

סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

1	דברים חשובים מלינארית 1	2
1.1	מטריצות דומות	2
2	לכסון	2
2.1	וקטורים עצמיים	2
3	פולינום אופייני	2
4	אינווריאנטיות	3
5	מרחב מנה	3
6	חוגים	4
6.1	הגדרות מלינארית 1	4
6.1.1	חבורה	4
6.1.2	חוג	4
6.1.3	שדה	4
6.2	הגדרות חדשות מלינארית 2	5
6.2.1	חוגי הפולינומים, המטריצות והעתקות	5
6.2.2	הומומורפיזמים	5
6.2.3	חילוק בחוגים	5
6.2.4	חברים	5
6.3	אידאלים	6
6.3.1	אידאל מאפס	6
6.4	תחום שלמות	7
6.5	תחום ראשי	7
7	קבוצת הפולינומים	7
8	מכפלה פנימית	8
8.1	הגדרות בסיסיות	8
8.2	תכונות	8
8.3	מטריצת גראם	9

1 דברים חשובים מלינארית 1

1.1 מטריצות דומות

יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, נאמר כי A ו- B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $A = P^{-1} \cdot B \cdot P$.
משפט: נתון $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ריבועיות, הבאים שקולים:

1. A, B דומות.

2. קיימת $T: V \rightarrow V$ ובסיסים C, C' של V כך ש- $[T]_C = A, [T]_{C'} = B$.

3. לכל $T: V \rightarrow V$, אם קיים בסיס C של V כך ש- $[T]_C = A$, אז קיים בסיס C' של V כך ש- $[T]_{C'} = B$.

ואם A, B דומות אז:

1. $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(B), \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$.

2. $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ כאשר $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n (A)_{i,i}$.

3. $\det(A) = \det(B)$.

2 לכסון

נגדיר מטריצה אלכסונית להיות מטריצה ריבועית $A \in M_n(\mathbb{F})$ שבה עבור $i \neq j, A_{i,j} = 0$. נסמן אותן בתור $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

מטריצה לכסינה היא מטריצה שדומה למטריצה אלכסונית, והעתקה לכסינה היא העתקה לינארית כך שקיים בסיס B כך ש- $[T]_B^B$ אלכסונית.

אם T העתקה לכסינה (כלומר מטריצה מייצגת כלשהי לכסינה) אז כל מטריצה מייצגת שלה היא לכסינה.

2.1 וקטורים עצמיים

נגדיר וקטור עצמי של A לערך עצמי λ להיות \bar{v} כך ש- $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$. באופן הפוך, ערך עצמי של A הוא λ כך שקיים וקטור עצמי $\bar{v} \neq \bar{0}$ של A לערך עצמי λ .

הערכים העצמיים הם האיברים שנמצאים על האלכסון במטריצה האלכסונית שדומה ל- A , עד כדי סידורם על האלכסון.

המרחב של הוקטורים העצמיים הוא $V_\lambda = \{\bar{v} \in V \mid A\bar{v} = \lambda\bar{v}\}$, שזה שווה בעצם ל- $\text{Sols}(A - \lambda I)$. זה תמ"ו של V .

הסכום של ה- V_λ השונים הוא סכום ישר.

משפט 1.2 A לכסינה \iff קיים בסיס $B \subseteq \mathbb{F}^n$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A .

3 פולינום אופייני

נסמן ב- $P_A(\lambda) = |\lambda I - A|$ את הפולינום האופייני של A . מתקיים:

• זה פולינום מתוקן, כלומר המקדם המוביל הוא 1.

• λ ערך עצמי של $A \iff \lambda$ שורש של $P_A(\lambda)$.

• אם A, B דומות אז $P_A = P_B$.

• עבור מטריצת בלוקים אלכסונית $A = \text{Diag}(A_1, \dots, A_n)$, $P_A = P_{A_1} \cdot \dots \cdot P_{A_n}$.

משפט 1.3 המשפט המרכזי: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$.

נגדיר את הריבוי האלגברי של α , ρ_α (רו), להיות כמות הפעמים ש- $(\lambda - \alpha)$ מופיע בפולינום $P_A(\lambda)$. כלומר אם הפולינום הוא $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^{\rho_1} (\lambda - 3)^{\rho_3}$ אז $\rho_1 = 1, \rho_3 = 2$.

בנוסף נגדיר את הריבוי הגיאומטרי של α , μ_α , להיות $\dim(V_\lambda)$.
לכסינה מעל \mathbb{F} אמ"ם:

1. $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל \mathbb{F} .

2. לכל ערך עצמי λ של A , $\rho_\lambda = \mu_\lambda$.

משפט 2.3 לכל ערך עצמי λ , $\mu_\lambda \leq \rho_\lambda$.

משפט 3.3 עבור $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ הערכים העצמיים, $\rho_{\lambda_1} + \dots + \rho_{\lambda_k} \leq n$ ואם $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים אז גם $\rho_{\lambda_1} + \dots + \rho_{\lambda_k} = n$.

4 אינווריאנטיות

תהא $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית, תת מרחב $U \subseteq V$ נקרא T -אינווריאנטי (T -שמור) אם $T[U] \subseteq U$ או באופן שקול אם T מצומצם ל- U ט"ל.

דוגמאות למרחבים T -אינווריאנטים הן $\ker(T)$, $\text{Im}(T)$ ו- V_λ לכל λ .

בנוסף נגדיר תת מרחב $U \subseteq V$ אי פריק להיות תת מרחב T -אינווריאנטי כך שלא קיימים $W_1, W_2 \neq \{0\}$ T -אינווריאנטים שמקיימים $U = W_1 \oplus W_2$.

מטריצה מייצגת: אם $U \subseteq V$ T -אינווריאנטי, יהי B בסיס של U . יהי C השלמה לבסיס של V . אז $[T]_{B \cup C} = \begin{pmatrix} [T|_U]_B & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$. זה כי המקדמים שלמטה לא מופיעים ב- U ולכן גם לא בתמונה של U (כי היא מוכלת ב- U).

ואם $V = U_1 \oplus U_2$ כאשר U_1, U_2 T -אינווריאנטיים אז $[T]_{B_1 \cup B_2} = \begin{pmatrix} [T|_{U_1}]_{B_1} & 0 \\ 0 & [T|_{U_2}]_{B_2} \end{pmatrix}$.

אזי הפולינום $P_{T|_U}$ מחלק את P_T , ואם $V = U_1 \oplus U_2$ עבור U_1, U_2 T -אינווריאנטיים אז $P_T = P_{T|_{U_1}} \cdot P_{T|_{U_2}}$.
בנוסף באופן מוכלל אם $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ כאשר כל V_i הוא T -אינווריאנטי אז יהי הבסיס $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$, מתקיים $P_T = \prod_{i=1}^n P_{T|_{V_i}}$ ו- $[T]_B = \text{Diag}([T|_{V_1}]_{B_1}, \dots, [T|_{V_n}]_{B_n})$.

5 מרחב מנה

נגדיר את יחס השקילות הבא: $v \sim u \iff v - u \in W$ עבור $u, v \in V$ ו- W כלשהו.

את קבוצת המנה, V/W , שהיא הקבוצה של $[v] = \{u \in V \mid u \sim v\}$ לכל v , ניתן בעצם להגדיר לפי פעולת חיבור $[v] + [u] = [v + u]$ וכפל בסקלר $[\lambda \cdot v] = \lambda \cdot [v]$.

זה יוצא מרחב וקטורי, שמקיים גם $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$.

6 חוגים

6.1 הגדרות מלינארית 1



6.1.1 חבורה

$\langle G, * \rangle$ נקראת חבורה אם:

1. G סגורה לפעולה $*$.
2. $*$ פעולה אסוצייטיבית.
3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר $\exists e \in G. \forall g \in G. e * g = g * e = g$. האיבר הזה יחיד ומסומן e_G .
4. קיים איבר הופכי, כלומר $\forall g \in G. \exists h \in G. g * h = h * g = e$ כאשר e איבר יחידה. האיבר ההופכי של g מסומן g^{-1} .

6.1.2 חוג

$\langle R, *, + \rangle$ נקראת חוג אם:

1. $\langle R, + \rangle$ חבורה חילופית.
2. $*$ פעולה אסוצייטיבית על R .
3. מתקיים חוג הפילוג:

$$\forall a, b, c \in R. a * (b + c) = a * b + a * c$$

$$(b + c) * a = b * a + c * a$$

בנוסף יש חוג חילופי, (הכפל חילופי), חוג עם יחידה (קיים איבר ניטרלי לכפל), ותחום שלמות הוא חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0.

6.1.3 שדה

חוג חילופי עם יחידה כך ש- $\langle R \setminus \{0\}, * \rangle$ חבורה חילופית. שדה הוא תחום שלמות, ותחום שלמות סופי הוא שדה.

6.2 הגדרות חדשות מלינארית 2

6.2.1 חוגי הפולינומים, המטריצות והעתקות

נגדיר את חוג הפולינומים מעל חוג R להיות $R[x] \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. נגדיר בנוסף $\deg(0) = \infty, \deg(p) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \neq 0\}$.

• מתקיימת נוסחת המעלות: $\deg(p+q) \leq \max(\deg(p), \deg(q)), \deg(p \cdot q) \leq \deg(p) + \deg(q)$.

אם R תחום שלמות אז $\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$.

• אם R תחום שלמות אז $R[x]$ תחום ראשי.

• חילוק בחוג הפולינומים: יהי R חוג חילופי, ו- $f, g \in R[x]$ פולינומים כך שהמקדם המוביל של g הפיך ב- R . אז קיימים ויחידים $q, r \in R[x]$ כך ש- $f = q \cdot g + r$.

• ב- $R[x]$ ההפיכים היחידים הם הפולינומים הקבועים של ההפיכים מ- R .

נגדיר את חוג המטריצות הריבועיות להיות $M_n(R)$ כאשר R חוג, לפי פעולות כפל וחיבור של מטריצות. זה חוג לא חילופי.

נגדיר את חוג ההעתקות ממרחב לעצמו להיות $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$ יחד עם הרכבה ועם חיבור פונקציות. זה חוג לא חילופי עם יחידה Id_V .

השילובים הנפוצים הם $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)[x], M_n(R)[x], M_n(R[x])$.

משפט: כל פולינום בשדה ניתן לכתוב בתור מכפלה של אי-פריקים. תהא $\{q_i \mid i \in I\}$ קבוצת כל הפולינומים הא"פ המתוקנים מעל $\mathbb{F}[x]$ באשר \mathbb{F} שדה. כל פולינום $0 \neq p \in \mathbb{F}[x]$ ניתן לרשום באופן יחיד $p = c \cdot \prod_{i \in I} q_i^{n_i}$ באשר $c \in \mathbb{F}^\times = \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

6.2.2 הומומורפיזמים

הומומורפיזם של חוגים זו פונקציה $\varphi : R_1 \rightarrow R_2$ כך ש- $\varphi(1_{R_1}) = 1_{R_2}$ ו- $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ ו- $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ (ולכן גם $\varphi(0_{R_1}) = 0_{R_2}$). יש למשל הומומורפיזם בין $M_n(R)[x]$ לבין $M_n(R[x])$.

6.2.3 חילוק בחוגים

יהי R חוג. יהיו $a, b \in R$, נאמר כי $a \mid b$ אם $\exists c \in R. b = a \cdot c$. בנוסף נקרא ל- $a \in R$ הפיך ב- R אם קיים $b \in R$ כך ש- $a \cdot b = 1 = b \cdot a$. בנוסף ההופכי יסומן $b = a^{-1}$ והוא יחיד.

ונסמן את קבוצת האיברים ההפיכים ב- R בסימון R^\times . לדוגמה ב- \mathbb{Z} האיברים ההפיכים היחידים הם ± 1 . **טענה:** בתחום שלמות, אם $a = bu$ ו- $b = av$ אז u, v הפיכים, ובפרט $u \cdot v = 1$ (כלומר $u = v^{-1}$).

6.2.4 חברים

נאמר ש- a, b חברים אם קיים $u \in R^\times$ כך ש- $a = ub$. זה יחס שקילות.

6.3 אידאלים

יהי R חוג חילופי עם יחידה, $I \subseteq R$ נקרא אידאל אם:

$$1. I \neq \emptyset$$

$$2. I \text{ סגור לחיבור.}$$

$$3. I \text{ סגור לכפל באיבר מ-} R.$$

או באופן שקול I תת מרחב וקטורי של מרחב ה- n יות R^n . דוגמה לאידאל היא \mathbb{Z}_{even} .
האידאל שנוצר ע"י $X \subseteq R$ הוא $\text{sp}(X)$ והוא תמיד אידאל כי זה מרחב וקטורי ב- R^n .
אידאל ראשי הוא אידאל של איבר אחד - $\text{sp}(a) = \{ab \mid b \in R\}$.

מתקיים:

$$\bullet a \mid b \iff \text{sp}(b) \subseteq \text{sp}(a)$$

$$\bullet a, b \text{ חברים. } \iff \text{sp}(a) = \text{sp}(b)$$

$$\bullet a \text{ הפיך } \iff \text{sp}(a) = R \text{ בפרט } \text{sp}(1) = R$$

$$\bullet I \subseteq R$$

$$\bullet \text{ אידאל } \iff \text{קיים הומומורפיזם } \varphi : R \rightarrow S \text{ (חוג } S) \text{ כך ש-} \ker \varphi = I$$

6.3.1 אידאל מאפס

האידאל המאפס של מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ הוא האידאל הבא: $Z(A) = \{p \in \mathbb{F}[x] \mid p(A) = 0\}$.
זה אידאל כי $\ker(\varphi_A) = Z(A)$ כאשר $\varphi_A : \mathbb{F}[x] \rightarrow M_n(A)$ העתקת ההצבה. לכל A ,

$$\bullet Z(A) \neq \{0\}, \text{ ולמעשה יש פולינום } 0 \neq p \in Z(A) \text{ כך ש-} \deg(p) \leq n^2.$$

$$\bullet \text{ הפולינום האופייני תמיד ב-} Z(A) \text{ - משפט קיילי המילטון.}$$

$$\text{בנוסף אם } A, B \text{ דומות אז } Z(A) = Z(B).$$

נסמן את הפולינום המינימלי של A ב- $\mathbb{F}[x]$ $m_A \in \mathbb{F}[x]$, להיות הפולינום המתוקן היחיד כך ש- $\text{sp}(m_A) = Z(A)$. מתקיים:

$$\bullet m_A(A) = 0$$

$$\bullet m_A \mid P_A \text{ הפולינום האופייני. בפרט הפולינום האופייני מאפס.}$$

$$\bullet \text{ לכל } q \in \mathbb{F}[x] \text{ א"פ, } q \mid m_T \iff q \mid P_T$$

$$\text{לכן אם } P_T = \prod_{i \in I} q_i^{r_i} \text{ (אי פריקים) אז } m_T = \prod_{i \in I} q_i^{r_i} \text{ כאשר } 1 \leq m_i \implies 1 \leq r_i \leq m_i$$

בנוסף במטריצת בלוקים אלכסונית $\text{Diag}(A_1, \dots, A_n)$ מתקיים:

$$\bullet P_A = P_{A_1} \cdots P_{A_n}$$

$$\bullet m_A = \text{lcm}(m_{A_1}, \dots, m_{A_n})$$

6.4 תחום שלמות

תחום שלמות הוא חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0. בחוג חילופי עם יחידה (לא דרוש שאין מחלקי 0) מתקיים:

$$\begin{aligned} \bullet \quad a \in R, a \neq 0 \text{ יקרא ראשוני} &\iff (a \mid b \cdot c \implies (a \mid c \vee a \mid b)) \\ \bullet \quad a \in R \text{ יקרא אי־פריק} &\iff (a = b \cdot c \implies b \in R^\times \vee c \in R^\times) \end{aligned}$$

בתחום שלמות מתקיים:

• אם $a \in R$ ראשוני אז a אי־פריק.

6.5 תחום ראשי

תחום שלמות R נקרא תחום ראשי אם כל אידאל $I \subseteq R$ נוצר על ידי איבר, כלומר קיים לו $a \in R$ כך ש- $I = \text{sp}(a)$.

נגדיר לתחום ראשי R ואיברים $r_1, \dots, r_k \in R$

$$\gcd(r_1, \dots, r_k) = \{d \in R \mid \text{sp}(d) = \text{sp}(r_1, \dots, r_k)\}$$

בנוסף מתקיים:

- עבור d כלשהו ב- $\gcd(r_1, \dots, r_k)$, $\gcd(r_1, \dots, r_k) = \{d \cdot u \mid u \in R^\times\}$.
- $d \in \gcd(r_1, \dots, r_k) \iff (\forall 1 \leq i \leq k. d \mid r_i) \wedge (q \mid r_1, \dots, r_k \implies q \mid d)$.
- $a, b \in R$ יקראו זרים אם $\gcd(a, b) = 1$ או באופן שקול 1 צירוף לינארי של a, b .
- $a \in R$ אי־פריק \iff ראשוני.

נגדיר בנוסף $\text{lcm}(r_1, \dots, r_k) = \{d \in R \mid \text{sp}(d) = \bigcap_{i=1}^r \text{sp}(r_i)\}$, lowest common multiplier, אידאל מינימלי.

7 קבוצת הפולינומים

אם $T: V \rightarrow V$ מעל שדה \mathbb{F} ו- $p \in \mathbb{F}[x]$ הגדרנו $p(T) \in \text{Hom}(V, V)$.

אם $A \in M_n(\mathbb{F})$ ו- $p \in \mathbb{F}[x]$ אז $p(A) \in M_n(\mathbb{F})$ זו מטריצה.

הקשר בין $[T]_B$ ל- $[p(T)]_B$ הוא ש- $[p(T)]_B = p([T]_B)$.

מתקיים בנוסף:

- אם λ ערך עצמי של A אז $p(\lambda)$ ערך עצמי של $p(A)$.
- אם A, B דומות אז $p(A)$ ו- $p(B)$ דומות, ליתר דיוק, $p(QAQ^{-1}) = Qp(A)Q^{-1}$.
- לכן אם A, B דומות אז לכל $p \in \mathbb{F}[x]$, $p(A) = 0 \iff p(B) = 0$. כלומר אם A, B דומות אז $Z(A) = Z(B)$.

8 מכפלה פנימית

8.1 הגדרות בסיסיות

יהי V מ"ו מעל \mathbb{C} (מעל \mathbb{R}). מכפלה הרמיטית אוניטרית (מכפלה פנימית) מעל V היא פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$ כך ש-

1. לינאריות לפי הרכיב השמאלי:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \forall \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{u} \in V. \langle \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2, \underline{u} \rangle = \alpha \cdot \langle \underline{v}_1, \underline{u} \rangle + \beta \cdot \langle \underline{v}_2, \underline{u} \rangle$$

2. הרמיטיות:

$$\forall \underline{v}, \underline{u} \in V. \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = \overline{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}$$

3. חיוביות:

$$\forall \underline{v} \in V. \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \in \mathbb{R} \wedge \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \geq 0$$

4. אפיון 0:

$$\forall \underline{v} \in V. \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$$

8.2 תכונות

מטריצה A נקראת צמודה לעצמה (הרמיטית) אם $A = A^*$. בנוסף $A^* = \overline{A^t}$.
מטריצה A שקמימת $\forall z \neq 0. z^* A z > 0$ נקראת חיובית לחלוטין.

משפט:

• $A \in M_n(\mathbb{C})$ הרמיטית ($A = A^* = \overline{A^t}$) וחיובית לחלוטין $\iff \langle *, * \rangle$ מכפלה הרמיטית.

• $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית ($A = A^t$) וחיובית לחלוטין $\iff \langle *, * \rangle$ מכפלה פנימית.

$$\bullet \forall \underline{v} \in V. \langle \underline{v}, \underline{0} \rangle = 0$$

$$\bullet \forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V. \forall \underline{u} \in V. \langle \underline{u}, \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v}_1 \rangle + \langle \underline{u}, \underline{v}_2 \rangle$$

$$\bullet \forall \alpha \in \mathbb{C}. \langle \underline{v}, \alpha \underline{u} \rangle = \bar{\alpha} \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle$$

$$\bullet \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \underline{v}_i, \sum_{j=1}^m b_j \underline{u}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \bar{b}_j \langle \underline{v}_i, \underline{u}_j \rangle$$

גיאומטריה באופן אלגברי: יהי V מרחב מכפלה פנימית, או מרחב אוניטרי/הרמיטי. נגדיר:

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$$

$$\cos(\arg(\underline{v}, \underline{u})) = \frac{\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle}{\|\underline{v}\| \cdot \|\underline{u}\|}$$

$$\text{dist}(\underline{v}, \underline{u}) = \|\underline{v} - \underline{u}\|$$

$$\underline{v} \perp \underline{u} \iff \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = 0$$

אי שוויון קושי שוורץ: יהי V ממ"פ/מרחב הרמיטי. אז לכל $\underline{v}, \underline{u}$, $|\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle| \leq \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{u}\|$. בנוסף שוויון מתקיים $\underline{v}, \underline{u} \iff \underline{v} = \lambda \underline{u}$ כן ש- $\underline{v} = \lambda \underline{u}$. כלומר קיים λ כך ש-

8.3 מטריצת גראם

יהיו $v_1, \dots, v_n \in V$ ממ"פ (מרחב וקטורי + מכפלה פנימית). אז נגדיר את מטריצת גראם:

$$(G(v_1, \dots, v_n))_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$$

משפט:

- $G = G^*$ (הרמיטיות).
- אם $x = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ ו- $y = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ אז $\langle x, y \rangle = a G b^* = [y]_B G_B [x]_B^*$.
- לכל $\langle *, * \rangle$ מ"פ מעל \mathbb{C}^n , $\langle *, * \rangle_G = \langle *, * \rangle$ באשר $G = G(e_1, \dots, e_n)$ הבסיס הסטנדרטי.