}(X)$ ־ והוא תמיד אידאל כי זה מרחב וקטורי ב־R^1.
אידאל ראשי הוא אידאל של איבר אחד ־ $\operatorname{sp}(a) = \{ab \mid b \in R\}$.
מתקיים:

- $a \mid b \iff \operatorname{sp}(b) \subseteq \operatorname{sp}(a)$
- $a, b \iff \operatorname{sp}(a) = \operatorname{sp}(b)$ חברים.
- a הפיך $\iff \operatorname{sp}(a) = R$, בפרט $\operatorname{sp}(1) = R$.
- $I \subseteq R$
- אידאל $\iff$ קיים הומומורפיזם $\varphi : R \to S$ (S חוג) כך ש־$\ker \varphi = I$.

6.3.1 אידאל מאפס

האידאל המאפס של מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ הוא האידאל הבא: $Z(A) = \{p \in \mathbb{F}[x] \mid p(A) = 0\}$.
זה אידאל כי $\ker(\varphi_A) = Z(A)$ כאשר $\varphi_A : \mathbb{F}[x] \to M_n(A)$ העתקת ההצבה. לכל A,

- $Z(A) \neq \{0\}$, ולמעשה יש פולינום $0 \neq p \in Z(A)$ כך ש־$\deg(p) \leq n^2$.
- הפולינום האופייני תמיד ב־$Z(A)$ ־ משפט קיילי המילטון.

בנוסף אם A, B דומות אז $Z(A) = Z(B)$.
נסמן את הפולינום המינימלי של A ב־$m_A \in \mathbb{F}[x]$, להיות הפולינום המתוקן היחידי כך ש־$\operatorname{sp}(m_A) = Z(A)$.
מתקיים:

- $m_A(A) = 0$.
- $m_A \mid P_A$ הפולינום האופייני. בפרט הפולינום האופייני מאפס.
- לכל $q \in \mathbb{F}[x]$ א"פ, $q \mid m_T \iff q \mid P_T$.

  לכן אם $P_T = \prod_{i \in I} q_i^{m_i}$ (q_i אי פריקים) אז $m_T = \prod_{i \in I} q_i^{r_i}$ כאשר $1 \leq r_i \leq m_i \implies 1 \leq m_i$.

בנוסף במטריצת בלוקים אלכסונית $\operatorname{Diag}(A_1, \dots, A_n)$ מתקיים:

- $P_A = P_{A_1} \cdot \dots \cdot P_{A_n}$.
- $m_A = \operatorname{lcm}(m_{A_1}, \dots, m_{A_n})$.

6.4 תחום שלמות

תחום שלמות הוא חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0.

בחוג חילופי עם יחידה (לא דרוש שאין מחלקי 0) מתקיים:

- $0 \neq a \in R$ יקרא ראשוני $\iff$ $(a \mid b \cdot c \implies (a \mid c \vee a \mid b))$
- $a \in R$ יקרא אי־פריק $\iff$ $(a = b \cdot c \implies b \in R^x \vee c \in R^x)$

בתחום שלמות מתקיים:

- אם $a \in R$ ראשוני אז a אי־פריק.

6.5 תחום ראשי

תחום שלמות R נקרא תחום ראשי אם כל אידאל $I \subseteq R$ נוצר על ידי איבר, כלומר קיים לו $a \in R$ כך ש־$I = \mathrm{sp}\left(a\right)$.

נגדיר לתחום ראשי R ואיברים $r_1, \ldots, r_k \in R$:

$$\gcd\left(r_1, \ldots, r_k\right) = \left\{d \in R \mid \mathrm{sp}\left(d\right) = \mathrm{sp}\left(r_1, \ldots, r_k\right)\right\}$$

בנוסף מתקיים:

- עבור d כלשהו ב־$\gcd\left(r_1, \ldots, r_k\right)$, $\gcd\left(r_1, \ldots, r_k\right) = \left\{d \cdot u \mid u \in R^x\right\}$
- $d \in \gcd\left(r_1, \ldots, r_k\right) \iff \left(\forall 1 \leq i \leq k . d \mid r_i\right) \wedge \left(q \mid r_1, \ldots, r_k \implies q \mid d\right)$
- $a, b \in R$ יקראו זרים אם $\gcd\left(a, b\right) = 1$ או באופן שקול 1 צירוף לינארי של a, b.
- $a \in R$ אי־פריק $\iff$ ראשוני.

נגדיר בנוסף $\mathrm{lcm}\left(r_1, \ldots, r_k\right) = \left\{d \in R \mid \mathrm{sp}\left(d\right) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{sp}\left(r_i\right)\right\}$, lowest common multiplier. אידאל מינימלי.

7 קבוצת הפולינומים

אם $T : V \to V$ מעל שדה $\mathbb{F}$ ו־$p \in \mathbb{F}\left[x\right]$ הגדרנו $p\left(T\right) \in \mathrm{Hom}\left(V, V\right)$.

אם $A \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ ו־$p \in \mathbb{F}\left[x\right]$ אז $p\left(A\right)$ זו מטריצה $p\left(A\right) \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$.

הקשר בין $\left[T\right]_B$ ל־$\left[p\left(T\right)\right]_B$ הוא ש־$p\left(\left[T\right]_B\right) = \left[p\left(T\right)\right]_B$.

מתקיים בנוסף:

- אם λ ערך עצמי של A אז $p\left(\lambda\right)$ ערך עצמי של $p\left(A\right)$.
- אם A, B דומות אז $p\left(A\right)$ ו־$p\left(B\right)$ דומות, ליתר דיוק, $p\left(QAQ^{-1}\right) = Qp\left(A\right)Q^{-1}$.
- לכן אם A, B דומות אז לכל $p \in \mathbb{F}\left[x\right]$, $p\left(B\right) = 0 \iff p\left(A\right) = 0$. כלומר אם A, B דומות אז $Z\left(A\right) = Z\left(B\right)$.

8 ז'ירדון

נגדיר **בלוק ז'ורדן** להיות מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ואפילו $\begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix}$, כלומר יש אלכסון של λ ומעליו אלכסון של 1ים.

צורת ז'ורדן היא מטריצת בלוקים אלכסונית כך שכל הבלוקים הם בלוקי ז'ורדן.

באופן פרקטי וחישובי:

1. חישוב הפולינום האופייני. נסמן את הערכים העצמיים ב־$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ואת הריבויים האלגבריים שלהם ב־$\rho_{\lambda_1}, \ldots, \rho_{\lambda_k}$.
2. לכל λ_i:
   (א) נחשב את $\ker\left(A - \lambda_i I\right), \ldots, \ker\left(A - \lambda_i I\right)^{\rho_{\lambda_i}}$ עד שהמימד של זה מפסיק להשתנות (לא כולל). נסמן את המקום שבו המימד מפסיק להשתנות ב־j. זה גם הריבוי בפולינום המינימלי.
   (ב) מ־j עד ל־1:
      i. נשלים את $\ker\left(A - \lambda_i I\right)^{j-1}$ לבסיס של $\ker\left(A - \lambda_i I\right)^{j}$.
      ii. יהי v שהוסף בהשלמה. נוסיף לבסיס את $v, v\left(A - \lambda_i I\right)^1, \ldots, v\left(A - \lambda_i I\right)^j$. נספור שצריך איבר אחד פחות מאלה (כלומר ניקח איבר אחד פחות מההשלמות של החזקות הקודמות).
3. אפשר להשתמש בבסיס שקיבלנו ישירות או לשים $P = \begin{pmatrix} B_1 & \ldots & B_n \end{pmatrix}$, ואז $J = P^{-1}AP$ (כי $P = [Id]_E^B$ ואכן $[A]_B^B = [Id]_B^E \cdot [A]_E^E \cdot [Id]_E^B$).

משפט:

- צורת זורדן יחידה עד כדי הסידור של בלוקי הז'ורדן.
- הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי כלשהו הוא מספר הבלוקים שלו.
- הריבוי האלגברי באופייני הוא סכום הגדלים של הבלוקים.
- הריבוי האלגברי במינימלי הוא המקסימום של הגדלים של הבלוקים.

9 מכפלה פנימית

9.1 הגדרות בסיסיות

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$. מכפלה אוניטרית (נקרא "מכפלה פנימית" מעל $\mathbb{R}$) מעל V היא פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}\left(\mathbb{R}\right)$ כך ש־:

1. לינאריות לפי הרכיב השמאלי: $\left\langle \alpha \underline{v_1} + \beta \underline{v_2}, u \right\rangle = \alpha \cdot \left\langle \underline{v_1}, \underline{u} \right\rangle + \beta \cdot \left\langle \underline{v_2}, \underline{u} \right\rangle$
2. הרמיטיות: $\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = \overline{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}$
3. חיוביות: $\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \in \mathbb{R} \wedge \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \geq 0$
4. אפיון 0: $\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$

9.2 תכונות

משפט לגבי הרכיב הימני:

- $\langle \underline{u}, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$ חיבוריות לפי הימני.
- $\langle v, \alpha u \rangle = \overline{\alpha} \langle v, u \rangle$ כמו הומוגניות ברכיב הימני, אבל עם הצמוד.
- $\langle \underline{v}, \underline{0} \rangle = 0$ מתאפס גם לפי הרכיב הימני.
- לכן יש לנו כמעט לינאריות לפי הרכיב הימני, אבל עם הסקלר הצמוד.
- ומכאן נובע: $\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{v_i}, \sum_{j=1}^{m} b_j \underline{u_j} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \overline{b_j} \left\langle \underline{v_i}, \underline{u_j} \right\rangle$

9.3 נורמה

נגדיר $||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ הנורמה של v. תלוי במכפלה הפנימית.

9.3.1 תכונות הנורמה

- $0 \leq ||\underline{v}|| \in \mathbb{R}$
- $||\alpha \cdot \underline{v}|| = |\alpha| \cdot ||\underline{v}||$ הומוגניות
- $||\underline{v} + \underline{u}|| \leq ||\underline{v}|| + ||\underline{u}||$ אי שוויון המשולש.
- $|\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle| \leq ||\underline{v}|| \cdot ||\underline{u}||$ **(אי שוויון קושי שוורץ)**. בנוסף שוויון מתקיים $\iff$ $\underline{v}, \underline{u}$ פרופורציוניות (כלומר קיים λ כך ש-$\underline{v} = \lambda \underline{u}$).
- הנורמה קובעת את המכפלה. **הוכחה:** $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i \left(||x+y||^2 - ||x-y||^2 \right) \right)$.

גיאומטריה באופן אלגברי:

$$||\underline{v}|| = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$$

$$\cos\left(\arg\left(\underline{v}, \underline{u}\right)\right) = \frac{\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle}{||v|| \, ||u||}$$

$$\mathrm{dist}\left(\underline{v}, \underline{u}\right) = ||\underline{v} - \underline{u}||$$

$$\underline{v} \perp \underline{u} \iff \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = 0$$

$$\underline{v} \perp \underline{u} \implies \forall \alpha, \beta . \alpha v \perp \beta u$$

9.3.2 תכונות המרחק

נגדיר $\mathrm{dist}\left(v, u\right) = ||v - u||$. אז:

1. $0 \leq \mathrm{dist}\left(v, u\right)$ חיוביות
2. $\mathrm{dist}\left(\underline{v}, \underline{u}\right) = \mathrm{dist}\left(\underline{u}, \underline{v}\right)$ סימטריות
3. $\mathrm{dist}\left(\underline{v}, \underline{u}\right) = 0 \iff \underline{v} = \underline{u}$
4. $\mathrm{dist}\left(\underline{v}, \underline{u}\right) \leq \mathrm{dist}\left(\underline{v}, \underline{w}\right) + \mathrm{dist}\left(\underline{w}, \underline{u}\right)$ אי שוויון המשולש
5. $||v-u||^2 = ||v||^2 + ||u||^2 \iff \underline{v} \perp \underline{u}$ ($\iff \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = 0$) משפט פיתגורס

9.4 מטריצת גראם

יהיו $v_1,\ldots,v_n \in V$, V ממ"פ (מרחב וקטורי + מכפלה פנימית). אז נגדיר את מטריצת גראם:

$$(G(v_1,\ldots,v_n))_{i,j} = \langle v_i, v_j\rangle$$

משפט:

- $A \in M_n(\mathbb{C})$ הרמיטית ($A = \overline{A^t}\,(= A^*)$) וחיובית לחלוטין ($\forall z \neq 0. z^* A z > 0$) $\iff$ $\langle *,*\rangle_A$ מכפלה הרמיטית.
- $G = G^*$ (הרמיטית) וחיובית לחלוטין (ולכן היא מכפלה הרמיטית).
- לכל $\langle *,*\rangle$ מ"פ מעל $\mathbb{C}^n$, $\langle *,*\rangle = \langle *,*\rangle_G$ באשר $G = G(e_1,\ldots,e_n)$ הבסיס הסטנדרטי.
- לכל x,y, $\langle x,y\rangle = \langle [x]_B, [y]_B\rangle_G$. אין דרישה ש־$B$ יהיה באמת בסיס, רק ש־x,y יהיו צירופים לינאריים בו.
- **נוסחת שינוי בסיס:** יהיו B_1,B_2 שני בסיסים של V (ממ"פ/מ"א). אז $G(B_2) = E^t \cdot G(B_1) \cdot \overline{E}$ באשר $E = [Id]_{B_2}^{B_1}$ מטריצת שינוי הקואורדינטות.

9.5 אורתוגונליות

9.5.1 הגדרות בסיסיות

$(v_1,\ldots,v_n)$ נקראת <u>אורתוגונלית</u> אמ"ם $\forall i \neq j. v_i \perp v_j$.

לדוגמה $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ סדרה אורתוגונלית עם המכפלה האוניטרית הסטנדרטית.

נגדיר וקטור יחידה להיות v כך ש־$||\underline{v}|| = 1$. אם $\underline{v} \neq 0$ אז $\frac{1}{||\underline{v}||} \cdot \underline{v}$ וקטור יחידה, שנקרא גם הוקטור <u>המנורמל</u>.

אז סדרה <u>אורתונורמלית</u> היא סדרה אורתוגונלית של וקטורי יחידה.

9.5.2 תכונות

- אם $v_1,\ldots,v_n$ סדרה אורתוגונלית ללא $\underline{0}$ אז $v_1,\ldots,v_n$ בת"ל. לכן נגדיר גם <u>בסיס אורתוגונלי</u>.
- בבסיס אורתוגונלי, $G(v_1,\ldots,v_n) = \mathrm{Diag}\left(||v_1||^2,\ldots,||v_n||^2\right)$.
- נגדיר $\forall a \in A. v \perp a \iff v \perp A$. אז $v_0 \perp v_1,\ldots,v_k \iff v_0 \perp \mathrm{sp}(v_1,\ldots,v_k)$.

9.5.3 ההטלה

נגדיר את <u>ההטלה של וקטור v על U</u> להיות:

$$P_U(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, b_i\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} \cdot b_i$$

כאשר $b_1,\ldots,b_n$ בסיס אורתוגונלי, בהמשך נראה שקיים כזה לכל מרחב נוצר סופית.

תכונות: יהי U. אז:

- $P_U^2 = P_U$ ולכן, $\forall u \in U P_U(u) = u$
- P_U העתקה לינארית, כך ש־$\ker(P_U) = \{v \in V \mid v \perp U\}$. נסמן גם ב־$U^{\perp}$.
- $U \perp (v - P_U(v))$ לכל v.

תכונות של $U^{\perp}$:

1. $U \oplus U^{\perp} = V$
2. $U \subseteq \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ ואם V נוצר סופית אז $U = \left(U^t\right)^t$.
3. $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$
4. $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$
5. אם $U \subseteq W$ אז $W^{\perp} \subseteq U^{\perp}$
6. $\langle v, u\rangle = \langle P_U(v), P_U(u)\rangle + \langle P_{U^{\perp}}(v), P_{U^{\perp}}(u)\rangle$

משפט הקירוב הטוב ביותר: נגדיר $\operatorname{dist}(v, U) = \operatorname{dist}(v, P_U(v))$. אז מתקיים ש־$\operatorname{dist}(v, U) = \inf_{u \in U} \operatorname{dist}(v, u) =$ $\min_{u \in U} \operatorname{dist}(v, u)$, כלומר שהמרחק הזה הוא המרחק הכי קצר מ־v ל־U.

9.5.4 אלגוריתם גראם־שמידט

אלגוריתם גראם־שמידט הוא האלגוריתם למציאת סדרה אורתונורמלית $w_1, \ldots, w_x$ ל־$\operatorname{sp}(b_1, \ldots, b_n)$ כך ש־$\operatorname{sp}(b_1, \ldots, b_n) = \operatorname{sp}(w_1, \ldots, w_x)$.

נוריד מ־$b_1, \ldots, b_n$ את האפסים. נגדיר את $w_1 = \frac{1}{||b_1||} b_1$ להיות המנורמל. לכל $i \in 2, \ldots, n$, נגדיר $U =$ $\operatorname{sp}(b_1, \ldots, b_{i-1})$, ואז נחשב $w_i' = b_i - P_U(b_i)$. אם $w_i' = 0$, נתעלם ממנו, אחרת נוסיף לסדרה w את $\frac{1}{||w_i'||} w_i'$ המנורמל.

9.6 מקבילונים

טענה: $\det(G(v_1, \ldots, v_n)) \geq 0$.

משפט: יהיו $v_1, \ldots, v_n \in V$. אז $v_1, \ldots, v_n$ בת"ל $\iff \det(G(v_1, \ldots, v_n)) \neq 0$.

הגדרה: המקבילון שנפרש ע"י $v_1, \ldots, v_n$ מוגדר להיות:

$$P(v_1, \ldots, v_n) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mid 1 \leq i \leq n, 0 \leq \alpha_i \leq 1\right\}$$

כלומר צירופים לינאריים כאשר המקדמים בין 0 ל־1. אם נצייר את הנקודות על הגרף נקבל את כל הנקודות שבתוך המקבילית.

הגדרה: $\operatorname{Vol}(P(v_1, \ldots, v_n)) = \sqrt{\det(G(v_1, \ldots, v_n))}$ הנפח. זה מכליל את הקונספט של נפח לכל מכפלה פנימית.

במכפלה הסקלרית הסטנדרטית מתקיים $\operatorname{Vol}(P(v_1, \ldots, v_n)) = \det \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \ldots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$.

טענה: אם B בסיס כלשהו ו־E בסיס אורתונורמלי אז $\operatorname{Vol}(P(B)) = \left|\det\left([Id]_E^B\right)\right|$.

טענה (מלבנים): אם $v_1, \ldots, v_n$ אורתוגונלי אז $\text{Vol}\left(P\left(v_1, \ldots, v_n\right)\right) = ||v_1|| \cdot \cdots \cdot ||v_n||$.

משפט: יהי B בסיס של $U \subseteq V$ (בפרט נוצר סופית) ו־$v \in V$, אז מתקיים:

$$\left(\text{dist}\left(\underline{v}, P_U\left(\underline{v}\right)\right) =\right) \text{dist}\left(\underline{v}, U\right) = \frac{\text{Vol}\left(P\left(\underline{v} \vee B\right)\right)}{\text{Vol}\left(P\left(B\right)\right)} = \sqrt{\frac{\det\left(G\left(\underline{v} \vee B\right)\right)}{\det\left(G\left(B\right)\right)}}$$

9.7 העתקות ליניאריות עם ממ"פ/מ"א

יהיו V ממ"פ/מ"א, B בסיס אורתונורמלי ו־$T : V \to V$ העתקה ליניארית.

משפט:

- $\left(\left[T\right]_B\right)_{i,j} = \left\langle T\left(b_j\right), b_i\right\rangle$
- ובמכפלה הסטנדרטית גם: $\left\langle T\left(v\right), u\right\rangle = \left\langle \left[T\left(v\right)\right]_B, \left[u\right]_B\right\rangle_{\text{st}} = \left\langle \left[T\right]_B \cdot \left[v\right]_B, \left[u\right]_B\right\rangle_{\text{st}}$