BARISAN DAN DERET

A. Definisi Barisan dan Deret

Barisan adalah suatu susunan bilangan yang dibentuk menurut suatu urutan tertentu. Bilangan-bilangan yang tersusun disebut suku. Berikut ini contoh susunan bilangan berikut.

(1) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

(2) 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

(3) 25, 20, 15, 10, 5, 0, -5, -10, -15, ...

(4) 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$, ...

Susunan bilangan di atas merupakan contoh dari suatu barisan karena susunan bilangan tersebut memiliki aturan tertentu.

Pada contoh (1) dan (3) susunan bilangan tersebut mempunyai tambahan bilangan yang tetap pada suku yang berurutan, yaitu tambahan 2 pada susunan bilangan (1) dan tambahan -5 pada susunan bilangan (3). Barisan yang suku berurutannya mempunyai tambahan bilangan yang tetap, maka barisan ini disebut **barisan aritmetika.** Tambahan bilangan yang tetap disebut beda yang disimbolkan b.

Pada contoh (2) dan (4) susunan bilangan tersebut mempunyai perbandingan bilangan yang tetap pada suatu suku dengan suku sebelumnya, yaitu perbandingan 2 pada susunan bilangan (2) dan perbandingan $\frac{1}{2}$ pada susunan bilangan (4). Barisan yang mempunyai perbandingan bilangan yang tetap pada suatu suku dengan suku sebelumnya disebut **barisan geometri.** Perbandingan bilangan yang tetap disebut rasio yang disimbolkan dengan r.

Pada suatu barisan, suku pertama dilambangkan dengan U_1 atau a, suku kedua dilambangkan dengan U_2, suku ketiga dilambangkan dengan U_3, suku ke-n dilambangkan dengan U_n dengan n $\in$A (bilangan Asli).

Deret adalah jumlah seluruh suku-suku dalam barisan dan dilambangkan dengan S_n Berikut ini beberapa contoh deret.

(1) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + ...

(2) 2 + 4 + 8 +16 + 32 + 64 + …

(3) 25 + 20 + 15 + 10 + 5 + 0 + -5 + -10 + -15 + …

(4) 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{8}$ + $\frac{1}{16}$ + $\frac{1}{32}$ + …

B. Barisan dan Deret Aritmetika

1. Barisan Aritmetika

Barisan aritmetika sering juga disebut barisan hitung adalah barisan bilangan yang setiap sukunya diperoleh dari suku sebelumnya dengan menambah atau mengurangi dengan suatu bilangan tetap. Bilangan tetap tersebut dinamakan pembeda, (biasanya disimbolkan dengan b). Jadi pembeda merupakan selisih antara suatu suku barisan dengan suku sebelumnya.

Berdasar pengertian barisan aritmetika, maka bentuk umum barisan aritmetika adalah sebagai berikut.

a, (a + b), (a + 2b), (a + 3b), (a + 3b), …,a + (n-1)b

dengan a : suku pertama barisan

b : beda pada barisan dimana b = $U_i - U_{i-1}$ dengan i = 2, 3, 4, …, n

U_n: suku ke-n dimana $U_n = a + (n-1)b$ dengan n ∈ A

2. Suku Tengah Barisan Aritmetika

Barisan aritmetika dengan banyak suku n dengan n ∈ bilangan ganjil maka memiliki suku tengah $U_{\frac{n+1}{2}}$. Suku tengah sering disimbolkan dengan U_t. Pada barisan aritmetika dengan banyak suku ganjil

$$\mathrm{U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_{\frac{n-1}{2}}, U_{\frac{n+1}{2}}, U_{\frac{n+3}{2}}, \dots, U_{n-3}, U_{n-2}, U_{n-1}, U_n}$$

berlaku:

$$\mathrm{U_1 + U_n = U_2 + U_{n-1} = U_3 + U_{n-2} = U_4 + U_{n-3} = \cdots .. = U_{\frac{n-1}{2}} + U_{\frac{n+3}{2}}}$$

Dengan suku tengah

$$\mathrm{U_t = U_{\frac{n+1}{2}} = a + \left(\frac{n+1}{2} - 1\right) b = a + \left(\frac{n-1}{2}\right) b = \frac{1}{2}(2a + (n-1)b) = \frac{1}{2}(U_1 + U_n)}$$

Berdasar uraian di atas suatu barisan aritmetika dengan banyak suku n = ganjil, maka barisan ini memiliki suku tengah U_t dimana

$$\mathrm{U_t = \frac{1}{2}(U_1 + U_n)}$$

Perhatikan contoh barisan aritmetika berikut ini.

5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 105.

Barisan aritmetika di atas memiliki banyak suku ganjil, yaitu n = 11

Berlaku hubungan $U_1 + U_{11} = U_2 + U_{10} = U_3 + U_9 = U_4 + U_8 = U_5 + U_7 = 2U_6$

$\leftrightarrow$ 5 + 105 = 15 + 95 = 25 + 85 = 35 + 75 = 45 + 65

Barisan ini memiliki suku tengah $U_t = U_{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{2}(U_1 + U_n)$

$$\leftrightarrow U_t = U_6 = \frac{1}{2}(5 + 105) = 55$$

Barisan aritmetika dengan banyak suku n dengan n $\in$ bilangan genap, tidak memiliki suku tengah. Pada barisan aritmetika dengan banyak suku genap

$$U_1, U_2, U_3, \ldots, U_{\frac{n-2}{2}}, U_{\frac{n}{2}}, U_{\frac{n+2}{2}}, U_{\frac{n+4}{2}}, \ldots, U_{n-2}, U_{n-1}, U_n$$

berlaku:

$$U_1 + U_n, = U_2 + U_{n-1} = U_3 + U_{n-2} = \ldots = U_{\frac{n-2}{2}} + U_{\frac{n+4}{2}} = U_{\frac{n}{2}} + U_{\frac{n+2}{2}}$$

Perhatikan contoh barisan aritmetika berikut ini.

5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95

Barisan aritmetika di atas memiliki banyak suku genap.

Banyak suku n = 10 Berlaku hubungan

$$U_1 + U_n, = U_2 + U_{n-1} = U_3 + U_{n-2} = \ldots = U_{\frac{n}{2}} + U_{\frac{n+2}{2}}$$

$\leftrightarrow$ 5 + 95 = 15 + 85 = 25 + 75 = 35 + 65 = 45 + 55

Contoh:

Suatu barisan aritmetika memiliki suku ketiga 14, suku tengah 39, dan suku terakhir 74. Tentukan banyak suku pada barisan aritmetika tersebut!

Jawab:

Karena barisan aritmetika memiliki suku tengah maka banyak suku n = ganjil.

Diketahui suku terakhir disebut $U_n = 74$ dan $U_t = 39$ maka

$$U_t = \frac{1}{2}(U_1 + U_n)$$

$$\leftrightarrow 39 = \frac{1}{2}(U_1 + 74)$$

$\leftrightarrow$ 78 = $U_1 + 74$ maka U_1 = a = 4

Karena U_3 = 14 maka U_3 = a + 2b

$\leftrightarrow$ 14 = 4 + 2b sehingga b = 5

Karena U_n = 74 maka a + (n-1)b = 74

$\leftrightarrow$ 4 + (n – 1)5 = 74 sehingga n = 15

3. **Suku Sisipan**

Suatu barisan aritmetika baru dapat terbentuk dari suatu barisan aritmetika lama dengan diberikan sisipan sebanyak k bilangakan diatara dua suku yang berurutannya. Misalkan p dan q dua suku berurutan pada suatu barisan aritmetika. Diantara p dan g disisipkan sebanyak k buah bilangan sehingga membentuk barisan aritmetika baru dengan beda b' berikut ini:

p, p + b', p + 2b', p + 3b', …, p + kb', q

dari barisan tersebut maka diperoleh hal berikut ini

a. beda pada barisan baru (b') dapat dicari dengan cara sebagai berikut.

Anggap p sebagai suku pertama pada barisan aritmetika lama p = a

q sebagai suku kedua pada barisan aritmetika lama q = a + b

q = (p + kb')+b'

$\leftrightarrow$ a + b = (a + kb') + b'

$\leftrightarrow$ a + b = a + (k + 1)b'

$$\leftrightarrow b' = \frac{b}{k+1}$$

Jadi, $b' = \frac{b}{k+1}$ dengan b adalah beda pada barisan aritmetika lama

B' beda pada barisan aritmetika baru

b. Suku pertama barisan aritmetika lama = suku pertama barisan aritmetika baru

c. Suku terakhir barisan aritmetika lama = suku terakhir barisan aritmetika baru

d. Apabila banyak suku ganjil maka suku tengah barisan aritmetika lama = suku tengah barisan aritmetika baru

e. Seandainya banyak suku barisan aritmetika lama adalah n, maka banyak suku barisan aritmetika baru n' = n + (n – 1)k dengan k adalah banyak suku sisipannya.

4. Deret aritmetika

Jika diketahui suatu barisan aritmetika

$$\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3, \mathrm{U}_4, \dots, \mathrm{U}_{n-3}, \mathrm{U}_{n-2}, \mathrm{U}_{n-1}, \mathrm{U}_n$$

maka dapat dibuat suatu deret aritmetika $S_n = \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2 + \mathrm{U}_3 + \mathrm{U}_4 + \cdots + \mathrm{U}_{n-1} + \mathrm{U}_n$ berikut ini akan ditentukan rumus deret aritmetika tersebut

U_1 = a

U_2 = a + b

U_3 = a + 2b

U_4 = a + 3b

....

U_{n-1} = a + (n-2)b

U_n = a + (n-1)b

Sehingga

$$S_n = a + (a+b) + (a+2b) + \cdots + (a+(n-3)b) + (a+(n-2)b) + (a+(n-1)b)$$

$$S_n = (a+(n-1)b) + (a+(n-2)b) + (a+(n-3)b) + \cdots + (a+2b) + (a+b) + a$$

$$2S_n = (2a+(n-1)b) + (2a+(n-1)b) + (2a+(n-1)b) + \cdots + (2a+(n-1)b) + (2a+(n-1)b) + (2a+(n-1)b)$$

Jadi $2S_n = n(2a+(n-1)b)$ sehingga diperoleh $S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)b)$

Contoh:

Suatu deret aritmetika memiliki suku tengah 10 dan jumlah deret barisan tersebut adalah 50.

a. Berapa banyak suku yang harus disisipkan antara dua suku yang berurutan agar jumlah deret barisan aritmetika baru 170.

b. Carilah barisan aritmetika lama dan barisan aritmetika yang baru jika diketahui barisan tersebut memiliki suku awal 2.

Jawab:

Diketahui U_t = 10

S_n = 50

$S_{n'}$ = 170

Akan dicari berapa banyak suku yang disisipkan

Jawab:

a. Menentukan banyak suku yang disisipkan

$U_t = \frac{1}{2}(U_1 + U_n)$

$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) \leftrightarrow S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n) \leftrightarrow S_n = n(U_t)$

$S_n = n(U_t) \leftrightarrow 50 = n(10)$ maka n = 5

$S_{n'} = \frac{n'}{2}(U_1 + U_n) \leftrightarrow S_{n'} = n' \frac{(U_1+U_n)}{2}$

karena suku terakhir dan suku pertama barisan lama = suku pertama dan suku terakhir baris baru maka U_t baris lama = U_t baris baru sehingga

$S_{n'} = n' \frac{(U_1+U_n)}{2} = n'.U_t$

$\leftrightarrow 170 = n'10$ *maka* n' = 17.

Sehingga n' = n + (n – 1)k ↔ 17 = 5+(5-1) k ↔ k = 3

Jadi, antara 2 suku berurutan pada barisan geometri yang lama disisipkan 3 bilangan.

b. Menentukan barisan aritmetika lama dan barisan aritmetika baru.

Baris lama memiliki n = 5 dan S_n = 50 dan baris baru memiliki n = 17 dan S_n = 170. Suku awal dan suku terakhir pada barais lama sama dengan suku awal dan suku terakhir baris baru, misal beda pada baris lama b dan beda pada baris baru b' maka

$a + 4b = a + 16b' \leftrightarrow b = 4b'$

dari baris lama diketahui n = 5, U_1 = a, U_t = 10

$U_t = U_3$ = a + 2b = 2 + 2b = 10 maka b = 4 sehingga b' = 1

Jadi, barisan yang dimaksud adalah sebagai berikut

Barisan aritmetika lama: 2, 6, 10, 14, 18

Barisan aritmetika lama: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18

C. Barisan dan Deret Geometri

1. Barisan Geometri

Barisan geometri atau ***barisan ukur*** adalah barisan bilangan yang tiap sukunya diperoleh dari suku sebelumnya dengan mengalikan dengan suatu bilangan tetap yang tidak sama dengan nol. Bilangan tetap tersebut dinamakan *pembanding* atau *rasio*, (biasanya disimbolkan dengan r).

Berdasar pengertian barisan Geometri, maka bentuk umum barisan Geometri adalah sebagai berikut.

a, ar , ar^2, ar^3, ar^4, …,ar^{n-1}

dengan a : suku pertama barisan

r : beda pada barisan dimana $\mathrm{r} = \frac{\mathrm{U_i}}{\mathrm{U_{i-1}}}$ dengan i = 2, 3, 4, …, n

U_n: suku ke-n dimana $U_n = ar^{n-1}$ dengan n ∈ A

2. Suku Tengah Barisan Geometri

Barisan Geometri dengan banyak suku n dengan n ∈ bilangan ganjil maka memiliki suku tengah $U_{\frac{n+1}{2}}$. Suku tengah sering disimbolkan dengan U_t. Pada barisan Geometri dengan banyak suku ganjil

$$\mathrm{U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_{\frac{n-1}{2}}, U_{\frac{n+1}{2}}, U_{\frac{n+3}{2}}, \dots, U_{n-3}, U_{n-2}, U_{n-1}, U_n}$$

berlaku:

$$\mathrm{U_1.U_n = U_2.U_{n-1} = U_3.U_{n-2} = U_4.U_{n-3} = \cdots.. = U_{\frac{n-1}{2}}.U_{\frac{n+3}{2}}} = \left(U_{\frac{n+1}{2}}\right)^2$$

Dengan suku tengah

Karena $\mathrm{U_1.U_n} = \left(U_{\frac{n+1}{2}}\right)^2$ maka $\mathrm{U_t = U_{\frac{n+1}{2}} = \sqrt{U_1.U_n} = \sqrt{a.a.r^{\mathit{n}-1}}} = a\sqrt{\mathrm{r}^{n-1}}$

Berdasar uraian di atas suatu barisan Geometri dengan banyak suku n = ganjil, maka barisan ini memiliki suku tengah U_t dimana

$$\mathrm{U_t} = a\sqrt{\mathrm{r}^{n-1}}$$

Karena $\mathrm{U_1.U_n = U_2.U_{n-1} = U_3.U_{n-2} = U_4.U_{n-3} = \cdots.. = U_{\frac{n-1}{2}}.U_{\frac{n+3}{2}}} = (U_t)^2$ maka pada suatu barisan geometri dengan banyak suku n dengan n ∈ bilangan ganjil hasil kali suku-sukunya adalah $U_t.\left({U_t}^2\right)^{\frac{n-1}{2}} = U_t.\left({U_t}^{n-1}\right) = {U_t}^n$

Perhatikan contoh barisan aritmetika berikut ini.

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768

Barisan Geometri di atas memiliki banyak suku ganjil, yaitu n = 9, r = 2

Berlaku hubungan $\mathrm{U_1.U_9 = U_2.U_8 = U_3.U_7 = U_4.U_6} = {U_5}^2$

↔ 3(768) = 6(384) = 12(192) = 24(96) = 48^2

Barisan ini memiliki suku tengah U_t = $3\sqrt{2^8} = 3(2^4) = 48$

Barisan Geometri dengan banyak suku n dengan n $\in$ bilangan genap, tidak memiliki suku tengah. Pada barisan Geometri dengan banyak suku genap

$$\mathrm{U_1, U_2, U_3, \dots, U_{\frac{n-2}{2}}, U_{\frac{n}{2}}, U_{\frac{n+2}{2}}, U_{\frac{n+4}{2}}, \dots, U_{n-2}, U_{n-1}, U_n}$$

berlaku:

$$\mathrm{U_1 . U_n, = U_2 . U_{n-1} = U_3 . U_{n-2} = \dots = U_{\frac{n-2}{2}} . U_{\frac{n+4}{2}} = U_{\frac{n}{2}} . U_{\frac{n+2}{2}}}$$

Contoh:

Suatu barisan Geometri diketahui suku keempat barisan tersebut adalah $\frac{1}{2}$, suku kedua adalah 2, dan suku tengahnya adalah 1. Tentukan barisan tersebut!

Jawab:

Diketahui: $U_4 = \frac{1}{2}$

$U_2 = 2$

$U_t = 1$

$U_2 = 2 \leftrightarrow ar = 2$

$U_4 = \frac{1}{2} \leftrightarrow ar^3 = \frac{1}{2} \quad \leftrightarrow \; ar. r^2 = \frac{1}{2} \leftrightarrow r^2 = \frac{1}{4}$

Sehingga $r = -\frac{1}{2}$ atau $r = \frac{1}{2}$

Untuk $r = \frac{1}{2}$ dan $U_2 = 2$ maka a = 4.

Karena $U_t = 1 \leftrightarrow 4\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = 1 \;\leftrightarrow\; \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \frac{1}{4} \;\leftrightarrow\; \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16} \leftrightarrow n = 5$

Sehingga barisan yang dimaksud adalah 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$

Untuk $r = -\frac{1}{2}$ dan $U_2 = 2$ maka a = - 4.

Karena $U_t = 1 \leftrightarrow -4\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = 1 \leftrightarrow \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = -\frac{1}{4} \leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{16}$

Sehingga tidak ada n yang memenuhi

3. Suku Sisipan pada Barisan Geometri

Suatu barisan Geometri baru dapat terbentuk dari suatu barisan Geometri lama dengan diberikan sisipan sebanyak k bilangakan diatara dua suku yang berurutannya. Misalkan p dan q dua suku berurutan pada suatu barisan Geometri. Diantara p dan g disisipkan sebanyak k buah bilangan sehingga membentuk barisan geometri dengan rasio r' berikut ini:

$p, pr', p(r')^2, p(r')^3, \ldots, p(r')^k, q$

dari barisan tersebut maka diperoleh hal berikut ini

a. Rasio pada barisan baru (r') dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut

Anggap p suku pertama pada barisan geometri lama sehingga p = a

q suku kedua pada barisan geometri lama sehingga q = ar

$q = p(r')^k.r'$

$\leftrightarrow$ $ar = a(r')^{k+1}$ maka $r = (r')^{k+1}$

Jadi, $r' = \sqrt[k+1]{r}$ dimana r adalah rasio barisan geometri lama

r' adalah rasio barisan geometri baru

b. Suku pertama barisan geometri lama = suku pertama barisan geometri baru

c. Suku terakhir barisan geometri lama = suku terakhir barisan geometri baru

d. Jika banyak suku ganjil maka suku tengah barisan geometri lama = suku tengah barisan geometri baru

e. Seandainya banyak suku barisan geometri lama adalah n, maka banyak suku barisan geometri baru n' = n + (n – 1)k dengan k adalah banyak suku sisipannya.

Contoh:

Sisipkan 5 bilangan antara 6 dan 24576 sehingga membentuk barisan geometri. Apakah barisan yang terbentuk memiliki suku tengah? Jika barisan memiliki suku tengah maka caralilah suku tengah pada barisan tersebut.

Jawab:

Diketahui: barisan lama : $U_1 = 6$ dan $U_2 = 24576$

Disisipkan 5 bilangan maka k = 5

Barisan lama memiliki rasio $r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{24576}{6} = 4096$

Barisan baru memiliki rasio $r' = \sqrt[k+1]{r} = \sqrt[6]{4096} = 4$

Karena ada 5 sisipan bilangan maka terdapat 7 suku pada barisan geometri baru

Sehingga barisan geometri baru memiliki suku tengah , yaitu

$$U_t = a\sqrt{\mathrm{r}^{n-1}} = 6\sqrt{4^6} = 6(64) = 384$$

Barisan yang dimaksud adalah 6, 24, 96, 384, 1536, 6144, 24576

4. **Deret Geometri**

Jika diketahui suatu barisan Geometri

$$\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3, \mathrm{U}_4, \dots, \mathrm{U}_{n-3}, \mathrm{U}_{n-2}, \mathrm{U}_{n-1}, \mathrm{U}_n$$

maka dapat dibuat suatu deret Geometri $S_n = \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2 + \mathrm{U}_3 + \mathrm{U}_4 + \cdots + \mathrm{U}_{n-1} + \mathrm{U}_n$

berikut ini akan ditentukan rumus deret Geometri tersebut

$U_1 = a$

$U_2 = ar$

$U_3 = ar^2$

$U_4 = ar^3$

….

$U_{n-1} = ar^{n-1}$

$U_n = ar^n$

Sehingga

$$\mathrm{S}_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$r\mathrm{S}_n = \quad ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \; -$$

$(1-r)\, S_n = a - ar^n$

Sehingga diperoleh $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$. Ini merupakan rumus deret geometri jika $0 < r < 1$.

Untuk r yang lain deret gepmetri diperoleh dengan rumus $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$.

Contoh:

Suatu barisan geometri memiliki suku tengah 80. Hasil kali suku-sukunya $2^{20}\, 5^5$.

Jumlah tiga suku pertama 105.

a. Tentukan barisan geometri lama
b. Jika diantara tiap 2 suku disisipkan k suku baru sehingga terbentuk barisan geometri baru. Tentukan banyak bilangan yang disisipkan agar jumlah suku sebelum dan sesudah suku tengah adalah 200

Jawab:

Diketahui: barisan geometri lama $U_t = 80$

Hasil kali suku-sukunya $2^{20}\, 5^5$

Jumlah 3 suku pertama $S_3 = 105$

a. Hasil kali suku-sukunya $2^{20}\, 5^5$ sehingga $U_t^n = 2^{20}\, 5^5$

$\leftrightarrow \quad 80^n = (2^4\, 5)^5$ sehingga $n = 5$

sehingga Suku tengah $U_t = U_{\frac{n+1}{2}} = U_3 = ar^2 = 80$. jadi, $a = \frac{80}{r^2}$

Karena S_3 = 105 maka $\frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{\frac{80}{r^2}(r^3-1)}{r-1} = 105$

Sehingga $80r^3 - 80 = 105r^3 - 105r^2$

$\leftrightarrow 25r^3 - 105r^2 + 80 = 0$

$\leftrightarrow 5r^3 - 21r^2 + 16 = 0$

$\leftrightarrow (r-1)(5r+4)(r-4) = 0$ sehingga r = 1 atau r = 4 atau r = - $\frac{4}{5}$

Untuk r =1 maka $a = \frac{80}{1^2} = 80$

Sehingga barisannya 80, 80, 80, 80, 80

Untuk r = 4 maka $a = \frac{80}{4^2} = 5$

Sehingga barisannya 5, 20, 80, 320, 1280

Untuk r = - $\frac{4}{5}$ maka $a = \frac{80}{\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = 125$

Sehingga barisannya 125; -100; 80; -64; 51,2

b. Jumlah suku sebelum dan sesudah suku tengah adalah 200

Misal pada barisan geometri baru rasio r' maka suku sebelum suku tengah $\frac{80}{r'}$ dan suku setelah suku tengah 80r'. sehingga berlaku

$$\frac{80}{r'} + 80r' = 200 \leftrightarrow 80(r')^2 - 200(r') + 80 = 0$$

$$\leftrightarrow 2(r')^2 - 5(r') + 2 = (r'-2)(2r'-1) = 0$$

Sehingga r' = 2 atau r' = $\frac{1}{2}$

Untuk r' = 2

- Jika r =1 maka r = $(r')^{k+1}$ ↔ 1 = 2^{k+1} sehingga tidak ada k elemen cacah yang memenuhi.
- Jika r = 4 maka r = $(r')^{k+1}$ ↔ 4 = 2^{k+1} sehingga k + 1 = 2 maka k = 1

  Sehingga:

  Barisan geometri lama : 5, 20, 80, 320, 1280

  Barisan geometri baru : 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280

- Jika r = - $\frac{4}{5}$ maka r = $(r')^{k+1}$ $\leftrightarrow$ - $\frac{4}{5}$ = 2^{k+1} sehingga tidak ada k elemen cacah yang memenuhi.

Untuk r' = $\frac{1}{2}$

- Jika r =1 maka r = $(r')^{k+1}$ $\leftrightarrow$ 1 = $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ sehingga tidak ada k elemen cacah yang memenuhi.
- Jika r = 4 maka r = $(r')^{k+1}$ $\leftrightarrow$ 4 = $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ sehingga tidak ada k elemen cacah yang memenuhi.
- Jika r = - $\frac{4}{5}$ maka r = $(r')^{k+1}$ $\leftrightarrow$ - $\frac{4}{5}$ = $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ sehingga tidak ada k elemen cacah yang memenuhi.

5. Deret Geometri tak hingga

Misal terdapat deret Geometri $S_\infty = \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2 + \mathrm{U}_3 + \mathrm{U}_4 + \cdots + \mathrm{U}_{n-1} + \cdots$ dijumlahkan sampai tak hingga maka disebut sebagai deret geometri tak hingga yang disimbolkan dengan S_∞. Hasil dari deret tak hingga tergantung dari nilai rasionya.

a. Jika r >1 maka $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = +\infty$. Sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{a(+\infty-1)}{r-1} = +\infty$

b. Jika -1< r <1 maka $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$. Sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(1-0)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$

c. Jika r < -1 maka $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = -\infty$. Sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{a(-\infty-1)}{r-1} = -\infty$

Jadi deret geometri tak hingga akan memberikan suatu nilai tertentu jika deret geometri tersebut Konvergen. Deret geometri akan konvergen jika -1< r <1 dengan rumus deret geometri tak hingga adalah $s_\infty = \frac{a}{1-r}$

Contoh:

Suatu deret geometri tak hingga memiliki jumlah 4. Tentukan suku pertama dari deret geometri tak hingga tersebut!

Jawab:

Diketahui Deret geometri tak hingga dengan jumlah 4 berarti deret tak hingga konvergen sehingga memenui syarat -1 < r < 1.

$\mathrm{s}_\infty = \frac{\mathrm{a}}{1-\mathrm{r}} \leftrightarrow 4 = \frac{\mathrm{a}}{1-\mathrm{r}} \leftrightarrow 1 - \mathrm{r} = \frac{\mathrm{a}}{4} \leftrightarrow \mathrm{r} = 1 - \frac{\mathrm{a}}{4}$

Cek syarat konvergen $-1 < 1 - \frac{a}{4} < 1 \leftrightarrow -2 < -\frac{a}{4} < 0 \leftrightarrow 8 > a > 0$

Jadi nilai a agar deret konvergen adalah $0 < a < 8$

D. Deret Gabungan

Suku-suku pada deret gabungan terbentuk dari perkalian suku-suku yang bersesuaian dari suatu deret aritmetika dan deret Geometri. Berikut ini beberapa contoh deret gabungan.

1. $1 + 2.5 + 3.5^2 + 4.5^3 + 5.5^4 + \ldots + n.5^{n-1}$
2. $x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 + \ldots + (2n-1)x^n$

Contoh:

Suatu barisan diketahui memiliki rumus suku ke-n yaitu $U_n = n.5^{n-1}$. Tentukan Jumlah deret dari barisan tersebut.

Jawab:

$S_n = 1 + 2.5 + 3.5^2 + 4.5^3 + 5.5^4 + \cdots + n5^{n-1}$

$5.S_n = \quad 5 + 2.5^2 + 3.5^3 + 4.5^4 + \cdots + (n-1)5^{n-1} + n5^n$

$-4.S_n = (1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \cdots + 5^{n-1}) - n5^n$

$-4.S_n = \frac{1(5^n-1)}{5-1} - n5^n = \frac{(5^n-1)}{4} - n5^n$ sehingga $S_n = \frac{4n5^n - 5^n + 1}{16}$

LATIHAN

Kerjakan permasalahn-permasalahan berikut ini dengan rinci, jelas, dan tepat!

1. Tentukan jumlah bilangan asli antar 10 dan 100 yang habis dibagi 3
2. Pada suatu deret aritmetika dikatahi sukuk e 3 adalah 9, jumlah suku kelima dan suku ketujuh adalah 36. Tentukan jumlah 10 suku pertamanya!
3. Tentukan n agar 1 + 2 + 3 + 4 + … + n = 120
4. Suatu deret aritmetika 1 + 3 + 5 + 7 + …. Diketahui S_n = 63001. Tentukan banyak suku pada deret tersebut dan tentukan suku ke-n dari deret yang dimaksud!
5. Tiga bilangan membentuk deret geometri. Jumlah dari ketiga baingan tersebut 19, hasil kali ketiga bilangan tersebut 216. Tentukan ketiga bilangan yang dimaksud!

DAFTAR PUSTAKA

Khoe Yao Tung, 2013, Ayo Raih Medali Emas Olimpiade Matematika, Yogyakarta : Andi Offset

Murray R Spiegel,1997. College Aljebra, Schaum's Out Line Series, Mc.Graw Hill Books Coy, New York.

Pargiyo.2002. Aljabar. Sebelas Maret University Press.

https://www.stitz-zeager.com/szprecalc08262010.pdf

https://www.boundless.com/algebra/the-building-blocks-of-algebra/