



دانشکده مهندسی کامپیوتر

به نام خدا



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبر خطی کاربردی دکتر امیرمزلقانی

تمرین سری سوم (از فصل چهارم)

نیم سال دوم ۰۱-۰۲

بخش تئوری

سوال اول

درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید و در صورت لزوم مثال نقض بزنید.

- ۱- یک زیرمجموعه H از فضای برداری V ، زیر فضای V است اگر بردار صفر در H باشد.
- ۲- Null space یک ماتریس $m \times n$ برابر با R^m می باشد.
- ۳- $Col A$ مجموعه تمام جواب های $Ax=b$ می باشد.
- ۴- مجموعه تمام جواب های یک معادله دیفرانسیل خطی همگن، کرنل یک تبدیل خطی است.
- ۵- اگر B شکل اشلون از ماتریس A باشد، ستون های محوری B پایه ای برای $Col A$ تشکیل می دهند.
- ۶- اگر $H = Span \{b_1, \dots, b_p\}$ باشد سپس $\{b_1, \dots, b_p\}$ پایه ای برای H است.
- ۷- ستون های غیر پیووت یک ماتریس، همیشه وابسته خطی اند.
- ۸- اگر $dim V = n$ و S یک مجموعه مستقل خطی در V باشد، در این صورت S پایه ای برای V است.

سوال دوم

۲- فرض کنید H و K زیرفضاهای فضای برداری V هستند، اگر مجموع H و K که به صورت $H + K$ نوشته می شود، مجموعه ای از تمام بردارها در V است که می توان آنها را به صورت مجموع دو بردار، یکی در H و دیگری در K نوشت تعریف کنیم. به این معنا که،

$$H + K = \{w: w=u+v \text{ for some } u \text{ in } H \text{ and some } v \text{ in } K\}$$

الف) نشان دهید $H+K$ زیرفضایی از V است.

ب) نشان دهید H زیرفضایی از $H+K$ و K نیز زیرفضایی از $H+K$ می باشد.

سوال سوم

الف) فرض کنید A, w به صورت زیر باشند. تعیین کنید که آیا w در $Col A$ است یا خیر؟ آیا w در $Nul A$ است؟

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ب) پایه ای برای null space ماتریس زیر را تعیین کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 6 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -8 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

ج) پایه ای برای فضایی که توسط بردار های زیر span می شود بیابید.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

سوال چهارم

فرض کنید V و W فضاهای برداری باشند و $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد و $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ زیر مجموعه ای از V باشد. نشان دهید که اگر $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ در V وابسته خطی باشد، سپس مجموعه تصاویر $\{T(v_1), \dots, T(v_p)\}$ در W وابسته خطی است.

سوال پنجم

مجموعه $B = \{1 + t^2, t - t^2, 2 - 2t + 2t^2\}$ یک پایه برای \mathbb{P}_2 می باشد. مختصات متناسب با پایه B را برای $p(t) = 3 + t - 6t^2$ بیابید.

سوال ششم

فرض کنید V یک فضای برداری و B یک پایه برای آن باشد. همچنین وکتور های w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 نیز وکتور هایی در V باشند و ماتریس A ماتریس، ماتریسی است که ستون های آن متشکل از وکتور مختصات وکتور های w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 در پایه B است.

اگر پس از اعمال کاهش سطری، ماتریس A به فرم زیر درآمده باشد، آنگاه به سوالات زیر پاسخ دهید (توضیح):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الف) بعد V را بدست آورید. ($\dim V$)

ب) بعد $\text{Span}\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ را بدست آورید.

سوال هفتم

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ است و $nullspace$ آن یک صفحه در \mathbb{R}^3 است. همچنین $range$ آن توسط بردار غیر صفر v در \mathbb{R}^5 ، $span$ می شود. m و n را تعیین کنید و $rank$ و کرنل (بعد فضای پوچ یا همان $\dim(Nul(A))$) ماتریس A را بدست آورید.

سوال هشتم

در نظر بگیرید $D = \{d_1, d_2, d_3\}$ و $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ پایه هایی برای فضای برداری V باشند و همچنین فرض کنید

$$f_1 = -3d_1 + d_3, f_2 = 3d_2 + d_3, f_3 = 2d_1 - d_2 + d_3$$

الف) ماتریس تغییر مختصات از F به D را پیدا کنید.

ب) اگر $x = f_1 - 2f_2 + 2f_3$ در این صورت $[x]_D$ را به دست آورید.

بخش پیاده‌سازی

تعریف مسئله

تشخیص و تصحیح خطا

پیام دیجیتال دنباله ای از ۰ و ۱ است که یک پیام داده شده را رمزگذاری می کند. هنگامی که یک پیام ارسال و دریافت می شود، این پتانسیل را دارد که توسط نویز دچار خطا شود و برخی بیت های آن تغییر کند. برای جلوگیری از این خطا و مخابره کردن پیام به نحو صحیح روش های مختلفی جهت تشخیص و تصحیح خطا ابداع شده است. مبنای برخی از این روش ها اضافه کردن داده و بیت های بیشتر به یک پیام باینری می باشد. برای مثال نوع رایج کدهای تشخیص خطا، parity check که احتمالا در درس مدار منطقی با آن آشنا شدین یکی از این روش های می باشد، که با اضافه کردن یک بیت به داده و بررسی تعداد یک ها یا صفر ها به تشخیص وجود یا عدم وجود خطا میپردازد. در این تمرین قصد داریم با روش دیگری برای تصحیح و تشخیص خطا، به نام hamming code آشنا شویم.

به منظور بحث در مورد کدهای تصحیح خطا، ابتدا به بررسی دنباله های دیجیتال و فضای مسئله میپردازیم:

بررسی فضای مسئله:

پیام های دیجیتال متشکل از ۰ و ۱ هستند و فضای مسئله ما محدود به آن ها است. مجموعه Z_2 را مجموعه $\{0, 1\}$ تعریف میکنیم. ابتدا انجام محاسبات روی Z_2 را بررسی میکنیم. تعریف جمع و ضرب برای عناصر مجموعه مسئله ما (۰ و ۱) در جداول زیر آورده شده است:

| | | |
|---|---|---|
| + | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

and

| | | |
|---|---|---|
| × | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

به صورت ساده تر میتوان گفت ضرب همانند ضرب اعداد صحیح می باشد اما برای جمع اگر به صورت صحیح جمع را انجام دهیم و حاصل زوج شود، صفر و در غیر این صورت یک جواب نهایی است.

اکنون می توان پیام ها را به عنوان بردار ستونی عناصر Z_2 بیان کرد. برای مثال پیام های ۱۰۰۱ و ۱۱۰۱ به صورت زیر بیان می شوند:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

فرض کنید هر پیام n رقم است. مجموعه تمام پیام های ممکن با طول n رقم Z_2^n نامیده می شود. به عبارت دیگر، Z_2^n مجموعه ای از تمام بردارها با n عنصر است که از عناصر موجود در Z_2 ساخته شده است.

برای مثال مجموعه Z_2^4 به صورت زیر می باشد که شامل شانزده بردار زیر است:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

درواقع Z_2 عنصر های اسکالر هستند، Z_2^n یک فضای برداری روی Z_2 نامیده می شود.

حال که با فضای مسئله بیشتر آشنا شدیم، در ادامه به بررسی یک روش برای تشخیص و تصحیح خطا میپردازیم.

Encoding

فرض کنید پیام ها ۴ رقمی هستند. در روش Hamming(7, 4) برای تشخیص و تصحیح خطا سه عدد به انتهای هر پیام ۴ رقمی اضافه می شود. بنابراین پیام های کدگذاری شده عناصر Z_2^7 خواهند بود.

در روش Hamming(7, 4)، از یک ماتریس H استفاده میکنیم که به صورت زیر تعریف میشود:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- در واقع ماتریس H شامل تمام حالت های ۳ بیت به غیر از تمام صفر می باشد (در منابع مختلف ترتیب ستون ها ممکن است متفاوت باشد)

در این روش هدف آن است ۳ بیت را به نحوی به انتهای پیام اضافه کنیم که بردار نهایی در $\text{Nul } H$ قرار گیرد، یعنی اگر پیام X کد گذاری شده بدون خطا باشد $HX = 0$ شود.

دست یابی به این هدف معادل است با حل معادله زیر، که در آن abcd پیام اولیه ما است و xyz سه بیتی است که میخواهیم اضافه کنیم تا پیام کد گذاری شود به نحوی که $HX = 0$ شود.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در واقع بردار X باید در $\text{Nul } H$ باشد پس اگر بتوانیم پایه های $\text{Nul } H$ را پیدا کنیم میتوانیم X را از روی آن ها بسازیم.

سوال) ابتدا از شما میخواهیم پایه ای برای $\text{Nul } H$ پیدا کنید. (جواب سوالات داخل متن را به همراه راه حل در گزارش خود بیاورید)

ما می‌خواستیم از پایه‌های Nul H استفاده کنیم تا $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ را بسازیم. یعنی اگر بردارهای پایه Nul H که در بخش قبل پیدا کردید را

به صورت ستونی در کنار هم بگذارید و ترانهاده آن را حساب کنید تا ماتریس A تشکیل شود $A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ پیام کد شده را به ما بدهد
یعنی:

$$A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

میدانیم برای یک فضای برداری مثل Nul H پایه‌های مختلفی که میتوان پیدا کرد. اما ما در اینجا به دنبال پایه‌ای هستیم که نتیجه ۴ بیت اول $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ برابر با $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ باشد پس A را به صورت زیر تعریف میکنیم که در واقع بخش بالایی آن ماتریس همانی می باشد:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سوال) نشان دهید ترانهاده ماتریس حاصل از بردارهای پایه‌ای که در بخش الف پیدا کردید با انجام عملیات‌های سطری به A تبدیل میشود. (جواب سوالات داخل متن را به همراه راه حل در گزارش خود بیاورید)

پس تا اینجا ما ماتریس A که پایه‌ای برای Nul H می باشد و به کمک آن میتوانیم کد گذاری را انجام دهیم پیدا کردیم و فهمیدیم برای کد گذاری هر پیام اگر پیام ورودی x باشد کافیسست Ax را محاسبه کنیم. برای مثال کد گذاری ۱۱۰۱ به کمک این روش به صورت زیر خواهد بود:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Error Detection

برای تشخیص وجود یا عدم وجود خطا با توجه به قاعده ای که در ابتدا گفتیم از ماتریس H استفاده میکنیم. این ماتریس به نحوی تعریف شده است که اگر بردار ورودی (پیام کد گذاری شده ۷ بیتی) در Nul H باشد یعنی پیام بدون خطا است و در غیر این صورت پیام دچار خطا شده است. پس کافیست Hx را محاسبه کنیم و بررسی کنیم آیا حاصل بردار تمام صفر می شود یا خیر.

مثال:

اگر پیامی که بدست ما رسیده ۰۱۰۰۱۰۱ باشد، آیا پیام دچار خطا شده است؟ خیر، زیرا حاصل Hx بردار تمام صفر شده است.

$$H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

اگر پیامی که بدست ما رسیده ۰۱۰۰۱۰۱ باشد، آیا پیام دچار خطا شده است؟ بله، زیرا حاصل Hx بردار تمام صفر نشده است.

$$H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Error Correction

حال روش پیدا کردن بیتی که دچار خطا است، برای زمانی که مطمئن هستیم حداکثر در یک بیت خطا داریم را بررسی میکنیم. فرض کنید پیام ابتدایی ۰۰۱۱ بوده است که پس از کد گذاری ۰۰۱۱۰۰۱ خواهد شد اما این پیام هنگام ارسال و به واسطه وجود نویز دچار خطا شده و ۰۰۰۱۰۰۱ به ما رسیده است.

ابتدا بررسی میکنیم ۰۰۰۱۰۰۱ دچار خطا شده است یا نه، برای این کار از روش ذکر شده در قسمت قبل استفاده میکنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

و مشاهده میکنیم که خروجی برابر با ۰۱۱ می باشد، پس یعنی پیام دچار خطا شده است از آنجایی که تضمین شده حداکثر یک بیت خطا داشتیم با بررسی اینکه تغییر کدام بیت باعث شده است خروجی بردار تمام صفر نشود بیت خطا را میتوانیم پیدا کنیم.

ستون سوم در ماتریس H برابر با ۰۱۱ می باشد و میتواند باعث خطا در خروجی شود (زیرا فقط در یک بیت خطا داشتیم و اگر بین سوم در پیام کد شده یک بود این خطا به وجود نمیامد) پس یعنی بیت اول دچار خطا شده است و پیام صحیحی که باید به ما میرسید ۰۰۱۱۰۰۱ بوده است و پیام ورودی صحیح ۰۰۱۱ است.

برای توضیح بیشتر راجب نحوه تشخیص بیتی که دچار خطا شده است میتوانید [این ویدیو](#) را ببینید.

پیاده سازی:

از شما میخواهیم یک تابع برای encode کردن یک پیام چهار بیتی، یک تابع برای تشخیص وجود خطا و یک تابع برای تشخیص بیتی که در آن خطا رخ داده با فرض اینکه میدانیم حداکثر تعداد بیت های خطا یک است بنویسید و به کمک آن به دو سوال زیر پاسخ دهید.

سوالات (جواب سوالات زیر را در گزارش خود بیاورید):

۱- پیام های زیر را با استفاده از کد Hamming (۷،۴) رمزگذاری کنید.

آ. ۱۰۰۱

ب. ۰۰۱۱

ج. ۰۱۰۱

۲- هر یک از پیام های زیر دریافت شده است و هر کدام با استفاده از کد Hamming (۷،۴) کدگذاری شده اند. در طول انتقال حداکثر یک عنصر در بردار تغییر کرد. یا مشخص کنید که در انتقال خطایی رخ نداده است یا خطای ارسالی را پیدا کنید و آن را اصلاح کنید.

آ. ۰۱۰۱۱۰۱

ب ۱۰۰۰۰۱۱

ج. ۰۰۱۰۱۱۱

د ۰۱۰۱۰۱۰

ه. ۰۱۱۱۱۰۰

و. ۱۰۰۱۱۰۱

نکات مهم پیاده سازی:

- فایل نوت بوکی نیز در تمرین ضمیمه شده است که در آن قالب پیاده سازی را میتوانید پیدا کنید. پیاده سازی را با کامل کردن سلول های فایل نوت بوکی که در اختیارتان قرار گرفته است انجام دهید.
 - در صورت نیاز به توضیح بیشتر میتوانید به فایل انگلیسی صورت پروژه در [این لینک](#) مراجعه کنید.
 - در این پروژه تنها مجاز به استفاده از زبان پایتون هستید.
 - استفاده از کتابخانه numpy مجاز می باشد.
 - پاسخ کامل به سوالات اجباری است.
 - توصیه میشود خروجی های مدنظر هر سوال را به همراه پاسخ آن را در یک ژوپیتِر نوتبوک بنویسید. در غیر این صورت باید اسکرین شات های خروجی کد در گزارش کار قرار گرفته باشد.
-

دانشجویان عزیز توجه کنید که:

* فایل پاسخ خود را تنها به شکل <<StuNum_HWNum.pdf>> نام گزاری کنید. (به عنوان مثال HW3.pdf_۴۰۰۱۲۳۴۵۶)

* فایل پاسخ علاوه بر پاسخ بخش تئوری باید حاوی گزارش و تحلیل نتایج به دست آمده از بخش پیاده‌سازی‌ها باشد.

* در صورت شبیه بودن پاسخ تمارین دانشجویان، نمره تمرین بین دانشجویان با پاسخ تمرین مشابه تقسیم خواهد شد.

* اگر هرگونه سوال و ابهامی داشتید با یکی از ایمیل‌ها یا آیدی‌های تلگرامی زیر ارتباط برقرار کنید.

hosna_oyar@aut.ac.ir

asaldelkhosh@gmail.com

@Hosna_oyar

@asaL_dkhsh