סיכומי הרצאות - חדו"א 1א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

1 נוסחאות כלליות

בינום: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

א"ש הממוצעים: $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$

א"ש ברנולי: לכל $x > -1, n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(1+x)^n \geq 1+nx$

א"ש המשולש: $|a+b| \leq |a|+|b|$

2 חסמים עליונים ותחתונים

M יקרא **חסם מלעיל** של A אם לכל $x \in A$, $x \leq M$.
M יקרא **חסם מלרע** של A אם לכל $x \in A$, $M \leq x$.

אקסיומת השלמות: לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל קיים חסם עליון קטן ביותר, ונסמן אותו ב־$\sup A$.

טענה שימושית: אם $b = \sup A$ אז לכל $\varepsilon > 0$, קיים $a \in A$ כך ש־$b - \varepsilon < a \leq b$.

הגדרה: נאמר ש־A צפופה ב־B אם לכל $b \in B$ ולכל $\varepsilon > 0$, קיים $a \in A$ כך ש־$|b-a| < \varepsilon$.

טענה: $S \subseteq \mathbb{R}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$ $\iff$ לכל $a < b \in \mathbb{R}$, $(a,b) \cap S \neq \emptyset$.

טענה: לכל $a < b$, קיים q כך ש־$q \in (a,b)$.

הוכחה: נניח ש־$a > 0$. יהי k כך ש־$0 < \frac{1}{k} < b-a$. יהי m המספר הקטן ביותר כך ש־$\frac{m}{k} \geq b$. אז $\frac{m-1}{k} < b$. בנוסף, $a + \frac{1}{k} < a + (b-a) = b$ ולכן $a < \frac{m-1}{k}$. אם כך, $a < \frac{m-1}{k} < b$ וסיימנו. אם $a \leq 0$, נוסיף את $x = \lceil |a| + 17 \rceil$ ל־a, b ועבור $c = a+x, d = b+x$ קיים $q \in (a+x, b+x)$, ולכן $(a,b) \in q - x \in \mathbb{Q}$ מש"ל.

טענה: $\mathbb{Q}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$ ו־$[a,b] \cap \mathbb{Q}$ צפופה ב־$[a,b]$.

3 סדרות

נסמן סדרות ב־(a_n) או $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

נאמר שסדרה **חסומה מלעיל** אם קיים M כך שלכל n, $a_n \leq M$.

נאמר שסדרה **חסומה מלרע** אם קיים M כך שלכל n, $M \leq a_n$.

נאמר שסדרה **חסומה** אם קיים M כך שלכל n, $|a_n| \leq M$.

3.1 הגדרת הגבול

נאמר שהגבול של (a_n) הוא L, ונסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ או $a_n \to L$, אם:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall n > n_0. \, |a_n - L| < \varepsilon$$

נאמר שהגבול של (a_n) הוא ∞, ונסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ או $a_n \to \infty$, אם:

$$\forall M > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall n > n_0. a_n > M$$

משפט (יחידות הגבול): אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L, \lim_{n\to\infty} a_n = L'$ אז $L = L'$.

סדרות קושי: זהו תנאי שקול להתכנסות, שלא צריך לדעת בשבילו את L:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall m, n \geq n_0. \, |a_m - a_n| < \varepsilon$$

3.2 חשבון גבולות

יהיו $(a_n),(b_n)$ סדרות כך ש־$a_n \to a, b_n \to b$. אזי:

- $a_n + b_n \to a + b$
- $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ אם $b_n \neq 0$ לכל n ו־$b \neq 0$
  - אם $b_n \neq 0$ לכל n ו־$b = 0$ אז $\frac{1}{b_n} \to \infty$
- $|a_n| \to |a|$
- $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$ אם $a_n \geq 0$ לכל n

3.3 טענות על גבולות

טענה: יהיו $(a_n) \to a, (b_n) \to b$ סדרות מתכנסות כך ש־$a_n \leq b_n$. אז: $a \leq b$.

כלל הסנדוויץ': יהיו x_n, y_n, z_n סדרות כך ש־$x_n \leq z_n \leq y_n$ (כמעט) לכל n. אם $x_n \to x, y_n \to x$, אז $z_n \to x$.

הרחבה: אם $x_n \geq y_n$ ו־$y_n \to \infty$ אז $x_n \to \infty$.

טענה: תהי (a_n) כך ש־$a_n \to L \neq 0$ ויהי $0 < r < |L|$. אז קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$, $|a_n| > r$.

כלל השורש: אם קיים $0 < \alpha < 1$ כך שלכל n, $0 \leq a_n^{1/n} \leq \alpha$, אז $a_n \to 0$.

3.4 מבחן ה[(שורש)(מנה)] (הגבולי)?

מבחן השורש: $a_n \geq 0$ וקיים $0 \leq \alpha < 1$ כך ש־$(a_n)^{1/n} \leq \alpha$ לכל n. אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

מבחן השורש הגבולי: $a_n > 0$ ו־$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = L$. אזי,

- אם $L < 1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- אם $L > 1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

משפט המנה הגבולי: $a_n > 0$ ו־$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. אזי,

- אם $L < 1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- אם $L > 1$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

3.5 סדרות מונוטוניות

טענה: תהי (a_n) מונוטונית עולה וחסומה מלעיל. אזי: $a_n \to \sup a_n$.

טענה: תהי (a_n) מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל. אזי: $a_n \to \infty$.

3.6 תתי סדרות

תהי (a_n) סדרה ו־(n_k) סדרה עולה ממש של טבעיים. אז $b_k = a_{n_k}$ תת סדרה של (a_n) ונסמן ב־$(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$.

משפט הירושה: תהי (a_n) סדרה ו־(a_{n_k}) תת־סדרה.

- אם $a_n \to L$ אז $a_{n_k} \to L$
- אם a_n מונוטונית עולה אז a_{n_k} מונוטונית עולה
- אם a_n חסומה אז a_{n_k} חסומה

משפט בולצנו־ויירשטראס: לכל סדרה חסומה יש תת־סדרה מתכנסת ומונוטונית.
אם הסדרה לא חסומה יש תת־סדרה מונוטונית מתבדרת ל־$\pm\infty$.

3.6.1 גבולות חלקיים

הגדרה: L יקרא גבול חלקי אם קיימת $a_{n_k} \to L$. נסמן ב־$\hat{\mathcal{P}}(a_n)$ את קבוצת הגבולות החלקיים, ונסמן ב־$\mathcal{P}(a_n)$ את קבוצת הגבולות החלקיים בלי $\pm\infty$.

בנוסף, נגדיר: $\liminf a_n = \underline{\lim} a_n = \inf \hat{\mathcal{P}}(a_n)$, $\limsup a_n = \overline{\lim} a_n = \sup \hat{\mathcal{P}}(a_n)$

טענה: (a_n) מתכנסת במובן הרחב $\iff$ יש גבול חלקי יחיד

טענה: (a_n) אינה חסומה מלעיל/מלרע $\iff$ $\infty/-\infty$ גבול חלקי

טענה: בסדרה חסומה $\inf a_n \le \liminf a_n \le \limsup a_n \le \sup a_n$