

סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

2	I אלגוריתמים
2	1 לכסון
2	1.1 וקטורים עצמיים וערכים עצמיים
2	1.2 פולינום אופייני ומינימלי
3	2 זירדון
3	3 גראם-שמידט
3	3.1 הטלה
4	3.2 האלגוריתם עצמו
4	II מכפלות פנימיות ותבניות בלינאריות
4	4 מכפלה פנימית
4	4.1 הגדרות בסיסיות
4	4.2 תכונות
4	4.3 אורתוגונליות
4	4.3.1 הגדרות בסיסיות
5	5 סוגים של העתקות לינאריות
5	5.1 העתקות אוניטריות
5	5.2 העתקות אורתוגונליות
5	5.3 העתקות נורמליות
5	6 תבניות בלינאריות
5	6.1 תבניות בלינאריות סימטריות
6	6.1.1 תבנית ריבועית
6	6.2 תבניות בלינאריות אנטי-סימטריות

חלק I

אלגוריתמים

1 לכסון

העתקה לכסינה היא העתקה לינארית כך שקיים בסיס B כך ש- $[T]_B^B$ אלכסונית. אם T העתקה לכסינה, אז כל מטריצה מייצגת שלה גם לכסינה.

1.1 וקטורים עצמיים וערכים עצמיים

נגיד וקטור עצמי של A לערך עצמי λ להיות v כך ש- $Av = \lambda v$. באופן הפוך, ערך עצמי של A הוא λ כך שקיים וקטור עצמי $v \neq 0$ לערך עצמי λ .

מרחב הוקטורים העצמיים לכל λ הוא $V_\lambda = \{v \in V \mid Av = \lambda v\} = \text{Sols}(A - \lambda I)$. הסכום של V_λ שונים הוא סכום ישר.

משפט: A לכסינה \iff קיים בסיס $B \subseteq \mathbb{F}^n$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A .
משפט: במטריצה המלוכסנת, הערכים העצמיים הם האיברים שנמצאים על האלכסון עד כדי הסדר שלהם.

1.2 פולינום אופייני ומינימלי

נגדיר את $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ להיות הפולינום האופייני של A . מתקיים:

- זה פולינום מתוקן, כלומר המקדם המוביל הוא 1.
- λ ערך עצמי של $A \iff \lambda$ שורש של $p_A(\lambda)$ (כי זה אומר שהמטריצה אינה הפיכה עבור λ הזה כלומר יש פתרונות).
- אם A, B דומות אז $p_A = p_B$.

נגדיר את הריבוי האלגברי של α , ρ_α (רו), להיות כמות הפעמים ש- $(\lambda - \alpha)$ מופיע בפולינום $P_A(\lambda)$. כלומר אם הפולינום הוא $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3)$ אז $\rho_1 = 2, \rho_3 = 1$.
 בנוסף נגדיר את הריבוי הגיאומטרי של α , μ_α , להיות $\dim(V_\alpha)$.

משפט: לכל ערך עצמי λ , $\mu_\lambda \leq \rho_\lambda$.

משפט: עבור $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ הערכים העצמיים, ואם $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\rho_{\lambda_1}} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\rho_{\lambda_k}}$ מתפרק לגורמים לינאריים אז גם $\mu_{\lambda_1} + \dots + \mu_{\lambda_k} = n$.

המשפט המרכזי (תנאי לכסינות): תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$. לכסינה מעל \mathbb{F} אם ורק אם:

1. $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל \mathbb{F} .

2. לכל ערך עצמי λ של A , $\rho_\lambda = \mu_\lambda$.

נגדיר את הפולינום המינימלי של A , m_A , להיות הפולינום המתוקן היחיד כך ש- $\text{sp}(m_A)$ האידאל המאפס של A . מתקיים:

- m_A מחלק את p_A .
- לכל $q \in \mathbb{F}[x]$ פולינום אי פריק, $q \mid m_A \iff q \mid p_A$.
- לכן אם $p_A = \prod_{i \in I} q_i^{m_i}$ (אי פריקים) אז $m_A = \prod_{i \in I} q_i^{r_i}$ כאשר $1 \leq r_i \leq m_i$.

משפט: במטריצת בלוקים אלכסונית $A = \text{Diag}(A_1, \dots, A_n)$ מתקיים:

- $p_A = p_{A_1} \cdots p_{A_n}$.
- $m_A = \text{lcm}(m_{A_1}, \dots, m_{A_n})$.

2 ז'ירדון

נגדיר **בלוק ז'ורדן** להיות מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ואפילו (λ) , כלומר יש אלכסון של λ ומעליו אלכסון של 1.

צורת ז'ורדן היא מטריצת בלוקים אלכסונית כך שכל הבלוקים הם בלוקי ז'ורדן.

באופן פרקטי וחשוב:

1. חישוב הפולינום האופייני. נסמן את הערכים העצמיים ב- $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ואת הריבויים האלגבריים שלהם ב- $\rho_{\lambda_1}, \dots, \rho_{\lambda_k}$.

2. לכל λ_i :

(א) נחשב את $\ker(A - \lambda_i I), \dots, \ker(A - \lambda_i I)^{\rho_{\lambda_i}}$ עד שהמימד של זה מפסיק להשתנות (לא כולל). נסמן את המקום שבו המימד מפסיק להשתנות ב- j . זה גם הריבוי בפולינום המינימלי.

(ב) מ- j עד ל-1:

i. נשלים את $\ker(A - \lambda_i I)^{j-1}$ לבסיס של $\ker(A - \lambda_i I)^j$.

ii. יהי v שהוסף בהשלמה. נוסיף לבסיס את $(A - \lambda_i I)^j v, \dots, (A - \lambda_i I)^1 v, v$. נספור שצריך איבר אחד פחות מאלה (כלומר ניקח איבר אחד פחות מההשלמות של החזקות הקודמות).

3. אפשר להשתמש בבסיס שקיבלנו ישירות או לשים $P = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_n \end{pmatrix}$, ואז $J = P^{-1}AP$ (כי $P = [Id]_E^B$) ואכן $[A]_B^B = [Id]_B^E \cdot [A]_E^E \cdot [Id]_E^B$.

משפט:

- צורת ז'ורדן יחידה עד כדי הסידור של בלוקי הז'ורדן.
- μ_λ הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי כלשהו הוא מספר הבלוקים שלו.
- ρ_λ הריבוי האלגברי באופייני הוא סכום הגדלים של הבלוקים.
- הריבוי האלגברי במינימלי הוא המקסימום של הגדלים של הבלוקים.

3 גראם-שמידט

3.1 הטלה

נגדיר את ההטלה של וקטור v על U להיות:

$$P_U(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} \cdot b_i$$

כאשר b_1, \dots, b_n בסיס אורתוגונלי, בהמשך נראה שקיים כזה לכל מרחב נוצר סופית.

תכונות:

- $P_U^2 = P_U$ ולכן $\forall u \in UP_U(u) = u$.
- P_U העתקה לינארית, כך ש- $\ker(P_U) = \{v \in V \mid v \perp U\}$. נסמן גם ב- U^\perp .
- $(v - P_U(v)) \perp U$ לכל v .

משפט הקירוב הטוב ביותר: נגדיר $\text{dist}(v, U) = \text{dist}(v, P_U(v))$. אז מתקיים ש- $\text{dist}(v, U) = \inf_{u \in U} \text{dist}(v, u)$. כלומר שהמרחק הזה הוא המרחק הכי קצר מ- v ל- U .

3.2 האלגוריתם עצמו

אלגוריתם גראם-שמידט הוא האלגוריתם למציאת סדרה אורתונורמלית w_1, \dots, w_x ל- $\text{sp}(b_1, \dots, b_n)$ כך ש- $\text{sp}(b_1, \dots, b_n) = \text{sp}(w_1, \dots, w_x)$. נגדיר את b_1, \dots, b_n את האפסים. נגדיר את $w_1 = \frac{1}{\|b_1\|} b_1$ להיות המנורמל. לכל $i \in 2, \dots, n$, נגדיר $U = \text{sp}(b_1, \dots, b_{i-1})$ ואז נחשב $w'_i = b_i - P_U(b_i)$. אם $w'_i = 0$, נתעלם ממנו, אחרת נוסיף לסדרה w את w'_i את $\frac{1}{\|w'_i\|} w'_i$ המנורמל.

חלק II

מכפלות פנימיות ותבניות בילינאריות

4 מכפלה פנימית

4.1 הגדרות בסיסיות

יהי V מ"ו מעל \mathbb{C} או \mathbb{R} . מכפלה אוניטרית (נקרא "מכפלה פנימית" מעל \mathbb{R}) מעל V היא פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$ כך ש-:

1. לינאריות לפי הרכיב השמאלי: $\langle \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2, \underline{u} \rangle = \alpha \cdot \langle \underline{v}_1, \underline{u} \rangle + \beta \cdot \langle \underline{v}_2, \underline{u} \rangle$
2. הרמיטיות: $\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = \overline{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}$
3. חיוביות: $\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \in \mathbb{R} \wedge \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \geq 0$
4. אפיון 0: $\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$

4.2 תכונות

משפט לגבי הרכיב הימני:

- $\langle \underline{u}, \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v}_1 \rangle + \langle \underline{u}, \underline{v}_2 \rangle$ חיבוריות לפי הימני.
- $\langle \underline{v}, \alpha \underline{u} \rangle = \bar{\alpha} \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle$ כמו הומוגניות ברכיב הימני, אבל עם הצמוד.
- $\langle \underline{v}, \underline{0} \rangle = 0$ מתאפס גם לפי הרכיב הימני.
- לכן יש לנו כמעט לינאריות לפי הרכיב הימני, אבל עם הסקלר הצמוד.
- ומכאן נובע: $\langle \sum_{i=1}^n a_i \underline{v}_i, \sum_{j=1}^m b_j \underline{u}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \bar{b}_j \langle \underline{v}_i, \underline{u}_j \rangle$

4.3 אורתוגונליות

4.3.1 הגדרות בסיסיות

(v_1, \dots, v_n) נקראת אורתוגונלית אם $\forall i \neq j. v_i \perp v_j$ כלומר $\langle v_i, v_j \rangle = 0$.

לדוגמה $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ סדרה אורתוגונלית עם המכפלה האוניטרית הסטנדרטית.

נגדיר וקטור יחידה להיות v כך ש- $\|v\| = 1$. אם $\underline{v} \neq 0$ אז $\frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \underline{v}$ וקטור יחידה, שנקרא גם הוקטור המנורמל. אז סדרה אורתונורמלית היא סדרה אורתוגונלית של וקטורי יחידה.

5 סוגים של העתקות לינאריות

5.1 העתקות אוניטריות

העתקה מעל \mathbb{C} המקיימת $(Tu, Tv) = (u, v)$ נקראת העתקה אוניטרית. היא משמרת אורכים וזוויות, כלומר $\|Tv\| = \|v\|$.

משפט: כל דבר פה שקול לכך ש- T אוניטרית.

1. T מעתיקה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי.
2. $T^*T = I$. לכן אם T אוניטרית אז היא הפיכה כך ש- $T^* = T^{-1}$.
3. T נורמלית וכל הערכים העצמיים על מעגל היחידה.

5.2 העתקות אורתוגונליות

דומה אבל מעל \mathbb{R} .

משפט: T אורתוגונלית $\iff T$ מעתיקה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי. בפרט אם T אוניטרית היא הפיכה.

משפט: יהי V מרחב וקטורי, מעל \mathbb{R} או \mathbb{C} , עם מכפלה פנימית. התנאים הבאים שקולים:

1. $TT^* = T^*T = I$, כלומר $T^* = T^{-1}$.
2. לכל u, v , $(Tu, Tv) = (u, v)$, כלומר אוניטרית/אורתוגונלית לפי השדה.
3. לכל v , $\|Tv\| = \|v\|$, כלומר T שומרת על אורכים.

5.3 העתקות נורמליות

העתקה נקראת נורמלית אם $TT^* = T^*T$.

משפט: מטריצה נורמלית ניתנת ללכסון אוניטרי, כלומר קיים בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של T ו- $T = P^*DP$ כאשר D אלכסונית.

משפט: המרחבים העצמיים ניצבים זה לזה.

טענה: $|T(v)| = |T^*(v)|$.

6 תבניות בילינאריות

הגדרה: תבנית בילינארית היא $f : (V \times W) \rightarrow \mathbb{F}$ שלילנארית על פי הרכיב השמאלי ועל פי הרכיב הימני.

נסמן את קבוצת התבניות הבילינאריות ב- $\text{Bil}(V, W)$, או $\text{Bil}(V) := \text{Bil}(V, V)$.

מטריצה מייצגת: נגדיר $([f]_{B,C})_{i,j} = f(b_i, c_j)$. מתקיים $f(v, w) = [v]_B^t \cdot [f]_{B,C} \cdot [w]_C$ לכל v, w .

מעבר בסיסים: $[f]_{B',C'} = ([Id]_B^{B'})^t \cdot [f]_{B,C} \cdot [Id]_C^{C'}$.

הגדרה: נגדיר את הדרגה $\text{rk}(f)$ להיות $\text{rk}([f]_{B,C})$ עבור B, C בסיסים כלשהם.

הגדרה: f נקראת אי מנוונת אם $\text{rk} f = \dim V = \dim W$. לכן גם $[f]_{B,C}$ הפיכה.

6.1 תבניות בילינאריות סימטריות

תבנית בילינארית תקרא סימטרית אם לכל v, w , $f(v, w) = f(w, v)$. המטריצה המייצגת היא אלכסונית.

משפט ההתמדה של סילבסטר: מעל \mathbb{R} . תהי f תבנית בילינארית סימטרית כך ש- $\text{rk} f = r \leq n = \dim V$. אז קיים בסיס $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ כך ש- $[f]_{B,B}$ אלכסונית, ועל האלכסון יש רק $0, -1, 1$. הכמויות שלהם אינן תלויות בבחירת הבסיס.

טענה: תבנית בילינארית חיובית לחלוטין וסימטרית היא בעצם מכפלה פנימית.

6.1.1 תבנית ריבועית

תהי $f \in \text{Bil}(V)$ תבנית סימטרית. נגדיר $Q(v) = f(v, v)$ ונקרא לה תבנית ריבועית. כל תבנית ריבועית מיוצגת ביחידות על ידי תבנית בילינארית סימטרית.

6.2 תבניות בילינאריות אנטי-סימטריות

תבנית בילינארית תקרא סימטרית אם לכל v, w , $f(v, w) = f(w, v)$. המטריצה המייצגת היא:

$$\text{Diag} \left(\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}^{\frac{1}{2} \text{rk}(f) \text{ times}}, 0, \dots, 0 \right)$$

בפרט $\text{rk} f$ זוגי, ומספר האפסים הוא $n - \text{rk} f$.