# **סיכומי הרצאות** - חדו"א 1א

מיכאל פרבר ברודסקי

## תוכן עניינים

# 1 נוסחאות כלליות

**בינום:** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

**א"ש הממוצעים:** $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$

**א"ש ברנולי:** לכל $x>-1, n\in\mathbb{N}$ מתקיים $(1+x)^n \geq 1+nx$

**א"ש המשולש:** $|a+b| \leq |a|+|b|$

# 2 חסמים עליונים ותחתונים

$M$ יקרא **חסם מלעיל** של $A$ אם לכל $x\in A$, $x\leq M$.
$M$ יקרא **חסם מלרע** של $A$ אם לכל $x\in A$, $M\leq x$.

**אקסיומת השלמות:** לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל קיים חסם עליון קטן ביותר, ונסמן אותו ב־$\sup A$.

**טענה שימושית:** אם $b=\sup A$ אז לכל $\varepsilon>0$, קיים $a\in A$ כך ש־$b-\varepsilon<a\leq b$.

**הגדרה:** נאמר ש־$A$ <u>צפופה ב־$B$</u> אם לכל $b\in B$ ולכל $\varepsilon>0$, קיים $a\in A$ כך ש־$|b-a|<\varepsilon$.

**טענה:** $S\subseteq\mathbb{R}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$ $\iff$ לכל $a<b\in\mathbb{R}$, $(a,b)\cap S\neq\emptyset$.

**טענה:** לכל $a<b$, קיים $q$ כך ש־$q\in(a,b)$.

**הוכחה:** נניח ש־$a>0$. יהי $k$ כך ש־$0<\frac{1}{k}<b-a$. יהי $m$ המספר הקטן ביותר כך ש־$b\leq\frac{m}{k}$. אז $\frac{m-1}{k}<b$. בנוסף, $a+\frac{1}{k}<a+(b-a)=b$ ולכן $a<\frac{m-1}{k}$. אם כך, $a<\frac{m-1}{k}<b$ וסיימנו. אם $a\leq 0$, נוסיף את $x=\lceil|a|+17\rceil$ ל־$a,b$ ועבור $c=a+x, d=b+x$ קיים $q\in(a+x,b+x)$, ולכן $q-x\in(a,b)\ni\mathbb{Q}$ מש"ל.

**טענה:** $\mathbb{Q}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$ ו־$[a,b]\cap\mathbb{Q}$ צפופה ב־$[a,b]$.

# 3 התחלה של סדרות

נסמן סדרות ב־$(a_n)$ או $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

נאמר שסדרה **חסומה מלעיל** אם קיים $M$ כך שלכל $n$, $a_n\leq M$.

נאמר שסדרה **חסומה מלרע** אם קיים $M$ כך שלכל $n$, $M\leq a_n$.

נאמר שסדרה **חסומה** אם קיים $M$ כך שלכל $n$, $|a_n|\leq M$.

## 3.1 הגדרת הגבול

נאמר שהגבול של $(a_n)$ הוא $L$, ונסמן $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ או $a_n\to L$, אם:

$$\forall\varepsilon>0.\exists n_0\in\mathbb{N}.\forall n>n_0.\,|a_n-L|<\varepsilon$$

נאמר שהגבול של $(a_n)$ הוא $\infty$, ונסמן $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ או $a_n\to\infty$, אם:

$$\forall M>0.\exists n_0\in\mathbb{N}.\forall n>n_0.a_n>M$$

**משפט (יחידות הגבול):** אם $\lim_{n\to\infty}a_n=L, \lim_{n\to\infty}a_n=L'$ אז $L=L'$.

## 3.2 חשבון גבולות

יהיו $(a_n),(b_n)$ סדרות כך ש־$a_n \to a, b_n \to b$. אזי:

- $a_n + b_n \to a + b$
- $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ אם $b_n \neq 0$ לכל $n$ ו־$b \neq 0$
- $|a_n| \to |a|$
- $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$ אם $a_n \geq 0$ לכל $n$

## 3.3 טענות על גבולות

**טענה:** יהיו $(a_n) \to a, (b_n) \to b$ סדרות מתכנסות כך ש־$a_n \leq b_n$. אז: $a \leq b$.

**כלל הסנדוויץ':** יהיו $x_n, y_n, z_n$ סדרות כך ש־$x_n \leq z_n \leq y_n$ (כמעט) לכל $n$. אם $x_n \to x, y_n \to x$, אז $z_n \to x$.

**הרחבה:** אם $x_n \geq y_n$ ו־$y_n \to \infty$ אז $x_n \to \infty$.

**טענה:** תהי $(a_n)$ כך ש־$a_n \to L \neq 0$ ויהי $0 < r < |L|$. אז קיים $n_0$ כך שלכל $n > n_0$, $|a_n| > r$.

**כלל השורש:** אם קיים $0 < \alpha < 1$ כך שלכל $n$, $0 \leq a_n^{1/n} \leq \alpha$, אז $a_n \to 0$.