



دانشکده مهندسی کامپیوتر

به نام خدا



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبر خطی کاربردی دکتر امیرمزلقانی

تمرین سری دوم (از فصل دو و سه)

نیم سال دوم ۰۱-۰۲

بخش تئوری

سوالات فصل دوم

سوال اول

اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد که مجموعه درایه های هر سطر آن صفر باشد، ثابت کنید A وارون ناپذیر است.

سوال دوم

معکوس ماتریس A را به دست آورید .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

سوال سوم

همه مقادیر c را طوری بیابید که ماتریس A وارون پذیر باشد. سپس به ازای $c = 1$ ، A^{-1} را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & c \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

سوال چهارم

$$\text{ماتریس های } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ -3 & -6 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \text{ و } b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ را در نظر بگیرید.}$$

الف) تجزیه ی LU ماتریس A را به دست آورید.

ب) با استفاده از تجزیه ی LU به دست آمده در بخش الف، دستگاه $Ax = b$ را حل کنید.

سوال پنجم

ماتریس M زیر را در نظر بگیرید. آن را به چندین ماتریس کوچکتر تقسیم کرده و حاصل مقادیر زیر را بدست آورید.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

الف) M^2

ب) M^{-1} (بدون استفاده از الگوریتم کاهش سطری برای محاسبه وارون ماتریس)

سوالات فصل سوم

سوال اول

فرض کنید مجموعه $\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -x \\ 3x + 1 \end{bmatrix} \right\}$ مستقل خطی است، آنگاه مقادیر ممکن برای x را بدست آورید.

سوال دوم

درستی عبارات زیر را اثبات کنید. در غیر اینصورت یک مثال نقض بیاورید.

۱. اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه $\det A = \det A^T$.

۲. اگر A, B دو ماتریس $n \times n$ غیرمنفرد باشند، آنگاه AB نیز غیرمنفرد خواهد بود.

سوال سوم

فرض کنید A و B ماتریس هایی 4×4 باشند، به صورتی که $\det A = 3$ و $\det B = -2$ باشد. حال محاسبه کنید.

الف) $\det AB$

ب) $\det B^5$

ج) $\det(-2A)$

د) $\det A^T BA$

هـ) $\det B^{-1}AB$

سوال چهارم

اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد که درایه های آن فقط از 3 و -3 تشکیل شده باشد، ثابت کنید دترمینان آن بر $3^n \times 2^{n-1}$ بخش پذیر است.

سوال پنجم

فرض کنید $u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ و $v = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$ باشند به طوری که a, b و c مقادیری مثبت می باشند. ابتدا مساحت متوازی الاضلاعی که توسط نقاط $u, v, u+v$ و 0 مشخص می شود را محاسبه کنید، سپس دترمینان ماتریس های $\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} v & u \end{bmatrix}$ را حساب کنید. در نهایت با رسم شکل، نتیجه گیری خود از قسمت اول و دوم سوال، بیان کنید.

بخش پیاده‌سازی

تعریف مسئله

مربوط به فصل سوم

وزن‌کشی الماس به کمک جبر خطی!

ارزش یک الماس چگونه مشخص و اندازه‌گیری می‌شود؟ جواهرشناسان معمولاً از ۴ مشخصه برش، شفافیت، رنگ و عیار (واحد قیراط) بدین منظور استفاده می‌کنند. مهمترین عامل در تعیین ارزش الماس وزن آن است که اگر حتی نیم قیراط کم و زیاد شود، تاثیر زیادی بر روی ارزش نهایی دارد.

حال چگونه جواهرشناسان اشیا کوچک مثل الماس را وزن می‌کنند؟ یک راه این است که به صورت جدا هر مورد را اندازه‌گیری کنند اما این راه معمولاً دقت خوبی ندارد. استراتژی بهتری که معمولاً انتخاب می‌شود این است که چندین شی را در قالب آزمایش‌های مختلف در کنار هم اندازه‌گیری می‌کنند و سپس از نتایج آزمایش‌ها، وزن هر یک را استدلال می‌کنند.

فرض کنید از یک ترازو دو کفه‌ای بدین منظور استفاده می‌کنیم. این ترازو تفاوت وزن اجسامی که در هر کفه قرار می‌گیرند را به ما نشان می‌دهد.

جواهرساز (یا سایر افرادی که اجسام سبک کوچک را وزن می‌کنند) استراتژی خود را از قبل با ایجاد یک ماتریس طراحی D با ورودی‌های تعیین شده به شیوه زیر برنامه ریزی می‌کند:

ماتریس طراحی D یک ماتریس m در n است که هر سطر آن بیانگر یک آزمایش وزن‌کشی و هر ستون آن بیانگر جایگاه هر جواهر در کفه ترازو است. به صورت مشخص‌تر درایه d_{ij} از این ماتریس اگر برابر ۱ باشد به این معنی است که در آزمایش i ام جواهر j ام در کفه راستی ترازو قرار دارد و اگر برابر -۱ باشد، در کفه چپ ترازو قرار دارد. برای مثال ماتریس زیر نشان می‌دهد که وزن‌کشی ۴ جسم در ۴ حالت‌های مختلف انجام شده است. مکان قرارگیری هر جسم نیز طبق گفته بالا مشخص است. مثلاً در وزن‌کشی دوم، جسم دوم در کفه سمت چپ و بقیه در کفه سمت راست ترازو قرار می‌گیرند.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

نشان داده شده است که بهترین استراتژی وزن‌کشی زمانی است که به ازای ماتریس طراحی D ، دترمینان $D^T D$ به حداکثر مقدار ممکن برساند.

در این تمرین عملی شما ابتدا کدی به زبان پایتون خواهید زد که دترمینان یک ماتریس را با استفاده از روش کرامر محاسبه کند. در ادامه با استفاده آن و نوشتن دیگر توابع مورد نیاز برای این کاربرد، به سوالات زیر پاسخ می‌دهید.

سوالات

۱. فرض کنید الماس‌ها را تنها یک بار وزن‌کشی کنیم. مثلاً ماتریس D به صورت زیر تعریف بشود:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از کد خود دترمینان $D^T D$ را حساب کنید. آزمایش را با یک ماتریس دیگر با همین اندازه تکرار کنید و نتایج خود را مقایسه کنید.

۲. فرض کنید الماس‌ها را دو بار وزن‌کشی کنیم. مثلاً ماتریس D به صورت زیر تعریف بشود:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از کد خود دترمینان $D^T D$ را حساب کنید. آزمایش را با یک ماتریس دیگر با همین اندازه تکرار کنید و نتایج خود را مقایسه کنید.

۳. با استفاده از منطقی که از طراحی این نقشه وزن‌کشی انتظار دارید و نیز دانش جبرخطی خود، بیان کنید در صورتی که تعداد ستون‌های ماتریس D از سطرهایش بیشتر باشد چه اتفاقی برای دترمینان $D^T D$ می‌افتد. علت آن را توضیح دهید.

۴. حال فرض کنید هر جسم چهاربار اندازه‌گیری می‌شود. مثلاً چندین ماتریس 4×4 بسازید که درایه‌های آنها از مقادیر -1 و 1 تشکیل شده باشد. عناصر قطری این ماتریس چه مقادیری می‌گیرند؟ به نظر شما بیشترین مقدار دترمینان $D^T D$ چقدر خواهد بود؟

با استفاده از دانش جبرخطی خود و منطقی که از طراحی خوب یا بد یک نقشه وزن‌کشی انتظار دارید ماتریس طراحی 4×4 را مشخص کنید که:

الف) دترمینان $D^T D$ برابر صفر شود.

ب) دترمینان $D^T D$ بین صفر و ۲۵۶ شود.

پ) دترمینان $D^T D$ برابر ۲۵۶ شود.

آیا می‌توان ماتریسی پیدا کرد که دترمینان $D^T D$ از ۲۵۶ بیشتر شود؟

برای اینکه بهترین اندازه‌گیری را داشته باشیم هر یک از اجسام باید در کدام سمت ترازو قرار بگیرند؟

۵. حال فرض کنید هر جسم پنج اندازه‌گیری می‌شود. فرآیند سوال قبل را این بار با ماتریس‌های 5×5 در ۴ تکرار کنید.

با استفاده از دانش جبرخطی خود و منطقی که از طراحی خوب یا بد یک نقشه وزن‌کشی انتظار دارید ماتریس طراحی 5×5 در ۴ای را مشخص کنید که:

الف) دترمینان $D^T D$ برابر صفر شود.

ب) دترمینان $D^T D$ بین صفر و ۵۱۲ شود.

پ) دترمینان $D^T D$ برابر ۵۱۲ شود.

آیا می‌توان ماتریسی پیدا کرد که دترمینان $D^T D$ از ۵۱۲ بیشتر شود؟

برای اینکه بهترین اندازه‌گیری را داشته باشیم هر یک از اجسام باید در کدام سمت ترازو قرار بگیرند؟

نکات مهم پیاده‌سازی:

- در این پروژه تنها مجاز به استفاده از زبان پایتون هستید.
- پیاده‌سازی کد محاسبه‌گر دترمینان باید بدون استفاده از کتابخانه‌های آماده انجام شود.
- پاسخ کامل به سوالات اجباری است و تنها به خروجی کد اکتفا نکنید.
- توصیه می‌شود خروجی‌های مدنظر هر سوال را به همراه پاسخ آنها را در یک ژوپیتر نوت‌بوک بنویسید. در غیر این صورت باید اسکرین‌شات‌های خروجی کد در گزارش قرار گرفته باشد.

دانشجویان عزیز توجه کنید که:

* فایل پاسخ خود را تنها به شکل <<StuNum_HWNum.pdf>> نام گذاری کنید. (به عنوان مثال HW1.pdf_۴۰۰۱۲۳۴۵۶)

* فایل پاسخ علاوه بر پاسخ بخش تئوری باید حاوی گزارش و تحلیل نتایج به دست آمده از بخش پیاده‌سازی‌ها باشد.

* در صورت شبیه بودن پاسخ تمارین دانشجویان، نمره تمرین بین دانشجویان با پاسخ تمرین مشابه تقسیم خواهد شد.

* اگر هرگونه سوال و ابهامی داشتید با یکی از ایمیل‌ها یا آیدی‌های تلگرامی زیر ارتباط برقرار کنید.

asaldelkhosh@gmail.com

aliasad059@gmail.com

@asal_dkhsh

@AliAsad059