

1 מטריצות בסיסיות

2 דירוג ודירוג קנוני

1.1 כפל מטריצה במטריצה

2.1 הגדרות

הגדרה 1.1 יהא R חוג ויהיו $A \in M_{n \times m}(R), B \in M_{m \times p}(R)$ מטריצות. נגדיר כפל מטריצות $(A \cdot B) \in M_{n \times p}(R)$ בצורה הבאה:

בצורה מדורגת:

1. משוואות 0 (מהצורה $0 = b$) נמצאות למטה.

2. המשתנה הפותח בכל משוואה נמצא מימין ממש למשתנים הפותחים במשוואות מעליו.

משתנה חופשי הוא משתנה שלא מקדם פותח של אף שורה.

$$(A \cdot B)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

בנוסף, בצורה מדורגת קנונית:

1.1.1 טענות לגבי כפל מטריצות:

3. המקדם של כל משתנה פותח הוא 1

4. לכל משתנה פותח של משוואה, המקדם של המשתנה בשאר המשוואות הוא 0.

לכל מטריצה קיימת צורה מדורגת קנונית **יחידה** ששקולה לה.

משפט 2.1 $A \cdot B = \left(\begin{array}{c|c|c} A \cdot C_1(B) & \cdots & A \cdot C_n(B) \end{array} \right)$

משפט 3.1 $A \cdot B = \left(\begin{array}{ccc} - & R_1(A) \cdot B & - \\ & \vdots & \\ - & R_n(A) \cdot B & - \end{array} \right)$

3 בוחן תת מרחב

1. **אסוציאטיביות הכפל:** $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

2. **חוק הפילוג.**

$U \subseteq F^n$ היא תת מרחב אמ"מ:

3. **הוצאת סקלר:** $A \cdot (\alpha \cdot B) = \alpha \cdot (A \cdot B)$.

1. U סגורה לחיבור.

4. **כפל ב-0 ו-1:** $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0, A \in M_{m \times n}(\mathbb{F}), I_m \cdot A = A, A \cdot I_n = A$

2. U סגורה לכפל בסקלר.

3. $\bar{0} \in U$. ניתן להחליף את התנאי ב- $U \neq \emptyset$.

1.2 פעולות אלמנטריות

נובע מכאן גם שחיתוך של תתי מרחבים הוא תת מרחב.

1. להחליף סדר בין משוואות. $R_i \leftrightarrow R_j$.

2. להכפיל משוואה בקבוע. $R_i \rightarrow \alpha \cdot R_i$.

3. לחבר משוואות. $R_i \rightarrow R_i + R_j$.

4 צירופים לינאריים

הגדרה 1.4 סדרת m יויות $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) \in (\mathbb{F}^m)^k$ תקרא בלתי תלויה לינארית (בת"ל) אם לכל $\bar{b} \in \mathbb{F}^m$ יש לכל היותר פתרון אחד למשוואה $\sum_{i=1}^k x_i \bar{v}_i = \bar{b}$.

כולן משמרות את הפתרונות של המטריצה, ואת המרחב $R(A)$ ואת $\text{rank}(A)$.

משפט 4.1 יהיו A, B מטריצות כך ש- $A \cdot B^{-1}$ מוגדר, ותהא φ פעולה אלמנטרית. אזי:

$$\varphi(A \cdot B) = \varphi(A) \cdot B$$

משפט 2.4 סדרת וקטורים $(v_1, \dots, v_m) \subseteq \mathbb{F}^n$ בלתי תלויה לינארית \iff כל איבר אינו צירוף לינארי של קודמיו.

הגדרה 5.1 המטריצה האלמנטרית: לכל פעולה אלמנטרית φ על מטריצות עם m שורות, נגדיר מטריצה אלמנטרית E_φ על ידי $E_\varphi := \varphi(I_m)$.

לכל מטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, ופעולה אלמנטרית φ , מתקיים ש- $\varphi(A) = E_\varphi \cdot A$.

הגדרה 3.4 נגדיר את מרחב התלויות של $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ להיות:

$$LD((\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \mid \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k = 0 \right\}$$

בנוסף מטריצות אלמנטריות הפיכות, והמטריצה של הפעולה ההופכית של φ היא $(E_\varphi)^{-1}$.

בנוסף $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ בת"ל $\iff LD(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) = \{0\}$.

4.1 בסיס

משפט 3.5 תהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$

1. A הפיכה משמאל \iff למערכת $A \cdot \bar{x} = 0$ יש פתרון יחיד (כלומר סדרת העמודות של A בת"ל, ולכן $m \geq n$).

2. A הפיכה מימין \iff למערכת $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ יש פתרון לכל $\bar{b} \in \mathbb{F}^m$ (כלומר סדרת העמודות של A פורשת, ו- $m \leq n$).

3. A הפיכה \iff למערכת $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ יש פתרון יחיד לכל $\bar{b} \in \mathbb{F}^m$ (כלומר סדרת העמודות של A בסיס, ולכן $m = n$).

בפרט מטריצה הפיכה היא ריבועית.

טענות:

- אם במטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ יש שורת אפסים אז A לא הפיכה מימין.
- אם A הפיכה A^T הפיכה.
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- אם $A \in M_{m \times k}(\mathbb{F}), B \in M_{k \times n}(\mathbb{F})$ הפיכות, אז $A \cdot B$ הפיכה ו- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

5.1 תנאים שקולים להפיכות במטריצה ריבועית

- A שקולת שורות ל- I_n .
- קיים $\bar{b} \in \mathbb{F}^n$ כך שלמערכת $A\bar{x} = \bar{b}$ יש פתרון יחיד.
- לכל $\bar{b} \in \mathbb{F}^n$ למערכת $A\bar{x} = \bar{b}$ יש פתרון יחיד.
- A הפיכה משמאל - כלומר עמודות A בת"ל. אפשר גם שורות לפי 6.
- A הפיכה מימין - כלומר עמודות A פורשות. אפשר גם שורות לפי 6.
- A^T הפיכה.

ובנוסף A, B ריבועיות והפיכות $\iff A \cdot B$ הפיכה.

6 דטרמיננטה

פיתוח דטרמיננטה לפי עמודה j :

$$\det_j^{(n)}(A) = \sum_{k=1}^n (A)_{k,j} \cdot (-1)^{k+j} \cdot \det^{(n-1)}(A_{(k,j)})$$

טענות:

1. לינאריות לפי שורה:

- הפיכה משמאל:** אם קיימת מטריצה $B \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ כך ש- $B \cdot A = I_n$.
- הפיכה מימין:** אם קיימת מטריצה $B \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ כך ש- $A \cdot B = I_m$.
- הפיכה:** אם קיימת מטריצה $B \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ כך ש- $B \cdot A = I_n$ וגם $B = I_m$. קיימת הופכית יחידה.

הגדרה 4.4 (משפט 2 מתוך 3) יהי \mathbb{F} שדה, B תת קבוצה של \mathbb{F}^n . אז B נקראת **בסיס** של \mathbb{F}^n אם שניים מהתנאים הבאים מתקיימים:

1. B בת"ל.

2. B פורשת את \mathbb{F}^n .

3. $m = n$.

כל שניים מוכיחים גם את השלישי.

התנאים הבאים שקולים לכך ש- B בסיס:

- בת"ל מקסימלית - B בת"ל וכל קבוצה המכילה ממש את B הינה תלויה לינארית.
- פורשת מינימלית - B פורשת וכל קבוצה שמוכלת ממש ב- B אינה פורשת.
- לכל $v \in \mathbb{F}^n$ יש הצגה יחידה כצירוף של וקטורים ב- B .

4.1.1 למת ההחלפה של ריס

יהי V מ"ו, ותהא (v_1, \dots, v_n) סדרה פורשת ב- V , ו- (u_1, \dots, u_m) סדרה בת"ל. אז:

- קיימים $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ כך ש- $(u_1, \dots, u_m) \subset (v_j \mid j \notin \{i_1, \dots, i_m\})$ פורשת.
- $m \leq n$.

כלומר אפשר להחליף איברים כלשהם של סדרה פורשת באיבריה של כל סדרה בת"ל.

5 שחלוף והפיכות

נגדיר את השחלוף של A, A^T , להיות המטריצה כך ש- $(A^T)_{i,j} = A_{j,i}$. אם $A = A^T$, נגיד ש- A סימטרית.

משפט 1.5 חוקי Transpose:

- חיבור:** $(A + B)^T = A^T + B^T$ (אם החיבור מוגדר).
- כפל בסקלר:** $(\alpha A)^T = \alpha (A^T)$.
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

הגדרה 2.5 מטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ תיקרא:

- הפיכה משמאל:** אם קיימת מטריצה $B \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ כך ש- $B \cdot A = I_n$.
- הפיכה מימין:** אם קיימת מטריצה $B \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ כך ש- $A \cdot B = I_m$.
- הפיכה:** אם קיימת מטריצה $B \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ כך ש- $B \cdot A = I_n$ וגם $B = I_m$. קיימת הופכית יחידה.

2. נרמול: $N(I) = 1$.

7 תמורות

3. אם φ פעולה אלמנטרית אז $\det(\varphi(A)) = x_\varphi \cdot \det(A)$ כאשר אם φ החלפת שורה $x_\varphi = -1$, אם φ כפל בסקלר λ אז $x_\varphi = \lambda^{-1}$, ואם φ הוספת שורה אז 1.

7.1 הגדרות

פורמלית, S_n זה קבוצת הפונקציות החח"ע ועל $J_n \rightarrow J_n$ כאשר $J_n = \{1, \dots, n\}$.

סימונים לתמורות

1. $\sigma : J_n \rightarrow J_n$ חח"ע ועל.

2. רישום ישיר: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \end{pmatrix}$.

הגדרה 1.7 (מטריצה תמורה): מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ נקראת מטריצת תמורה אם קיימת תמורה $\sigma \in S_n$ כך

$$P(\sigma) = A = \begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\sigma(1)} & \dots & e_{\sigma(n)} \\ | & & | \end{pmatrix}^{-1}$$

7.2 sign

הגדרה 2.7 עבור $\sigma \in S_n$, $\text{sign}(\sigma)$ (הסיגנטורה של σ) מוגדרת כך $\text{sign}(\sigma) = |P(\sigma)|$.

הגדרה שקולה: תהא $\sigma \in S_n$ תמורה. לכל $1 \leq i \leq n$ נגדיר את $N(\sigma) = |\{(i, j) \mid j > i \wedge \sigma(j) < \sigma(i)\}|$ ו- $N(\sigma) = |\{(i, j) \mid j > i, \sigma(i) < \sigma(j)\}|$ (זו $z_\sigma(i)$ ו- $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$). נגדיר את sign להיות: $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$.

משפט 3.7 $\text{sign}(\sigma\tau) = \text{sign}(\sigma) \cdot \text{sign}(\tau)$.

8 מרחב וקטורי

8.1 הגדרות

הגדרה 1.8 (מרחב וקטורי): מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} זו שלשה $(V, +, \cdot)$ כך ש:

1. $\langle V, + \rangle$ חבורה חילופית.

2. $V \times \mathbb{F} \rightarrow V$ כפל בסקלר, פעולה שמקיימת:

(א) אסוציאטיביות. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall \bar{v} \in V, \beta \cdot (\alpha \cdot \bar{v}) = (\beta \cdot \alpha) \cdot \bar{v}$.

(ב) $\forall \bar{v} \in V, 1_{\mathbb{F}} \cdot \bar{v} = \bar{v}$.

3. חוק הפילוג:

(א) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall \bar{v} \in V, (\alpha + \beta) \cdot \bar{v} = \alpha \cdot \bar{v} + \beta \cdot \bar{v}$.

(ב) $\forall a \in \mathbb{F}, \forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V, a \cdot (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = a \cdot \bar{v}_1 + a \cdot \bar{v}_2$.

9 בסיס האמל

• תת קבוצה $X \subseteq V$ נקראת בת"ל אם לכל $v_1, \dots, v_n, v_1, \dots, v_n \in X$ כלומר אין צירוף לינארי לא טריויאלי של איברים מ- X שיוצא 0.

4. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

5. אם A לא הפיכה אז $\det(A) = 0$. ואם A הפיכה אז $\det(A) \neq 0$ ו- $\det(A) = x_{\varphi_1} \cdot \dots \cdot x_{\varphi_n}$ כאשר $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ פעולות הדירוג.

6. $\det(A) = \det(A^T)$. לכן אפשר גם להפעיל פעולות עמודה, שהן פעולות שורה על השחלוף.

7. במטריצה משולשית עליונה או תחתונה $\forall j < i, (A)_{i,j} = 0$ או $(A)_{i,j} = 0, \forall i < j$, הדטרמיננטה היא מכפלת האלכסון.

משפט 1.6 (דטרמיננטה לפי תמורות):

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n (A)_{i, \sigma(i)}$$

כלל קרמר: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה, אז לכל $\bar{b} \in \mathbb{F}^n$ למערכת $A\bar{x} = \bar{b}$ יש פתרון יחיד והפתרון הינו: (שתי דרכים לתאר אותו)

$$1. \bar{c} = A^{-1} \cdot \bar{b}$$

$$2. c_j = \frac{|B_j|}{|A|} \text{ כאשר } B_j = (C_1(A), \dots, C_{j-1}(A), \bar{b}, \dots, C_n(A))$$

6.1 מטריצת ונדרמונד

עבור מטריצה מהצורה הבאה:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \dots & \alpha_m^{n-1} \end{pmatrix}$$

אז הדטרמיננטה היא $\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$.

6.2 מטריצה מוצמדת

נגדיר: $(\text{adj}(A))_{i,j} = (-1)^{j+i} \cdot \det(A_{(j,i)})$.

מתקיים:

$$1. (\text{adj}(A))^T = \text{adj}(A^T)$$

2. אם A לא הפיכה אז: מטריצת האפס $A \cdot \text{adj}(A) = \text{adj}(A) \cdot A =$

$$3. A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A) \text{ אז } A \cdot \text{adj}(A) = I \cdot \det(A)$$

- תת קבוצה $X \subseteq V$ נקראת פורשת אם $\text{sp}(X) = V$.
- קבוצה $X \subseteq V$ נקראת בסיס האמל אם היא בת"ל ופורשת.

10 מימד

הגדרה 1.10 (מימד): יהי V מ"ו מעל \mathbb{F} בעל בסיס, המימד של V הינו עוצמת בסיס כלשהו (והמימד יחיד). מסמנים כ" $\dim_{\mathbb{F}}(V)$.

משפט 2.10 (משפט המימדים הראשון):

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

מסקנה: אם $U \subseteq V$ ו- $\dim U = \dim V$, אז $U = V$.

משפט 3.10 (משפט המימדים השני): עבור $T: V \rightarrow U$,

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T))$$

11 סכום ישר

הגדרה: נאמר כי $U_1 + \dots + U_n$ הוא סכום ישר $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ אם לכל $\bar{v} \in U_1 + \dots + U_n$ קיימת ויחידה סדרה $\bar{v} = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i$ כך ש- $\bar{u}_i \in U_i$ ו- $\bar{u}_i = 0$ נקרא גם הצגה יחידה.

משפט האיפיון: יהיו $U_1, \dots, U_n \subseteq U$ תמ"ו, הבאים שקולים:

$$1. U_1 \oplus \dots \oplus U_n$$

$$2. \text{לכל סדרות בת"ל } B_i \text{ ב-} U_i, \text{ השרשור } B_1 \frown B_2 \frown \dots \frown B_n \text{ בת"ל.}$$

$$3. \text{לכל } 1 \leq i \leq n, U_i \cap \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n U_j \right) = \{0\} \text{ בפרט אם } n=2, U_1 \cap U_2 = \{0\}.$$

12 מרחב העמודות והשורות

הגדרה: תהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, נגדיר:

$$1. \text{מרחב הפתרונות: } \text{Sols}(A) = \{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = \bar{0}\}$$

$$2. \text{מרחב העמודות: } C(A) = \text{sp}(C_1(A), \dots, C_n(A))$$

$$3. \text{מרחב השורות: } R(A) = \text{sp}(R_1(A), \dots, R_m(A))$$

משפט 1.12 $\dim(R(A)) = \dim(C(A))$ יסומן גם כ- $\text{Rank}(A)$.

$$\text{בנוסף נסמן } \mathcal{N}(A) = \dim(\text{Sols}(A))$$

משפט 2.12 (משפט הדרגה): פעולות דירוג משמרות את $R(A)$ (ולכן גם את $\text{Rank}(A)$), אבל לא בהכרח משמרות את $C(A)$.

$$\text{(משפט הדרגה והאפסות): } \text{Rank}(A) + \mathcal{N}(A) = n$$

מסקנה: A הפיכה $\iff \text{Rank}(A) = n$

חוקי rank: לכל מטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$,

$$1. \text{Rank}(A) \leq \min(n, m)$$

$$2. \text{Rank}(A \cdot B) \leq \min(\text{Rank}(A), \text{Rank}(B))$$

$$3. \text{Rank}(A + B) \leq \text{Rank}(A) + \text{Rank}(B)$$

$$4. \text{אם } A \text{ הפיכה אז } \text{Rank}(A \cdot B) = \text{Rank}(B), \text{Rank}(B \cdot A) = \text{Rank}(B) \text{ (אם מוגדר).}$$

13 העתקות לינאריות

הגדרה: יהיו V, U מ"ו מעל \mathbb{F} , נאמר כי $T: V \rightarrow U$ העתקה לינארית אם:

1. חיבוריות - $\forall v_1, v_2 \in V. T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$
2. הומוגניות - $\forall \alpha \in \mathbb{F}. \forall v \in V. T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v)$

הגדרות נוספות:

$$1. \ker(T) = T^{-1}[\{0\}] = \{\bar{v} \in V \mid T(\bar{v}) = 0\} \text{ של } T, \text{ kernel}$$

$$2. \text{Im}(T) = \{T(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V\} \subseteq U \text{ התמונה של } T.$$

$$\text{בנוסף } \ker(T), \text{Im}(T) \text{ תמ"ו של } T.$$

13.1 תכונות בסיסיות

תהא $T: V \rightarrow U$ לינארית,

$$1. T(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i) \text{ כל צירוף לינארי נשמר.}$$

$$2. T(-\bar{v}) = -T(\bar{v}) \text{ מכפלות.}$$

$$3. T(\bar{0}_V) = \bar{0}_U$$

$$4. T \text{ חח"ע } \iff \ker(T) = \{0\}$$

$$5. T \text{ על } \iff \text{Im}(T) = U \text{ (טריויאלי).}$$

$$6. \text{אם } (u_1, \dots, u_n) \text{ סדרה פורשת של } V \text{ אז } (T(u_1), \dots, T(u_n)) \text{ סדרה פורשת של } \text{Im}(T).$$

$$7. \text{עבור } (v_1, \dots, v_n), LD(v_1, \dots, v_n) \subseteq LD(T(v_1), \dots, T(v_n)) \text{ לכן:}$$

$$(A) \text{ אם } (T(v_1), \dots, T(v_n)) \text{ בת"ל אז } (v_1, \dots, v_n) \text{ בת"ל.}$$

$$(B) \text{ אם } v_i \in \text{sp}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n) \text{ אז } T(v_i) \in \text{sp}(T(v_1), \dots, T(v_{i-1}), T(v_{i+1}), \dots, T(v_n))$$

13.3.2 קואורדינטות

יהי V מ"ו מעל \mathbb{F} , B בסיס של V . נסמן $\dim V = n$, ויהי $\bar{v} \in V$ קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ כך ש- $\bar{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$. נגדיר את הקואורדינטות של \bar{v} לפי B להיות:

$$[\bar{v}]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

זה איזומורפיזם מ- V ל- \mathbb{F}^n . העתקת הקואורדינטות תסומן גם בתור $[\cdot]_B : V \rightarrow \mathbb{F}^n$.

13.4 מרחב ההעתקות

הגדרה: $\text{Hom}(V, U) = \{T \in U^V \mid T \text{ is linear}\}$ מרחב ההעתקות. זה תת מרחב של $\langle U^V, +, \cdot \rangle$.

משפט: $\dim(\text{Hom}(V, U)) = \dim(V) \cdot \dim(U)$ זה נכון אפילו אם V, U לא נוצרים סופית.

13.5 מטריציונית

הגדרה: לכל מטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, נגדיר את ההעתקה המטריציונית המתאימה ל- A , $T_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$:

$$T_A(\bar{v}) = A\bar{x}$$

פונקציה f נקראת מטריציונית אם קיימת מטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $f = T_A$, ונסמן $A = [f]$.

השיטה למצוא את המטריצה $[T]$ היא:

$$[T] = \left(T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

משפט: תהא $T : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$, אזי T העתקה לינארית מטריציונית. $T \iff$ מטריציונית.

טענות:

$$1. \text{Sols}(A) = T_A^{-1}[\{\bar{0}\}] = \ker(T_A)$$

$$2. C(A) = \text{Im}(T_A)$$

3. T_A על \iff עמודות A פורשות. אם היא ריבועית אז גם הפיכה.

4. T_A חח"ע \iff עמודות A בת"ל. כי אין שתי דרכים להגיע לאותו הדבר.

5. T_A הפיכה \iff עמודות A בסיס $\iff A$ הפיכה.

$$6. [T + S] = [T] + [S], [\alpha \cdot T] = \alpha \cdot [T], [S \circ T] = [S] \cdot [T]$$

14 מטריצה מייצגת

הגדרה: תהא $T : V \rightarrow U$ צ"ל V, U נוצר סופית. יהי B בסיס של V , ו- C בסיס של U . נגדיר את ההעתקה

$$(ג) \text{ אם } T \text{ חח"ע, אז } LD(T(v_1), \dots, T(v_n)) = LD(v_1, \dots, v_n)$$

אם T על, אז T מעבירה סדרה פורשת של V לסדרה פורשת של U .

8. יהיו V, U מ"ו. יהי $B = (b_1, \dots, b_n)$ בסיס של V . יהיו $u_1, \dots, u_n \in U$ וקטורים כלשהם. אז קיימת ויחידה העתקה לינארית $T : V \rightarrow U$ כך שלכל $1 \leq i \leq n$ $T(b_i) = u_i$. כלומר העתקה לינארית נקבעת ביחידות לפי $\dim(V)$ איברים.

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T))$$

13.2 הטלה

יהי V מ"ו, ו- $U, W \subseteq V$ תמ"ו כך ש- $V = U \oplus W$. ראינו כי כל וקטור $\bar{v} \in V$ ניתן להציג באופן יחיד:

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}, \bar{u} \in U, \bar{w} \in W$$

נגדיר את ההטלה של V על U :

$$P_{(U,W)} : V \rightarrow U$$

$$P_{(W,U)} : V \rightarrow W$$

$$P_{(U,W)}(\bar{v}) = ux \in U, \exists y \in W, \bar{v} = x + y$$

כלומר זה ייצוג לאחד מהאיברים בהצגה היחידה של וקטור.

טענות:

1. הטלה $P_{(U,W)}$ היא העתקה לינארית.

$$2. P_{(U,W)} + P_{(W,U)} = Id_V, P_{(U,W)} \circ P_{(U,W)} = P$$

$$3. P_{(U,W)}^{-1}[\{0\}] = W, \text{Im}(P_{(U,W)}) = U$$

13.3 איזומורפיזם

13.3.1 הגדרות

הגדרה: יהיו V, U מ"ו מעל \mathbb{F} , נאמר כי $f : V \rightarrow U$ היא איזומורפיזם של מ"ו אם:

1. f חח"ע ועל.

2. f העתקה לינארית (חיבורית והומוגנית).

איזומורפיזם משמר את הפתרונות של $v = \sum_{i=1}^n x_i \bar{u}_i$ כאשר $v, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n \in V$.

שני מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה נקראים איזומורפיים ומסומנים $V \simeq U$ אז קיים איזומורפיזם $T : V \rightarrow U$. זה "יחס שקילות".

משפט: יהיו V, U מ"ו נוצרים סופית, אז $V \simeq U \iff \dim(V) = \dim(U)$.

משפט 1.13 (2 מתוך 3 להעתקות לינאריות): כל 2 מתוך 3 הבאים שקולים לכך ש- T איזומורפיזם.

$$1. \dim(V) = \dim(U)$$

2. T חח"ע.

3. T על.

המייצגת $T_C^B : \mathbb{F}^{\dim(V)} \rightarrow \mathbb{F}^{\dim(U)}$

$$T_C^B = Q_C \circ T \circ Q_B$$

$$[T]_C^B = [T_C^B]$$

טענות:

$$1. C_i([T_C^B]) = T_C^B(e_i)$$

$$\text{כלומר } [T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(b_1)]_C & \dots & [T(b_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$2. [T]_C^B \cdot [v]_B = [T(v)]_C$$

$$3. \text{ לכל } \bar{v} \in V, \bar{v} \in \ker(T) \iff [\bar{v}]_B \in \text{Sols}([T]_C^B)$$

$$4. \text{ לכל } \bar{u} \in U, \bar{u} \in \text{Im}(T) \iff [\bar{u}]_C \in \text{Cols}([T]_C^B)$$

לכן מסיקים ש:

$$\mathcal{N}([T]_C^B) = \dim(\ker(T)), \text{Rank}([T]_C^B) = \dim(\text{Im}(T))$$

$$5. T \text{ הפיכה} \iff T_C^B \text{ הפיכה} \iff [T]_C^B \iff \text{הפיכה, בנוסף } ([T]_C^B)^{-1} = [T^{-1}]_B^C$$

$$6. [S \circ T]_D^B = [S]_D^C \cdot [T]_C^B$$

אלגוריתם לחישוב המטריצה המייצגת: נבחר בסיס שנוח לחשב בו קואורדינטות ב- U בדרך כלל הבסיס הסטנדרטי. $W = (w_1, \dots, w_n)$. נשתמש בדירוג:

$$\begin{pmatrix} | & & | & | & | \\ [u_1]_W & \dots & [u_m]_W & [T(b_1)]_W & \dots & [T(b_n)]_W \\ | & & | & | & | \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \dots} \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & | \\ & \ddots & & & | \\ & & 1 & & | \\ & & & & [T]_C^B \end{pmatrix}$$

באופן דומה לאיך שמחשבים מטריצה הופכית.

הגדרה 1.14 מטריצות שינוי הקואורדינטות: יהיו B, C שני בסיסים של V . אז נגדיר את מטריצת שינוי הקואורדינטות מ- B ל- C על ידי: $[Id_V]_C^B$.

$$1. [Id_V]_C^B \cdot [\bar{v}]_B = [\bar{v}]_C, \bar{v} \in V$$

$$2. [T]_C^B = [Id]_C^{C'} \cdot [T]_{C'}^{B'} \cdot [Id_V]_{B'}^B$$

15 מטריצות דומות

יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, נאמר כי A ו- B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $A = P^{-1} \cdot B \cdot P$.

משפט: נתון $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ריבועיות, הבאים שקולים:

1. A, B דומות.

2. קיימת $T : V \rightarrow V$ ובסיסים C, C' של V כך ש- $[T]_C = A, [T]_{C'} = B$

3. לכל $T : V \rightarrow V$, אם קיים בסיס C של V כך ש- $[T]_C = A$, אז קיים בסיס C' של V כך ש- $[T]_{C'} = B$.

ואם A, B דומות אז:

$$1. \text{Rank}(A) = \text{Rank}(B), \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$$

$$2. \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n (A)_{i,i} \text{ כאשר } \text{tr}(A) = \text{tr}(B)$$

$$3. \det(A) = \det(B)$$

16 אלגוריתמים

16.1 צמצום סדרה לבת"ל

16.1.1 לפי שורות

יהיו $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{F}^m$. נשים את v_1, \dots, v_n כשורות,

$B = \begin{pmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_n^t \end{pmatrix} \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$, ונדרג בלי להחליף שורות

(כלומר, בעמודה של מקדם הפותח יש רק 1 במקום אחד והשאר אפסים, אבל המקדמים הפותחים לא ממוינים). השורות שהתאפסו מתאימות לוקטורים שהיו תלויים לינארית באחרים, וסדרת השורות שלא התאפסו הן סדרה בת"ל.

16.1.2 לפי עמודות

נשים את v_1, \dots, v_n כעמודות, $A = (v_1 \dots v_n)$, נדרג ונבדוק שיש רק פתרון טריויאלי למערכת ההומוגנית $(A | 0)$, כלומר שאין אף משתנה חופשי.

16.2 השלמה של סדרה בת"ל לבסיס

תהא (v_1, \dots, v_k) סדרה בת"ל, ו- (u_1, \dots, u_m) סדרה פורשת. נבנה מטריצה שעמודותיה:

$$(v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m)$$

נדרג את המטריצה, ונסתכל על העמודות מ- u שנפתחה בהן מדרגה. את ה- u ים המתאימים נוסיף לסדרת ה- v ים, ונקבל בסיס.