# **סיכומי הרצאות** - אלגברה לינארית 1

מיכאל פרבר ברודסקי

## תוכן עניינים

# חלק I
# מונואידים, חבורות, חוגים ושדות

## 1 הגדרות

### 1.1 תכונות של פעולות

תהא $*$ פעולה בינארית על $A$ (כלומר ה־domain הוא $A \times A$).

1. $*$ אסוצייטיבית: $\forall a,b,c \in A. (a*b)*c = a*(b*c)$.
2. $*$ חילופית: $\forall a,b. a*b = b*a$.
3. קבוצה $A$ סגורה לפעולה $*$: $* : A \times A \to A$.

### 1.2 מונואיד

מונואיד הוא זוג $\langle G,* \rangle$ כאשר $G$ קבוצה כלשהי ו־$*$ פעולה בינארית על $G$, כך ש:

1. $G$ סגורה לפעולה $*$.
2. $*$ פעולה אסוצייטיבית.
3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר $\exists e \in G. \forall g \in G. e*g = g*e = g$. האיבר הזה יחיד ומסומן $e_G$.

### 1.3 חבורה

**מקרה פרטי של מונואיד** שמקיימת גם:

4. קיים איבר הופכי, כלומר $\forall g \in G. \exists h \in G. g*h = h*g = e$ כאשר $e$ איבר יחידה. האיבר ההופכי של $g$ מסומן $g^{-1}$.

### 1.4 חוג

שלשה $\langle R,+,* \rangle$ נקראת חוג אם:

1. $\langle R,+ \rangle$ חבורה חילופית, כלומר $\forall a,b \in R. a+b = b+a$.
2. $*$ היא פעולה בינארית על $R$ ו־$R$ סגורה לפעולה $*$.
3. חוק הפילוג:

$$\forall a,b,c \in R. a*(b+c) = a*b + a*c$$
$$(b+c)*a = b*a + c*a$$

**חוג חילופי** ־ אם $*$ פעולה חילופית (כלומר $a*b = b*a$).

**חוג עם יחידה** ־ אם $\langle R,* \rangle$ מונואיד.

**סימונים:** $0_R$ ניטרלי לחיבור, $1_R$ ניטרלי לכפל אם קיים.

**מחלק** $0$ ־ איבר $0_R \neq a \in R$ נקרא "מחלק 0" אם יש $b \neq 0_R$ כך ש־$a*b = 0_R$. בממשיים אין מחלק $0$.

חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי $0$ נקרא **תחום שלמות**. הוא מקיים את חוק הצמצום (לכל $a,b,c \in R$, אם $a*b = c*b$ אז $a = c$)

### 1.5 שדה

**מקרה פרטי של חוג** $\langle F,+,*\rangle$ שמקיים גם:

1. $\langle F\setminus\{0_F\},*\rangle$ חבורה חילופית.

כל שדה הוא תחום שלמות, אבל ההפך אינו נכון. תחומי שלמות <u>סופיים</u> הם כן שדות.
הרבה פעמים בהגדרת שדה מוסיפים את הדרישה $0_F\neq 1_F$.

# חלק II
# מרוכבים

## 2 הגדרות בסיסיות

נסמן $i=\sqrt{-1}$. ההגדרה הפורמלית של מרוכבים היא: $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$, כאשר המספר הראשון הוא החלק הממשי (שמסומן $Re\left(c\right)$) והמספר השני הוא החלק הדמיוני (שמסומן $Im\left(c\right)$).
**עובדות:** עבור $z\in\mathbb{C}$,

1. **הגודל של $z$:** $||z||=\sqrt{Re\left(z\right)^2+Im\left(z\right)^2}$. כלומר המרחק של $z$ מראשית הצירים.
2. **זהות אוילר:** $e^{i\theta}=\cos\left(\theta\right)+i\sin\left(\theta\right)$, לכן $z=||z||\,e^{i\cdot\arg(z)}$.
3. **חיבור:** מחברים את החלק הממשי והדמיוני בנפרד.
4. **כפל:** $(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i\left(bc+da\right)$. משתמשים בזה ש־$i^2=-1$.
5. כל שורש של פולינום מרוכב הוא מרוכב.
6. נגדיר $\overline{z}$ להיות $\overline{z}=a-ib$. כלומר להפוך את החלק הדמיוני.
   (א) $\overline{\overline{z}}=z$
   (ב) $z\cdot\overline{z}=||z||^2$
   (ג) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
   (ד) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
   (ה) $Re\left(z\right)=\frac{z+\overline{z}}{2}, Im\left(z\right)=\frac{z-\overline{z}}{2i},$
7. $\langle\mathbb{C},+,\cdot\rangle$ שדה סגור אלגברית (כלומר כל שורש של כל פולינום מרוכב הוא מרוכב).
8. **איבר הופכי:** $w=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$ (אם מכפילים בהופכי מקבלים 1).

## 3 הצגה פולארית

נגדיר מרוכב בתור זוג $\langle r,\theta\rangle$ כאשר $r$ המרחק מראשית הצירים ו־$\theta$ הזווית שהוא יוצר, שנקראת הארגומנט.

$$z=r\cos\theta+ir\sin\theta=r\cdot e^{i\theta}$$

**עובדות:**

1. **הארגומנט של $z$:** נסמן $\arg\left(z\right)$ להיות הזווית שהמספר יוצר עם ציר הממשיים (לרוב נסמן כ־$\theta$). ניתן לחשב אותו בעזרת $\arg\left(z\right)=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ ברוב המקרים.

2. $\overline{z} = r \cdot e^{-i\theta}, z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
3. $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$
4. להכפיל מספרים מרוכבים על הגרף נראה כמו להכפיל את האורכים זה בזה ולחבר את הזוויות.

**פתרון משוואה** $z^n = a + ib$. נמצא הצגה פולארית $z^n = re^{i\theta}$. נשתמש בעובדה ש־$e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi k)}$ עבור $k \in \mathbb{Z}$. אזי:

$$z = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\frac{k}{n}\right)}$$

עבור $k \in \mathbb{Z}$. ולכל $k \in \{0,\ldots,n-1\}$ נקבל פתרונות שונים.

# חלק III
# מטריצות

## 4 הגדרות

וקטור הוא $n$יה של איברים ב־$\mathbb{F}$. מטריצה היא $m$יה של וקטורים. מטריצה מסדר $m \times n$ היא מטריצה עם $m$ שורות ו־$n$ עמודות (קודם $y$ ואז $x$).
נגדיר מערכת משוואות כמטריצה באופן הבא:

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n & = b_1 \\ \vdots & = \vdots \\ \alpha_{m,1}x_1 + \cdots + \alpha_{m,n}x_n & = b_m \end{cases} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \ldots & \alpha_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

### 4.1 פעולות בסיסיות

**חיבור וקטורים:**

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 + \beta_0 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

**כפל מטריצה בוקטור:** כמו להציב את הוקטור בעמודות המטריצה.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 a_{1,1} + \cdots + \beta_n a_{1,n} \\ \cdots + \cdots + \ldots \\ \beta_1 a_{m,1} + \cdots + \beta_n a_{m,n} \end{pmatrix}$$

בנוסף, הפתרונות של $\overline{x} \in \mathrm{Sols}\,(A \mid b)$ שקולים ל־$A\overline{x} = \overline{b}$.
את פתרונות המטריצה נסמן ב־Sols. מטריצות נקראות <u>שקולות</u> אם הפתרונות שלהן זהים.

### 4.2 פעולות אלמנטריות על מטריצה

הפעולות האלה הן:

1. להחליף סדר בין משוואות. $R_i \leftrightarrow R_j$.

2. להכפיל משוואה בקבוע. $R_i \to \alpha \cdot R_i$.
3. לחבר משוואות. $R_i \to R_i + R_j$.

כולן משמרות את הפתרונות של המטריצה.
מטריצות ששקולות באמצעות סדרת פעולות אלמנטריות נקראות שקולות שורה.

## 4.3 שונות

**מטריצה ריבועית:** מטריצה שכמות העמודות בה שווה לכמות השורות.

**משפט 1.4** הבאים שקולים עבור מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ (מטריצה ריבועית):

1. $A$ שקולת שורות ל־$I_n$.
2. לכל $\bar{b} \in \mathbb{F}^n$ למערכת $A\overline{x} = \bar{b}$ יש פתרון יחיד.
3. לכל $b \in \mathbb{F}^n$ למערכת $A\overline{x} = \bar{b}$ קיים פתרון.
4. למערכת $A\overline{x} = \overline{0}$ יש פתרון יחיד.
5. קיים $b$ כך שלמערכת $A\overline{x} = \bar{b}$ יש פתרון יחיד.

**מטריצת היחידה:** מסומנת $I_n$. היא מטריצה ריבועית שבה $a_{i,j} = 1$ אם $i = j$, ואם $i \neq j$ אז $a_{i,j} = 0$. לדוגמה:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**וקטור $e_i$:**

$$(e_i)_i = \begin{cases} 0 & x \neq i \\ 1 & x = i \end{cases}$$

זה בעצם 0 בכל מקום חוץ מהמקום ה־$i$.

# 5 דירוג ודירוג קנוני

## 5.1 הגדרות

**בצורה מדורגת:**

1. משוואות $0$ (מהצורה $b = 0$) נמצאות למטה.
2. המשתנה הפותח בכל משוואה נמצא מימין ממש למשתנים הפותחים במשוואות מעליו.

משתנה חופשי הוא משתנה שלא מקדם פותח של אף שורה.
**בנוסף, בצורה מדורגת קנונית:**

3. המקדם של כל משתנה פותח הוא $1$
4. לכל משתנה פותח של משוואה, המקדם של המשתנה בשאר המשוואות הוא $0$.

לכל מטריצה קיימת צורה מדורגת קנונית יחידה ששקולה לה.

## 5.2 מציאת פתרונות

### 5.2.1 מציאת מספר הפתרונות לפי צורה מדורגת (לא בהכרח קנונית)

עבור $(A \mid b)$ מטריצה מדורגת:

1. אם ב־$(A \mid b)$ יש שורת סתירה ($0 = b$ כאשר $b \neq 0$) ־ אין פתרון.
2. אחרת, יש $|\mathbb{F}|^k$ פתרונות כאשר $k$ מספר המשתנים החופשיים.

### 5.2.2 מציאת הפתרונות עצמם לפי צורה מדורגת קנונית

$(A' \mid b')$ מטריצה מדורגת קנונית מסדר $m \times n$ ששקולה ל־$(A \mid b)$ אז:

1. אם ב־$(A' \mid b')$ יש שורת סתירה אז $\text{Sols}\left((A' \mid b')\right) = \emptyset$.
2. אחרת: נעשה החלפה על המשתנים החופשיים. כל משתנה שאינו חופשי יוגדר לפי משוואה מסוימת. דוגמה:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

המקדמים החופשיים הם $1, 4, 6$. הפתרון הוא:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 2 - 4x_4 \\ x_4 \\ 3 - 3x_6 \\ x_6 \end{pmatrix} \mid x_1, x_4, x_6 \in \mathbb{R} \right\}$$

# 6 תת מרחב

**טענה (בוחן תת מרחב):** $U \subseteq F^n$ היא תת מרחב אמ"מ:

1. $U$ סגורה לחיבור.
2. $U$ סגירה לכפל בסקלר.
3. $\bar{0} \in U$. ניתן להחליף את התנאי ב־$u \neq \emptyset$.

נובע מכאן גם שחיתוך של תתי מרחבים הוא תת מרחב.

# 7 צירופים לינאריים

## 7.1 בת"ל

**הגדרה 1.7** סדרת $m$יות $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k}) \in (\mathbb{F}^m)^k$ תקרא <u>בלתי תלויה לינארית</u> (בת"ל) אם לכל $\bar{b} \in \mathbb{F}^m$ יש לכל היותר פתרון אחד למשוואה $\sum_{i=1}^k x_i \overline{v_i} = \bar{b}$.

**הגדרה 2.7** יהיו $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k}) \in (\mathbb{F}^n)^k$, סדרת מקדמים $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^k$ נקראת <u>תלות לינארית של $(v_1, \ldots, v_k)$</u> אם $\alpha_1 \overline{v_1} + \cdots + \alpha_k \overline{v_k} = 0$.

נגדיר את מרחב התלויות של $(v_1,\ldots,v_k)$ להיות:

$$LD\left(\left(v_1,\ldots,v_k\right)\right)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n\mid\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k=0\right\}$$

ו־$LD\left(\left(v_1,\ldots,v_k\right)\right)=\mathrm{Sols}\left(\left(v_1,\ldots,v_k\mid 0\right)\right)$.

**מסקנה 3.7** $v_1,\ldots,v_k$ בת"ל $\iff$ $LD\left(v_1,\ldots,v_k\right)=\{0\}$.

## 7.2 קבוצת הצירופים הלינאריים

**הגדרה 4.7** עבור סדרת $n$יות, $(v_1,\ldots,v_k)\in\left(\mathbb{F}^n\right)^k$,

$$\mathrm{sp}\left(v_1,\ldots,v_k\right)=\left\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_iv_i\mid\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{F}\right\}$$

זה המרחב הנפרש על ידי $v_1,\ldots,v_k$. ההגדרה לקבוצות $K\subseteq\mathbb{F}^n$ היא:

$$\mathrm{sp}\left(k\right)=\left\{b\in\mathbb{F}^n\mid\exists k\in\mathbb{N}.\exists\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{F}.\exists t_1,\ldots,t_k\in K.b=\sum_{i=1}^{k}\alpha_it_i\right\}$$