סיכומי **הרצאות** - אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

חלק I
אלגוריתמים

1 לכסון

העתקה לכסינה היא העתקה לינארית כך שקיים בסיס B כך ש־$[T]_B^B$ אלכסונית. אם T העתקה לכסינה, אז כל מטריצה מייצגת שלה גם לכסינה.

1.1 וקטורים עצמיים וערכים עצמיים

נגיד וקטור עצמי של A לערך עצמי λ להיות $\underline{v}$ כך ש־$A\underline{v} = \lambda\underline{v}$. באופן הפוך ערך עצמי של A הוא λ כך שקיים וקטור עצמי $\underline{v} \neq \underline{0}$ לערך עצמי λ.

מרחב הוקטורים העצמיים לכל λ הוא $V_\lambda = \{\underline{v} \in V \mid A\underline{v} = \lambda\underline{v}\} = \mathrm{Sols}\,(A - \lambda I)$. הסכום של V_λ שונים הוא סכום ישר.

משפט: A לכסינה $\iff$ קיים בסיס $B \subseteq \mathbb{F}^n$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A.

משפט: במטריצה המלוכסנת, **הערכים העצמיים הם האיברים שנמצאים על האלכסון** עד כדי הסדר שלהם.

1.2 פולינום אופייני ומינימלי

נגדיר את $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ להיות הפולינום האופייני של A. מתקיים:

- $p_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, כך ש־$a_0 = (-1)^n \det A$ ו־$a_{n-1} = -\mathrm{tr}\,(A)$ (ו־$a_n = 1$).
- λ ערך עצמי של A $\iff$ λ שורש של $p_A(\lambda)$ (כי זה אומר שהמטריצה אינה הפיכה עבור ה־λ הזה כלומר יש פתרונות).
- אם A, B דומות אז $p_A = p_B$.
- $p_A(\lambda) = p_{A^t}(\lambda)$, ו־$p_{AB}(\lambda) = p_{BA}(\lambda)$.

נגדיר את הריבוי האלגברי של α, ρ_α (רו), להיות כמות הפעמים ש־$(\lambda - \alpha)$ מופיע בפולינום $P_A(\lambda)$. כלומר אם הפולינום הוא $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$ אז $\rho_1 = 1, \rho_3 = 2$.

בנוסף נגדיר את הריבוי הגיאומטרי של α, μ_λ, להיות $\dim(V_\lambda)$.

משפט: לכל ערך עצמי λ, $\mu_\lambda \leq \rho_\lambda$.

משפט: עבור $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ הערכים העצמיים, $\rho_{\lambda_1} + \cdots + \rho_{\lambda_k} \leq n$, ואם $p_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים אז גם $\rho_{\lambda_1} + \cdots + \rho_{\lambda_k} = n$.

המשפט המרכזי (תנאי ללכסינות): תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$. A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אמ"ם:

1. $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$.
2. לכל ערך עצמי λ של A, $\rho_\lambda = \mu_\lambda$.

נגדיר את הפולינום המינימלי של A, m_A, להיות הפולינום המתוקן היחידי כך ש־$\mathrm{sp}\,(m_A)$ האידאל המאפס של A. מתקיים:

- m_A מחלק את p_A.
- לכל $q \in \mathbb{F}[x]$ פולינום אי פריק, $q \mid m_A \iff q \mid p_A$.
  לכן אם $p_A = \prod_{i \in I} q_i^{m_i}$ (q_i אי פריקים) אז $m_A = \prod_{i \in I} q_i^{r_i}$ כאשר $1 \leq r_i \leq m_i$.

משפט: במטריצת בלוקים אלכסונית $A = \mathrm{Diag}\,(A_1, \ldots, A_n)$ מתקיים:

- $p_A = p_{A_1} \cdot \cdots \cdot p_{A_n}$.
- $m_A = \mathrm{lcm}\,(m_{A_1}, \ldots, m_{A_n})$.

2 ז'ירדון

נגדיר **בלוק ז'ורדן** להיות מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ ואפילו $\begin{pmatrix}\lambda\end{pmatrix}$, כלומר יש אלכסון של λ ומעליו אלכסון של 1ים.

צורת ז'ורדן היא מטריצת בלוקים אלכסונית כך שכל הבלוקים הם בלוקי ז'ורדן.

באופן פרקטי וחישובי:

1. חישוב הפולינום האופייני. נסמן את הערכים העצמיים ב־$\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ ואת הריבויים האלגבריים שלהם ב־$\rho_{\lambda_1},\ldots,\rho_{\lambda_k}$.
2. לכל λ_i:

(א) נחשב את $\ker\left(A-\lambda_i I\right),\ldots,\ker\left(A-\lambda_i I\right)^{\rho_{\lambda_i}}$ עד שהמימד של זה מפסיק להשתנות (לא כולל). נסמן את המקום שבו המימד מפסיק להשתנות ב־j. זה גם הריבוי בפולינום המינימלי.

(ב) מ־j עד ל־1:

i. נשלים את $\ker\left(A-\lambda_i I\right)^{j-1}$ **לבסיס של** $\ker\left(A-\lambda_i I\right)^{j}$.

ii. יהי v שהוסף בהשלמה. נוסיף לבסיס את $v,\left(A-\lambda_i I\right)^1 v,\ldots,\left(A-\lambda_i I\right)^j v$. נספור שצריך איבר אחד פחות מאלה (כלומר ניקח איבר אחד פחות מההשלמות של החזקות הקודמות).

3. אפשר להשתמש בבסיס שקיבלנו ישירות או לשים $P=\begin{pmatrix}B_1 & \ldots & B_n\end{pmatrix}$, ואז $J=P^{-1}AP$ (כי $P=[Id]_E^B$ ואכן $[A]_B^B=[Id]_B^E\cdot[A]_E^E\cdot[Id]_E^B$).

משפט:

- צורת זורדן יחידה עד כדי הסידור של בלוקי הז'ורדן.
- μ_λ הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי כלשהו הוא מספר הבלוקים שלו.
- ρ_λ הריבוי האלגברי באופייני הוא סכום הגדלים של הבלוקים.
- הריבוי האלגברי במינימלי הוא המקסימום של הגדלים של הבלוקים.

3 גראם־שמידט

3.1 הטלה

נגדיר את <u>ההטלה של וקטור v על U</u> להיות:

$$P_U\left(v\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle v,b_i\rangle}{\langle b_i,b_i\rangle}\cdot b_i$$

כאשר $b_1,\ldots,b_n$ בסיס אורתוגונלי, בהמשך נראה שקיים כזה לכל מרחב נוצר סופית.

תכונות:

- $\forall u\in U P_U\left(u\right)=u$, ולכן $P_U^2=P_U$
- P_U העתקה לינארית, כך ש־$\ker\left(P_U\right)=\left\{v\in V\mid v\perp U\right\}$. נסמן גם ב־$U^\perp$.
- $\left(v-P_U\left(v\right)\right)\perp U$ לכל v.

משפט הקירוב הטוב ביותר: נגדיר $\operatorname{dist}\left(v,U\right)=\operatorname{dist}\left(v,P_U\left(v\right)\right)$. אז מתקיים ש־$\operatorname{dist}\left(v,U\right)=\inf_{u\in U}\operatorname{dist}\left(v,u\right)=$ $\min_{u\in U}\operatorname{dist}\left(v,u\right)$, כלומר שהמרחק הזה הוא המרחק הכי קצר מ־v ל־U.

3.2 האלגוריתם עצמו

אלגוריתם גראם־שמידט הוא האלגוריתם למציאת סדרה אורתונורמלית $w_1, \ldots, w_x$ ל־$\mathrm{sp}\left(b_1, \ldots, b_n\right)$ כך ש־$\mathrm{sp}\left(b_1, \ldots, b_n\right) = \mathrm{sp}\left(w_1, \ldots, w_x\right)$.

נוריד מ־$b_1, \ldots, b_n$ את האפסים. נגדיר את $w_1 = \frac{1}{||b_1||} b_1$ להיות המנורמל. לכל $i \in 2, \ldots, n$, נגדיר $U = \mathrm{sp}\left(b_1, \ldots, b_{i-1}\right)$, ואז נחשב $w_i' = b_i - P_U\left(b_i\right)$. אם $w_i' = 0$, נתעלם ממנו, אחרת נוסיף לסדרה w את $\frac{1}{||w_i'||} w_i'$ המנורמל.

חלק II

מכפלות פנימיות ותבניות בילינאריות

4 מכפלה פנימית

4.1 הגדרות בסיסיות

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$. מכפלה אוניטרית (נקרא "מכפלה פנימית" מעל $\mathbb{R}$) מעל V היא פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}\left(\mathbb{R}\right)$ כך ש־:

1. לינאריות לפי הרכיב השמאלי: $\left\langle \alpha \underline{v_1} + \beta \underline{v_2}, u \right\rangle = \alpha \cdot \left\langle \underline{v_1}, \underline{u} \right\rangle + \beta \cdot \left\langle \underline{v_2}, \underline{u} \right\rangle$
2. הרמיטיות: $\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = \overline{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}$
3. חיוביות: $\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \in \mathbb{R} \wedge \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \geq 0$
4. אפיון 0: $\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$

4.2 תכונות

משפט לגבי הרכיב הימני:

- $\langle \underline{u}, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$ חיבוריות לפי הימני.
- $\langle v, \alpha u \rangle = \overline{\alpha} \langle v, u \rangle$ כמו הומוגניות ברכיב הימני, אבל עם הצמוד.
- $\langle \underline{v}, \underline{0} \rangle = 0$ מתאפס גם לפי הרכיב הימני.
- לכן יש לנו כמעט לינאריות לפי הרכיב הימני, אבל עם הסקלר הצמוד.
- ומכאן נובע: $\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{v_i}, \sum_{j=1}^{m} b_j \underline{u_j} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \overline{b_j} \left\langle \underline{v_i}, \underline{u_j} \right\rangle$

4.3 אורתוגונליות

4.3.1 הגדרות בסיסיות

$\left(v_1, \ldots, v_n\right)$ נקראת <u>אורתוגונלית</u> אמ"ם $\forall i \neq j. v_i \perp v_j$ כלומר $\langle v_i, v_j \rangle = 0$.

לדוגמה $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ סדרה אורתוגונלית עם המכפלה האוניטרית הסטנדרטית.

נגדיר וקטור יחידה להיות v כך ש־$||\underline{v}|| = 1$. אם $\underline{v} \neq 0$ אז $\frac{1}{||\underline{v}||} \cdot \underline{v}$ וקטור יחידה, שנקרא גם הוקטור <u>המנורמל</u>.
אז סדרה <u>אורתונורמלית</u> היא סדרה אורתוגונלית של וקטורי יחידה.

5 סוגים של העתקות לינאריות

5.1 העתקות אוניטריות

העתקה מעל $\mathbb{C}$ המקיימת $(Tu, Tv) = (u, v)$ נקראת העתקה אוניטרית. היא משמרת אורכים וזוויות, כלומר $||Tv|| = ||v||$.

משפט: כל דבר פה שקול לכך ש־T אוניטרית.

1. T מעתיקה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי.
2. $T^*T = I$. לכן אם T אוניטרית אז היא הפיכה כך ש־$T^* = T^{-1}$.
3. T נורמלית וכל הערכים העצמיים על מעגל היחידה.

5.2 העתקות אורתוגונליות

דומה אבל מעל $\mathbb{R}$.

משפט: T אורתוגונלית $\Longleftrightarrow$ T מעתיקה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי. בפרט אם T אוניטרית היא הפיכה.

משפט: יהי V מרחב וקטורי, מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, עם מכפלה פנימית. התנאים הבאים שקולים:

1. $T^* = T^{-1}$, כלומר $TT^* = T^*T = I$.
2. לכל u, v, $(Tu, Tv) = (u, v)$, כלומר אוניטרית/אורתוגונלית לפי השדה.
3. לכל v, $||Tv|| = ||v||$, כלומר T שומרת על אורכים.

5.3 העתקות נורמליות

העתקה נקראת נורמלית אם $TT^* = T^*T$.

משפט: מטריצה נורמלית ניתנת ללכסון אוניטרי, כלומר קיים בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של T ו־$T = P^*DP$ כאשר D אלכסונית.

משפט: המרחבים העצמיים ניצבים זה לזה.

טענה: $|T(v)| = |T^*(v)|$.

6 תבניות בילינאריות

הגדרה: תבנית בילינארית היא $f : (V \times W) \to \mathbb{F}$ שלינארית על פי הרכיב השמאלי ועל פי הרכיב הימני.

נסמן את קבוצת התבניות הבילינאריות ב־$\mathrm{Bil}(V, W)$, או $\mathrm{Bil}(V) := \mathrm{Bil}(V, V)$.

מטריצה מייצגת: נגדיר $\left([f]_{B,C}\right)_{i,j} = f(b_i, c_j)$. מתקיים $f(v, w) = [v]_B^t \cdot [f]_{B,C} \cdot [w]_C$ לכל v, w.

מעבר בסיסים: $[f]_{B',C'} = \left([Id]_B^{B'}\right)^t \cdot [f]_{B,C} \cdot [Id]_C^{C'}$

הגדרה: נגדיר את הדרגה $\mathrm{rk}(f)$ להיות $\mathrm{rk}\left([f]_{B,C}\right)$ עבור B, C בסיסים כלשהם.

הגדרה: f נקראת אי מנוונת אם $\mathrm{rk} f = \dim V = \dim W$. לכן גם $[f]_{B,C}$ הפיכה.

6.1 חפיפת מטריצות

שתי מטריצות A, B נקראות שקולות אם $A = P^tBQ$, וחופפות אם $A = P^tBP$........ יש המון משפטים.......

6.2 תבניות בילינאריות סימטריות

תבנית בילינארית תקרא סימטרית אם לכל v,w, $f\left(v,w\right)=f\left(w,v\right)$. המטריצה המייצגת היא אלכסונית.

משפט ההתמדה של סילבסטר: מעל $\mathbb{R}$. תהי f תבנית בילינארית סימטרית כך ש־$\mathrm{rk}f=r\leq n=\dim V$. אז קיים בסיס $B=\left\{ v_{1},\ldots,v_{n}\right\}$ כך ש־$\left[f\right]_{B,B}$ אלכסונית, ועל האלכסון יש רק $0,-1,1$. הכמויות שלהם אינן תלויות בבחירת הבסיס.

טענה: תבנית בילינארית חיובית לחלוטין וסימטרית היא בעצם מכפלה פנימית.

6.2.1 תבנית ריבועית

תהי $f\in\mathrm{Bil}\left(V\right)$ תבנית סימטרית. נגדיר $Q\left(v\right)=f\left(v,v\right)$ ונקרא לה תבנית ריבועית. כל תבנית ריבועית מיוצגת ביחידות על ידי תבנית בילינארית סימטרית. ניתן למצוא את f ע"י:

$$2f\left(v,w\right)=Q\left(v+w\right)-Q\left(v\right)-Q\left(w\right)$$

6.3 תבניות בילינאריות אנטי־סימטריות

תבנית בילינארית תקרא סימטרית אם לכל v,w, $f\left(v,w\right)=-f\left(w,v\right)$. המטריצה המייצגת היא:

$$\mathrm{Diag}\left(\overbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}^{\frac{1}{2}\mathrm{rk}(f)\text{ times}},0,\ldots,0\right)$$

בפרט $\mathrm{rk}f$ זוגי, ומספר האפסים הוא $n-\mathrm{rk}f$.