# **סיכומי הרצאות** - אלגברה לינארית 1

מיכאל פרבר ברודסקי

## תוכן עניינים

# חלק I
# מונואידים, חבורות, חוגים ושדות

## 1 הגדרות

### 1.1 תכונות של פעולות

תהא $*$ פעולה בינארית על $A$ (כלומר ה־domain הוא $A \times A$).

1. $*$ אסוצייטיבית: $\forall a,b,c \in A. (a*b)*c = a*(b*c)$.
2. $*$ חילופית: $\forall a,b.a*b = b*a$.
3. קבוצה $A$ סגורה לפעולה $*$: $* : A \times A \to A$.

### 1.2 מונואיד

מונואיד הוא זוג $\langle G, * \rangle$ כאשר $G$ קבוצה כלשהי ו־$*$ פעולה בינארית על $G$, כך ש:

1. $G$ סגורה לפעולה $*$.
2. $*$ פעולה אסוצייטיבית.
3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר $\exists e \in G. \forall g \in G. e*g = g*e = g$. האיבר הזה יחיד ומסומן $e_G$.

### 1.3 חבורה

**מקרה פרטי של מונואיד** שמקיימת גם:

4. קיים איבר הופכי, כלומר $\forall g \in G. \exists h \in G. g*h = h*g = e$ כאשר $e$ איבר יחידה. האיבר ההופכי של $g$ מסומן $g^{-1}$.

### 1.4 חוג

שלשה $\langle R, +, * \rangle$ נקראת חוג אם:

1. $\langle R, + \rangle$ חבורה חילופית, כלומר $\forall a,b \in R. a+b = b+a$.
2. $*$ היא פעולה בינארית על $R$ ו־$R$ סגורה לפעולה $*$.
3. חוק הפילוג:

$$\forall a,b,c \in R. a*(b+c) = a*b + a*c$$
$$(b+c)*a = b*a + c*a$$

**חוג חילופי ־** אם $*$ פעולה חילופית (כלומר $a*b = b*a$).

**חוג עם יחידה ־** אם $\langle R, * \rangle$ מונואיד.

**סימונים:** $0_R$ ניטרלי לחיבור, $1_R$ ניטרלי לכפל אם קיים.

**מחלק** $0$ **־** איבר $0_R \neq a \in R$ נקרא "מחלק $0$" אם יש $b \neq 0_R$ כך ש־$a*b = 0_R$. בממשיים אין מחלק $0$.

חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי $0$ נקרא **תחום שלמות**. הוא מקיים את חוק הצמצום (לכל $a,b,c \in R$, אם $a*b = c*b$ אז $a = c$)

### 1.5 שדה

$\langle F,+,*\rangle$ **מקרה פרטי של חוג** שמקיים גם:

1. $\langle F\setminus\{0_F\},*\rangle$ חבורה חילופית.

כל שדה הוא תחום שלמות, אבל ההפך אינו נכון. תחומי שלמות <u>סופיים</u> הם כן שדות.
הרבה פעמים בהגדרת שדה מוסיפים את הדרישה $0_F\neq 1_F$.

# חלק II
# מרוכבים

## 2 הגדרות בסיסיות

נסמן $i=\sqrt{-1}$. ההגדרה הפורמלית של מרוכבים היא: $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$, כאשר המספר הראשון הוא החלק הממשי (שמסומן $Re\left(c\right)$) והמספר השני הוא החלק הדמיוני (שמסומן $Im\left(c\right)$).
**עובדות:** עבור $z\in\mathbb{C}$,

1. **הגודל של $z$:** $||z||=\sqrt{Re\left(z\right)^2+Im\left(z\right)^2}$. כלומר המרחק של $z$ מראשית הצירים.
2. **זהות אוילר:** $e^{i\theta}=\cos\left(\theta\right)+i\sin\left(\theta\right)$, לכן $z=||z||\,e^{i\cdot\arg(z)}$.
3. **חיבור:** מחברים את החלק הממשי והדמיוני בנפרד.
4. **כפל:** $(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i\left(bc+da\right)$. משתמשים בזה ש־$i^2=-1$.
5. כל שורש של פולינום מרוכב הוא מרוכב.
6. נגדיר $\overline{z}$ להיות $\overline{z}=a-ib$. כלומר להפוך את החלק הדמיוני.
   (א) $\overline{\overline{z}}=z$
   (ב) $z\cdot\overline{z}=||z||^2$
   (ג) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
   (ד) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
   (ה) $Re\left(z\right)=\frac{z+\overline{z}}{2},Im\left(z\right)=\frac{z-\overline{z}}{2i},$
7. $\langle\mathbb{C},+,\cdot\rangle$ שדה סגור אלגברית (כלומר כל שורש של כל פולינום מרוכב הוא מרוכב).
8. **איבר הופכי:** $w=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$ (אם מכפילים בהופכי מקבלים 1).

## 3 הצגה פולארית

נגדיר מרוכב בתור זוג $\langle r,\theta\rangle$ כאשר $r$ המרחק מראשית הצירים ו־$\theta$ הזווית שהוא יוצר, שנקראת הארגומנט.

$$z=r\cos\theta+ir\sin\theta=r\cdot e^{i\theta}$$

**עובדות:**

1. **הארגומנט של $z$:** נסמן $\arg\left(z\right)$ להיות הזווית שהמספר יוצר עם ציר הממשיים (לרוב נסמן כ־$\theta$). ניתן לחשב אותו בעזרת $\arg\left(z\right)=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ ברוב המקרים.

2. $\overline{z}=r\cdot e^{-i\theta}, z^{-1}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$
3. $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$
4. להכפיל מספרים מרוכבים על הגרף נראה כמו להכפיל את האורכים זה בזה ולחבר את הזוויות.

**פתרון משוואה** $z^n=a+ib$. נמצא הצגה פולארית $z^n=re^{i\theta}$. נשתמש בעובדה ש־$e^{i\theta}=e^{i(\theta+2\pi k)}$ עבור $k\in\mathbb{Z}$. אזי:

$$z=\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\frac{k}{n}\right)}$$

עבור $k\in\mathbb{Z}$. ולכל $k\in\{0,\ldots,n-1\}$ נקבל פתרונות שונים.

# חלק III
# מטריצות

## 4 הגדרות

וקטור הוא $n$יה של איברים ב־$\mathbb{F}$. מטריצה היא $m$יה של וקטורים. מטריצה מסדר $m\times n$ היא מטריצה עם $m$ שורות ו־$n$ עמודות (קודם $y$ ואז $x$).
נגדיר מערכת משוואות כמטריצה באופן הבא:

$$\begin{cases}\alpha_{1,1}x_1+\cdots+\alpha_{1,n}x_n & =b_1\\ \vdots & =\vdots\\ \alpha_{m,1}x_1+\cdots+\alpha_{m,n}x_n & =b_m\end{cases}\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}\alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,n} & b_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \alpha_{m,1} & \ldots & \alpha_{m,n} & b_m\end{array}\right)$$

### 4.1 פעולות בסיסיות

**חיבור וקטורים:**

$$\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_0\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_0+\beta_0\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}$$

**כפל מטריצה בוקטור:** כמו להציב את הוקטור בעמודות המטריצה.

$$\begin{pmatrix}a_{1,1} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1a_{1,1}+\cdots+\beta_na_{1,n}\\ \cdots+\cdots+\ldots\\ \beta_1a_{m,1}+\cdots+\beta_na_{m,n}\end{pmatrix}$$

בנוסף, הפתרונות של $\overline{x}\in\mathrm{Sols}\left(A\mid b\right)$ שקולים ל־$A\overline{x}=\overline{b}$.
את פתרונות המטריצה נסמן ב־Sols. מטריצות נקראות <u>שקולות</u> אם הפתרונות שלהן זהים.
**משפטים לגבי כפל מטריצה בוקטור:**

- $A\left(\overline{x}+\overline{y}\right)=A\overline{x}+A\overline{y}$
- $A\left(\alpha\cdot\overline{x}\right)=\alpha\cdot\left(A\cdot\overline{x}\right)$.
- עבור $I_n$ מרטיצת היחידה, $I_n\cdot\overline{b}=\overline{b}$. עבור $0$ מטריצת ה־0, $0\cdot b=0$.

## 4.2 פעולות אלמנטריות על מטריצה

הפעולות האלה הן:

1. להחליף סדר בין משוואות. $R_i \leftrightarrow R_j$.
2. להכפיל משוואה בקבוע. $R_i \to \alpha \cdot R_i$.
3. לחבר משוואות. $R_i \to R_i + R_j$.

כולן משמרות את הפתרונות של המטריצה.
מטריצות ששקולות באמצעות סדרת פעולות אלמנטריות נקראות שקולות שורה.

## 4.3 שונות

**מטריצה ריבועית:** מטריצה שכמות העמודות בה שווה לכמות השורות.

**משפט 1.4** הבאים שקולים עבור מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ (מטריצה ריבועית):

1. $A$ שקולת שורות ל־$I_n$.
2. לכל $\bar{b} \in \mathbb{F}^n$ למערכת $A\overline{x} = \bar{b}$ יש פתרון יחיד.
3. לכל $b \in \mathbb{F}^n$ למערכת $A\overline{x} = \bar{b}$ קיים פתרון.
4. למערכת $A\overline{x} = \bar{0}$ יש פתרון יחיד.
5. קיים $b$ כך שלמערכת $A\overline{x} = \bar{b}$ יש פתרון יחיד.

**מטריצת היחידה:** מסומנת $I_n$. היא מטריצה ריבועית שבה $a_{i,j} = 1$ אם $i = j$, ואם $i \neq j$ אז $a_{i,j} = 0$. לדוגמה:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**וקטור** $e_i$:

$$(e_i)_i = \begin{cases} 0 & x \neq i \\ 1 & x = i \end{cases}$$

זה בעצם 0 בכל מקום חוץ מהמקום ה־$i$.

# 5 דירוג ודירוג קנוני

## 5.1 הגדרות

**בצורה מדורגת:**

1. משוואות $0$ (מהצורה $0 = b$) נמצאות למטה.
2. המשתנה הפותח בכל משוואה נמצא מימין ממש למשתנים הפותחים במשוואות מעליו.

משתנה חופשי הוא משתנה שלא מקדם פותח של אף שורה.
**בנוסף, בצורה מדורגת קנונית:**

3. המקדם של כל משתנה פותח הוא $1$
4. לכל משתנה פותח של משוואה, המקדם של המשתנה בשאר המשוואות הוא $0$.

לכל מטריצה קיימת צורה מדורגת קנונית יחידה ששקולה לה.

## 5.2 מציאת פתרונות

### 5.2.1 מציאת מספר הפתרונות לפי צורה מדורגת (לא בהכרח קנונית)

עבור $(A \mid b)$ מטריצה מדורגת:

1. אם ב־$(A \mid b)$ יש שורת סתירה ($0 = b$ כאשר $b \neq 0$) ־ אין פתרון.
2. אחרת, יש $|\mathbb{F}|^k$ פתרונות כאשר $k$ מספר המשתנים החופשיים.

### 5.2.2 מציאת הפתרונות עצמם לפי צורה מדורגת קנונית

$(A' \mid b')$ מטריצה מדורגת קנונית מסדר $m \times n$ ששקולה ל־$(A \mid b)$ אז:

1. אם ב־$(A' \mid b')$ יש שורת סתירה אז $\text{Sols}\left((A' \mid b')\right) = \emptyset$.
2. אחרת: נעשה החלפה על המשתנים החופשיים. כל משתנה שאינו חופשי יוגדר לפי משוואה מסוימת. דוגמה:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

המקדמים החופשיים הם $1, 4, 6$. הפתרון הוא:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 2 - 4x_4 \\ x_4 \\ 3 - 3x_6 \\ x_6 \end{pmatrix} \mid x_1, x_4, x_6 \in \mathbb{R} \right\}$$

# 6 תת מרחב

**טענה (בוחן תת מרחב):** $U \subseteq F^n$ היא תת מרחב אמ"מ:

1. $U$ סגורה לחיבור.
2. $U$ סגירה לכפל בסקלר.
3. $\bar{0} \in U$. ניתן להחליף את התנאי ב־$u \neq \emptyset$.

נובע מכאן גם שחיתוך של תתי מרחבים הוא תת מרחב.

# 7 צירופים ליניאריים

## 7.1 בת"ל

**הגדרה 1.7** יהיו $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k}) \in (\mathbb{F}^n)^k$, סדרת מקדמים $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^k$ נקראת <u>תלות ליניארית של $(v_1, \ldots, v_k)$</u> אם $\alpha_1 \overline{v_1} + \cdots + \alpha_k \overline{v_k} = 0$.

נגדיר את מרחב התלויות של $(v_1,\ldots,v_k)$ להיות:

$$LD\left((v_1,\ldots,v_k)\right)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n \mid \alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k=0\right\}$$

ו־$LD\left((v_1,\ldots,v_k)\right)=\text{Sols}\left((v_1,\ldots,v_k\mid 0)\right)$.

**מסקנה 2.7** $v_1,\ldots,v_k$ בת"ל $\iff$ $LD\left(v_1,\ldots,v_k\right)=\{0\}$.

**הגדרה 3.7** סדרת $m$יות $\left(\overline{v_1},\ldots,\overline{v_k}\right)\in\left(\mathbb{F}^m\right)^k$ תקרא <u>בלתי תלויה לינארית</u> (בת"ל) אם לכל $\bar{b}\in\mathbb{F}^m$ יש לכל היותר פתרון אחד למשוואה $\sum_{i=1}^k x_i\overline{v_i}=\bar{b}$.

1. תהי $S\subseteq\mathbb{F}^n$. אם $0\in S$ אז $S$ תלויה לינארית.
2. תהי $S\subseteq\mathbb{F}^n$ כך ש־$S=(x,y)$ אז $S$ תלויה לינארית $\iff$ הוקטורים פרופורציונים.
3. סדרת וקטורים $(v_1,\ldots,v_m)\subseteq\mathbb{F}^n$ בלתי תלויה לינארית $\iff$ כל איבר אינו צירוף לינארי של קודמיו.

## 7.2 קבוצת הצירופים הלינאריים

**הגדרה 4.7** עבור סדרת $n$יות, $(v_1,\ldots,v_k)\in\left(\mathbb{F}^n\right)^k$,

$$\text{sp}\left(v_1,\ldots,v_k\right)=\left\{\sum_{i=1}^k\alpha_iv_i\mid\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{F}\right\}$$

זה המרחב הנפרש על ידי $v_1,\ldots,v_k$. ההגדרה לקבוצות $K\subseteq\mathbb{F}^n$ היא:

$$\text{sp}\left(k\right)=\left\{b\in\mathbb{F}^n\mid\exists k\in\mathbb{N}.\exists\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{F}.\exists t_1,\ldots,t_k\in K.b=\sum_{i=1}^k\alpha_it_i\right\}$$

<u>קבוצה $A$ פורשת</u> את $B$ אם $\text{span}\left(A\right)=b$.

## 7.3 בסיס

**הגדרה 5.7** יהי $\mathbb{F}$ שדה, $B$ תת קבוצה של $\mathbb{F}^n$. אז $B$ נקראת <u>בסיס</u> של $\mathbb{F}^n$ אם שניים מהתנאים הבאים מתקיימים:

1. $B$ בת"ל.
2. $B$ פורשת את $\mathbb{F}^n$.
3. $m=n$.

כל שניים מוכיחים גם את השלישי.
התנאים הבאים שקולים לכך ש־$B$ בסיס:

1. $B$ בת"ל וכל קבוצה המכילה ממש את $B$ הינה תלויה לינארית. ($B$ בת"ל מקסימלית).
2. $B$ פורשת וכל קבוצה שמוכלת ממש ב־$B$ אינה פורשת. (פורשת מינימלית).
3. לכל $v\in\mathbb{F}^n$ יש הצגה יחידה כצירוף של וקטורים מ־$B$.

# 8 כפל מטריצות, שחלוף והפיכות

**הגדרה 1.8** יהא $R$ חוג ויהיו $A \in M_{n\times m}(R)$,$B \in M_{m\times p}(R)$ מטריצות. נגדיר מטריצה $(A \cdot B) \in M_{p\times n}(R)$ בצורה הבאה:

$(A \cdot B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$.

**משפט 2.8** $A \cdot B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ A \cdot C_1(B) & \cdots & A \cdot C_n(B) \\ | & | & | \end{pmatrix}$.

**משפט 3.8** $A \cdot B = \begin{pmatrix} - & R_1(A) \cdot B & - \\ & \vdots & \\ - & R_n(A) \cdot B & - \end{pmatrix}$

## 8.1 טענות לגבי כפל מטריצות:

1. **אסוציאטיביות הכפל:** אם $A \in M_{m\times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k\times t}(\mathbb{F}), C \in M_{t\times n}(\mathbb{F})$, אז $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
2. **חוק הפילוג:** אם $A \in M_{m\times k}(\mathbb{F}), B_1, B_2 \in M_{k\times n}(\mathbb{F})$, אז $A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2$. ובנוסף אם $A_1, A_2 \in M_{m\times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k\times n}(\mathbb{F})$, אז $(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B$.
3. **הוצאת סקלר:** אם $A \in M_{m\times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k\times n}(\mathbb{F}), \alpha \in \mathbb{R}$ , אז $A \cdot (\alpha \cdot B) = \alpha \cdot (A \cdot B)$.
4. לכל מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$. נוסף לכך $A \cdot I_n = A$, $I_m \cdot A = A$.

**הערה 4.8** יש מחלקי אפס, לדוגמה $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

## 8.2 שחלוף\Transpose:

**הגדרה 5.8** בהינתן מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ נגדיר $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ (לפעמים מסומן גם $A^t$) את השחלוף של $A$:

$(A^T)_{i,j} = (A)_{j,i}$.

באופן אינטואטיבי, הפעולה מחליפה בין השורות לעמודות. לדוגמה: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 2 & 8 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 16 & 32 \end{pmatrix}^T$.

**משפט 6.8** חוקי Transpose:

- חיבור (נניח כי החיבור מוגדר, כלומר $A, B$ שייכים לאותו הסדר): $(A + B)^T = A^T + B^T$.
- כפל בסקלר: עבור $\alpha \in \mathbb{F}$, $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.
- אם $A \in M_{m\times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k\times n}(F)$, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

## 8.3 הפיכות מטריצה

**הגדרה 7.8** מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ תיקרא:

1. הפיכה משמאל אם קיימת מטריצה $B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ כך ש$B \cdot A = I_n$.
2. הפיכה מימין אם קיימת מטריצה $B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ כך ש$A \cdot B = I_m$.

3. הפיכה אם קיימת מטריצה $B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ כך ש$A \cdot B = I_m$ וגם $B \cdot A = I_n$.
בפרט המטריצה $B$ היא יחידה ותסומן בתור $A^{-1}$, היא גם מקיימת $A = \left(A^{-1}\right)^{-1}$.

**הערה 8.8** המטריצה 0 אינה הפיכה, מימין או משמאל.

**טענות:**

1. אם במטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ יש שורת אפסים אז $A$ לא הפיכה מימין.
2. אם $A$ הפיכה $A^T$ הפיכה.
3. $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.
4. אם $A \in M_{m\times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k\times n}(\mathbb{F})$ הפיכות, אז $A \cdot B$ הפיכה ו־$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

**משפט 9.8** תהא $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

1. אם $A$ הפיכה מימין אז למערכת $A \cdot x = b$ יש פתרון לכל $b$ (כלומר סדרת העמודות של $A$ פורשת ו־$m \leq n$)
2. אם $A$ הפיכה משמאל אז למערכת $A \cdot x = 0$ יש פתרון יחיד (כלומר סדרת העמודות של $A$ בת"ל, ולכן $m \geq n$)

**מסקנה 10.8** אם $A$ הפיכה למערכת $A \cdot x = b$ יש פתרון **יחיד** לכל $b$ (כלומר סדרת העמודות של $A$ בסיס, ולכן $n = m$)

**משפט 11.8** אם לכל $b$ למערכת $A \cdot x = b$ יש פתרון (כלומר עמודות $A$ פורשות) , $A$ הפיכה מימין.