סיכומי הרצאות - אלגברה לינארית 2א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

1 דברים חשובים מלינארית 1 2

1.1 מטריצות דומות 2

2 לכסון 2

2.1 וקטורים עצמיים 2

3 פולינום אופייני 2

4 אינווריאנטיות 3

5 מרחב מנה 3

6 חוגים 4

6.1 הגדרות מלינארית 1 4

6.1.1 חבורה 4

6.1.2 חוג 4

6.1.3 שדה 4

6.2 הגדרות חדשות מלינארית 2 5

6.2.1 חוגי הפולינומים והמטריצות 5

6.2.2 הומומורפיזמים 5

6.2.3 חילוק בחוגים 5

6.2.4 חברים 5

6.3 אידאלים 5

6.4 תחום שלמות 6

6.5 תחום ראשי 6

7 קבוצת הפולינומים 6

1 דברים חשובים מלינארית 1

1.1 מטריצות דומות

יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, נאמר כי A ו־B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש־$A = P^{-1} \cdot B \cdot P$.

משפט: נתון $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ריבועיות, הבאים שקולים:

1. A, B דומות.
2. קיימת $T : V \to V$ ובסיסים C, C' של V כך ש־$[T]_C = A, [T]_{C'} = B$.
3. לכל $T : V \to V$, אם קיים בסיס C של V כך ש־$[T]_C = A$, אז קיים בסיס C' של V כך ש־$[T]_{C'} = B$.

ואם A, B דומות אז:

1. $\mathrm{Rank}(A) = \mathrm{Rank}(B), \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$.
2. $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ כאשר $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} (A)_{i,i}$.
3. $\det(A) = \det(B)$.

2 לכסון

נגדיר מטריצה אלכסונית להיות מטריצה ריבועית $A \in M_n(\mathbb{F})$ שבה עבור $i \neq j$, $A_{i,j} = 0$. נסמן אותן בתור $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

מטריצה לכסינה היא מטריצה שדומה למטריצה אלכסונית, והעתקה לכסינה היא העתקה לינארית כך שקיים בסיס B כך ש־$[T]_B^B$ אלכסונית.

אם T העתקה לכסינה (כלומר מטריצה מייצגת כלשהי לכסינה) אז כל מטריצה מייצגת שלה היא לכסינה.

2.1 וקטורים עצמיים

נגדיר וקטור עצמי של A לערך עצמי λ להיות $\bar{v}$ כך ש־$A\bar{v} = \lambda\bar{v}$. באופן הפוך, ערך עצמי של A הוא λ כך שקיים וקטור עצמי $\bar{v} \neq \bar{0}$ של A לערך עצמי λ.

הערכים העצמיים הם האיברים שנמצאים על האלכסון במטריצה האלכסונית שדומה ל־A, עד כדי סידורם על האלכסון.

המרחב של הוקטורים העצמיים הוא $V_\lambda = \{\bar{v} \in V \mid A\bar{v} = \lambda\bar{v}\}$, שזה שווה בעצם ל־$\mathrm{Sols}(A - \lambda I)$. זה תמ"ו של V.

הסכום של ה־V_λ השונים הוא סכום ישר.

משפט 1.2 A לכסינה $\iff$ קיים בסיס $B \subseteq \mathbb{F}^n$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A.

3 פולינום אופייני

נסמן ב־$P_A(\lambda) = |\lambda I - A|$ את הפולינום האופייני של A. מתקיים:

- זה פולינום מתוקן, כלומר המקדם המוביל הוא 1.

- λ ערך עצמי של A $\iff$ λ שורש של $P_A(\lambda)$.
- אם A,B דומות אז $P_A = P_B$.

משפט 1.3 המשפט המרכזי: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$.
נגדיר את הריבוי האלגברי של α, ρ_α (רו), להיות כמות הפעמים ש־$(\lambda-\alpha)$ מופיע בפולינום $P_A(\lambda)$. כלומר אם הפולינום הוא $P_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-3)^2$ אז $\rho_1 = 1, \rho_3 = 2$.

בנוסף נגדיר את הריבוי הגיאומטרי של α, μ_λ, להיות $\dim(V_\lambda)$.
A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אמ"ם:

1. $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$.
2. לכל ערך עצמי λ של A, $\rho_\lambda = \mu_\lambda$.

משפט 2.3 לכל ערך עצמי λ, $\mu_\lambda \le \rho_\lambda$.

משפט 3.3 עבור $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ הערכים העצמיים, $\rho_{\lambda_1}+\cdots+\rho_{\lambda_k} \le n$, ואם $P_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים לינאריים אז גם $\rho_{\lambda_1}+\cdots+\rho_{\lambda_k} = n$.

4 אינווריאנטיות

תהא $T: V \to V$ העתקה לינארית, תת מרחב $U \subseteq V$ נקרא T־אינווריאנטי (T־שמור) אם $T[U] \subseteq U$, או באופן שקול אם T מצומצם ל־U ט"ל.

דוגמאות למרחבים T־אינווריאנטים הן $\ker(T), Im(T)$ ו־V_λ לכל λ.

בנוסף נגדיר תת מרחב $U \subseteq V$ אי פריק להיות תת מרחב T־אינווריאנטי כך שלא קיימים $W_1, W_2 \neq \{\bar{0}\}$ T־אינווריאנטים שמקיימים $U = W_1 \oplus W_2$.

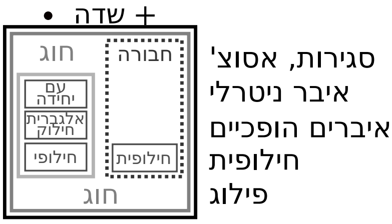
מטריצה מייצגת: אם $U \subseteq V$ T־אינווריאנטי, יהי B בסיס של U. יהי C השלמה לבסיס של V. אז $[T]_{B\frown C} = \left(\begin{array}{c|c} [T\lceil_U]_B & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$. זה כי המקדמים שלמטה לא מופיעים ב־U ולכן גם לא בתמונה של U (כי היא מוכלת ב־U).
ואם $V = U_1 \oplus U_2$ כאשר U_1, U_2 T־אינווריאנטיים אז $[T]_{B_1\frown B_2} = \left(\begin{array}{c|c} [T\lceil_U]_{B_1} & 0 \\ \hline 0 & [T\lceil_U]_{B_2} \end{array}\right)$.
אזי הפולינום $P_{T\lceil_U}$ מחלק את P_T, ואם $V = U_1 \oplus U_2$ עבור U_1, U_2 T־אינווריאנטיים אז $P_T = P_{T\lceil_{U_1}} \cdot P_{T\lceil_{U_2}}$.
בנוסף באופן מוכלל אם $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ כאשר כל V_i הוא T־אינווריאנטי אז יהי הבסיס $B = \bigvee_{i=1}^{n} B_i$, מתקיים $[T]_B = \mathrm{Diag}\left([T\lceil_{V_1}]_{B_1}, \dots, [T\lceil_{V_n}]_{B_n}\right)$, ו־$P_T = \prod_{i=1}^{n} P_{T\lceil_{U_i}}$.

5 מרחב מנה

נגדיר את יחס השקילות הבא: $v-u \in W \iff v \sim u$ עבור $u,v \in V$ ו־W כלשהו.
את קבוצת המנה, V/W, שהיא הקבוצה של $[v] = \{u \in V \mid u \sim v\}$ לכל v, ניתן בעצם להגדיר לפי פעולת חיבור $[v]+[u] = [v+u]$ וכפל בסקלר $\lambda \cdot [v] = [\lambda \cdot v]$.
זה יוצא מרחב וקטורי, שמקיים גם $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$.

6 חוגים

6.1 הגדרות מלינארית 1



6.1.1 חבורה

$\langle G, *\rangle$ נקראת חבורה אם:

1. G סגורה לפעולה $*$.
2. $*$ פעולה אסוצייטיבית.
3. קיים איבר יחידה (ניטרלי) לפעולה, כלומר $\exists e\in G.\forall g\in G.e*g=g*e=g$. האיבר הזה יחיד ומסומן e_G.
4. קיים איבר הופכי, כלומר $\forall g\in G.\exists h\in G.g*h=h*g=e$ כאשר e איבר יחידה. האיבר ההופכי של g מסומן g^{-1}.

6.1.2 חוג

$\langle R, *, +\rangle$ נקראת חוג אם:

1. $\langle R, +\rangle$ חבורה חילופית.
2. $*$ פעולה אסוצייטיבית על R.
3. מתקיים חוג הפילוג:

$$\forall a,b,c\in R.a*(b+c)=a*b+a*c$$
$$(b+c)*a=b*a+c*a$$

בנוסף יש <u>חוג חילופי</u>, (הכפל חילופי), <u>חוג עם יחידה</u> (קיים איבר ניטרלי לכפל), <u>ותחום שלמות</u> הוא חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0.

6.1.3 שדה

חוג חילופי עם יחידה כך ש־$\langle R\setminus\{0\}, *\rangle$ חבורה חילופית. <u>שדה הוא תחום שלמות</u>, ותחום שלמות <u>סופי</u> הוא שדה.

6.2 הגדרות חדשות מלינארית 2

6.2.1 חוגי הפולינומים והמטריצות

נגדיר את <u>חוג הפולינומים מעל חוג R</u> להיות $R[x] \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. נגדיר בנוסף $\deg(0) = \infty, \deg(p) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \neq 0\}$.

- מתקיימת נוסחת המעלות: $\deg(p+q) \leq \max(\deg(p), \deg(q)), \deg(p \cdot q) \leq \deg(p) + \deg(q)$
- אם R תחום שלמות אז $R[x]$ תחום שלמות.
- **חילוק בחוג הפולינומים:** יהי R חוג חילופי, ו־$f, g \in R[x]$ פולינומים כך שהמקדם המוביל של g הפיך ב־R. אז קיימים ויחידים $q, r \in R[x]$ כך ש־$f = q \cdot g + r$.

נגדיר את <u>חוג המטריצות הריבועיות</u> להיות $M_n(R)$ כאשר R חוג, לפי פעולות כפל וחיבור של מטריצות. זה חוג לא חילופי.

6.2.2 הומומורפיזמים

הומומורפיזם של חוגים זו פונקציה $\varphi : R_1 \to R_2$ כך ש־$\varphi(1_{R_1}) = 1_{R_2}$, ו־$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ ו־ $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ (ולכן גם $\varphi(0_{R_1}) = 0_{R_2}$).

יש למשל הומומורפיזם בין $M_n(R)[x]$ לבין $M_n(R[x])$.

6.2.3 חילוק בחוגים

יהי R חוג. יהיו $a, b \in R$, נאמר כי $a \mid b$ אם $\exists c \in R. b = a \cdot c$.

בנוסף נקרא ל־$a \in R$ הפיך ב־R אם קיים $b \in R$ כך ש־$a \cdot b = 1 = b \cdot a$. בנוסף ההופכי יסומן $b = a^{-1}$ והוא יחיד.

ונסמן את קבוצת <u>האיברים ההפיכים ב־R</u> בסימון <u>R^x</u>.

6.2.4 חברים

נאמר ש־<u>a, b חברים</u> אם קיים $u \in R^x$ כך ש־$a = ub$. זה יחס שקילות.

6.3 אידאלים

יהי R חוג חילופי עם יחידה, $I \subseteq R$ נקרא אידאל אם:

1. $I \neq \emptyset$.
2. I סגור לחיבור.
3. I סגור לכפל ב<u>איבר מ־R</u>.

או באופן שקול I תת מרחב וקטורי של מרחב ה־nיות R^1. דוגמה לאידאל היא $\mathbb{Z}_{even}$.

האידאל שנוצר ע"י $X \subseteq R$ הוא $\operatorname{sp}(X)$ - והוא תמיד אידאל כי זה מרחב וקטורי ב־R^1.

מתקיים:

- $a \mid b \iff \operatorname{sp}(b) \subseteq \operatorname{sp}(a)$

- חברים a,b $\iff$ $\mathrm{sp}(a)=\mathrm{sp}(b)$
- a הפיך $\iff$ $\mathrm{sp}(a)=R$.
- $I\subseteq R$
- אידאל $\iff$ קיים הומומורפיזם $\varphi:R\to S$ (S חוג) כך ש־$\ker\varphi=I$.

6.4 תחום שלמות

תחום שלמות הוא חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0.

בחוג חילופי עם יחידה (לא דרוש שאין מחלקי 0) מתקיים:

- $0\neq a\in R$ יקרא <u>ראשוני</u> $\iff$ $(a\mid b\cdot c\implies(a\mid c\vee a\mid b))$
- $a\in R$ יקרא <u>אי־פריק</u> $\iff$ $(a=b\cdot c\implies b\in R^x\vee c\in R^x)$

בתחום שלמות מתקיים:

- אם $a\in R$ ראשוני אז a אי־פריק.

6.5 תחום ראשי

תחום שלמות R נקרא <u>תחום ראשי</u> אם כל אידאל $I\subseteq R$ נוצר על ידי איבר, כלומר קיים לו $a\in R$ כך ש־$I=\mathrm{sp}(a)$.

נגדיר לתחום ראשי R ואיברים $r_1,\ldots,r_k\in R$:

$$\gcd(r_1,\ldots,r_k)=\{d\in R\mid \mathrm{sp}(d)=(r_1,\ldots,r_k)\}$$

בנוסף מתקיים:

- עבור d כלשהו ב־$\gcd(r_1,\ldots,r_k)$, $\gcd(r_1,\ldots,r_k)=\{d\cdot u\mid u\in R^x\}$
- $d\in\gcd(r_1,\ldots,r_k)\iff(\forall 1\leq i\leq k.d\mid r_i)\wedge(q\mid r_1,\ldots,r_k\implies q\mid d)$
- $a,b\in R$ יקראו <u>זרים</u> אם $\gcd(a,b)=1$ או באופן שקול 1 צירוף לינארי של a,b.
- $a\in R$ אי־פריק $\iff$ ראשוני.

נגדיר בנוסף $\mathrm{lcm}(r_1,\ldots,r_k)=\{d\in R\mid \mathrm{sp}(d)=\bigcap_{i=1}^{r}r_i\}$, lowest common multiplier.

7 קבוצת הפולינומים

אם $T:V\to V$ מעל שדה $\mathbb{F}$ ו־$p\in\mathbb{F}[x]$ הגדרנו $p(T)\in\mathrm{Hom}(V,V)$.

אם $A\in M_n(\mathbb{F})$ ו־$p\in\mathbb{F}[x]$ אז $p(A)$ זו מטריצה $p(A)\in M_n(\mathbb{F})$.

הקשר בין $[T]_B$ ל־$[p(T)]_B$ הוא ש־$\underline{p([T]_B)=[p(T)]_B}$.

מתקיים בנוסף:

- אם λ ערך עצמי של A אז $p(\lambda)$ ערך עצמי של $p(A)$.
- אם A,B דומות אז $p(A)$ ו־$p(B)$ דומות, ליתר דיוק, $p(QAQ^{-1})=Qp(A)Q^{-1}$.