دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

به نام خدا

دانشکده مهندسی کامپیوتر

جبر خطی کاربردی دکتر امیرمزلقانی

تمرین سری اول (از فصل اول)

نیم‌سال دوم ۰۱-۰۲

بخش تئوری

سوال اول

درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

۱. هر عملیات کاهش سطری برگشت پذیر است.
۲. یک متغیر پایه در یک سیستم خطی، متغیری است که با یک ستون محوری در ماتریس ضرایب مطابقت دارد.
۳. شکل اشلون (echelon form) یک ماتریس منحصر به فرد است.
٤. هر زمان که یک سیستم دارای متغیرهای آزاد باشد، مجموعه راه حل های آن حتما حاوی چندین جواب است.
٥. مجموعه Span{u,v} همیشه به عنوان یک صفحه که از مبدا عبور میکند تجسم می شود.
٦. اگر ماتریس افزوده شده [A b] دارای موقعیت محوری در هر ردیف باشد، معادلهAx=b سازگار است.
۷. اثر افزودن p به یک بردار، برابر با حرکت بردار در جهتی موازی با p است.
۸. اگر مجموعه ای دارای بردارهای کمتری نسبت به درایه های موجود در بردارها باشد، این مجموعه از بردار ها به صورت مستقل خطی است.
۹. هر مجموعه شامل وکتور ۰ ، وابسته خطی است.
۱۰. یک ماتریس m*n با n ستون محوری در هر ستون یک pivot دارد بنابراین معادله Ax=b هیچ متغیر آزادی ندارد و اگر جوابی داشته باشد منحصر به فرد است.
۱۱. اگر A ماتریس m*n باشد آنگاه برد (range) تبدیل x→ Ax برابر باR^m است.
۱۲. اگر A ماتریس ۳ در ۲ باشد آنگاه تبدیل x→ Ax نمیتواند یک به یک باشد.

سوال دوم

برای معادلات زیر ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل دهید، در هر مرحله پس از مشخص کردن جایگاه (درایه) و ستون محوری و با استفاده از روش کاهش سطری ماتریس‌ها را به شکل کاهش یافته سطری در بیاورید و سپس در مورد جواب دستگاه‌ها بحث کنید.

الف)

$$\begin{cases} 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 12x_5 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 11x_4 + 12x_5 = 0 \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -1 \\ 6x_1 + 3x_2 = -3 \\ -9x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

سوال سوم

الف) فرض کنید ماتریس ضرایب یک سیستم معادلات خطی دارای موقعیت محوری در هر ردیف است. توضیح دهید که چرا سیستم سازگار است.

ب) فرض کنید ماتریس ضرایب مربوط به یک سیستم خطی که از سه معادله و سه متغیر تشکیل شده. دارای یک محور در هر ستون است. توضیح دهید که چرا سیستم یک راه حل منحصر به فرد دارد.

ج) آیا مجموعه ای از سه بردار در $R^۴$ می تواند تمام $R^۴$ را span کند؟ توضیح دهید. در مورد n بردار در R^m وقتی n کوچکتر از m باشد چطور؟

سوال چهارم

فرض کنید ماتریس A، ماتریس افزوده یک دستگاه معادلات خطی باشد. که در آن a یک عدد حقیقی است.

مشخص کنید به ازای چه مقادیری از a، دستگاه جواب خواهد داشت.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & -۱ & -۲ & a^۲ \\ -۱ & -۷ & -۱۱ & a \end{bmatrix}$$

سوال پنجم

فرض کنید دو بردار u و v ، دو بردار مستقل خطی در فضای برداری $\mathbb{R}^۳$ باشند. همچنین فرض کنید P صفحه ای با معادله پارامتری $x=tu+sv\ (t,s\in\mathbb{R})$ است که شامل نقاط u، v و صفر (مبدأ) می باشد. در صورتی که تبدیل خطی

$T:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}^۳$ تعریف شده باشد، اعمال این تبدیل خطی بر صفحه P، به یکی از حالات (الف)، (ب) و یا (ج) منتج می‌شود.

توضیح دهید $T(u)$ و $T(v)$ باید در هر کدام از حالات، چه وضعیتی داشته باشند؟

الف) یک صفحه را گذرا از مبدأ را منتج می شود.

ب) یک خط که از مبدأ می گذرد.

ج) بردار صفر(مبدأ در $\mathbb{R}^۳$) خواهد بود.

سوال ششم

الف) تمام x هایی را پیدا کنید که با تبدیل $x \rightarrow Ax$ به صفر نگاشت می شوند.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۴ & ۷ & -۵ \\ ۰ & ۱ & -۴ & ۳ \\ ۲ & -۶ & ۶ & -۴ \end{bmatrix}$$

فرض کنید T یک تبدیل خطی است. ماتریس استاندارد T را پیدا کنید.

ب) $T: R^۲ \rightarrow R^۲$ که نقاط را حول مبدا به اندازه $-\frac{\pi}{۴}$ در جهت خلاف عقربه های ساعت میچرخاند.

ج) $T: R^۲ \rightarrow R^۲$ که ابتدا یک برش افقی انجام می دهد که e۲ را به e۲-۲e۱ تبدیل می کند (e۱ را بدون تغییر باقی می گذارد) و سپس نقاط را نسبت به خط $x_۲ = -x_۱$ قرینه می کند.

سوال هفتم

دو تبدیل $T: \mathbb{R}^۲ \rightarrow \mathbb{R}^۲$ و $S: \mathbb{R}^۲ \rightarrow \mathbb{R}^۲$ را به صورت زیر تعریف کرده ایم:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۲x + y \\ ۰ \end{bmatrix}, S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ xy \end{bmatrix}$$

مشخص کنید که آیا T و S و همچین ترکیب آن ها $S \circ T$ تبدیل خطی است یا خیر؟

سوال هشتم

فرض کنید M یک ماتریس $n * n$ بالا مثلثی باشد. اگر عناصر قطری آن همگی غیر صفر باشند، آنگاه

الف) اثبات کنید که ستون‌های M مستقل خطی‌اند.

ب) اگر همگی عناصر قطری آن غیرصفر نباشند، این نتیجه گیری برقرار خواهد بود یا خیر؟

بخش پیاده‌سازی

- فایل نوت بوکی نیز در تمرین ضمیمه شده است که در آن قالب پیاده سازی و توضیحات مسئله به زبان انگلیسی را میتوانید پیدا کنید. پیاده سازی را با کامل کردن سلول های فایل نوت‌بوکی که در اختیارتان قرار گرفته است انجام دهید.

تمرین اول: پیشبینی جمعیت

تعریف مسئله

در بسیاری از زمینه‌ها از جمله اقتصاد، مهندسی، جمعیت‌شناسی و ... با سیستم‌هایی در تعامل هستیم که ویژگی آنها به مرور زمان دچار تغییر می‌شود. اگر در بازه زمانی k، بردار x_k بیانگر وضعیت ویژگی‌های سیستم در آن لحظه باشد، در حالت ساده با استفاده از جبر خطی می‌توان وضعیت بعدی سیستم را با استفاده از رابطه پایین پیش‌بینی کرد:

$$x_{k+1} = Ax_k \ for \ k = ۰, ۱, ۲, \dots$$

به رابطه بالا یک رابطه تفاضلی خطی(*linear diffrence equation*) یا رابطه بازگشتی می‌گویند.

در این تمرین شما سیستمی طراحی می‌کنید که ویژگی ورودی آن جمعیت در آن بازه زمانی است و خروجی این سیستم جمعیت در بازه زمانی بعدی (بعد از مهاجرت) خواهد بود.

برای اینکار شما باید ابتدا ماتریس استاندارد *A* را با توجه به داده‌های سیستم تشکیل داده و سپس برای به دست آوردن وضعیت سیستم در *k*امین بازه، به صورت بازگشتی از رابطه بیان‌شده استفاده کنید.

در ادامه یک مثال برای روشن شدن صورت مسئله آورده شده است.

مثال: فرض کنید قرار است وضعیت جمعیت یک ناحیه را در مواجه با مهاجرت از شهر به حومه شهر و از حومه شهر به شهر پیشبینی کنیم.

داده‌های سیستم در بازه زمانی کنونی به ما می‌گویند که حدود ۶۰۰ هزار نفر در شهر و ۴۰۰ هزار نفر در حومه شهر زندگی می‌کنند. همچنین بیان می‌کند که حدود ۵ درصد از جمعیت شهر قصد مهاجرت به حومه شهر و ۳ درصد از حومه شهر نیز قصد مهاجرت به شهر را دارند.

پاسخ این مسئله این است که جمعیت شهر و حومه شهر بعد از دو سال چه خواهد بود.

مسئله را به صورت زیر فرموله و حل می‌کنیم.

$$x_۰ = \begin{bmatrix} ۶۰۰,۰۰۰ \\ ۴۰۰,۰۰۰ \end{bmatrix},$$

$$x_۱ = \begin{bmatrix} r_۱ \\ s_۱ \end{bmatrix} = r_۰ \begin{bmatrix} ۰.۹۵ \\ ۰.۰۵ \end{bmatrix} + s_۰ \begin{bmatrix} ۰.۰۳ \\ ۰.۹۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰.۹۵ & ۰.۰۳ \\ ۰.۰۵ & ۰.۹۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_۰ \\ s_۰ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \ x_۱ = \begin{bmatrix} ۰.۹۵ & ۰.۰۳ \\ ۰.۰۵ & ۰.۹۷ \end{bmatrix} x_۰ = \begin{bmatrix} ۵۸۲,۰۰۰ \\ ۴۱۸,۰۰۰ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \ x_۲ = \begin{bmatrix} ۰.۹۵ & ۰.۰۳ \\ ۰.۰۵ & ۰.۹۷ \end{bmatrix} x_۱ = \begin{bmatrix} ۵۶۵,۴۴۰ \\ ۴۳۴,۵۶۰ \end{bmatrix}$$

پس پیشبینی می‌شود بعد از ۲ سال، جمعیت شهر به حدود ۵۶۵ هزار نفر و جمعیت حومه به ۴۳۴ هزار نفر برسد.

پیاده سازی

برای این پروژه انتظار می رود کدی را پیاده سازی کنید تا با گرفتن داده‌های مهاجرت و جمعیت اولیه هر ناحیه، بتواند جمعیت هر ناحیه را بعد از گذشت k بازه زمانی نشان دهد.

ورودی و خروجی کد شما باید به صورت زیر باشد:

ورودی:

در سطر اول دو عدد که به ترتیب از چپ به راست تعداد نواحی (n) و بازه زمانی پیشبینی (k) می باشد، وارد می شود سپس در n سطر بعدی در هر سط n عدد با فاصله از هم وارد می شود که در واقع استاندارد مهاجرت را تشکیل می‌دهد.

در نهایت نیز در خط آخر n عدد که با فاصله از هم جدا شده اند می آید که هر کدام جمعیت اولیه هر ناحیه را به ترتیب نشان میدهد.

خروجی:

در خروجی n عدد که با فاصله از هم جدا شده اند می آید که هر کدام جمعیت هر ناحیه را بعد از گذشت k بازه زمانی نشان می‌دهد.

مثال:

ورودی:

```
۲ ۲
۰.۹۵ ۰.۰۳
۰.۰۵ ۰.۹۷
۶۰۰۰۰۰ ۴۰۰۰۰۰
```

خروجی:

```
۵۶۵۴۴۰ ۴۳۴۵۶۰
```

تمرین دوم: ایجاد یک رژیم غذایی مغذی

تعریف مسئله

یک رژیم غذایی مناسب رژیمی متشکل از مقدار لازم از مواد مغذی مختلف می باشد. برای دستیابی به مقادیر و نسبت های مطلوب مواد مغذی، نیاز است تنوع زیادی از مواد غذایی را در رژیم غذایی گنجاند، زیرا هر ماده غذایی چندین مورد از مواد مورد نیاز را تامین می کند، اما لزوما این مقدار به تنهایی کافی و صحیح نمی باشد. به عنوان مثال، شیر بدون چربی منبع اصلی پروتئین بود اما حاوی کلسیم بیش از حد بود. بنابراین از آرد سویا نیز برای بخشی از پروتئین استفاده میشود زیرا آرد سویا حاوی کلسیم کمی است. با این حال، آرد سویا به نسبت مقدار زیادی چربی دارد، بنابراین کشک به آن اضافه می شود زیرا چربی کمتری نسبت به کلسیم دارد. متأسفانه کشک حاوی کربوهیدرات بیش از حد است و ....

هدف ما در این سوال این است که مقدار هر یک از اقلام غذایی را به نحوی تعیین کنیم که مواد مغذی مورد نیاز را تامین کنند. در ادامه سعی میکنیم این مسئله را در قالب دستگاه معادلات در بیاوریم و به کمک جبر خطی راه حل کلی برای آن پیدا کنیم و از شما میخواهیم حل این مسئله را در قالب یک برنامه پایتون پیاده سازی کنید و جواب نهایی (تعداد واحد مورد نیاز از هر ماده غذایی تا مواد مغذی لازم را تامین کنند) را اعلام کنید.

مثال زیر این مسئله را در مقیاس کوچک نشان می دهد. سه مورد از مواد تشکیل دهنده در رژیم غذایی، همراه با مقادیر برخی مواد مغذی موجود در ۱۰۰ گرم از هر عنصر است در جدول زیر فهرست شده است.

ماده غذایی / ماده مغذی	شیر بدون چربی	آرد سویا	کشک	مقدار مورد نیاز از ماده مغذی
پروتین	۳۶	۵۱	۱۳	۳۳
کربوهیدرات	۵۲	۳۴	۷۴	۴۵
چربی	۰	۷	۱.۱	۳

فرض میکنیم $x_۱, x_۲, x_۳$ به ترتیب تعداد واحد از هر کدام از این مواد غذایی را نشان دهند (هر واحد ۱۰۰ گرم است مثلا اگر x۱ = ۲ باشد به این معنی است که از شیر بدون چربی به اندازه ۲۰۰ گرم داریم). یک رویکرد برای حل این مشکل، استخراج معادلات برای هر ماده مغذی به طور جداگانه است، یعنی برای مثال یک معادله برای میزان پروتین تعریف میکنیم که مجموع میزان پروتین موجود در هر ماده غذایی را باهم جمع کرده و برابر با مقدار پروتین لازم میگذاریم. رابطه زیر مقدار پروتئین تامین شده توسط $x_۱$ واحد شیر بدون چربی را می دهد. به این مقدار، پروتین ناشی از محصولات دیگر یعنی آرد سویا و کشک را اضافه می کنیم و مجموع حاصل را برابر با مقدار پروتئین مورد نیاز خود قرار می دهیم:

(تعداد واحد از کشک) + (میزان پروتین در واحد شیر) . (تعداد واحد از آرد)+ (میزان پروتین در واحد آرد) . (تعداد واحد از شیر) مقدار پروتین مورد نیاز = (میزان پروتین در واحد کشک).

برای هر ماده مغذی باید محاسبات مشابهی انجام شود.

یک روش کارآمدتر و از نظر مفهومی ساده تر، در نظر گرفتن یک "بردار مواد مغذی" برای هر ماده غذایی و ساختن فقط یک معادله برداری است. مقدار مواد مغذی تامین شده توسط $x_۱$ واحد شیر بدون چربی، ضرب اسکالری به صورت $x_۱a_۱$ است که در آن $a_۱$ اولین ستون در جدول ۱ است.

فرض کنید $a_۲, a_۳$ به ترتیب بردارهای مربوط به آرد سویا و کشک باشند، و فرض کنید b برداری باشد که کل مواد مغذی مورد نیاز را فهرست می کند (ستون آخر جدول). سپس $x_۲a_۲, x_۳a_۳$ مواد مغذی عرضه شده توسط $x_۲$ واحد آرد سویا و $x_۳$ واحد کشک را می‌دهند. بنابراین معادله مربوطه به شکل زیر خواهد بود:

$$x_۱a_۱ + x_۲a_۲ + x_۳a_۳ = b = \text{مقدار مغذی مواد مورد نیاز}$$

که در آن a_i ها بردارهایی با ابعاد ۳ در ۱ و x_i ها اسکالر هستند. حال برای حل این معادله میتوانیم از روشی که در فصل اول خوانده ایم استفاده کنیم برای این کار معادله را به صورت Ax=b مینویسیم:

$$[a1\ \ a2\ \ a3]\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = b - \text{برای این مثال} \rightarrow \begin{bmatrix} ۳۶ & ۵۱ & ۱۳ \\ ۵۲ & ۴۱ & ۷۴ \\ ۰ & ۷ & ۱.۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۳ \\ ۴۵ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

و برای حل این دستگاه معادلات کافیست ابتدا ماتریس افزوده را بنویسیم و سپس آن را به فرم اشلون و اشلون کاهش یافته تبدیل کنیم. برای سیستم معادلات مربوطه به صورت زیر میشود:

$$\begin{bmatrix} ۳۶ & ۵۱ & ۱۳ & ۳۳ \\ ۵۲ & ۴۱ & ۷۴ & ۴۵ \\ ۰ & ۷ & ۱.۱ & ۳ \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰.۲۷۷ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰.۳۹۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰.۲۳۳ \end{bmatrix}$$

توجه کنید باید فرم اشلون کاهش یافته ی ماتریس را در خروجی چاپ کنید.

با توجه به فرم کاهش یافته ی ماتریس، ضرایب هر یک از $x۱$تا $x۳$ را بدست میآوریم:

تا سه رقم اعشار، رژیم غذایی به ۰/۲۷۷ واحد شیر بدون چربی، ۰/۳۹۲ واحد آرد سویا و ۰/۲۳۳ واحد کشک نیاز داریم تا مقادیر مورد نظر پروتئین، کربوهیدرات و چربی را فراهم شود.

$$x_۱ = ۰.۲۷۷$$
$$x_۲ = ۰.۳۹۲$$
$$x_۳ = ۰.۲۳۳$$

- لازم به ذکر است مقدار هر ماده باید مقدار مثبتی باشد.

پیاده سازی

برای این پروژه انتظار می رود کدی را پیاده سازی کنید تا با گرفتن ماتریس افزوده و حل دستگاه معادله مربوطه، بتوانیم به مقدار لازم از هر ماده غذایی برای دست یابی به میزان مواد مغذیی خواسته شده برسیم.

ورودی و خروجی کد شما باید به صورت زیر باشد:

ورودی:

در سطر اول دو عدد که به ترتیب از چپ به راست تعداد مواد مغذی (n) و تعداد مواد غذایی (m) می باشد، وارد می شود . سپس در هر یک ازn سطر بعدی m عدد با فاصله از هم وارد می شود که در واقع ماتریس میزان مواد مغذی در هر واحد از مواد غذایی را نشان میدهد، مانند جدول ۱ می باشد.

در نهایت نیز در خط آخر n عدد که با فاصله از هم جدا شده اند می آید که هر کدام میزان لازم از هر ماده مغذیی که به همان ترتیب قبلی می آید را نشان میدهد.

خروجی:

در خروجی ابتدا ماتریس کاهش یافته ی سطری نمایش داده می شود. و سپس در m خط بعدی متغیر ها (تعداد واحد لازم از هر غذا)به ترتیب و با فرمت XN=P نمایش داده می شوند که XN نشان دهنده متغیر N ام و P نشان دهنده مقدار متغیر می باشد.

در صورتی که پس از حل دستگاه به متغیرهای آزاد برخورد کردید، آنها را با مقدار ثابت ۱۰ جایگزین کنید.

و اگر دستگاه معادلات جواب نداشت عبارت "NOT POSSIBLE" چاپ شود.

مثال:

ورودی:

```
۴ ۲
۱۱۰ ۱۳۰
۴ ۳
۲۰ ۱۸
۲ ۵
۲۹۵ ۹ ۴۸ ۸
```

خروجی:

```
۱ ۰ ۱.۵
۰ ۱ ۱
۰ ۰ ۰
۰ ۰ ۰
X۱=۱,۵
X۲=۱
```

نکات:

- دقت شود که خواسته این پروژه صرفاً حل دستگاه معادله است.
- پیاده سازی شما باید برای حالت کلی حل دستگاه معادلات باشد و به ازای هر ابعادی از ماتریس افزوده باید جواب دستگاه معادلات را حساب کرده و جواب نهایی را برگرداند.
- استفاده از کتابخانه های آماده‌ی پایتون برای حل معادله مجاز نمی باشد و تنها مجاز به استفاده از کتابخانه numpy می باشید.

دانشجویان عزیز توجه کنید که:

❇ فایل پاسخ خود را تنها به شکل <<StuNum_HWNum.pdf>> نام گزاری کنید. (به عنوان مثال ٤٠٠١٢٣٤٥٦_HW1.pdf)

❇ فایل پاسخ علاوه بر پاسخ بخش تئوری باید حاوی گزارش و تحلیل نتایج به دست آمده از بخش پیاده‌سازی‌ها باشد.

❇ در صورت شبیه بودن پاسخ تمارین دانشجویان، نمره تمرین بین دانشجویان با پاسخ تمرین مشابه تقسیم خواهد شد.

❇ اگر هرگونه سوال و ابهامی داشتید با یکی از ایمیل‌ها یا آیدی‌های تلگرامی زیر ارتباط برقرار کنید.

hosna_oyar@aut.ac.ir

aliasad059@gmail.com

@Hosna_oyar

@AliAsad059