סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 1

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

חלק I
מונואידים, חבורות, חוגים ושדות

1 הגדרות

1.1 תכונות של פעולות

תהא $*$ פעולה בינארית על A (כלומר ה־domain הוא $A \times A$).

1. $*$ אסוצייטיבית: $\forall a, b, c \in A. (a * b) * c = a * (b * c)$.
2. $*$ חילופית: $\forall a, b. a * b = b * a$.
3. קבוצה A סגורה לפעולה $*$: $* : A \times A \to A$.

1.2 מונואיד

מונואיד הוא זוג $\langle G, * \rangle$ כאשר G קבוצה כלשהי ו־$*$ פעולה בינארית על G, כך ש:

1. G סגורה לפעולה $*$.
2. $*$ פעולה אסוצייטיבית.
3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר $\exists e \in G. \forall g \in G. e * g = g * e = g$. האיבר הזה יחיד ומסומן e_G.

1.3 חבורה

מקרה פרטי של מונואיד שמקיימת גם:

4. קיים איבר הופכי, כלומר $\forall g \in G. \exists h \in G. g * h = h * g = e$ כאשר e איבר יחידה. האיבר ההופכי של g מסומן g^{-1}.

1.4 חוג

שלשה $\langle R, +, * \rangle$ נקראת חוג אם:

1. $\langle R, + \rangle$ חבורה חילופית, כלומר $\forall a, b \in R. a + b = b + a$.
2. $*$ היא פעולה בינארית על R ו־R סגורה לפעולה $*$.
3. חוק הפילוג:

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in R. a * (b + c) &= a * b + a * c \\ (b + c) * a &= b * a + c * a \end{aligned}$$

חוג חילופי ־ אם $*$ פעולה חילופית (כלומר $a * b = b * a$).

חוג עם יחידה ־ אם $\langle R, * \rangle$ מונואיד.

סימונים: 0_R ניטרלי לחיבור, 1_R ניטרלי לכפל אם קיים.

מחלק 0 ־ איבר $0_R \neq a \in R$ נקרא "מחלק 0" אם יש $b \neq 0_R$ כך ש־$a * b = 0_R$. בממשיים אין מחלק 0.

חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0 נקרא **תחום שלמות**. הוא מקיים את חוק הצמצום (לכל $a, b, c \in R$, אם $a * b = c * b$ אז $a = c$)

1.5 שדה

$\langle F,+,*\rangle$ **מקרה פרטי של חוג** שמקיים גם:

1. $\langle F\setminus\{0_F\},*\rangle$ חבורה חילופית.

כל שדה הוא תחום שלמות, אבל ההפך אינו נכון. תחומי שלמות סופיים הם כן שדות.
הרבה פעמים בהגדרת שדה מוסיפים את הדרישה $0_F\neq 1_F$.

חלק II
מרוכבים

נסמן $i=\sqrt{-1}$. ההגדרה הפורמלית של מרוכבים היא: $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$, כאשר המספר הראשון הוא החלק הממשי (שמסומן $Re\left(c\right)$) והמספר השני הוא החלק הדמיוני (שמסומן $Im\left(c\right)$).
עובדות: עבור $z\in\mathbb{C}$,

1. **הגודל של** z**:** $||z||=\sqrt{Re\left(z\right)^2+Im\left(z\right)^2}$. כלומר המרחק של z מראשית הצירים.
2. **זהות אוילר:** $e^{i\theta}=\cos\left(\theta\right)+i\sin\left(\theta\right)$, לכן $z=||z||\,e^{i\cdot\arg(z)}$.
3. **חיבור:** מחברים את החלק הממשי והדמיוני בנפרד.
4. **כפל:** $\left(a+ib\right)\cdot\left(c+id\right)=\left(ac-bd\right)+i\left(bc+da\right)$. משתמשים בזה ש־$i^2=-1$.
5. כל שורש של פולינום מרוכב הוא מרוכב.
6. נגדיר $\overline{z}$ להיות $\overline{z}=a-ib$. כלומר להפוך את החלק הדמיוני.
   (א) $\overline{\overline{z}}=z$
   (ב) $z\cdot\overline{z}=||z||^2$
   (ג) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
   (ד) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
   (ה) $Re\left(z\right)=\frac{z+\overline{z}}{2},Im\left(z\right)=\frac{z-\overline{z}}{2i},$
7. $\langle\mathbb{C},+,\cdot\rangle$ שדה סגור אלגברית (כלומר כל שורש של כל פולינום מרוכב הוא מרוכב).
8. **איבר הופכי:** $w=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$ (אם מכפילים בהופכי מקבלים 1).

2 הצגה פולארית

נגדיר מרוכב בתור זוג $\langle r,\theta\rangle$ כאשר r המרחק מראשית הצירים ו־θ הזווית שהוא יוצר, שנקראת הארגומנט.

$$z=r\cos\theta+ir\sin\theta=r\cdot e^{i\theta}$$

עובדות:

1. **הארגומנט של** z: נסמן $\arg\left(z\right)$ להיות הזווית שהמספר יוצר עם ציר הממשיים (לרוב נסמן כ־θ). ניתן לחשב אותו בעזרת $\arg\left(z\right)=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ ברוב המקרים.
2. $\overline{z}=r\cdot e^{-i\theta},z^{-1}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$
3. $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

4. להכפיל מספרים מרוכבים על הגרף נראה כמו להכפיל את האורכים זה בזה ולחבר את הזוויות.

פתרון משוואה $z^n = a + ib$. נמצא הצגה פולארית $z^n = re^{i\theta}$. נשתמש בעובדה ש-$e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi k)}$ עבור $k \in \mathbb{Z}$. אזי:

$$z = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\frac{k}{n}\right)}$$

עבור $k \in \mathbb{Z}$. ולכל $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ נקבל פתרונות שונים.