סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

1 דברים חשובים מלינארית 1

1.1 מטריצות דומות

יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{F})$, נאמר כי A ו־B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש־$A=P^{-1}\cdot B\cdot P$.

משפט: נתון $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ ריבועיות, הבאים שקולים:

1. A,B דומות.
2. קיימת $T:V\to V$ ובסיסים C,C' של V כך ש־$[T]_C=A,[T]_{C'}=B$.
3. לכל $T:V\to V$, אם קיים בסיס C של V כך ש־$[T]_C=A$, אז קיים בסיס C' של V כך ש־$[T]_{C'}=B$.

ואם A,B דומות אז:

1. $\mathrm{Rank}(A)=\mathrm{Rank}(B),\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}(B)$.
2. $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$ כאשר $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}(A)_{i,i}$.
3. $\det(A)=\det(B)$.

2 לכסון

נגדיר <u>מטריצה אלכסונית</u> להיות מטריצה ריבועית $A\in M_n(\mathbb{F})$ שבה עבור $i\neq j$, $A_{i,j}=0$. נסמן אותן בתור $\mathrm{Diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.

<u>מטריצה לכסינה</u> היא מטריצה שדומה למטריצה אלכסונית, ו<u>העתקה לכסינה</u> היא העתקה לינארית כך שקיים בסיס B כך ש־$[T]_B^B$ אלכסונית.

אם T העתקה לכסינה (כלומר מטריצה מייצגת כלשהי לכסינה) אז כל מטריצה מייצגת שלה היא לכסינה.

2.1 וקטורים עצמיים

נגדיר <u>וקטור עצמי של A לערך עצמי λ</u> להיות $\overline{v}$ כך ש־$A\overline{v}=\lambda\overline{v}$. באופן הפוך, <u>ערך עצמי של A</u> הוא λ כך שקיים וקטור עצמי <u>$\overline{v}\neq\overline{0}$</u> של A לערך עצמי λ.

הערכים העצמיים הם האיברים שנמצאים על האלכסון במטריצה האלכסונית שדומה ל־A, עד כדי סידורם על האלכסון.

המרחב של הוקטורים העצמיים הוא $V_\lambda=\{\overline{v}\in V\mid A\overline{v}=\lambda\overline{v}\}$, שזה שווה בעצם ל־$\mathrm{Sols}(A-\lambda I)$. זה תמ"ו של V.

הסכום של ה־V_λ השונים הוא סכום ישר.

2.2 פולינום אופייני

נסמן ב־$P_A(\lambda)=|\lambda I-A|$ את <u>הפולינום האופייני של A</u>. מתקיים:

- זה פולינום מתוקן, כלומר המקדם המוביל הוא 1.
- λ ערך עצמי של A $\iff$ λ שורש של $P_A(\lambda)$.
- אם A,B דומות אז $P_A=P_B$.

משפט 1.2 המשפט המרכזי: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$.

נגדיר את הריבוי האלגברי של α, ρ_α (רו), להיות כמות הפעמים ש־$(\lambda-\alpha)$ מופיע בפולינום $P_A\left(\lambda\right)$. כלומר אם הפולינום הוא $P_A\left(\lambda\right)=\left(\lambda-1\right)\left(\lambda-3\right)^2$ אז $\rho_1=1,\rho_3=2$.

בנוסף נגדיר את הריבוי הגיאומטרי של α, μ_λ, להיות $\dim\left(V_\lambda\right)$.

A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אמ"ם:

1. $P_A\left(\lambda\right)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$.
2. לכל ערך עצמי λ של A, $\rho_\lambda=\mu_\lambda$.

משפט 2.2 לכל ערך עצמי λ, $\mu_\lambda\le\rho_\lambda$.

משפט 3.2 עבור $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ הערכים העצמיים, $\rho_{\lambda_1}+\ldots+\rho_{\lambda_k}\le n$, ואם $P_A\left(\lambda\right)$ מתפרק לגורמים לינאריים אז גם $\rho_{\lambda_1}+\ldots+\rho_{\lambda_k}=n$.

משפט 4.2 A לכסינה $\iff$ קיים בסיס $B\subseteq\mathbb{F}^n$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A.

3 אינווריאנטיות

תהא $T:V\to V$ העתקה לינארית, תת מרחב $U\subseteq V$ נקרא T־אינווריאנטי (T־שמור) אם $T\left[U\right]\subseteq U$, או באופן שקול אם T מצומצם ל־U ט"ל.

דוגמאות למרחבים T־אינווריאנטים הן $\ker\left(T\right),Im\left(T\right)$ ו־V_λ לכל λ.

בנוסף נגדיר תת מרחב $U\subseteq V$ אי פריק להיות תת מרחב T־אינווריאנטי כך שלא קיימים $W_1,W_2\neq\left\{\bar{0}\right\}$ T־אינווריאנטים שמקיימים $U=W_1\oplus W_2$.

מטריצה מייצגת: אם $U\subseteq V$ T־אינווריאנטי, יהי B בסיס של U. יהי C השלמה לבסיס של V. אז $[T]_{B\frown C}=\left(\begin{array}{c|c}[T\lceil_U]_B & * \\ \hline 0 & *\end{array}\right)$. זה כי המקדמים שלמטה לא מופיעים ב־U ולכן גם לא בתמונה של U (כי היא מוכלת ב־U).

ואם $V=U_1\oplus U_2$ כאשר U_1,U_2 T־אינווריאנטיים אז $[T]_{B_1\frown B_2}=\left(\begin{array}{c|c}[T\lceil_U]_{B_1} & 0 \\ \hline 0 & [T\lceil_U]_{B_2}\end{array}\right)$.

אזי הפולינום $P_{T\lceil_U}$ מחלק את P_T, ואם $V=U_1\oplus U_2$ עבור U_1,U_2 T־אינווריאנטיים אז $P_T=P_{T\lceil_{U_1}}\cdot P_{T\lceil_{U_2}}$.

בנוסף באופן מוכלל אם $V=\bigoplus_{i=1}^{n}V_i$ כאשר כל V_i הוא T־אינווריאנטי אז יהי הבסיס $B=\bigvee_{i=1}^{n}B_i$, מתקיים $[T]_B=\mathrm{Diag}\left([T\lceil_{V_1}]_{B_1},\ldots,[T\lceil_{V_n}]_{B_n}\right)$, ו־$P_T=\prod_{i=1}^{n}P_{T\lceil_{U_i}}$.