**به نام خدا**


**دانشگاه صنعتی امیرکبیر**
**( پلی تکنیک تهران )**

**دانشکده مهندسی کامپیوتر**


# ***جبر خطی کاربردی دکتر امیرمزلقانی***

تمرین سری چهارم (از فصل پنجم و نیمه اول فصل ششم)

نیم‌سال دوم ۰۲-۰۱

# بخش تئوری

## سوال اول

درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

الف) اگر $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{x}$ یک بردار دلخواه باشد، آنگاه $\lambda$ یک مقدار ویژه[۱] برای $A$ است.

ب) اگر $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ برای یک مقدار دلخواه $\lambda$ برقرار باشد، آنگاه $\boldsymbol{x}$ یک بردار ویژه[۲] برای $A$ است.

ج) اگر بردار $\boldsymbol{x}$ یک بردار ویژه برای ماتریس $A$ باشد، بردار $3\boldsymbol{x}$ نیز یک بردار ویژه برای این ماتریس می‌باشد.

د) در صورتی که $\lambda$ یک مقدار ویژه برای ماتریس $A$ باشد، این مقدار یک مقدار ویژه برای $A + \beta I$ به صورتی که $\beta \in \mathbb{R}$ باشد، خواهد بود.

هـ) در صورتی که ماتریس $A_{n\times n}$ قابل قطری‌سازی[۳] باشد، ماتریس $A + I_n$ نیز قابل قطری‌سازی خواهد بود.

و) در صورتی که ماتریس های $U$ و $V$ متعامد[۴] باشند، ماتریس $UV$ نیز متعامد خواهد بود.

ز) دترمینان هر ماتریس متعامد، برابر یک می‌باشد.

---

## سوال دوم

فرض کنید $A$ یک ماتریس $n \times n$ می‌باشد. نشان دهید $A$ و $A^T$ دارای مقدار ویژه یکسانی می‌باشند.

آیا می‌توان نشان داد که این دو ماتریس بردار ویژه یکسانی نیز دارند؟

---

[1] Eigenvalue
[2] Eigenvector
[3] Diagonalizable
[4] Orthogonal

## سوال سوم

برای ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ یک مقدار ویژه بدون محاسبه مستقیم از طریق معادله مشخصه[5] بدست آورید. روش به دست آمدن جواب خود را توضیح دهید.

---

## سوال چهارم

فرض کنید $A$ یک ماتریس $2\times 2$ حقیقی ($A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$) است که دارای یک مقدار ویژه مختلط به فرم $\lambda = a-bj$ و یک بردار وِیژه $v\in\mathbb{C}^2$ است. حال نشان دهید:

a) $A\ Re(v) = a\ Re(v) + b\ Im(v)$
b) $A\ Im(v) = -b\ Re(v) + a\ Im(v)$

---

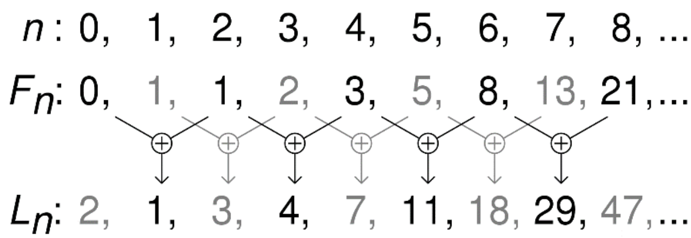
## سوال پنجم

فرض کنید ماتریس $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ به گونه‌ای که تمامی عناصر آن دارای مقادیر نامنفی و جمع عناصر هر سطر آن برابر با یک باشد. به این ماتریس، عموما ماتریس تصادفی[6] گفته می‌شود. برای مثال ماتریس $\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ یک نمونه ماتریس تصادفی می‌باشد. اثبات کنید هر ماتریس تصادفی یک مقدار ویژه با مقدار یک و یک بردار ویژه با مقدار $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}$ دارا می‌باشد.

[5] Characteristic Equation
[6] Stochastic Matrix

## سوال ششم

دنباله لوکاس[7]، یک دنباله عددی مشابه دنباله فیبوناچی[8] می‌باشد. در این دنباله نیز مشابه دنباله فیبوناچی، هر عدد بر اساس جمع دو عدد قبل خود محاسبه می‌شود با این تفاوت که مقدار شروع در این دنباله متفاوت می‌باشد. برخلاف دنباله فیبوناچی که در آن دنباله با دو مقدار $F_0 = 0$ و $F_1 = 1$ شروع می‌شود، در دنباله لوکاس، شروع با مقادیر $L_0 = 2$ و $L_1 = 1$ می‌باشد. می‌توانید ارتباط میان دنباله لوکاس و دنباله فیبوناچی را در *شکل ۱* مشاهده کنید.




شکل ۱- ارتباط میان دنباله لوکاس و دنباله فیبوناچی

فرض کنید می‌خواهیم دنباله لوکاس را با استفاده از مفاهیمی که تا به حال خوانده ایم مدل سازی کنیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} L_n \\ L_{n-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} L_{n-1} \\ L_{n-2} \end{bmatrix}$$

الف) ماتریس $A$ را بیابید.

ب) مقادیر ویژه و بردار ویژه $A$ را بیابید.

ج) ماتریس $A$ را تجزیه طیفی[9] کنید. $(A = PDP^{-1})$

د) ماتریس $B$ را برحسب $n$ بیابید.

$$\begin{bmatrix} L_n \\ L_{n-1} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} L_1 \\ L_0 \end{bmatrix}$$

هـ) رابطه صریح برای $L_n$ بیابید.

---

[7] Lucas Sequence

[8] Fibonacci Sequence

[9] Spectral Decomposition

## سوال هفتم

یک پایه متعامد یکه[10] برای فضای ستونی[11] ماتریس $A$ به دست آورید .

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

---

## سوال هشتم

تجزیه QR[12] ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

---

[10] Orthonormal Basis
[11] Column Space
[12] QR Decomposition

## بخش پیاده‌سازی

فایل ژوپیتر نوتبوکی در تمرین ضمیمه شده است که در آن قالب پیاده‌سازی و توضیحات مساله به زبان انگلیسی را می‌توانید پیدا کنید. پیاده‌سازی را با کامل کردن سلول‌های فایل نوتبوکی که در اختیارتان قرار داده شده است، انجام دهید.

# محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه

### تعریف مسئله

همانطور که در درس خوانده‌اید، بردار ویژه برداری است متعلق به یک ماتریس مربعی، به صورتی که:

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

که در اینجا $\lambda \in \mathbb{R}$ و $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.

تعبیر هندسی این نوع از بردارها به این گونه است که در صورتی که یک بردار ویژه متعلق به یک ماتریس را به واسطه همان ماتریس انتقال دهیم، بردار منتج شده، برداری هم‌جهت با بردار اولیه با اندازه متفاوت می‌باشد. به این معنی که این انتقال، جهت بردار را حفظ خواهد کرد.

یک روش برای محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه استفاده از معادله مشخصه چندجمله‌ای[۱۳] ($(A - \lambda I)\boldsymbol{v} = 0$) می‌باشد. اما همانطور که می‌دانید برای یافتن $Nul\ (A - \lambda I)$ و محاسبه یک پایه برای آن، می‌بایست از روش کاهش سطری استفاده کنیم که دارای پیچیدگی زمانی حدود $O(n^3)$ می‌باشد که این میزان برای ماتریس‌های بزرگ روش مناسبی نمی‌باشد.

به همین دلیل برای یافتن مقادیر و بردارهای ویژه مختص به یک ماتریس از دیگر روش‌ها استفاده می‌شود که دارای پیچیدگی زمانی کمتری می‌باشد. یکی از این روش‌ها، استفاده از روش‌های تکرارشونده[۱۴] می‌باشد. در ادامه دو روش Power Method و QR decomposition را بررسی می‌کنیم.

### Power Method

در این روش، با استفاده از یک بردار به صورتی که جمع عناصر آن برابر با یک باشد به عنوان بردار اولیه، شروع می‌کنیم. در این روش، صرفا یک مقدار ویژه و یک بردار ویژه استخراج می‌شود که به آن مقدار ویژه برجسته[۱۵]

[13] Characteristics Polynomial Equation
[14] Iterative
[15] Dominant Eigenvalue

گفته می‌شود. این مقدار ویژه $\lambda_1$ به صورت اکید می‌بایست دارای مقدار قدر مطلق بزرگتری نسبت به دیگر مقادیر ویژه داشته باشد.

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

در این روش، تلاش می‌شود در ابتدا یک حدس $\boldsymbol{x}_0$ زده شود و سپس بر اساس آن، این حدس اولیه را به بردار ویژه نظیر مقدار ویژه برجسته نزدیک کرد.

مراحل انجام Power Method:

۱. در ابتدا یک بردار اولیه برای بردار ویژه مقدار ویژه برجسته $\boldsymbol{x}_0$ انتخاب می‌شود.

۲. ماتریس $A$ را در حدس اولیه ضرب می‌کنیم تا یک بردار جدید حاصل شود. $\boldsymbol{y}_1 = A\boldsymbol{x}_0$

۳. بردار جدید را با تقسیم کردن بر بزرگترین مولفه آن، نرمال می‌کنیم. $\boldsymbol{x}_1 = \frac{\boldsymbol{y}_1}{\max\limits_i |\boldsymbol{y}_{1,i}|}$

۴. گام ۲ و ۳ را با بردار جدید تکرار کرده تا به تخمین بعدی برسیم. $\boldsymbol{y}_2 = A\boldsymbol{x}_1$ و $\boldsymbol{x}_2 = \frac{\boldsymbol{y}_2}{\max\limits_i |\boldsymbol{y}_{2,i}|}$

۵. این فرایند را تا زمانی ادامه می‌دهیم تا دنباله تخمین‌ها به بردار ویژه برجسته همگرا شود.

## Inverse Power Method

همانطور که می‌دانید، در صورتی که ماتریس $A$ یک ماتریس وارون‌پذیر باشد، آنگاه بردارهای ویژه ماتریس $A^{-1}$ برابر خواهند بود با معکوس بردارهای ویژه ماتریس $A$ . بنابراین ما با استفاده از این قضیه و همچنین استفاده از Power Method می‌توانیم کوچکترین مقدار ویژه و بردار ویژه متناظر با آن را نیز به دست آوریم. انجام این فرایند بسیار ساده است. فرایند Power Method را همانند قسمت قبل انجام می‌دهیم با این تفاوت که به جای محاسبه آن بر روی ماتریس $A$، این محاسبات را بر روی ماتریس $A^{-1}$ انجام می‌دهیم. نتیجه این محاسبه بزرگترین مقدار $\frac{1}{\lambda_1}$ خواهد بود که این مقدار معادل است با کوچکترین مقدار ویژه ماتریس $A$.

## Shifted Power Method

مواردی وجود دارد که ما به دنبال یافتن تمامی مقادیر ویژه و بردارهای متناظر با آن می‌باشیم و صرفا نیازمند بزرگترین و کوچکترین مقدار ویژه و بردار ویژه متناظر با آن نمی‌باشیم. یک روش ساده اما غیربهینه برای انجام

این کار، استفاده از روش Shifted Power Method می‌باشد. با فرض این که با استفاده از Power Method مقدار ویژه برجسته و بردار ویژه متناظر با آن را پیدا کرده‌ایم، $A\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{x}$، خواهیم داشت:

$$[A - \lambda_1 I]\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$$

در اینجا، مقدار $\alpha$ برابر است با مقدار ویژه‌های ماتریس $[A - \lambda_1 I]$ به صورتی که برابر با $0, \lambda_2 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_1, \dots, \lambda_n - \lambda_1$.

حال اگر ما یک بار دیگر، Power Method را بر روی ماتریس شیفت‌یافته اعمال کنیم، می‌توانیم مقدار ویژه برجسته و بردار ویژه نظیر آن را پیدا کنیم. برای مثال در صورتی که ما مقدار ویژه $\alpha_k$ را به دست آورده باشیم، از آنجایی که $\alpha_k = \lambda_k - \lambda_1$ می‌باشد، می‌توانیم به سادگی مقدار $\lambda_k$ را محاسبه کنیم. می‌توانیم این فرایند را چندین بار ادامه دهیم تا تمام مقادیر ویژه ماتریس $A$ را به دست آوریم.

## QR Decomposition

روش QR نیز، یک روش تکرارشونده برای یافتن تمام مقادیر ویژه یک ماتریس (اما نه بردارهای ویژه در همان زمان) است .این ایده مبتنی بر دو مفهوم زیر است:

- ماتریس های مشابه[16]: ماتریس‌های مشابه دارای مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یکسان هستند. دو ماتریس $A$ و $B$ مشابه هستند اگر $A = P^{-1}BP$ باشد به صورتی‌که ماتریس $P$ یک ماتریس وارون‌پذیر باشد.
- تجزیه QR: روش QR راهی برای تجزیه یک ماتریس به دو ماتریس $Q$ و $R$ است که در آن $Q$ یک ماتریس متعامد یکه[17] و $R$ یک ماتریس بالامثلثی است. یک ماتریس متعامد یکه دارای ویژگی‌هایی است:

$Q^{-1} = Q^T$ که به معنای $Q^{-1}Q = Q^TQ = I$ است.

چگونه این دو مفهوم را برای یافتن مقادیر ویژه به هم پیوند دهیم؟ فرض کنید ماتریس $A_0$ داریم که مقادیر ویژه آن باید تعیین شوند. در مرحله $k$-ام شروع با ($k = 0$)، می توانیم تجزیه QR را انجام دهیم و $A_k = Q_kR_k$ را بدست آوریم، که در آن $Q_k$ یک ماتریس متعامد یکه و $R_k$ یک ماتریس بالامثلثی است. سپس $A_{k+1} = R_kQ_k$ را تشکیل می‌دهیم که توجه می‌کنیم:

$$A_{k+1} = R_kQ_k = Q_k^{-1}Q_kR_kQ_k = Q_k^{-1}A_kQ_k$$

---

[16] Similar Matrices
[17] Orthonormal

بنابراین، نتیجه میگیریم که ماتریس $A_k$ و ماتریس $A_{k+1}$ مشابه می‌باشند، بنابراین همانطور که قبل‌تر صحبت شد، این دو ماتریس دارای مقادیر ویژه یکسانی می‌باشند. هرچه تعداد تکرار بیشتری طی می‌شود، در نهایت به یک ماتریس بالامثلثی به فرم زیر همگرا خواهیم شد:

$$A_k = R_k Q_k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & X & X & X \\ 0 & \lambda_2 & X & X \\ 0 & 0 & \lambda_3 & X \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

به صورتی‌که عناصر روی قطر اصلی، مقادیر ویژه ماتریس خواهند بود.

حال برای محاسبه ماتریس‌های $Q$ و $R$ نیاز است از الگوریتم Gram-Schmidt استفاده شود. در ادامه این الگوریتم توضیح داده می‌شود.

## الگوریتم Gram-Schmidt

فرآیند Gram-Schmidt مجموعه ای محدود و مستقل خطی از بردارها را می‌گیرد و یک پایه متعامد یکه برای زیرفضایی که توسط آن‌ها پوشش داده می‌شود، ایجاد می کند. این فرآیند با تفریق مکرر تصویر بردارها بر روی بردارهای پایه متعامد یکه محاسبه شده و سپس نرمال‌سازی بردارهای حاصل برای به دست آوردن بردار متعامد یکه بعدی کار می کند. پایه متعامد یکه حاصل، همان زیرفضایی را پوشش می‌دهد که مجموعه بردارهای اصلی پوشش می‌دهند، اما کار با آن آسان‌تر است، زیرا بردارها متعامد هستند و طول واحد دارند. مراحل الگوریتم عبارتند از:

۱. فرض کنید بردارهای $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی از بردارها در یک فضای برداری که در آن ضرب داخلی تعریف شده است باشد.

۲. بردار $\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}$ را به عنوان اولین بردار متعامد یکه در نظر بگیرید.

۳. به ازای مقادیر $i = 2, 3, \dots, n$ بردار $\boldsymbol{u}_i = \frac{\boldsymbol{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{u}_i \rangle \boldsymbol{u}_j}{\left\| \boldsymbol{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{u}_i \rangle \boldsymbol{u}_j \right\|}$ به عنوان بردار متعامد یکه بعدی در نظر بگیرید.

۴. مجموعه $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای زیرفضایی که مجموعه $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ پوشش می‌دهد می‌باشد.

## گام نهایی

حال که پیاده‌سازی‌های مربوط به Power Method و QR Method را تمام کرده‌اید، می‌توانیم به سراغ تست پیاده‌سازی بر روی داده بزرگ‌تر برویم. در این بخش، می‌خواهیم پیاده‌سازی خود را روی یک مجموعه داده (ماتریس) بزرگ‌تر بررسی کنیم و ببینیم که آیا پیاده‌سازی ما می‌تواند مقادیر ویژه و بردارهای ویژه این ماتریس را پیدا کند یا خیر. بیایید به جزئیات ماتریس بپردازیم. در واقع، یک ماتریس ژن-ژن داریم که داده‌های یک سیستم از ژن‌ها را نگه می‌دارد. در زمینه داده‌های بیان ژن، هر داده یک بردار تلقی می‌شود و تصویر داده‌ها بر روی یک مؤلفه اصلی می‌تواند به عنوان یک الگوی شبیه به ژن برای بیان در نمونه‌ها مشاهده شود و این الگوی نرمال شده گاهی به عنوان یک Eigengene نامیده می‌شود. بردارهای ویژه می‌توانند برای شناسایی الگوها در داده‌ها که در چندین ژن مشترک هستند، استفاده شوند که می‌تواند به شناسایی گروه‌هایی از ژن‌ها که هم‌راستا هستند یا در فرآیندهای زیستی مشابهی شرکت دارند، کمک کند. دلیل کارایی بردارهای ویژه این است که آن‌ها جهت‌هایی را که داده‌ها در آن‌ها بیشترین تغییر را دارند را نشان می‌دهند و مقادیر ویژه متناظر نشان‌دهنده میزان تغییر در طول آن جهت‌ها هستند. با تحلیل بردارهای ویژه و مقادیر ویژه یک ماتریس داده بیان ژن، پژوهشگران می‌توانند درکی از فرآیندهای زیستی پایه‌ای که الگوهای مشاهده شده در بیان ژن را تحریک می‌کنند، به دست آورند.

ماتریس ورودی به صورتی است که سطرها نشان دهنده ژن‌ها، ستون‌ها نمایانگر نمونه‌های ژن‌ها و مقادیر میزان ارتباط هر ژن با هر نمونه از آن می‌باشد. حال لازم است که خروجی هر یک از توابع را بر روی این ماتریس چک کنید.

## نکات

- **استفاده از توابع `eig` و `qr` کتابخانه numpy در این تمرین مجاز نمی‌باشد.**
- **صرفا سلول‌هایی که مشخص شده است را تغییر داده و از تغییر دیگر سلول‌ها پرهیز کنید. سلول‌هایی که نیاز به تغییر داشته باشند به واسطه کامنت‌گذاری مشخص شده اند.**

## دانشجویان عزیز توجه کنید که:

❊ فایل پاسخ خود را تنها به شکل <<StuNum_HWNum.pdf>> نام‌گذاری کنید. (به عنوان مثال ۴۰۰۱۲۳۴۵۶_HW4.pdf)

❊ فایل پاسخ علاوه بر پاسخ بخش تئوری باید حاوری گزارش و تحلیل نتایج به دست آمده از بخش پیاده‌سازی‌ها باشد.

❊ در صورت شبیه بودن پاسخ تمارین دانشجویان، نمره تمرین بین دانشجویان با پاسخ تمرین مشابه تقسیم خواهد شد.

❊ اگر هرگونه سوال و ابهامی داشتید با ایمیل یا آیدی تلگرامی زیر ارتباط برقرار کنید.

amirmohamad.babaei79@gmail.com

@Amir_fal_01