קורס B

גלעד מואב

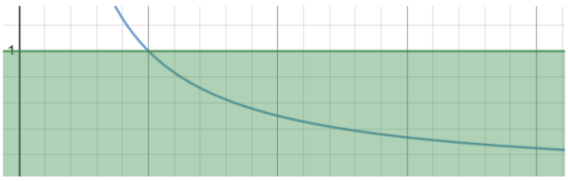
28 בספטמבר 2020

חלק I
חלק א'

1 גבול של סדרה

נגדיר גבול של סדרה באינסוף

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff \forall\epsilon > 0.\exists N.\forall n > N. |a_n - L| < \epsilon$$



2 גבול של פונקציה

2.1 גבול הפונקציה באינסוף

בדומה לגבול של סדרה, גבול הפונקציה יהיה

$$\lim_{x_0\to\infty} f(x_0) = L \iff \forall\epsilon > 0.\exists N.\forall x > N. |f(x) - L| < \epsilon$$

2.2 גבול הפונקציה בנקודה כלשהי

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \forall\epsilon > 0.\exists\delta > 0.\forall x. (0 < |x - x_0| < \delta) \to |f(x) - L| < \epsilon$$

3 רציפות הפונקציה ומשפט ערך הביניים

3.1 רציפות פונקציה

תהא פונקציה f, נגיד כי f רציפה בנקודה x_0 אמ"מ

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

נגיד כי פונקציה f רציפה בקטע I אמ"מ f רציפה בכל נקודה בקטע הנתון.

דרך קלה להראות שפונקציה f אינה רציפה בנקודה x_0 היא להוכיח כי הגבולות החד צדדיים שונים, קרי

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

3.2 משפט ערך הביניים

תהא f פונקציה רציפה בקטע $I = [a,b]$. משפט ערך הביניים אומר כי לכל ערך ב$[f(a), f(b)]$ קיים מקור

$$\forall x \in [f(a), f(b)] \to \exists c \in I.f(c) = x$$

4 נגזרת

4.1 הגדרת הנגזרת

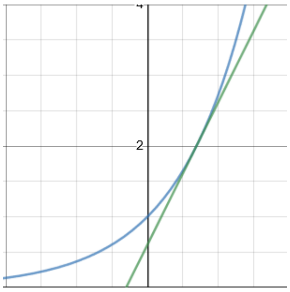
נגיד כי f גזירה בנקודה x_0 אמ"מ הגבול $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ קיים. נגיד כי f גזירה בקטע I אם כל נקודה בקטע גזירה.
נשים לב כי אם f גזירה בקטע I היא רציפה בקטע.
תהא f פונקציה גזירה בנקודה x_0 נגדיר את הנגזרת בנקודה x_0 להיות $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

5 קבוע אוילר e

נגדיר את קבוע אוילר בתור הגבול $e = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \approx 2.718$. בנוסף $(e^x)' = e^x$.

6 שימושי הנגזרת

בעזרת הנגזרת לפונקציה בנקודה x_0 נוכל למצוא את המשיק לפונקציה בנקודה זו ונוכל למצוא קירוב מסדר ראשון לפונקציה סביב x_0



בנוסף נוכל להעזר בנגזרת בשביל למצוא גבולות מסוימים עם כלל לופיטל.

נוסחאות נפוצות

לינאריות הנגזרת:

$$(\alpha \cdot f \pm \beta \cdot g)' = \alpha \cdot f' \pm \beta \cdot g'$$

כפל בנגזרת:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$$

חלוקה בנגזרת:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

הרכבת הנגזרת:

$$(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$$

7 חקירת פונקציה

חקירת פונקציה מורכבת מהבאים:

1. דומיין
2. חיתוכים עם הצירים
3. נקודות קיצון
4. תחומי עליה וירידה
5. תחומי קעירות וקמירות
6. אסימפטוטות משופעות ומאונכות

8 כלל לופיטל

יהיו f, g , ומתקיים אחד מהבאים

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty, \lim_{x\to x_0} g(x) \pm \infty$

כלל לופיטל אומר כי אם הגבול $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ קיים אז $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

9 פיתוח טיילור והערכת שגיאה

9.1 פיתוח טיילור

תהא f, נגדיר את טור טיילור סביב x_0 כטור חזקות שמתקרב לפונקציה f סביב הנקודה x_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

נגדיר את פולינום טיילור מהדרגה m סביב x_0 כסדרת הסכומים החלקיים מ0 עד m של טור החזקות,

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

נקרא לטור טיילור סביב 0 טור מקלורן.
פולינום טיילור נותן לנו קירוב טוב לפונקציה, את השגיאה נוכל לחשב בעזרת לגראנז.

9.2 הערכת שגיאה לפי לגראנז

נניח ורצינו למצוא את $e^{0.1}$, נעזר בפולינום מקלורן של הפונקציה e^x מהדרגה 3,

$$f(x) = 1 + (0.1) + \frac{1}{2!}(0.1)^2 + \frac{1}{3!}(0.1)^3 + R_3(0.1)$$

כך ש$R_3(0.1)$ הוא השארית של הפולינום,(במקרה הזה $R_3(0.1) = f(x) - 1 + (0.1) + \frac{1}{2!}(0.1)^2 + \frac{1}{3!}(0.1)^3$)
לפי לגראנז קיים $c \in (0, 0.1)$ כך ש$R_3(0.1) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^4$

באופן כללי נסמן את שארית פולינום טיילור מדרגה n סביב x_0 עבור x כ$R_n(x)$
לפי לגראנז אם פונקציה f גזירה $n+1$ פעמים, קיים $c \in (x, x_0) \cup (x_0, x)$ כך ש

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

נוכל לחסום את שארית הפולינום($R_n(x)$)באופן הבא

$$|R_n(x)| \le \frac{\max\left\{f^{(n+1)}(b) | b \in (x, x_0) \cup (x_0, x)\right\}}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1}$$

10 ניוטון ראפסון

בעזרת ניוטון ראפסון נוכל למצוא קירובים לשורשים של פונקציות
תהא פונקציה f בעלת שורש יחיד בקטע I, ניקח נקודה $x_0 \in I$ כלשהי
נמצא את פולינום הטיילור מדרגה ראשונה סביב x_0 ומוצאים את החיתוך שלו עם ציר ה־x, נסמן נקודה זו בx_1

$$x_1 = x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

באופן כללי נסמן $x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, כאשר n גדל כך x_n מתקרב לשורש הפונקציה ומתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$

חלק II

חלק ב'

11 פונקציה קדומה ואינטגרל לא מסוים

נקרא לF פונקציה קדומה לf אמ"מ $F' = f$
בהנתן פונקציה f נסמן את $\int f(x)dx$ כמשפחת הפונקציות הקדומות לf, נקרא לסימון זה($\int$) האינטגרל הלא מסוים של f

12 שיטות אינטגרציה ואינטגרלים מוכרים

12.1 שיטות אינטגרציה מוכרות

1. **שימוש בשברים חלקיים**

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \int \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x}dx = \int \left(\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}\right)dx \left[A = B = \frac{1}{2}\right] = \frac{\int \frac{1}{1-x}dx + \int \frac{1}{1+x}dx}{2}$$

2. **שימוש בהצבה**

$$\int \frac{x}{1-x^2}dx \left[\begin{array}{c} u = x^2 \\ dx = \frac{du}{2x} \end{array}\right] = \int \frac{x}{1-u} \cdot \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{1-u}du$$

3. **אינטגרציה בחלקים**

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

4. דרך נוספת ־ **שימוש בחלוקת פולינומים**

ניקח לדוגמא את השאלה $x-3\overline{)x^3 - x^2 + 0x - 4}$
תחילה נחלק את האיברים המובילים אחד בשני

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x-3\overline{)x^3 - x^2 + 0x - 4} \end{array}$$

כעת נחסר את $(x-3)x^2$ מ $x^3 - x^2$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x-3\overline{)x^3 - x^2 + 0x - 4} \\ x^3 - 3x^2 \downarrow \\ \hline 2x^2 + 0x \end{array}$$

וכן הלאה....

$$\begin{array}{r}
x^2+2x+3 \\
x-3\overline{)x^3-x^2+0x-4} \\
\underline{x^3-3x^2\downarrow} \\
2x^2+0x \\
\underline{2x^2-3x} \\
3x-4 \\
\underline{3x-9} \\
5
\end{array}$$

לכן $\frac{x^3-x^2-4}{x-3} = x-3\overline{)x^3-x^2+0x-4} = x^2+2x+3+\frac{5}{x-3}$

12.2 אינטגרלים מוכרים

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, x > 0; \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int cschxdx = \tanh x + C$$

$$\int sechxdx = -\coth x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

13 סכומי דרבו ואינטגרל מסוים

13.1 סכומי דרבו

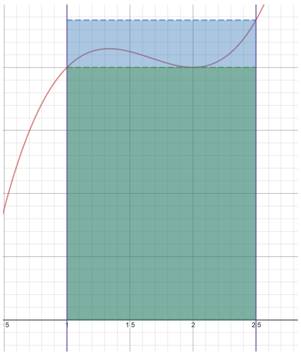
יהי קטע $I=[a_0,a_{n+!}]$ נסמן חלוקה של הקטע הנ"ל $I_{\langle a_1,...,a_n\rangle}$ כך ש$a<\{a_i\}_{i=1}^{n}<b$
תהא חלוקה $I_{\langle a_1,...,a_n\rangle}$, סכומי דרבו העליונים על החלוקה הנ"ל יהיו

$$\sum_{i=0}^{n}(a_{n+1}-a_n)\cdot\max\{f(x)|x\in[a_{n+1},a_n]\}$$

והתחתונים

$$\sum_{i=0}^{n}(a_{n+1}-a_n)\cdot\min\{f(x)|x\in[a_{n+1},a_n]\}$$

נסמן $D^{\pm}_{I_{\langle a_1,...,a_n\rangle}}$ כסכומי דרבו התחתונים/עליונים
נסמן Π_n כ $\langle a_1,...,a_n\rangle$ כך שלכל i, $a_i=a_0+\frac{b-a}{n}\cdot i$



13.2 פונקציה אינטגרבילית, אינטגרל רימן ואינטגרל מסוים

נגיד כי פונקציה $f:I\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן בקטע I אמ"מ $\lim\limits_{n\to\infty}D^{+}_{\Pi_n}-D^{-}_{\Pi_n}=0$ או לחלופין $\lim\limits_{n\to\infty}D^{-}_{\Pi_n}=\lim\limits_{n\to\infty}D^{+}_{\Pi_n}=S$
במקרה זה נסמן $\int\limits_a^b f(x)dx=S$, נקרא לפעולה זו אינטגרל מסוים

כל פונקציה רציפה היא אינטגרבילית ובפרט הפונקציות האלמנטריות(בסיסיות)

14 המשפט היסודי של החדו"א ומשפט ניוטון־לייבניץ

14.1 המשפט היסודי של החדו"א

תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $I=[a,b]$, נגדיר את הפונקציה צוברת השטח

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$$

1. F פונקציה רציפה
2. אם f רציפה בx_0 אז F גזירה בx_0 וכן $F'(x_0)=f(x_0)$

באופן כללי, אם f רציפה בקטע I אז F קדומה לה בקטע הנ"ל

14.2 משפט ניוטון־לייבניץ

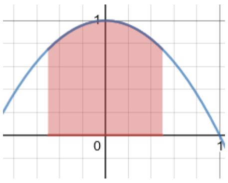
אם f רציפה בקטע $I=[a,b]$ (לכן $\int\limits_a^x$ של f) ונניח כי F קדומה של f , מתקיים

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

15 שימושי האינטגרל

15.1 חישוב שטח מתחת לגרף

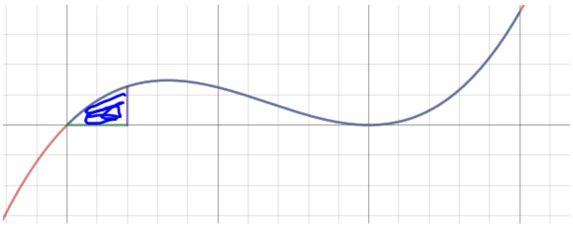
תהא f אינטגרבילית בקטע $I=[a,b]$, $\int\limits_a^b f(x)dx$ הוא השטח מתחת לf בקטע $[a,b]$



15.2 חישוב אורך עקומה

תהא f אינטגרבילית בקטע $I=[a,b]$ ונרצה למצוא את אורך העקומה בין a לb, נעזר במשפט פתגורס ונראה כי

$$\int\limits_a^b \sqrt{dx^2+dy^2}=\int\limits_a^b \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}dx=\int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$



15.3 נפח גוף סיבוב

15.3.1 נפח גוף סיבוב סביב ציר ה־x

$$\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$$

במקרה בו מדובר על נפח גוף סיבוב של שטח הכלוא בין 2 פונקציות f,g

$$\pi\int\limits_a^b \left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx$$

15.3.2 נפח גוף סיבוב סביב ציר ה־y

$$2\pi\int\limits_a^b xf(x)dx$$

חלק III
חלק ג'

16 הגדרות בסיסיות בתורת המספרים

16.1 יחס ה$|$

יהיו $m,k\in\mathbb{Z}$, נגיד כי $m|k$ אם קיים $i\in\mathbb{Z}$ כך ש$m\cdot i=k$ או באופן כללי

$m|k\longleftrightarrow\exists i\in\mathbb{Z}.m\cdot i=k$

16.2 $\mod$

נגיד כי $b \mod n = a$ אמ"מ קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש$b = m \cdot n + a$

$$b \mod n = a \longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}. b = m \cdot n + a$$

16.3 $\gcd$

$\gcd(a, b)$ הוא המחלק המשותף הגדול ביותר של a וb

$$\gcd(a, b) = \max\{m \in \mathbb{Z} | m|a \wedge m|b\}$$

17 משפט אוקלידס לקיום אינסוף ראשוניים

משפט אוקלידס אומר כי קיימים אינסוף ראשוניים.

צ"ל קיימים אינסוף ראשוניים, נניח בשלילה כי קיים מספר סופי n של ראשוניים, נסמן $p_1, p_2, ..., p_n$, נגדיר מספר $p = 1 + \prod_{i=1}^{n} p_i$,

נשים לב כי p לא מתחלק באף p_i לכן p ראשוני וקיימים $n+1$ ראשוניים, **סתירה!**
לכן קיימים אינסוף ראשוניים

18 מחלק משותף מירבי

כפי שראינו $\gcd(a, b)$ ימצא לנו את המחלק המשותף הגדול ביותר של a וb
עבור $\gcd(a, b) = c$ קיים "ייצוג לינארי", כלומר קיימים $t, s \in \mathbb{Z}$ כך ש

$$t \cdot a + s \cdot b = c$$

מספרים זרים

עבור a, b כך ש$\gcd(a, b) = 1$ נגיד כי a וb זרים

משפט

עבור a, b, a, b זרים אמ"מ קיימים $s, t \in \mathbb{Z}$ כך ש$t \cdot a + s \cdot b = 1$

19 אלגוריתם אוקלידס

19.1 אלגוריתם אוקלידס

יהיו a, b, נרצה למצוא את $\gcd(a, b)$ אלגוריתם אוקלידס נותן פיתרון יעיל ופשוט לבעיה זו
האלגוריתם משתמש בעובדה ש$\gcd(a, b) = \gcd(a, b + m \cdot a)$, לכן

$$a = m_1 \cdot b + n_1$$

$$b = m_2 \cdot n_1 + n_2$$

$$.$$

$$.$$

$$n_{i-3} = m_{i-1} \cdot n_{i-2} + c$$

$$n_{i-2} = m_i \cdot c + 0$$

לכן $\gcd(a,b)=c$
באופן פשוט יותר נוכל לעבוד באופן הבא $\gcd(a,b)=\gcd(a \mod b, b)=...=\gcd(c,0)=c$

19.2 אלגוריתם אוקלידס המורחב

האלגוריתם המורחב עוזר לנו למצוא ייצוג לינארי לשיוויון מהסוג $\gcd(a,b)=c$
הוא עובד כמו האלגוריתם הקודם, **רק אחורה**,
כלומר נתחיל מהשלב האחרון ונראה כי

$$n_{i-3}-m_{i-1}\cdot n_{i-2}=c$$

השלב הבא יהיה הצבת הערכים מהשוויונים שראינו מהאלגוריתם הקודם

$$n_{i-3}-m_{i-1}\cdot(n_{i-4}-m_{i-2}\cdot n_{i-3})=c$$

וכן הלאה

דוגמא

נרצה למצוא את $\gcd(840,138)$ ואת הייצוג הלינארי שלו

$$840=6\cdot 138+12$$

$$138=11\cdot 12+6$$

$$12=2\cdot 6+0$$

לכן $\gcd(840,138)=6$
כעת נמצא את הייצוג הלינארי שלהם

$$6=138-11\cdot 12$$

$$6=138-11\cdot(840-6\cdot 138)$$

$$6=7\cdot 138-11\cdot 840$$

20 משפט על פריקות יחידה לראשוניים

לכל מספר שלם קיימת פריקות יחידה למספרים ראשוניים

21 משוואות דיאופנטיות לינאריות

תהא משוואה דיאופנטית $a\cdot x+b\cdot y=c$

21.1 קיום פתרון למשוואה

נראה כי אם $\gcd(a,b)\mid c$ קיים פתרון ולחלופין אם $\gcd(a,b)\nmid c$ לא קיים פתרון למשוואה

21.2 מציאת פתרון פרטי

בהנחה ולמשוואה קיים פתרון($\gcd(a,b)\mid c$),
נסמן $d=\gcd(a,b)$, ונראה כי מכיוון ש$d\mid c$ קיים e כך ש $d\cdot e=c$, כלומר $e=\frac{c}{d}$
בנוסף מכיוון ש$d=\gcd(a,b)$ קיים ייצוג לינארי $t\cdot a+s\cdot b=d$, נכפיל את שני האגפים בe ונקבל

$$e\cdot t\cdot a+e\cdot s\cdot b=e\cdot d\to(e\cdot t)\cdot a+(e\cdot s)\cdot b=\frac{c}{d}\cdot d=c$$

לכן הפתרון הפרטי למשוואה $a\cdot x+b\cdot y=c$ יהיה $x_0=e\cdot t, y_0=e\cdot s$

21.3 מציאת כל הפתרונות

קבוצת כל הפתרונות היא

$$\left\{\left\langle x_0+\frac{b}{d}\cdot n,y_0-\frac{a}{d}\cdot n\right\rangle|n\in\mathbb{N}\right\}$$

22 הפיכות מודולו, משפט פרמה הקטן ומשפט השארית הסיני

22.1 משפט פרמה הקטן

יהיו $p\in\mathbb{P}$ וa כך ש$\gcd(a,p)=1$ יתקיים

$$a^{p-1}=1 \mod p$$

22.2 הפיכות מודולו

ידוע לנו על פעולות החיבור, חיסור וכפל במודולו, אך מה לגבי חילוק?
יהי $k\in\mathbb{Z}$, נרצה לדעת האם קיים $m\in\mathbb{Z}$ כך ש $m\equiv\frac{1}{k} \mod n$ או באופן שקול $m\cdot k\equiv 1 \mod n$
משפט על הפיכות המודולו אומר כי אם k וn זרים קיים m כך ש$m\cdot k\equiv 1 \mod n$

$$\gcd(k,n)=1\longleftrightarrow\exists m\in\mathbb{Z}.m\cdot k\equiv 1 \mod n$$

22.3 משפט השאריות הסיני

22.3.1 דוגמא

נרצה לפתור את מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases}x\equiv 7 \mod 19\\ x\equiv 3 \mod 5\end{cases}$$

באופן שקול נוכל לפתור את

$$\begin{cases}x=19a+7\\ x=5b+3\end{cases}$$

נחסר את המשוואות אחת מהשניה ונקבל

$$0=19a-5b+4\rightarrow 4=5b-19a$$

נראה כי קיים פתרון למשוואה מכיוון ש$\gcd(5,-19)=1|4$, למשל -12

22.3.2 הכללה

באופן כללי כאשר נרצה לפתור מערכת משוואות מהצורה הבאה

$$\begin{cases}x\equiv a_1 \mod m_1\\ x\equiv a_2 \mod m_2\\ .\\ .\\ x\equiv a_n \mod m_n\end{cases}$$

לפי משפט השאריות הסיני, $m_1,m_2,...,m_n$ זרים בזוגות שקול לקיום פתרון למערכת המשוואות

22.3.3 פתרון פרטי

נסמן $n_i = \frac{m}{m_i}$, נשים לב כי m_i, n_i זרים($\gcd(m_i, n_i) = 1$), לכן קיימים s_i, t_i כך ש$s_i \cdot n_i + t_i \cdot m_i = 1$
נסמן $e_i = s_i \cdot n_i$ ונראה כי $e_i + t_i \cdot m_i = 1$ לכן $e_i = -t_i \cdot m_i + 1$ לכן $e_i \equiv 1 \mod m_i$
באופן כללי אם נקח $i \neq j$ יתקיים $e_i \equiv 0 \mod m_j$ מכיוון ש$m_j | n_i | e_i$ לכן כתלות בi וjערכו של $e_i \mod m_j = \delta_{i,j}$

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

הפתרון הפרטי של מערכת המשוואות תהיה $x_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot e_k$ שכן

$$x_0 \mod m_i = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot e_k \right) \mod m_i = \sum_{k=1}^{n} (a_k \mod m_i) \cdot (e_k \mod m_i) =$$

$$0 \cdot (a_1 \mod m_i) + ... + 1 \cdot (a_i \mod m_i) + ... = a_i \mod m_i$$

22.3.4 פתרון כללי

קבוצת הפתרונות למערכת המשוואות הנ"ל תהיה

$$\{x_0 + m \cdot z | z \in \mathbb{Z}\}$$

חלק IV

חלק ד'