

# תוכן עניינים

## 1.1.1 טענות לגבי כפל מטריצות:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A \cdot C_1(B) & \cdots & A \cdot C_n(B) \end{pmatrix} \quad \text{משפט 2.1}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} - & R_1(A) \cdot B & - \\ & \vdots & \\ - & R_n(A) \cdot B & - \end{pmatrix} \quad \text{משפט 3.1}$$

1. אסוציאטיביות הכפל:  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

2. חוק הפילוג.

3. הוצאת סקלר:  $A \cdot (\alpha \cdot B) = \alpha \cdot (A \cdot B)$

4. כפל ב-0 וב-1:  $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$ ,  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ,  $I_m \cdot A = A$ ,  $A \cdot I_n = A$

## 1.2 פעולות אלמנטריות

1. להחליף סדר בין משוואות.  $R_i \leftrightarrow R_j$

2. להכפיל משוואה בקבוע.  $R_i \rightarrow \alpha \cdot R_i$

3. לחבר משוואות.  $R_i \rightarrow R_i + R_j$

כולן משמרות את הפתרונות של המטריצה, ואת המרחב  $R(A)$  ואת  $\text{rank}(A)$

משפט 4.1 יהיו  $A, B$  מטריצות כך ש- $A \cdot B = 0$  מוגדר, ותהא  $\varphi$  פעולה אלמנטרית. אזי:

$$\varphi(A \cdot B) = \varphi(A) \cdot B$$

הגדרה 5.1 המטריצה האלמנטרית: לכל פעולה אלמנטרית  $\varphi$  על מטריצות עם  $m$  שורות, נגדיר מטריצה אלמנטרית  $E_\varphi$  על ידי  $E_\varphi := \varphi(I_m)$ .

לכל מטריצה  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ , ופעולה אלמנטרית  $\varphi$ , מתקיים ש- $\varphi(A) = E_\varphi \cdot A$ .

בנוסף מטריצות אלמנטריות הפיכות, והמטריצה של הפעולה ההופכית של  $\varphi$  היא  $(E_\varphi)^{-1}$ .

## 2 דירוג ודירוג קנוני

בצורה מדורגת:

1. משוואות 0 (מהצורה  $0 = b$ ) נמצאות למטה.

2. המשתנה הפותח בכל משוואה נמצא מימין ממש למשתנים הפותחים במשוואות מעליו.

משתנה חופשי הוא משתנה שלא מקדם פותח של אף שורה.

בנוסף, בצורה מדורגת קנונית:

3. המקדם של כל משתנה פותח הוא 1

4. לכל משתנה פותח של משוואה, המקדם של המשתנה בשאר המשוואות הוא 0.

לכל מטריצה קיימת צורה מדורגת קנונית יחידה ששקולה לה.

1	מטריצות בסיסיות	1
1	1.1 כפל מטריצה במטריצה	
1	1.2 פעולות אלמנטריות	
1	2 דירוג ודירוג קנוני	
3	3 צירופים לינאריים	
4	4 בסיס	
2	4.1 מימד	
2	4.2 למת ההחלפה של ריס	
2	5 שחלוף והפיכות $(A^{-1}, A^T)$	
	5.1 תנאים שקולים להפיכות במטריצה ריבועית	
3	6 דטרמיננטה	
3	6.1 דרכי חישוב	
3	6.2 טענות	
3	6.3 מטריצת ונדרמונד	
3	6.4 מטריצה מוצמדת	
3	6.5 כלל קרמר	
3	7 תמורות	
3	7.1 הגדרות	
3	7.2 סיגנטורה sign	
4	8 מרחב וקטורי	
4	8.1 בוחן תת מרחב	
4	9 בסיס האמל	
4	10 סכום ישר	
4	11 מרחב העמודות והשורות	
4	12 העתקות לינאריות	
4	12.1 תכונות בסיסיות	
5	12.2 הטלה	
5	12.3 איזומורפיזם	
5	12.4 מרחב ההעתקות	
5	12.5 מטריציונית	
6	13 מטריצה מייצגת	
6	14 מטריצות דומות	
6	15 אלגוריתמים	
6	15.1 צמצום סדרה לבת"ל	
6	15.2 השלמה של סדרה בת"ל לבסיס	
6	15.3 חיתוך של מרחבים וקטוריים	

## 1 מטריצות בסיסיות

### 1.1 כפל מטריצה במטריצה

הגדרה 1.1 יהא  $R$  חוג ויהיו  $A \in M_{n \times m}(R)$ ,  $B \in M_{m \times p}(R)$  מטריצות. נגדיר כפל מטריצות  $(A \cdot B) \in M_{n \times p}(R)$  בצורה הבאה:

$$(A \cdot B)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

### 3 צירופים לינאריים

**הגדרה 1.3** סדרת  $m$  מיות  $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) \in (\mathbb{F}^m)^k$  תקרא בלתי תלויה לינארית (בת"ל) אם לכל  $\bar{b} \in \mathbb{F}^m$  יש לכל היותר פתרון אחד למשוואה  $\sum_{i=1}^k x_i \bar{v}_i = \bar{b}$ .

**משפט 2.3** סדרת וקטורים  $(v_1, \dots, v_m) \subseteq \mathbb{F}^n$  בלתי תלויה לינארית  $\iff$  כל איבר אינו צירוף לינארי של קודמיו.

**הגדרה 3.3** נגדיר את מרחב התלויות של  $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$  להיות:

$$LD((\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \mid \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k = 0 \right\}$$

בנוסף  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$  בת"ל  $\iff LD((\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)) = \{0\}$ .

### 4 בסיס

**הגדרה 1.4 (משפט 2 מתוך 3)** יהי  $\mathbb{F}$  שדה,  $B$  תת קבוצה של  $\mathbb{F}^n$ . אז  $B$  נקראת בסיס של  $\mathbb{F}^n$  אם שניים מהתנאים הבאים מתקיימים:

1.  $B$  בת"ל.

2.  $B$  פורשת את  $\mathbb{F}^n$ .

3.  $m = n$ .

כל שניים מוכיחים גם את השלישי.

התנאים הבאים שקולים לכך ש- $B$  בסיס:

1. בת"ל מקסימלית -  $B$  בת"ל וכל קבוצה המכילה ממש את  $B$  הינה תלויה לינארית.

2. פורשת מינימלית -  $B$  פורשת וכל קבוצה שמוכלת ממש ב- $B$  אינה פורשת.

3. לכל  $v \in \mathbb{F}^n$  יש הצגה יחידה כצירוף של וקטורים מ- $B$ .

### 4.1 מימד

**הגדרה 2.4 (מימד):** יהי  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$  בעל בסיס, המימד של  $V$  הינו עוצמת בסיס כלשהו (והמימד יחיד). מסמנים כ- $\dim_{\mathbb{F}}(V)$ .

**משפט 3.4 (משפט המימדים הראשון):**

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

**מסקנה:** אם  $U \subseteq V$  ו- $\dim U = \dim V$  אז  $U = V$ .

**משפט 4.4 (משפט המימדים השני):** עבור  $T: V \rightarrow U$ ,

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T))$$

### 4.2 למת ההחלפה של ריס

יהי  $V$  מ"ו, ותהא  $(v_1, \dots, v_n)$  סדרה פורשת ב- $V$ , ו- $(u_1, \dots, u_m)$  סדרה בת"ל. אז:

1. קיימים  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$  כך ש- $(u_1, \dots, u_m) \subset (v_{i_1}, \dots, v_{i_m})$  פורשת.

2.  $m \leq n$ .

כלומר אפשר להחליף איברים כלשהם של סדרה פורשת באיבריה של כל סדרה בת"ל.

### 5 שחלוף והפיכות $(A^{-1}, A^T)$

נגדיר את השחלוף של  $A$ ,  $A^T$ , להיות המטריצה כך ש- $(A^T)_{i,j} = A_{j,i}$ . אם  $A = A^T$ , נגיד ש- $A$  סימטרית.

**משפט 1.5** חוקי Transpose:

• **חיבור:**  $(A + B)^T = A^T + B^T$  (אם החיבור מוגדר).

• **כפל בסקלר:**  $(\alpha A)^T = \alpha (A^T)$ .

•  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ .

**הגדרה 2.5** מטריצה  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  תיקרא:

1. **הפיכה משמאל:** אם קיימת מטריצה  $B \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$  כך ש- $B \cdot A = I_n$ .

2. **הפיכה מימין:** אם קיימת מטריצה  $A \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$  כך ש- $A \cdot B = I_m$ .

3. **הפיכה:** אם קיימת מטריצה  $B \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$  כך ש- $A \cdot B = I_m$  וגם  $B \cdot A = I_n$ . קיימת הופכית יחידה.

**משפט 3.5** תהא  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ .

1.  $A$  הפיכה משמאל  $\iff$  למערכת  $A \cdot \bar{x} = 0$  יש פתרון יחיד (כלומר סדרת העמודות של  $A$  בת"ל, באופן שקול סדרת השורות פורשת, ולכן  $m \geq n$ ).

2.  $A$  הפיכה מימין  $\iff$  למערכת  $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$  יש פתרון לכל  $\bar{b} \in \mathbb{F}^m$  (כלומר סדרת העמודות של  $A$  פורשת, באופן שקול סדרת השורות בת"ל, ולכן  $m \leq n$ ).

3.  $A$  הפיכה  $\iff$  למערכת  $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$  יש פתרון יחיד לכל  $\bar{b} \in \mathbb{F}^m$  (כלומר סדרת העמודות של  $A$  בסיס, ולכן  $m = n$ ).

בפרט מטריצה הפיכה היא ריבועית.

**טענות:**

1. אם במטריצה  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  יש שורת אפסים אז  $A$  לא הפיכה מימין.

2. אם  $A$  הפיכה  $A^T$  הפיכה.

3.  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

4. אם  $A \in M_{m \times k}(\mathbb{F})$ ,  $B \in M_{k \times n}(\mathbb{F})$  הפיכות, אז  $A \cdot B$  הפיכה ו- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ .

## 5.1 תנאים שקולים להפיכות במטריצה

עבור מטריצה מהצורה הבאה:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \dots & \alpha_m^{n-1} \end{pmatrix}$$

אז הדטרמיננטה היא  $\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$

## 6.3 מטריצת ונדרמונד

נגדיר:  $(\text{adj}(A))_{i,j} = (-1)^{j+i} \cdot \det(A_{(j,i)})$   
מתקיים:

$$1. (\text{adj}(A))^T = \text{adj}(A^T)$$

2. אם  $A$  לא הפיכה אז: מטריצת האפס  $A \cdot \text{adj}(A) = \text{adj}(A) \cdot A =$

$$3. A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A) \text{ אז } A \cdot \text{adj}(A) = I \cdot \det(A)$$

## 6.5 כלל קרמר

תהא  $A \in M_n(\mathbb{F})$  הפיכה, אז לכל  $\bar{b} \in \mathbb{F}^n$  למערכת  $A\bar{x} = \bar{b}$  יש פתרון יחיד והפתרון הינו: (שתי דרכים לתאר אותו)

$$1. \bar{c} = A^{-1} \cdot \bar{b}$$

$$2. \text{ כאשר } c_j = \frac{|B_j|}{|A|} \cdot B_j(C_1(A), \dots, C_{j-1}(A), \bar{b}, \dots, C_n(A))$$

## 7 תמורות

### 7.1 הגדרות

פורמלית,  $S_n$  זה קבוצת הפונקציות החח"ע ועל  $J_n \rightarrow J_n$  כאשר  $J_n = \{1, \dots, n\}$

סימונים לתמורות:

$$1. \sigma : J_n \rightarrow J_n \text{ חח"ע ועל.}$$

$$2. \text{ רישום ישיר: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \end{pmatrix}$$

הגדרה 1.7 (מטריצה תמורה): מטריצה  $A \in M_n(\mathbb{F})$  נקראת מטריצת תמורה אם קיימת תמורה  $\sigma \in S_n$  כך

$$P(\sigma) = A = \begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\sigma(1)} & \dots & e_{\sigma(n)} \\ | & & | \end{pmatrix}^{-1}$$

### 7.2 סיגנטורה

הגדרה 2.7 עבור  $\sigma \in S_n$ ,  $\text{sign}(\sigma)$  (הסיגנטורה של  $\sigma$ ) מוגדרת כך  $\text{sign}(\sigma) = |P(\sigma)|$

הגדרה שקולה: תהא  $\sigma \in S_n$  תמורה. לכל  $1 \leq i \leq n$  נגדיר את  $N(\sigma) = |\{(i,j) \mid j > i \wedge \sigma(j) < \sigma(i)\}|$  ו- $N(\sigma) = |\{(i,j) \mid j > i, \sigma(i) < \sigma(j)\}|$  (ו- $z_\sigma(i) = |\{(i,j) \mid j > i, \sigma(i) < \sigma(j)\}|$ )  
נגדיר את  $\text{sign}$  להיות:  $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$

$$3.7 \text{ משפט } \text{sign}(\sigma\tau) = \text{sign}(\sigma) \cdot \text{sign}(\tau)$$

1.  $A$  שקולת שורות ל- $I_n$ .

2. קיים  $\bar{b} \in \mathbb{F}^n$  כך שלמערכת  $A\bar{x} = \bar{b}$  יש פתרון יחיד.

3. לכל  $\bar{b} \in \mathbb{F}^n$  למערכת  $A\bar{x} = \bar{b}$  יש פתרון. הוא גם יחיד אבל מספיק להוכיח שיש פתרון.

4.  $A$  הפיכה משמאל - כלומר עמודות  $A$  בת"ל. אפשר גם שורות לפי 6.

5.  $A$  הפיכה מימין - כלומר עמודות  $A$  פורשות. אפשר גם שורות לפי 6.

6.  $A^T$  הפיכה.

$$7. |A| \neq 0$$

$$8. \text{rank } A = n, \text{ כלומר } \mathcal{N}(A) = 0$$

ובנוסף  $A, B$  הפיכות  $\iff A \cdot B \iff$  הפיכה ו- $A, B$  ריבועיות.

## 6 דטרמיננטה

### 6.1 דרכי חישוב

$$1. \text{ פיתוח לפי עמודה: } \det_j^{(n)}(A) = \sum_{k=1}^n (A)_{k,j} \cdot (-1)^{k+j} \cdot \det^{(n-1)}(A_{(k,j)})$$

$$2. \text{ דטרמיננטה לפי תמורות: } \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n (A)_{i,\sigma(i)}$$

3. אם  $A$  לא הפיכה אז  $\det(A) = 0$ . ואם  $A$  הפיכה אז  $\det(A) \neq 0$  ו- $\det(A) = x_{\varphi_1} \cdot \dots \cdot x_{\varphi_n}$  כאשר  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  פעולות הדירוג. אם  $\varphi$  החלפת שורה  $x_\varphi = -1$ , אם  $\varphi$  כפל בסקלר  $\lambda$  אז  $x_\varphi = \lambda^{-1}$ , ואם  $\varphi$  הוספת שורה אז 1.

### 6.2 טענות

1. לינאריות לפי שורה:

$$\det \begin{pmatrix} -A_1- \\ \vdots \\ -\alpha \cdot B + \beta \cdot C- \\ \vdots \\ -A_n- \end{pmatrix} = \alpha \cdot \det \begin{pmatrix} -A_1- \\ \vdots \\ -B- \\ \vdots \\ -A_n- \end{pmatrix} + \beta \cdot \det \begin{pmatrix} -A_1- \\ \vdots \\ -C- \\ \vdots \\ -A_n- \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ נרמול: } N(I) = 1$$

$$3. \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$4. \det(A) = \det(A^T). \text{ לכן אפשר גם להפעיל פעולות עמודה, שהן פעולות שורה על השחלוף.}$$

5. במטריצה משולשית עליונה או תחתונה  $\forall j < i, (A)_{i,j} = 0$  או  $\forall i < j, (A)_{i,j} = 0$ , הדטרמיננטה היא מכפלת האלכסון.

## 8 מרחב וקטורי

**הגדרה 1.8 (מרחב וקטורי):** מרחב וקטורי מעל שדה  $\mathbb{F}$  זו שלשה  $(V, +, \cdot)$  כך ש:

$$1. \langle V, + \rangle \text{ חבורה חילופית.}$$

$$2. \mathbb{F} \times V \rightarrow V : \text{כפל בסקלר, פעולה שמקיימת:}$$

$$(א) \text{ אסוציאטיביות. } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}. \forall \bar{v} \in V. \beta \cdot (\alpha \cdot \bar{v}) = (\beta \cdot \alpha) \cdot \bar{v}$$

$$(ב) \forall \bar{v} \in V. 1_{\mathbb{F}} \cdot \bar{v} = \bar{v}$$

$$3. \text{ חוק הפילוג:}$$

$$(א) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}. \forall \bar{v} \in V. (\alpha + \beta) \cdot \bar{v} = \alpha \cdot \bar{v} + \beta \cdot \bar{v}$$

$$(ב) \forall a \in \mathbb{F}. \forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V. a \cdot (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = a \cdot \bar{v}_1 + a \cdot \bar{v}_2$$

### 8.1 בוחן תת מרחב

$U \subseteq F^n$  היא תת מרחב אמ"מ:

$$1. U \text{ סגורה לחיבור.}$$

$$2. U \text{ סגורה לכפל בסקלר.}$$

$$3. \bar{0} \in U. \text{ ניתן להחליף את התנאי ב- } U \neq \emptyset$$

נובע מכאן גם שחיתוך של תתי מרחבים הוא תת מרחב.

## 9 בסיס האמל

• תת קבוצה  $X \subseteq V$  נקראת בת"ל אם לכל  $v_1, \dots, v_n, v_1, \dots, v_n \in X$  כלומר אין צירוף לינארי לא טריויאלי של איברים מ- $X$  שיוצא 0.

• תת קבוצה  $X \subseteq V$  נקראת פורשת אם  $\text{sp}(X) = V$ .

• קבוצה  $X \subseteq V$  נקראת בסיס האמל אם היא בת"ל ופורשת.

## 10 סכום ישר

**הגדרה:** נאמר כי  $U_1 + \dots + U_n$  הוא סכום ישר  $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$  אם לכל  $\bar{v} \in U_1 + \dots + U_n$  קיימת ויחידה סדרה  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n \in U_i$  כך ש- $\bar{v} = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i$  נקרא גם הצגה יחידה.

**משפט האיפיון:** יהיו  $U_1, \dots, U_n \subseteq U$  תמ"ן, הבאים שקולים:

$$1. U_1 \oplus \dots \oplus U_n$$

$$2. \text{לכל סדרות בת"ל } B_i \text{ ב- } U_i, \text{ השרשור } B_1 \frown B_2 \frown \dots \frown B_n \text{ בת"ל.}$$

$$3. \text{לכל } 1 \leq i \leq n, U_i \cap \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n U_j \right) = \{\bar{0}\}$$

$$\text{בפרט אם } n=2, U_1 \cap U_2 = \{\bar{0}\}$$

## 11 מרחב העמודות והשורות

**הגדרה:** תהא  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ , נגדיר:

$$1. \text{ מרחב הפתרונות: } \text{Sols}(A) = \{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = \bar{0}\}$$

$$2. \text{ מרחב העמודות: } C(A) = \text{sp}(C_1(A), \dots, C_n(A))$$

$$3. \text{ מרחב השורות: } R(A) = \text{sp}(R_1(A), \dots, R_m(A))$$

**משפט 1.11**  $\dim(R(A)) = \dim(C(A))$  יסומן גם כ-  
Rank(A)

$$\text{בנוסף נסמן } \mathcal{N}(A) = \dim(\text{Sols}(A))$$

**משפט 2.11 (משפט הדרגה):** פעולות דירוג משמרות את  $R(A)$  (ולכן גם את Rank(A)), אבל לא בהכרח משמרות את  $C(A)$ .

**(משפט הדרגה והאפסות):** Rank(A) + N(A) = n

**מסקנה:**  $A$  הפיכה  $\iff \text{Rank}(A) = n$

**חוקי rank:** לכל מטריצה  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,

$$1. \text{Rank}(A) \leq \min(n, m)$$

$$2. \text{Rank}(A \cdot B) \leq \min(\text{Rank}(A), \text{Rank}(B))$$

$$3. \text{Rank}(A + B) \leq \text{Rank}(A) + \text{Rank}(B)$$

$$4. \text{אם } A \text{ הפיכה אז } \text{Rank}(A \cdot B) = \text{Rank}(B), \text{Rank}(B \cdot A) = \text{Rank}(B) \text{ (אם מוגדר).}$$

## 12 העתקות לינאריות

**הגדרה:** יהיו  $V, U$  מ"ן מעל  $\mathbb{F}$ , נאמר כי  $T: V \rightarrow U$  העתקה לינארית אם:

$$1. \text{חיבוריות } - \forall v_1, v_2 \in V. T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

$$2. \text{הומוגניות } - \forall \alpha \in \mathbb{F}. \forall v \in V. T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v)$$

**הגדרות נוספות:**

$$1. \ker(T) = T^{-1}[\{0\}] = \{\bar{v} \in V \mid T(\bar{v}) = 0\} \text{ של } T, \text{ kernel}$$

$$2. \text{Im}(T) = \{T(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V\} \subseteq U \text{ התמונה של } T$$

$$\text{בנוסף } \ker(T), \text{Im}(T) \text{ תמ"ן של } T$$

### 12.1 תכונות בסיסיות

תהא  $T: V \rightarrow U$  לינארית,

$$1. T(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i) \text{ כל צירוף לינארי נשמר.}$$

$$2. T(-\bar{v}) = -T(\bar{v}) \text{ מכפלות.}$$

$$3. T(\bar{0}_V) = \bar{0}_U$$

$$4. \ker(T) = \{\bar{0}\} \iff T \text{ חח"ע}$$

$$5. T \text{ על } \iff \text{Im}(T) = U \text{ (טריויאלי).}$$

$$6. \text{אם } (u_1, \dots, u_n) \text{ סדרה פורשת של } V \text{ אז } (T(u_1), \dots, T(u_k)) \text{ סדרה פורשת של } \text{Im}(T)$$

$$1. \dim(V) = \dim(U)$$

2.  $T$  חח"ע.

3.  $T$  על.

### 12.3.2 קואורדינטות

יהי  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$ ,  $B$  בסיס של  $V$ . נסמן  $\dim V = n$ , ויהי  $\bar{v} \in V$  קיימים  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$  כך ש- $\bar{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$ . נגדיר את הקואורדינטות של  $\bar{v}$  לפי  $B$  להיות:

$$[\bar{v}]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

זה איזומורפיזם מ- $V$  ל- $\mathbb{F}^n$ . העתקת הקואורדינטות תסומן גם בתור  $[\cdot]_B : V \rightarrow \mathbb{F}^n$ .

### 12.4 מרחב ההעתקות

**הגדרה:**  $\text{Hom}(V, U) = \{T \in U^V \mid T \text{ is linear}\}$  מרחב ההעתקות. זה תת מרחב של  $\langle U^V, +, \cdot \rangle$ .  
**משפט:**  $\dim(\text{Hom}(V, U)) = \dim(V) \cdot \dim(U)$  - זה נכון אפילו אם  $V, U$  לא נוצרים סופית.

### 12.5 מטריציזט

**הגדרה:** לכל מטריצה  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ , נגדיר את ההעתקה המטריציזטית המתאימה ל- $A$ ,  $T_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ :

$$T_A(\bar{v}) = A\bar{x}$$

פונקציה  $f$  נקראת מטריציזטית אם קיימת מטריצה  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  כך ש- $f = T_A$ , ונסמן  $A = [f]$ . השיטה למצוא את המטריצה  $[T]$  היא:

$$[T] = \begin{pmatrix} T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \dots & T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

**משפט:** תהא  $T : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ , אזי  $T$  העתקה לינארית מטריציזטית.  $T \iff$  מטריציזטית.  
**טענות:**

$$1. \text{Sols}(A) = T_A^{-1}[\{\bar{0}\}] = \ker(T_A)$$

$$2. C(A) = \text{Im}(T_A)$$

3.  $T_A$  על  $\iff$  עמודות  $A$  פורשות. אם היא ריבועית אז גם הפיכה.

4.  $T_A$  חח"ע  $\iff$  עמודות  $A$  בת"ל. כי אין שתי דרכים להגיע לאותו הדבר.

5.  $T_A$  הפיכה  $\iff$  עמודות  $A$  בסיס  $\iff A$  הפיכה.

$$6. [T + S] = [T] + [S], [\alpha \cdot T] = \alpha \cdot [T], [S \circ T] = [S] \cdot [T]$$

7. עבור  $LD(v_1, \dots, v_n) \subseteq LD(v_1, \dots, v_n)$ , לכן:  $LD(T(v_1), \dots, T(v_n))$

(א) אם  $(T(v_1), \dots, T(v_n))$  בת"ל אז  $(v_1, \dots, v_n)$  בת"ל.

(ב) אם  $v_i \in \text{sp}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$  אז  $T(v_i) \in \text{sp}(T(v_1), \dots, T(v_{i-1}), T(v_{i+1}), \dots, T(v_n))$

(ג) אם  $T$  חח"ע, אז  $LD(T(v_1), \dots, T(v_n)) = LD(v_1, \dots, v_n)$ .

אם  $T$  על, אז  $T$  מעבירה סדרה פורשת של  $V$  לסדרה פורשת של  $U$ .

8. יהיו  $V, U$  מ"ו. יהי  $B = (b_1, \dots, b_n)$  בסיס של  $V$ . יהיו  $u_1, \dots, u_n \in U$  וקטורים כלשהם. אז קיימת ויחידה העתקה לינארית  $T : V \rightarrow U$  כך שלכל  $1 \leq i \leq n$ ,  $T(b_i) = u_i$ . כלומר העתקה לינארית נקבעת ביחידות לפי  $\dim(V)$  איברים.

**משפט המימדים השני:**  $\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T))$

### 12.2 הטלה

יהי  $V$  מ"ו,  $U, W \subseteq V$  תמ"ו כך ש- $V = U \oplus W$ . ראינו כי כל וקטור  $\bar{v} \in V$  ניתן להציג באופן יחיד:

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}, \bar{u} \in U, \bar{w} \in W$$

נגדיר את ההטלה של  $V$  על  $U$ :

$$P_{(U,W)} : V \rightarrow U$$

$$P_{(W,U)} : V \rightarrow W$$

$$P_{(U,W)}(\bar{v}) = u \in U, \exists y \in W. \bar{v} = u + y$$

כלומר זה ייצוג לאחד מהאיברים בהצגה היחידה של וקטור.

**טענות:**

1. הטלה  $P_{(U,W)}$  היא העתקה לינארית.

$$2. P_{(U,W)} + P_{(W,U)} = Id_V, P_{(U,W)} \circ P_{(U,W)} = P$$

$$3. P_{(U,W)}^{-1}[\{0\}] = W, \text{Im}(P_{(U,W)}) = U$$

### 12.3 איזומורפיזם

#### 12.3.1 הגדרות

**הגדרה:** יהיו  $V, U$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$ , נאמר כי  $f : V \rightarrow U$  היא איזומורפיזם של מ"ו אם:

1.  $f$  חח"ע ועל.

2.  $f$  העתקה לינארית (חיבורית והומוגנית).

איזומורפיזם משמר את הפתרונות של  $v = \sum_{i=1}^n x_i \bar{u}_i$  כאשר  $v, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n \in V$ .

שני מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה נקראים איזומורפיים ומסומנים  $V \simeq U$  אז קיים איזומורפיזם  $T : V \rightarrow U$ . זה "יחס שקילות".

**משפט:** יהיו  $V, U$  מ"ו נוצרים סופית, אז  $V \simeq U \iff \dim(V) = \dim(U)$ .

**משפט 1.12 (2 מתוך 3 להעתקות לינאריות):** כל 2 מתוך 3 הבאים שקולים לכך ש- $T$  איזומורפיזם.

## 13 מטריצה מייצגת

3. לכל  $T : V \rightarrow V$ , אם קיים בסיס  $C$  של  $V$  כך ש-  
 $[T]_C = A$ , אז קיים בסיס  $C'$  של  $V$  כך ש- $[T]_{C'} = B$ .

ואם  $A, B$  דומות אז:

$$1. \text{Rank}(A) = \text{Rank}(B), \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$$

$$2. \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n (A)_{i,i} \text{ כאשר } \text{tr}(A) = \text{tr}(B)$$

$$3. \det(A) = \det(B)$$

**הגדרה:** תהא  $T : V \rightarrow U$  צ"ל  $V, U$  נוצר סופית. יהי  $B$  בסיס של  $V$ , ו- $C$  בסיס של  $U$ . נגדיר את ההעתקה המייצגת  $T_C^B : \mathbb{F}^{\dim(V)} \rightarrow \mathbb{F}^{\dim(U)}$

$$T_C^B = Q_C \circ T \circ Q_B^{-1}$$

$$[T]_C^B = [T_C^B]$$

**טענות:**

$$1. C_i([T_C^B]) = T_C^B(e_i)$$

$$\text{כלומר } [T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(b_1)]_C & \dots & [T(b_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$2. [T]_C^B \cdot [v]_B = [T(v)]_C$$

$$3. \text{כל } [\bar{v}]_B \in \text{Sols}([T]_C^B) \iff \bar{v} \in \ker(T), \bar{v} \in V$$

$$4. \text{כל } [\bar{u}]_C \in \text{Cols}([T]_C^B) \iff \bar{u} \in \text{Im}(T), \bar{u} \in U$$

לכן מסיקים ש:

$$\mathcal{N}([T]_C^B) = \dim(\ker(T)), \text{Rank}([T]_C^B) = \dim(\text{Im}(T))$$

$$5. T \text{ הפיכה} \iff T_C^B \text{ הפיכה} \iff [T]_C^B \iff \text{בנוסף } ([T]_C^B)^{-1} = [T^{-1}]_B^C$$

$$6. [S \circ T]_D^B = [S]_D^C \cdot [T]_C^B$$

**אלגוריתם לחישוב המטריצה המייצגת:** נבחר בסיס שנוח לחשב בו קואורדינטות ב- $U$  - בדרך כלל הבסיס הסטנדרטי.  $W = (w_1, \dots, w_n)$ . נשתמש בדירוג:

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ [u_1]_W & \dots & [u_m]_W \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(b_1)]_W & \dots & [T(b_n)]_W \\ | & & | \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \dots} \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & | \\ & \ddots & | \\ & & 1 & | \\ & & & [T]_C^B \end{pmatrix}$$

באופן דומה לאיך שמחשבים מטריצה הופכית.

**הגדרה 1.13 מטריצות שינוי הקואורדינטות:** יהיו  $B, C$  שני בסיסים של  $V$ . אז נגדיר את מטריצת שינוי הקואורדינטות מ- $B$  ל- $C$  על ידי  $[Id_V]_C^B$ .

$$1. [Id_V]_C^B \cdot [\bar{v}]_B = [\bar{v}]_C, \bar{v} \in V$$

$$2. [T]_C^B = [Id]_C^{C'} \cdot [T]_{C'}^{B'} \cdot [Id_V]_{B'}^B$$

## 14 מטריצות דומות

יהיו  $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ , נאמר כי  $A$  ו- $B$  דומות אם קיימת מטריצה הפיכה  $P$  כך ש- $A = P^{-1} \cdot B \cdot P$ .

**משפט:** נתון  $A, B \in M_n(\mathbb{F})$  ריבועיות, הבאים שקולים:

$$1. A, B \text{ דומות.}$$

$$2. \text{קיימת } T : V \rightarrow V \text{ ובסיסים } C, C' \text{ של } V \text{ כך ש-} [T]_C = A, [T]_{C'} = B$$

## 15 אלגוריתמים

### 15.1 צמצום סדרה לבת"ל

#### 15.1.1 לפי שורות

יהיו  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{F}^m$ . נשים את  $v_1, \dots, v_n$  כשורות,  $B = \begin{pmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_n^t \end{pmatrix} \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ , ונדרג בלי להחליף שורות

(כלומר, בעמודה של מקדם הפותח יש רק 1 במקום אחד והשאר אפסים, אבל המקדמים הפותחים לא ממוינים). השורות שהתאפסו מתאימות לוקטורים שהיו תלויים לינארית באחרים, וסדרת השורות שלא התאפסו הן סדרה בת"ל.

#### 15.1.2 לפי עמודות

נשים את  $v_1, \dots, v_n$  כעמודות,  $A = (v_1 \dots v_n)$ , נדרג ונבדוק שיש רק פתרון טריויאלי למערכת ההומוגנית  $(A | 0)$ , כלומר שאין אף משתנה חופשי.

### 15.2 השלמה של סדרה בת"ל לבסיס

תהא  $(v_1, \dots, v_k)$  סדרה בת"ל, ו- $(u_1, \dots, u_m)$  סדרה פורשת. נבנה מטריצה שעמודותיה:

$$(v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m)$$

נדרג את המטריצה, ונסתכל על העמודות מ- $u$  שנפתחה בהן מדרגה. את ה- $u$ ים המתאימים נוסיף לסדרת ה- $v$ ים, ונקבל בסיס.

### 15.3 חיתוך של מרחבים וקטוריים

יהיו  $U, V$  מרחבים וקטוריים שבסיסיהם  $v_1, \dots, v_n$  ו- $u_1, \dots, u_m$ . נבנה מערכת משוואות:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m$$

ונראה מה הפתרונות. מרחב הפתרונות הוא בדיוק החיתוך.