# **סיכומי הרצאות** - אלגברה לינארית 1

מיכאל פרבר ברודסקי

## תוכן עניינים

# חלק I
# מונואידים, חבורות, חוגים ושדות

## 1 הגדרות

### 1.1 תכונות של פעולות

תהא $*$ פעולה בינארית על $A$ (כלומר ה־domain הוא $A \times A$).

1. $*$ אסוצייטיבית: $\forall a, b, c \in A. (a * b) * c = a * (b * c)$.
2. $*$ חילופית: $\forall a, b. a * b = b * a$.
3. קבוצה $A$ סגורה לפעולה $*$: $* : A \times A \to A$.

### 1.2 מונואיד

מונואיד הוא זוג $\langle G, * \rangle$ כאשר $G$ קבוצה כלשהי ו־$*$ פעולה בינארית על $G$, כך ש:

1. $G$ סגורה לפעולה $*$.
2. $*$ פעולה אסוצייטיבית.
3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר $\exists e \in G. \forall g \in G. e * g = g * e = g$. האיבר הזה יחיד ומסומן $e_G$.

### 1.3 חבורה

**מקרה פרטי של מונואיד** שמקיימת גם:

4. קיים איבר הופכי, כלומר $\forall g \in G. \exists h \in G. g * h = h * g = e$ כאשר $e$ איבר יחידה. האיבר ההופכי של $g$ מסומן $g^{-1}$.

### 1.4 חוג

שלשה $\langle R, +, * \rangle$ נקראת חוג אם:

1. $\langle R, + \rangle$ חבורה חילופית, כלומר $\forall a, b \in R. a + b = b + a$.
2. $*$ היא פעולה בינארית על $R$ ו־$R$ סגורה לפעולה $*$.
3. חוק הפילוג:

$$\forall a, b, c \in R. a * (b + c) = a * b + a * c$$
$$(b + c) * a = b * a + c * a$$

**חוג חילופי ־** אם $*$ פעולה חילופית (כלומר $a * b = b * a$).

**חוג עם יחידה ־** אם $\langle R, * \rangle$ מונואיד.

**סימונים:** $0_R$ ניטרלי לחיבור, $1_R$ ניטרלי לכפל אם קיים.

**מחלק $0$ ־** איבר $0_R \neq a \in R$ נקרא "מחלק $0$" אם יש $b \neq 0_R$ כך ש־$a * b = 0_R$. בממשיים אין מחלק $0$.

חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי $0$ נקרא **תחום שלמות**. הוא מקיים את חוק הצמצום (לכל $a, b, c \in R$, אם $a * b = c * b$ אז $a = c$)

### 1.5 שדה

**מקרה פרטי של חוג** $\langle F, +, *\rangle$ שמקיים גם:

1. $\langle F \setminus \{0_F\}, *\rangle$ חבורה חילופית.

כל שדה הוא תחום שלמות, אבל ההפך אינו נכון. תחומי שלמות <u>סופיים</u> הם כן שדות.
הרבה פעמים בהגדרת שדה מוסיפים את הדרישה $0_F \neq 1_F$.

## חלק II
# מרוכבים

נסמן $i = \sqrt{-1}$. ההגדרה הפורמלית של מרוכבים היא: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, כאשר המספר הראשון הוא החלק הממשי (שמסומן $Re\left(c\right)$) והמספר השני הוא החלק הדמיוני (שמסומן $Im\left(c\right)$).
**עובדות:** עבור $z \in \mathbb{C}$,

1. **הארגומנט של** $z$: נסמן $\arg\left(z\right)$ להיות הזווית שהמספר יוצר עם ציר הממשיים (לרוב נסמן כ־$\theta$), ניתן לחשב אותו בעזרת $\arg(z) = \arctan(\frac{b}{a})$.
2. **הגודל של** $z$**:** $||z|| = \sqrt{Re\left(z\right)^2 + Im\left(z\right)^2}$. כלומר המרחק של $z$ מראשית הצירים.
3. **זהות אוילר:** $e^{i\theta} = \cos\left(\theta\right) + i\sin\left(\theta\right)$, לכן $z = ||z||\, e^{i\cdot arg(z)}$
4. **חיבור:** מחברים את החלק הממשי והדמיוני בנפרד.
5. **כפל:** $(a+ib)\cdot(c+id) = (ac-bd) + i\left(bc+da\right)$. משתמשים בזה ש־$i^2 = -1$.
6. כל שורש של פולינום מרוכב הוא מרוכב.
7. נגדיר $\overline{z}$ להיות $\overline{z} = a - ib$. כלומר להפוך את החלק הדמיוני.
8. $\langle \mathbb{C}, +, \cdot\rangle$ שדה סגור אלגברית (כלומר כל שורש של כל פולינום מרוכב הוא מרוכב).
9. **איבר הופכי:** $w = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$ (אם מכפילים בהופכי מקבלים 1).