

# סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

## תוכן עניינים

<b>2</b>	<b>I אלגוריתמים</b>
2	1 לכסון
2	1.1 וקטורים עצמיים וערכים עצמיים
2	1.2 פולינום אופייני ומינימלי
3	2 זירדון
3	2.1 העלאה בחזקה
4	3 גראם-שמידט
4	3.1 הטלה
4	3.2 האלגוריתם עצמו
<b>4</b>	<b>II מכפלות פנימיות ותבניות בילינאריות</b>
4	4 מכפלה פנימית
4	4.1 הגדרות בסיסיות
4	4.2 תכונות
5	4.3 אורתוגונליות
5	4.3.1 משלים אורתוגונלי
5	4.4 נורמה
5	5 סוגים של העתקות לינאריות
5	5.1 העתקות אוניטריות
6	5.2 העתקות אורתוגונליות
6	5.3 העתקות נורמליות
6	6 תבניות בילינאריות
6	6.1 חפיפת מטריצות
6	6.2 תבניות בילינאריות סימטריות
7	6.2.1 תבנית ריבועית
7	6.3 תבניות בילינאריות אנטי-סימטריות

# חלק I

## אלגוריתמים

### 1 לכסון

העתקה לכסינה היא העתקה לינארית כך שקיים בסיס  $B$  כך ש- $[T]_B^B$  אלכסונית. אם  $T$  העתקה לכסינה, אז כל מטריצה מייצגת שלה גם לכסינה.

#### 1.1 וקטורים עצמיים וערכים עצמיים

נגיד וקטור עצמי של  $A$  לערך עצמי  $\lambda$  להיות  $\underline{v}$  כך ש- $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ . באופן הפוך ערך עצמי של  $A$  הוא  $\lambda$  כך שקיים וקטור עצמי  $\underline{v} \neq \underline{0}$  לערך עצמי  $\lambda$ .  
 מרחב הוקטורים העצמיים לכל  $\lambda$  הוא  $V_\lambda = \{\underline{v} \in V \mid A\underline{v} = \lambda\underline{v}\} = \text{Sols}(A - \lambda I)$ . הסכום של  $V_\lambda$  שונים הוא סכום ישר.  
**משפט:**  $A$  לכסינה  $\iff$  קיים בסיס  $B \subseteq \mathbb{F}^n$  שמורכב מוקטורים עצמיים של  $A$ .  
**משפט:** במטריצה המלוכסנת, הערכים העצמיים הם האיברים שנמצאים על האלכסון עד כדי הסדר שלהם.

#### 1.2 פולינום אופייני ומינימלי

נגדיר את  $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$  להיות הפולינום האופייני של  $A$ . מתקיים:  
 •  $p_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ , כך ש- $a_0 = (-1)^n \det A$  ו- $a_{n-1} = -\text{tr}(A)$  (ו- $a_n = 1$ ).  
 •  $\lambda$  ערך עצמי של  $A \iff \lambda$  שורש של  $p_A(\lambda)$  (כי זה אומר שהמטריצה אינה הפיכה עבור  $\lambda$  הזה כלומר יש פתרונות).  
 • אם  $A, B$  דומות אז  $p_A = p_B$ .  
 •  $p_{AB}(\lambda) = p_{BA}(\lambda)$  ו- $p_A(\lambda) = p_{A^t}(\lambda)$ .  
 • יהיו  $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$  המרחבים העצמיים. הסכום ביניהם הוא סכום ישר.  
 נגדיר את הריבוי האלגברי של  $\alpha, \rho_\alpha$  (רו), להיות כמות הפעמים ש- $(\lambda - \alpha)$  מופיע בפולינום  $P_A(\lambda)$ . כלומר אם הפולינום הוא  $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$  אז  $\rho_1 = 1, \rho_3 = 2$ .  
 בנוסף נגדיר את הריבוי הגיאומטרי של  $\alpha, \mu_\alpha$  להיות  $\dim(V_\lambda)$ .  
**משפט:** לכל ערך עצמי  $\lambda$ ,  $\mu_\lambda \leq \rho_\lambda$ .  
**משפט:** עבור  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  הערכים העצמיים, ואם  $p_A(\lambda)$  מתפרק לגורמים לינאריים אז גם  $\rho_{\lambda_1} + \dots + \rho_{\lambda_k} = n$ .  
**המשפט המרכזי (תנאי ללכסינות):** תהא  $A \in M_n(\mathbb{F})$ . לכסינה מעל  $\mathbb{F}$  אם ורק אם:

1.  $P_A(\lambda)$  מתפרק לגורמים לינאריים מעל  $\mathbb{F}$ .
  2. לכל ערך עצמי  $\lambda$  של  $A$ ,  $\rho_\lambda = \mu_\lambda$ .
- נגדיר את הפולינום המינימלי של  $A, m_A$ , להיות הפולינום המתקון היחיד כך ש- $\text{sp}(m_A)$  האידאל המאפס של  $A$ . מתקיים:

- $m_A$  מחלק את  $p_A$ .
  - לכל  $q \in \mathbb{F}[x]$  פולינום אי פריק,  $q \mid p_A \iff q \mid m_A$ .
  - לכן אם  $p_A = \prod_{i \in I} q_i^{m_i}$  (אי פריקים) אז  $m_A = \prod_{i \in I} q_i^{r_i}$  כאשר  $1 \leq r_i \leq m_i$ .
- משפט:** במטריצת בלוקים אלכסונית  $A = \text{Diag}(A_1, \dots, A_n)$  מתקיים:

- $p_A = p_{A_1} \cdots p_{A_n}$
- $m_A = \text{lcm}(m_{A_1}, \dots, m_{A_n})$

## 2 זירדון

נגדיר **בלוק זירדון** להיות מטריצה מהצורה  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$  או  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  ואפילו  $(\lambda)$ , כלומר יש אלכסון של  $\lambda$  ומעליו אלכסון של 1.

צורת זירדון היא מטריצת בלוקים אלכסונית כך שכל הבלוקים הם בלוקי זירדון.

**באופן פרקטי וחשוב:**

1. חישוב הפולינום האופייני. נסמן את הערכים העצמיים ב- $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  ואת הריבויים האלגבריים שלהם ב- $\rho_{\lambda_1}, \dots, \rho_{\lambda_k}$ .

2. לכל  $\lambda_i$ :

(א) נחשב את  $\ker(A - \lambda_i I), \dots, \ker(A - \lambda_i I)^{\rho_{\lambda_i}}$  עד שהמימד של זה מפסיק להשתנות (לא כולל). נסמן את המקום שבו המימד מפסיק להשתנות ב- $j^-$ . זה גם הריבוי בפולינום המינימלי.

(ב) מ- $j^-$  עד ל-1:

i. נשלים את  $\ker(A - \lambda_i I)^{j-1}$  לבסיס של  $\ker(A - \lambda_i I)^j$ .

ii. יהי  $v$  שהוסף בהשלמה. נוסיף לבסיס את  $(A - \lambda_i I)^j v, \dots, (A - \lambda_i I)^1 v, v$ . נספור שצריך איבר אחד פחות מאלה (כלומר ניקח איבר אחד פחות מההשלמות של החזקות הקודמות).

3. אפשר להשתמש בבסיס שקיבלנו ישירות או לשים  $P = (B_1 \dots B_n)$  ואז  $J = P^{-1}AP$  (כי  $P = [Id]_E^B$ ) ואכן  $[A]_B^B = [Id]_B^E \cdot [A]_E^E \cdot [Id]_E^B$ .

**משפט:**

- צורת זירדון יחידה עד כדי הסידור של בלוקי הזירדון.
- $\mu_\lambda$  הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי כלשהו הוא מספר הבלוקים שלו.
- $\rho_\lambda$  הריבוי האלגברי באופייני הוא סכום הגדלים של הבלוקים.
- הריבוי האלגברי במינימלי הוא המקסימום של הגדלים של הבלוקים.

### 2.1 העלאה בחזקה

$$\begin{pmatrix} x & 1 & & \\ & x & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x^n & \binom{n}{1} x^{n-1} & \binom{n}{2} x^{n-2} & \\ & x^n & \ddots & \binom{n}{2} x^{n-2} \\ & & \ddots & \binom{n}{1} x^{n-1} \\ & & & x^n \end{pmatrix}$$

לדוגמה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 2^3 & 3 \cdot 2^2 & \binom{3}{2} \cdot 2^1 & \binom{3}{3} \cdot 2^0 \\ 0 & 2^3 & 3 \cdot 2^2 & \binom{3}{2} \cdot 2^1 \\ 0 & 0 & 2^3 & 3 \cdot 2^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 6 & 1 \\ 0 & 8 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

### 3 גראם-שמידט

#### 3.1 הטלה

נגדיר את ההטלה של וקטור  $v$  על  $U$  להיות:

$$P_U(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} \cdot b_i$$

כאשר  $b_1, \dots, b_n$  בסיס אורתוגונלי, בהמשך נראה שקיים כזה לכל מרחב נוצר סופית.

**תכונות:**

$$P_U^2 = P_U \text{ ולכן } \forall u \in U. P_U(u) = u \bullet$$

$$\bullet P_U \text{ העתקה לינארית, כך ש-} \{v \in V \mid v \perp U\} = \ker(P_U). \text{ נסמן גם ב-} U^\perp.$$

$$\bullet (v - P_U(v)) \perp U \text{ לכל } v.$$

**משפט הקירוב הטוב ביותר:** נגדיר  $\text{dist}(v, U) = \text{dist}(v, P_U(v))$ . אז מתקיים ש- $\text{dist}(v, U) = \inf_{u \in U} \text{dist}(v, u)$ . כלומר שהמרחק הזה הוא המרחק הכי קצר מ- $v$  ל- $U$ .

#### 3.2 האלגוריתם עצמו

אלגוריתם גראם-שמידט הוא האלגוריתם למציאת סדרה אורתונורמלית  $w_1, \dots, w_x$  ל- $\text{sp}(b_1, \dots, b_n)$  כך ש- $\text{sp}(b_1, \dots, b_n) = \text{sp}(w_1, \dots, w_x)$ .

נוריד מ- $b_1, \dots, b_n$  את האפסים. נגדיר את  $w_1 = \frac{1}{\|b_1\|} b_1$  להיות המנורמל. לכל  $i \in 2, \dots, n$ , נגדיר  $U = \text{sp}(b_1, \dots, b_{i-1})$ , ואז נחשב  $w'_i = b_i - P_U(b_i)$ . אם  $w'_i = 0$ , נתעלם ממנו, אחרת נוסיף לסדרה  $w$  את  $w'_i$  את  $w'_i$  המנורמל.

## חלק II

# מכפלות פנימיות ותבניות בילינאריות

### 4 מכפלה פנימית

#### 4.1 הגדרות בסיסיות

יהי  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{C}$  או  $\mathbb{R}$ . מכפלה אוניטרית (נקרא "מכפלה פנימית" מעל  $\mathbb{R}$ ) מעל  $V$  היא פונקציה  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$  כך ש-:

$$1. \langle \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2, \underline{u} \rangle = \alpha \cdot \langle \underline{v}_1, \underline{u} \rangle + \beta \cdot \langle \underline{v}_2, \underline{u} \rangle \text{ לינאריות לפי הרכיב השמאלי:}$$

$$2. \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = \overline{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle} \text{ הרמיטיות:}$$

$$3. \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \in \mathbb{R} \wedge \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \geq 0 \text{ חיוביות:}$$

$$4. \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = 0 \iff \underline{v} = \underline{0} \text{ אפיון 0:}$$

#### 4.2 תכונות

**משפט לגבי הרכיב הימני:**

$$\bullet \langle \underline{u}, v_1 + v_2 \rangle = \langle \underline{u}, v_1 \rangle + \langle \underline{u}, v_2 \rangle \text{ חיבוריות לפי הימני.}$$

- $\langle v, \alpha u \rangle = \bar{\alpha} \langle v, u \rangle$  כמו הומוגניות ברכיב הימני, אבל עם הצמוד.
- $\langle \underline{v}, 0 \rangle = 0$  מתאפס גם לפי הרכיב הימני.
- לכן יש לנו כמעט לינאריות לפי הרכיב הימני, אבל עם הסקלר הצמוד.
- ומכאן נובע:  $\langle \sum_{i=1}^n a_i \underline{v}_i, \sum_{j=1}^m b_j \underline{u}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \bar{b}_j \langle \underline{v}_i, \underline{u}_j \rangle$

### 4.3 אורתוגונליות

$(v_1, \dots, v_n)$  נקראת אורתוגונלית אם"ם  $\forall i \neq j. v_i \perp v_j$  כלומר  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ .

לדוגמה  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  סדרה אורתוגונלית עם המכפלה האוניטרית הסטנדרטית.

נגדיר וקטור יחידה להיות  $v$  כך ש- $\|v\| = 1$ . אם  $\underline{v} \neq 0$  אז  $\frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \underline{v}$  וקטור יחידה, שנקרא גם הוקטור המנורמל.  
אז סדרה אורתונורמלית היא סדרה אורתוגונלית של וקטורי יחידה.  
**משפט:** סדרה אורתוגונלית היא בת"ל.

#### 4.3.1 משלים אורתוגונלי

יהי  $U \subseteq V$ . נגדיר  $U^\perp$  להיות המרחב שניצב לכל איבר ב- $U$ . נסמן  $\dim U = k$ . נחשב אותו באמצעות השלמת בסיס של  $U$  לבסיס של  $V$ , גראם-שמידט על הבסיס שיוצא, ואז ניקח את האיברים  $k+1, \dots, n$ . וזה הבסיס של  $U^\perp$ . מתקיים:

1.  $U \oplus U^\perp = V$
2.  $U \subseteq (U^\perp)^\perp$  ואם  $V$  נוצר סופית אז  $U = (U^\perp)^\perp$
3.  $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$
4.  $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$
5. אם  $U \subseteq W$  אז  $W^\perp \subseteq U^\perp$
6.  $\langle v, u \rangle = \langle P_U(v), P_U(u) \rangle + \langle P_{U^\perp}(v), P_{U^\perp}(u) \rangle$

### 4.4 נורמה

נגדיר  $\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$ . מתקיים:

- $\|a\| \geq 0$  ו- $a = 0 \iff \|a\| = 0$
- $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$  לכל  $a \in L, \lambda \in \mathbb{R}$
- $|||a|| - ||b||| \leq \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$
- משפט פיתגורס:  $a \perp b \iff \|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$

## 5 סוגים של העתקות לינאריות

### 5.1 העתקות אוניטריות

העתקה מעל  $\mathbb{C}$  המקיימת  $(Tu, Tv) = (u, v)$  נקראת העתקה אוניטרית. היא משמרת אורכים וזוויות, כלומר  $\|Tv\| = \|v\|$ .

**משפט:** כל דבר פה שקול לכך ש- $T$  אוניטרית.

1.  $T$  מעתיקה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי.
2.  $T^*T = I$ . לכן אם  $T$  אוניטרית אז היא הפיכה כך ש- $T^* = T^{-1}$ .
3.  $T$  נורמלית וכל הערכים העצמיים על מעגל היחידה.

## 5.2 העתקות אורתוגונליות

דומה אבל מעל  $\mathbb{R}$ .

**משפט:**  $T$  אורתוגונלית  $\iff T$  מעתיקה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי. בפרט אם  $T$  אוניטרית היא הפיכה.

**משפט:** יהי  $V$  מרחב וקטורי, מעל  $\mathbb{R}$  או  $\mathbb{C}$ , עם מכפלה פנימית. התנאים הבאים שקולים:

1.  $TT^* = T^*T = I$ , כלומר  $T^* = T^{-1}$ .
2. לכל  $u, v$ ,  $(Tu, Tv) = (u, v)$ , כלומר אוניטרית/אורתוגונלית לפי השדה.
3. לכל  $v$ ,  $\|Tv\| = \|v\|$ , כלומר  $T$  שומרת על אורכים.

## 5.3 העתקות נורמליות

העתקה נקראת נורמלית אם  $TT^* = T^*T$ .

**משפט:** מטריצה נורמלית ניתנת ללכסון אוניטרי, כלומר קיים בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של  $T$  ו- $T = P^*DP$  כאשר  $D$  אלכסונית.

**משפט:** המרחבים העצמיים ניצבים זה לזה.

**טענה:**  $|T(v)| = |T^*(v)|$ .

## 6 תבניות בילינאריות

**הגדרה:** תבנית בילינארית היא  $f : (V \times W) \rightarrow \mathbb{F}$  שלילנארית על פי הרכיב השמאלי ועל פי הרכיב הימני.

נסמן את קבוצת התבניות הבילינאריות ב- $\text{Bil}(V, W)$ , או  $\text{Bil}(V) := \text{Bil}(V, V)$ .

**מטריצה מייצגת:** נגדיר  $([f]_{B,C})_{i,j} = f(b_i, c_j)$ . מתקיים  $f(v, w) = [v]_B^t \cdot [f]_{B,C} \cdot [w]_C$  לכל  $v, w$ .

**מעבר בסיסים:**  $[f]_{B',C'} = ([Id]_B^{B'})^t \cdot [f]_{B,C} \cdot [Id]_C^{C'}$ .

**הגדרה:** נגדיר את הדרגה  $\text{rk}(f)$  להיות  $\text{rk}([f]_{B,C})$  עבור  $B, C$  בסיסים כלשהם.

**הגדרה:**  $f$  נקראת אי מנוונת אם  $\text{rk} f = \dim V = \dim W$ . לכן גם  $[f]_{B,C}$  הפיכה.

### 6.1 חפיפת מטריצות

שתי מטריצות  $A, B$  נקראות שקולות אם  $A = P^t B Q$ , וחופפות אם  $A = P^t B P$  ..... יש המון משפטים.....

### 6.2 תבניות בילינאריות סימטריות

תבנית בילינארית תקרא סימטרית אם לכל  $v, w$ ,  $f(v, w) = f(w, v)$ . המטריצה המייצגת היא אלכסונית.

**משפט ההתמדה של סילבסטר:** מעל  $\mathbb{R}$ . תהי  $f$  תבנית בילינארית סימטרית כך ש- $\text{rk} f = r \leq n = \dim V$ . אז קיים בסיס  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  כך ש- $[f]_{B,B}$  אלכסונית, ועל האלכסון יש רק  $0, -1, 1$ . הכמויות שלהם אינן תלויות בבחירת הבסיס.

כדי לחשב את אינדקסי ההתמדה הללו,  $P_+$  כמות ה-1ים ו- $P_-$  כמות ה-(-1)ים (ההפרש שלהם גם נקרא הסיגנטורה), ממטריצה מייצגת, יש שתי דרכים:

1. דירוג בו זמנית של השורות ושל העמודות, עד שמגיעים לצורה אלכסונית.

2. נחשב את  $\Delta_0, \dots, \Delta_r$  הדטרמיננטות של חתכים של המטריצה  $(r \text{ זה } rk)$  - למשל עבור  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  זה יהיה:

$$\Delta_0 = 1, \Delta_1 = \det \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

כמות הפעמים שהסימן לא משתנה מהקודם היא  $P_+$ , כמות הפעמים שהסימן כן משתנה היא  $P_-$ .

**טענה:** תבנית בילינארית חיובית לחלוטין וסימטרית היא בעצם מכפלה פנימית.

(חיובית לחלוטין זו תכונה של תבניות ריבועיות/סימטריות כך ש- $f(v, v) > 0$  לכל  $v$ , או באופן שקול שבמטריצה המייצגת כל הע"ע חיוביים, או באופן שקול ש- $\Delta_i > 0$  לכל  $i$ )

### 6.2.1 תבנית ריבועית

תהי  $f \in \text{Bil}(V)$  תבנית סימטרית. נגדיר  $Q(v) = f(v, v)$  ונקרא לה תבנית ריבועית. כל תבנית ריבועית מיוצגת ביחידות על ידי תבנית בילינארית סימטרית. ניתן למצוא את  $f$  ע"י:

$$2f(v, w) = Q(v + w) - Q(v) - Q(w)$$

### 6.3 תבניות בילינאריות אנטי-סימטריות

תבנית בילינארית תקרא סימטרית אם לכל  $v, w$ ,  $f(v, w) = -f(w, v)$ . המטריצה המייצגת היא:

$$\text{Diag} \left( \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}^{\frac{1}{2} \text{rk}(f) \text{ times}}, 0, \dots, 0 \right)$$

בפרט  $\text{rk} f$  זוגי, ומספר האפסים הוא  $n - \text{rk} f$ .