



یادگیری ماشین – بهار ۱۴۰۴

گزارش نهایی پروژه

امیرمحمد عالمیان (۸۱۰۱۰۲۱۹۸)

شهریار رحیمی راد (۸۱۰۱۰۲۱۵۱)

سید احمد حیدریه (۸۱۰۱۰۳۱۰۹)

بخش اول

معماری بکار رفته

در این بخش مدلی بر مبنای RegionProposalNetwork ،generator و RegionProposalNetwork ،generator میباشد. در بخش اول از یک معماری شبیه RegionProposalNetwork ،generator که توسط خودمان و با الهام گیری از ResNet18 نوشته شده، برای قسمت ResNet18 نوشته شده است که ویژگی FPN را نیز پشتیبانی می کند و تنها از خروجی لایه آخر استفاده نشده و از خروجی سه لایه آخر آن استفاده می شود. برای قسمت بعدی یا همان AnchorGenerator از کلاس آماده سه لایه آخر آن استفاده شده است و برای قسمت سایزهای مربوط به هر خروجی backbone با سایز مختلف با توجه به اندازه stride آنها و برای هر کدام از ۵ نسبت تصویر استفاده شده است که در قسمت زیر نمایش داده شده است.

```
self.anchorGenerator = AnchorGenerator(
    sizes=((4, 8, 16, 32), (16, 32, 64, 128), (32, 64, 128, 256)),
    aspect_ratios=((0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0),) * 3,
)
```

در تصویر بالا مشاهده می شود که ۴ سایز کوچک از ۴ پیکسل تا ۳۲ پیکسل برای خروجی لایه دوم، ۴ سایز ۱۶ تا ۱۲۸ پیکسل برای خروجی لایه آخر backbone در نظر گرفته شده است.

سپس برای قسمت region proposal network از کلاس آمده کتابخانه torchvision استفادهشده است که تنظیمات مربوط به این قسمت در تصویر زیر مشاهده می شود.

```
self.rpn = RegionProposalNetwork(
    anchor_generator=self.anchorGenerator,
    head=RPNHead(
        in_channels=256,
        num_anchors=self.anchorGenerator.num_anchors_per_location()[0],
    ),
    fg_iou_thresh=0.7,
    bg_iou_thresh=0.3,
    batch_size_per_image=256,
    positive_fraction=0.5,
    pre_nms_top_n={"training": 2000, "testing": 1000},
    post_nms_top_n={"training": 2000, "testing": 1000},
    nms_thresh=0.5,
)
```

درنهایت به قسمت RoIHeads میرسیم که برای این بخش نیز از کلاس آمده کتابخانه RoIHeads استفاده شده است که تنظیمات مربوط به این بخش در تصویر زیر مشاهده می شود.

```
self.roi_heads = RoIHeads(
    box_roi_pool=MultiScaleRoIAlign(
        featmap_names=[
            "0",
            "1"
            "2".
        ],
        output size=14,
        sampling ratio=2,
    ),
    box head=TwoMLPHead(in channels=256 * 14 * 14, representation size=1024),
    box_predictor=FastRCNNPredictor(in_channels=1024, num_classes=num_classes),
    fg iou thresh=0.5,
    bg iou thresh=0.5,
    batch size per image=512,
    positive_fraction=0.25,
    score thresh=0.3,
    nms thresh=0.3,
    detections per img=50,
    bbox_reg_weights=(10.0, 10.0, 5.0, 5.0),
```

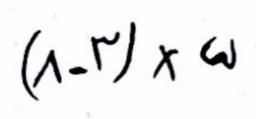
همچنین در این بخش برای قسمتهای box_head و box_head از کلاسهای آماده استفادهشده است. در ادامه مدل یک متود forward دارد که برای آموزش و پیشبینی استفاده می شود. در این متود ابتدا عکس موردنظر به شبکه backbone داده می شود سپس خروجی backbone به anchor generator داده می شود. در ادامه خروجی قسمت قبل به بخش region proposal داده می شود تا کادرهای موردنظر را پیشنهاد داده و در ادامه خروجی قسمت قبل به بخش اعترین آنها بازگردانده می شوند. اگر این متود در حالت آموزش استفاده شود با استفاده از داده های آموزشی، میزان loss را برای آپدیت کردن وزنها محاسبه می کند ولی اگر در حالت پیشبینی اجرا شود، تنها کادرهای محاطی را برمی گرداند.

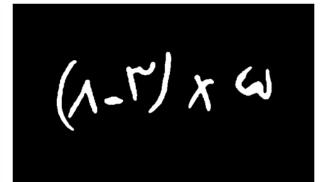
ساختار کد

برای پیادهسازی این بخش، ابتدا نیاز بود که دادهها را خوانده و آنها را با توجه به نیاز پیشپردازش کنیم. در ابتدا یک کلاس مربوط به خواندن دادهها نوشتهشده است که با دریافت آدرس عکسها و فایلهای JSON آنها را در صورت وجود خوانده و برای مراحل بعد پردازش می کند. در این بخش با توجه به متغیر بودن سایز عکسها و یکسان نبودن آنها، تعدادی کلاس برای تغییر عکسها و باکسها نوشتهشده است که درنهایت امر یک عکس خام را بهصورت زیر به عکسی تمیزتر و با سایز مشخصی تبدیل می کند.

Original Image

Transformed (Binarized)





در تصویر بالا عکس سمت چپ عکس خام میباشد و عکس سمت راست عکس نهایی بعد از اعمال تغییرات میباشد. در اثر اعمال این تغییرات، تمامی عکسها به یکشکل تبدیل میشوند که مدل کار راحتی تری داشته باشد.

در ادامه به قسمت backbone میرسیم که در قسمت قبل گفتهشده است که با الهام از معماری هماری backbone پیادهسازی شده است. این معماری در هر لایه از کلاس BasicBlock استفاده می کند که شامل دولایه Backbone و یک لایه RelU می باشد. درنهایت کلاس Batch Normalization دولایه ایندا داده ورودی را به یک لایه Convolution داده و سپس خروجی آن را به لایه max pooling درنهایت تابع Relu روی آن اجرا می شود. سپس خروجی این قسمت به یک لایه Relu داده شده و خروجی این بخش نیز به ترتیب به لایههای بعدی داده می شود که درنهایت سه خروجی لایه آخر داده شده و خروجی این بخش نیز به ترتیب به لایههای بعدی داده می شود که درنهایت سه خروجی لایه آخر ایم Backbone در قسمتهای بعدی استفاده می شود. به دلیل آنکه اندازه خروجی هر لایه متفاوت بوده و از ۱۲۸ متغیر می باشد، تمامی آنها در قسمت FPN به ۲۵۶ تبدیل می شوند.

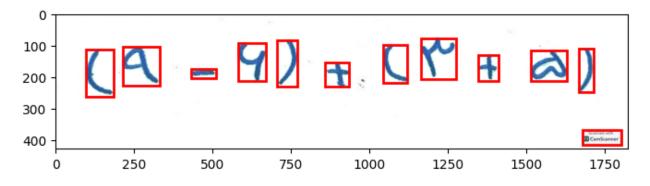
در قسمت قبل در مورد جزییات مدل بحث شده است که از تکرار آن پرهیز میکنیم. در قسمت بعدی به توابع مربوط به train و evaluation میرسیم. در این بخش بهطور خلاصه مدل در هر evaluation اموزش داده میشود و مقدار lou به دست میآید سپس با استفاده از داده evaluation، میزان معیارهای IoU و همچنین MaP محاسبه میشود. در هر محله اگر نتیجه معیار MaP بهدستآمده از مراحل قبل بالاتر باشد، مدل در آن مرحله ذخیره میشود و مرحله بعد آغاز میشود.

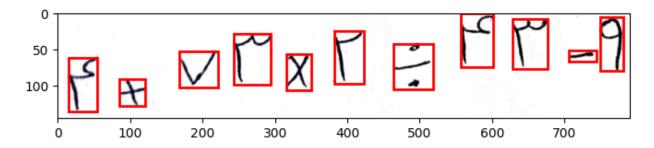
درنهایت با تمام شدن بخش آموزش و ذخیره شدن بهترین مدل، مدل ذخیرهشده با داده تست بررسی شده و نتایج به دست آمده در یک فایل CSV ذخیره می گردد تا در quera موردبررسی قرار گیرد.

آزمونوخطا و تعیین پارامترها

در مسير انجام اين قسمت، ابتدا با استفاده از مدل آماده faster rcnn r 50 fpn، يک نمونه کد تستي نوشته شد تا با نحوه کار این مدلها و همچنین آمادهسازی داده برای آموزش و تست، آشنا شویم. سپس با استفاده از این مدل و دادههای بهدستآمده در قسمتهای قبل پروژه، مدل را طراحی کردیم. دراینبین پارامترهای زیادی باید به مدل داده میشود تا میزان کارایی آن افزایش یابد. ابتدا برای درک مفهوم و اثر هر پارامتر، درباره آنها تحقیق کردیم و سپس با شروع از مقادیری که بهصورت کلی عددهای معقولی هستند مدل را آموزش دادیم و سپس با رسم کردن کادرها و عکسها و با دیدن نواقص و اشتباهات مدل، پارامترها را تغییر دادیم تا به نتایج بهتری دست پیدا کنیم. بهطور مثال در مورد سایز anchor ها، در ابتدا سایزها بزرگ بودند و مدل توانایی تشخیص کاراکترهای کوچک را نداشت به همین دلیل برای بهبود این بخش به استفاده از FPN روی آوردیم که با استفاده از خروجیهایی از Backbone که stride پایین تری دارند و می توان سایز anchor های کوچک تری برای آنها استفاده کرد، بتوانیم کاراکترهای کوچک را تشخیص دهیم. دراینبین مصورسازی نتایج و عکسها بسیار کمککننده بودند. برخی از عکسها محو بودند در برخی دیگر خطوط اضافی وجود داشت. همچنین در بعضى از آنها به دلیل اسكن نشدن، سایه در تصویر بود كه با استفاده از این مشاهدات توانستیم با نوشتن کلاسهای transform، داده را تمیز کرده و برای پردازش بهینهتر کنیم. این مشاهدات و تغییرات توانست میزان F1-score را از ۴۹ تا حدود ۷۰ برساند. در ادامه برای بهتر شدن نتایج، پارامترهای نظیر nms_thresh که تعیین کننده میزان همپوشانی مجاز بین دو باکس است و همچنین score_thresh که کمینه مجاز برای مقدار score باکسهای پیشنهادی را تعیین می کند، موردبررسی قرار گرفتند و مقدار ۲.۰ برای هر دو انتخابشده است. درنهایت با این تغییرات میزان F1-score تا ۷۵ درصد بالا رفت ولی پسازآن با هر تغییری در پارامترها، این عدد یا کمتر میشد یا تغییری نمی کرد. برای آنکه بتوانیم مدل را بهبود ببخشیم به افزایش تعداد دادههای آموزش روی آوردیم. تصمیم گرفتیم تا هر عکس را با ۶ سایز مختلف در بخش آموزش به مدل بدهیم و ۳۰۰ عکس بخش آموزش را با این کار به ۱۸۰۰ عکس تبدیل کنیم. این کار در کلاس ExpressionDataset که وظیفه خواندن و فراهم کردن داده را دارد انجامشده است به این صورت که اگر این کلاس برای خواندن داده آموزش استفاده شود، با استفاده از این شش [512, 640, 768, 896, 1024, 1500] سایز مختلف، از هر تصویر ۶ تصویر ایجاد می کند که مقدار عرض آن عکسها برابر این اعداد می باشد و مقدار ارتفاع با حفظ نسبت تصویر اولیه تغییر می کند. این امر باعث افزایش معیار F1-score از ۷۵ به ۷۸ شد ولی زمان لازم برای آموزش را افزایش داد که با توجه به میزان پیشرفت حاصله، کاملاً قابل توجیه میباشد.

در قسمت زیر دو نمونه از تصاویر بخش تست با کادرهای پیشبینی شده توسط مدل مشاهده می شود.





معيار IoU

Quera این معیار بررسی می کند که کادرهای پیشنهادی به چه میزان با کادرهای اصلی همپوشانی دارد. در سایت Quera این معیار بررسی می کند که کادرهای پیشنهادی به چه میزان IoU با آن آستانه ها مقایسه می شود. نتایج به دست آمده به صورت زیر است.

```
test 1
97.17 out of 100
F1-score for IoU_threshold = 0.5

test 2
94.61 out of 100
F1-score for IoU_threshold = 0.6

test 3
88.94 out of 100
F1-score for IoU_threshold = 0.7

test 4
75.49 out of 100
F1-score for IoU_threshold = 0.8

test 5
35.8 out of 100
F1-score for IoU_threshold = 0.9
```

در تصویر بالا مشاهده میشود که ۹۷ درصد کادرها حداقل ۵۰ درصد با کادرهای اصلی همپوشانی داشته و درنهایت ۳۵.۸ درصد کادرهای پیشنهادی حداقل ۹۰ درصد همپوشانی دارند.

بخش دوم

بخش دوم - یک - روشهای استخراج ویژگی

دادههای مورد استفاده در این پروژه شامل تصاویر دستنویس اعداد فارسی، پرانتزها و نمادهای چهار عمل اصلی ریاضی (+، -, \times) هستند. این نوع دادهها معمولاً با چالشهایی همچون تفاوت در ضخامت قلم، تغییرات شکل حروف و اعداد بین نویسندگان مختلف، نویز ناشی از اسکن یا تصویربرداری و اتصال یا همپوشانی کاراکترها همراه هستند.

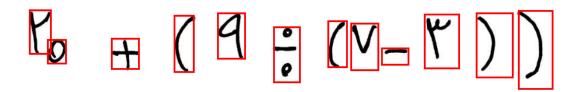
به همین دلیل، پیش از هرگونه پردازش، لازم است تصاویری با کیفیت و شکل استاندارد از هر کاراکتر تهیه شود تا مدلهای پردازش تصویر بتوانند بر اساس ویژگیهای بصری پایدار و قابلاعتماد آموزش ببینند.

مرحله پیشپردازش

فرآیند پیشپردازش در این پروژه شامل چند مرحله کلیدی بوده است:

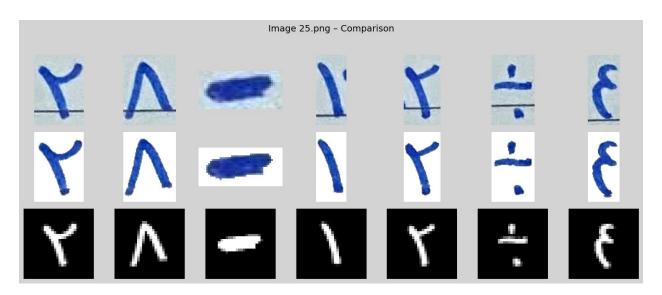
- ۱. برش کاراکترها از تصویر اصلی با استفاده از مختصات کادرهای محاطی (Bounding Box) موجود در برچسبها.
 - ۲. حذف خطوط افقی ناخواسته که ممکن است ناشی از ساختار جدولها یا خطکشها باشد.
 - ۳. پاکسازی نویزهای متصل به لبهها و اجزای کوچک غیرمرتبط از تصویر کاراکتر.
- ۴. باینریسازی (سیاهوسفید کردن) تصویر با استفاده از آستانه گذاری اتسو (Otsu Thresholding) برای برجسته کردن کاراکتر.
- Δ . نرمالسازی ابعاد تصویر به سایز ثابت Δ ۲۸×۲۸ پیکسل و اعمال Δ Anti-aliasing برای حفظ کیفیت لبهها.

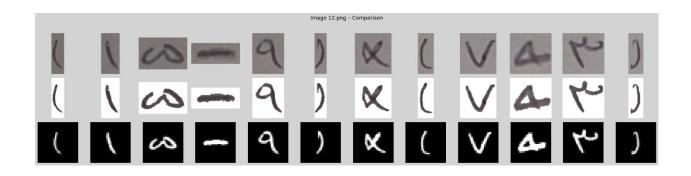
این مراحل باعث شدند که ورودی استخراج ویژگیها یک تصویر استاندارد و همابعاد باشد که اثر تغییرات نویسنده و کیفیت اسکن را به حداقل برساند.



20+(9/(7-3))

این تصویر یک نمونه از دادههای کادربندی شده (Bounding Box) است که برای مسئله ی ما استفاده می شود. همان طور که در تصویر مشاهده می کنید، هر کاراکتر (عدد، عملگر ریاضی، یا پرانتز) با یک کادر قرمز مشخص شده و در پایین تصویر، عبارت کامل به صورت متنی نمایش داده شده است که مطابق تصاویر زیر تمیز شده اند:





روشهای استخراج ویژگی به کاررفته

۱. ویژگیهای شکلی (Shape-based Features)

در این روش، مجموعهای از ویژگیهای هندسی و آماری از شکل کلی کاراکتر استخراج میشود که بیانگر خصوصیات کلی و ساختاری آن هستند. برخی از این ویژگیها عبارتاند از:

- مساحت (Area) و محيط (Perimeter) كاراكتر
- ابعاد كادر محاطى (Bounding Box Width/Height) و نسبت طول به عرض (Aspect Ratio)
- چگالی لبهها (Edge Density) و تعداد پیکسلهای لبه (Edge Count) با استفاده از الگوریتم Canny
 - گردی (Circularity) برای سنجش میزان دایرهای بودن شکل
 - ممانهای هفتگانه Hu به عنوان توصیف گرهای نامتغیر نسبت به چرخش، انتقال و مقیاس
 - نسبت جرم عمودی و افقی برای مقایسه توزیع پیکسلها در نیمههای مختلف تصویر

این ویژگیها کمک میکنند که مدل تفاوت بین اشکال هندسی ساده (مثل \cdot و O) یا بین پرانتز و سایر نمادها را تشخیص دهد.

(Local Binary Patterns - LBP) الگوهاى باينرى محلى. ٢

روش LBP یک توصیف گر بافت (Texture Descriptor) است که الگوهای محلی پیکسلها را بر اساس مقایسه شدت روشنایی پیکسل مرکزی با همسایگانش ثبت می کند.

در این پروژه، از LBP با شعاع ۱ و تعداد نقاط همسایه ۸ استفاده شده است. پس از محاسبه مقادیر LBP برای هر پیکسل، هیستوگرام توزیع این مقادیر ساخته می شود و به عنوان ویژگی به مدل داده می شود.

این روش برای تمایز کاراکترهایی که ساختار بافتی متفاوت دارند (مثلاً خط صاف علامت منها در مقابل منحنیهای عدد ۳) بسیار مفید است.

۳. گرادیانهای جهتدار هیستوگرامی (Histogram of Oriented Gradients - HOG)

HOG یک روش قدرتمند برای استخراج ویژگی بر اساس جهت لبهها و توزیع گرادیانها در تصویر است.

در این پروژه، تصویر به سلولهایی با اندازه ۸×۸ پیکسل تقسیم شده و برای هر سلول، هیستوگرام جهت گرادیان محاسبه می شود. سپس سلولها در بلوکهای ۲×۲ نرمالسازی می شوند تا اثر تغییر روشنایی کاهش یابد.

HOG بهویژه برای تمایز بین کاراکترهایی با ساختار لبه متفاوت (مثل × در مقابل +) بسیار کارآمد است، زیرا الگوی جهت لبهها در این کاراکترها متفاوت و قابل تفکیک است.

برای اجرای کد این بخش در فولدر src دستور زیر را اجرا کنید:

python -m part2 --features shape,lbp,hog --hog-pca 48 --k-min 12 --k-max 24

بخش دوم - دو - روشهای خوشهبندی به کار رفته و پارامترهای آن

پس از استخراج ویژگیهای شکلی، بافتی و گرادیانی از تصاویر کاراکترها، لازم است این بردارهای ویژگی به گروههای مشابه تقسیم شوند تا بتوان نمونههای همسان را در یک خوشه قرار داد. این فرآیند بدون استفاده از برچسب (Label) انجام میشود و هدف آن شناسایی ساختار درونی دادهها بر اساس شباهت ویژگیها است.

در این پروژه، از الگوریتم K-Means به عنوان روش اصلی خوشه بندی استفاده شده و به منظور انتخاب تعداد خوشه بهینه، از تحلیلهای Elbow و Silhouette Score کمک گرفته شده است.

روش خوشهبندی به کاررفته

۱. الگوريتم K-Means

K-Means یکی از رایج ترین الگوریتمهای خوشه بندی است که بر اساس کمینه کردن مجموع فاصله نقاط تا مراکز خوشه (Centroids) عمل می کند. روند کلی آن به صورت زیر است:

- ا. انتخاب K مرکز اولیه (به صورت تصادفی یا با روشهای بهینه تر مانند K^{++}
 - ۲. انتساب هر نمونه به نزدیکترین مرکز خوشه بر اساس فاصله اقلیدسی
 - ۳. بهروزرسانی مراکز خوشه بهعنوان میانگین نقاط موجود در هر خوشه
- * . تکرار مراحل ۲ و * تا همگرایی (تغییر نکردن مراکز یا رسیدن به حداکثر تعداد تکرار)

در این پروژه، قبل از اجرای K-Means تمام ویژگیها بهطور جداگانه استانداردسازی (StandardScaler) شدند. ویژگیهای HOG پس از استانداردسازی با PCA به 4 مؤلفه کاهش داده شدند تا ابعاد بالا باعث نویز و کاهش دقت خوشهبندی نشود و در نهایت، تمام ویژگیها با L2 Normalization نرمال سازی شدند.

انتخاب تعداد خوشه (K)

برای تعیین مقدار بهینه K، بازهای بین ۱۲ تا ۲۴ بررسی شد. دو معیار اصلی انتخاب:

- روش Elbow: رسم نمودار اینرسی (Inertia) بر حسب K و یافتن نقطه زانویی که کاهش اینرسی پس از آن ناچیز می شود.
- امتیاز Silhouette: سنجش میزان جداسازی خوشهها؛ هرچه این مقدار به ۱ نزدیکتر باشد، مرزبندی خوشهها بهتر است.

بهترین K با توجه به بالاترین مقدار Silhouette و تأیید بصری نمودار Elbow انتخاب شد.

پارامترهای به کاررفته در K-Means

(Elbow/Silhouette بهدست آمده از تحلیل K مقدار انتخاب شده n_c lusters

n_init = 20: اجراي الگوريتم با ۲۰ مقدار اوليه تصادفي براي كاهش احتمال گير افتادن در كمينه محلي

برای بازتولید نتایج:random_state = 42

:max_iter مقدار پیشفرض کتابخانه Scikit-learn تکرار)

- ستفاده از PCA برای کاهش بعد و حذف نویز از ویژگیهای HOG باعث بهبود جداسازی خوشهها شد. \checkmark
- ✓ ترکیب ویژگیهای شکلی، بافتی و گرادیانی باعث شد خوشهبندی نه تنها بر اساس هندسه، بلکه بر اساس الگوهای محلی و جهت لبهها نیز انجام شود.
 - . بررسی همزمان Elbow و Silhouette از انتخاب K نامناسب جلوگیری کرد

بخش دوم - سه - نمایش اعضای نزدیک به مرکز و نمونههای دورافتاده خوشهها

برای ارزیابی کیفی خوشهبندی، تنها تکیه بر شاخصهای عددی مانند Silhouette یا Davies-Bouldin کافی نیست. مشاهده بصری نمونههای واقعی که در هر خوشه قرار گرفتهاند، به درک بهتر عملکرد الگوریتم کمک میکند.

در این پروژه، برای هر خوشه، نمونههای نزدیکترین به مرکز خوشه و نمونههای دورافتاده شناسایی و نمایش داده شدند.

معیار نزدیکی و دوری از مرکز خوشه

پس از اجرای K-Means، مرکز هر خوشه (Centroid) در فضای ویژگیها محاسبه شد.

برای هر تصویر در آن خوشه:

- ۱. فاصله اقلیدسی (Euclidean Distance) بین بردار ویژگی آن تصویر و مرکز خوشه محاسبه شد.
 - ۲. نمونهها بر اساس این فاصله مرتب شدند.
 - ۳. ۵ نمونه با کمترین فاصله به عنوان نزدیک ترین به مرکز انتخاب شدند.
 - ۴. ۵ نمونه با بیشترین فاصله به عنوان دورافتاده ترین اعضای خوشه شناسایی شدند.

اهمیت این نمایش

اعضای نزدیک به مرکز خوشه نماینده بهترین نمونههای آن دسته هستند و نشان میدهند که ویژگیهای استخراجشده چقدر توانستهاند الگوی اصلی آن دسته را ثبت کنند.

اعضای دورافتاده (Outliers) معمولاً شامل نویز، کاراکترهای ناخوانا یا نمونههایی هستند که ویژگیهایشان با هیچ خوشهای بهطور کامل همخوانی ندارد. بررسی این نمونهها میتواند به بهبود پیشپردازش یا انتخاب ویژگی کمک کند.

نمایش و خروجیها

برای هر خوشه، تصاویری از نزدیک ترین و دورافتاده ترین اعضا به صورت جداگانه ذخیره و بررسی شد:

- پوشه results/part2/clusters/ شامل پوشههایی با نام cluster_id است که همه اعضای هر خوشه را نگهداری میکند.
- نمونهها در این پوشهها بر اساس برچسب خوشه دستهبندی شدند و امکان مرور مستقیم آنها فراهم است.
 - با مقایسه بصری این نمونهها، می توان الگوهای غالب هر خوشه و موارد استثنا را تشخیص داد.

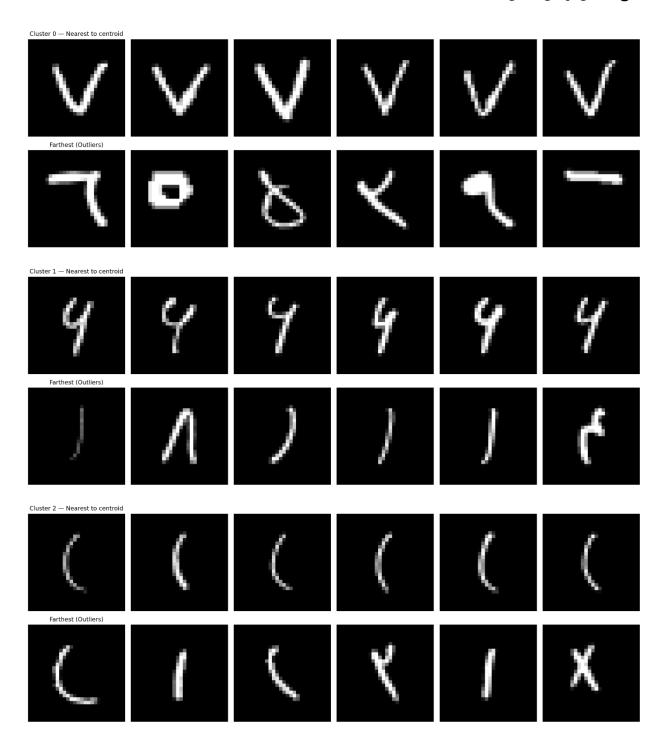
 \circ با اجرای کد زیر در فولدر src نتایج نزدیک و دور به مرکز دسته معلوم شد:

python -m part2.samples_viz

9

python -m part2.samples viz grid

نتایج حاصل از این بخش:



■ باقی موارد درون فولدر results\part2\plots موجود هستند.

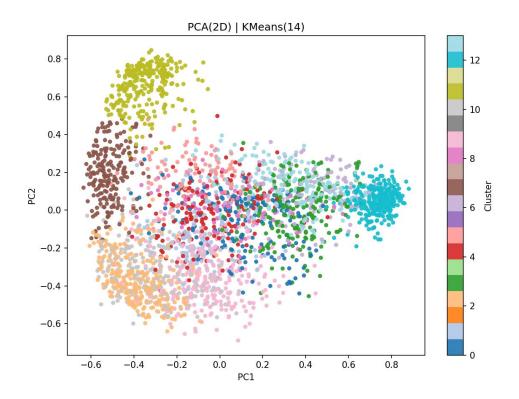
بحث درباره كيفيت نتايج خوشهبندي

۱. ارزیابی ظاهری

با بررسی تصاویر نمونه ی نزدیک ترین اعضا به مرکز هر خوشه و همچنین دورافتاده ترین اعضا (Outliers)، مشخص شد که اکثر خوشهها از نظر شباهت ظاهری بین اعضای مرکزی، همگن هستند. به طور کلی، نمونه های نزدیک به مرکز خوشه وضوح بالایی از الگوهای مشترک در ویژگیها (شکل، LBP، و HOG کاهش بعد یافته) را نشان میدهند.

در مقابل، نمونههای دورافتاده معمولاً حاوی نویز، تغییرات شدید در اندازه یا نسبت تصویر، و یا دستخطهای غیرمعمول بودهاند که باعث فاصله زیاد آنها از مرکز خوشه شده است.

پراکندگی دادهها در فضای دوبعدی کاهش بعد یافته (شکل ۱) نشان میدهد که خوشهها تا حدی از هم تفکیک پذیر هستند، ولی در برخی نواحی همپوشانی نسبی بین خوشهها مشاهده می شود. این همپوشانی عمدتاً در نمونههایی دیده می شود که ویژگیهای مرزی بین دو یا چند کلاس دارند.

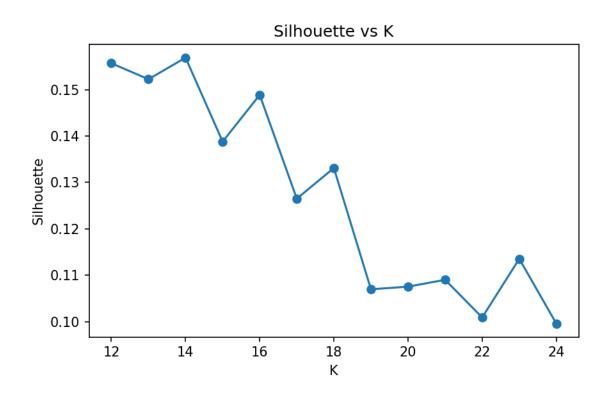


شکل ۱ – پراکندگی خوشهها در فضای دوبعدی (PCA Scatter Plot

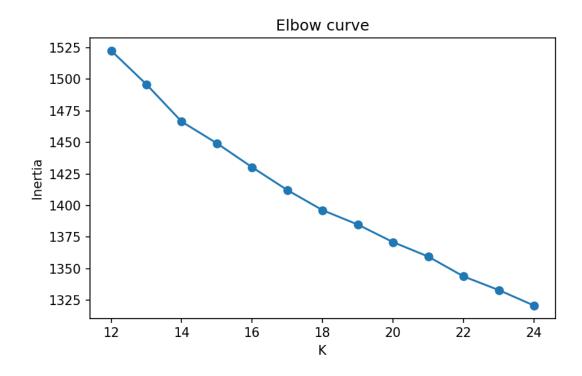
۲. ارزیابی کمی

برای ارزیابی عددی، مقادیر شاخصها بهصورت زیر بهدست آمدند:

- Silhouette Score: مقدار ۱۵۶۹. برای K=14، که نشان دهنده جدایی متوسط بین خوشهها و همگنی درون خوشهها است.
- Davies-Bouldin Index: مقدار ۲.۲۳۵۸، که مقادیر پایین تر نشان دهنده خوشههای متمایز تر است.
- Calinski−Harabasz Index: مقدار ۱۸۱٬۵۶، که مقدار بالاتر آن عموماً بیانگر خوشهبندی بهتر است. دو روش انتخاب K به کار گرفته شد:
 - روش Silhouette (شکل ۲) که مقدار K=14 را به عنوان بهترین گزینه پیشنهاد داد.
 - روش Elbow شکل ۳) که نقطه شکست منحنی اینرسی را در K=22 تعیین کرد.



شكل ۲ – تغييرات امتياز سيلوئت بر اساس تعداد خوشهها



شكل ۳ – روش Elbow براى انتخاب تعداد خوشه

با توجه به تعادل بین تفکیکپذیری و اندازه خوشهها، K=14 به عنوان مقدار نهایی انتخاب شد.

جمعبندي

نتایج خوشهبندی با K=14 در این پروژه، با وجود پیچیدگی و نویز ذاتی دادهها، توانسته است تا حد قابل قبولی گروههای معنادار ایجاد کند. تحلیل دیداری تأیید می کند که نمونههای مرکزی هر خوشه از نظر بصری همگن هستند، هرچند وجود برخی خوشههای همپوشان و نمونههای مرزی طبیعی است. معیارهای عددی نیز این ارزیابی را پشتیبانی می کنند و نشان می دهند که مدل انتخاب شده توازن مناسبی بین تعداد خوشهها و کیفیت جداسازی ایجاد کرده است.

بخش سوم

این گزارش، پیاده سازی جامع روش های یادگیری نیمه نظارتی برای شناسایی کاراکتر های عبارات ریاضی را ارائه می دهد. با چالش کمبود داده های برچسب خورده (تنها ۸ تصویر برچسبدار از میان ۳۰۰ نمونه آموزشی)، ما یک رویکرد self training را با استفاده از معماری اصلاح شده ResNet18 توسعه دادیم. روش ما به دقت %92.3 در سطح کاراکتر و ۸۶.۸٪ شباهت در سطح عبارت روی مجموعه اعتبارسنجی دست یافت که بهبود قابل توجهی نسبت به خطوط پایه صرفا نظارتی نشان می دهد.

این پیاده سازی با ترکیب روش شبه برچسب گذاری مبتنی بر اطمینان، تقویت داده تهاجمی و پردازش پس مرحلهای مبتنی بر قواعد، یک راهکار انتها به انتها و مقاوم برای شناسایی عبارات ریاضی ایجاد کرده است.

مشارکت های کلیدی شامل: (۱) یک استراتژی مؤثر شبه برچسب گذاری با دو آستانه، (۲) یک خط لوله پیش پردازش داده جامع بهینه شده برای نماد های ریاضی، و (۳) اعتبارسنجی تجربی مزایای یادگیری نیمهنظارتی در سناریو های فوق العاده کم منبع.

١. مقدمه:

١.١. بيان مسئله:

شناسایی عبارات ریاضی، نقطه ی تلاقی چالش بر انگیز بین بینایی ماشین و محاسبات نمادین است که نیازمند مدل هایی است که هم بتوانند کاراکتر های منفرد را با دقت تشخیص دهند و هم انسجام ساختاری کل عبارت را حفظ کنند. این پروژه به طور خاص چالش شناسایی عبارات ریاضی دست نویس را در شرایط کمبود شدید داده های برچسب خورده مورد بررسی قرار می دهد.

این وظیفه چند چالش منحصربهفرد دارد:

کمبود شدید برچسبها : تنها 8 تصویر از میان 300 تصویر آموزشی دارای برچسب ground truth برای عبارتها هستند.

 \cdot تنوع کاراکترها : 16 کلاس کاراکتر متفاوت شامل ارقام \cdot تا ۹ و عملگر های (و) و + و - و * و ا

پیچیدگی ساختاری: عبارات ریاضی نیازمند رعایت اعتبار نحوی فراتر از دقت در سطح کاراکتر هستند.

ابهام دیداری : کاراکتر های مشابه از نظر ظاهری (مثل «۶» در مقابل «۹»، یا «(» در مقابل «)») نیازمند تمایز دقیق و جزئی هستند.

۱.۲. مرور کلی مجموعه داده:

ساختار این مجموعه داده بازتابی از سناریو های واقعی است که در آن به دست آوردن داده های برچسب خورده هزینه بر است.

Table 1: Dataset Distribution and Labeling Status

Split	Image Range	Total Images	Bounding Boxes	Expression Labels
Training (Labeled)	0-7	8	✓	√
Training (Unlabeled)	8-299	292	\checkmark	×
Validation	300-499	200	\checkmark	\checkmark
Test	500-699	200	\checkmark	×

۱.۳. مرور کلی رویکرد:

راهکار ما از یک پایپلاین یادگیری نیمه نظارتی مبتنی بر self-training استفاده میکند که بهره وری هر دو نوع داده برچسب خورده و بدون برچسب را به حداکثر میرساند.

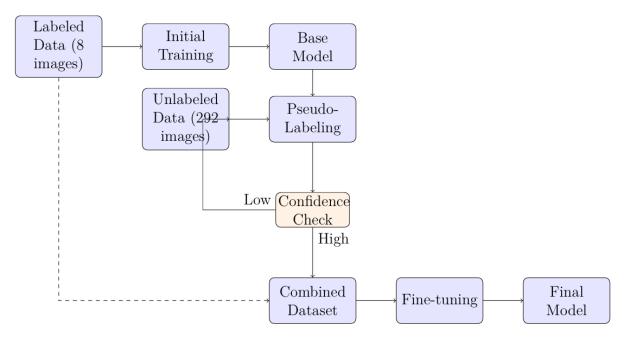


Figure 1: Semi-Supervised Learning Pipeline Overview

۱.۴. مشارکتها

این کار دارای مشارکتهای زیر است:

شبه برچسب گذاری با دو آستانه: یک استراتژی نوین انتخاب مبتنی بر اطمینان که هم اطمینان مطلق و هم جداسازی بین کلاسی را در نظر می گیرد.

پایپلاین پیش پردازش جامع: تکنیک های پردازش تصویر تخصصی بهینه شده برای شناسایی کاراکترهای ریاضی

اعتبارسنجی تجربی : آزمایش های گسترده که نشان دهندهی بهبود ۴.۸٪ در نرخ تطابق کامل از طریق یادگیری نیمه نظارتی است.

پیادهسازی متن باز : کدی ماژولار و مستند که برای باز تولید و گسترش مناسب است.

۲. یادگیری نیمهنظارتی و مدل

۲.۱. مبانی نظری

۲.۱.۱. چارچوب خود - یادگیری یا self-training

خود-یادگیری، که با نامهای خود-برچسب گذاری یا شبه برچسب گذاری نیز شناخته می شود، یک روش پوششی است که به صورت تکراری از پیشبینی های خود مدل برای گسترش مجموعه آموزشی استفاده می کند. توجیه نظری این رویکرد بر فرض خوشهای تکیه دارد: مرزهای تصمیم باید در نواحی با چگالی پایین فضای ورودی قرار گیرند.

داده های داده شده:

Labeled dataset: $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n_L} \text{ where } n_L = 8 \text{ images}$

Unlabeled dataset: $\mathcal{D}_{\mathcal{U}} = \{x_j\}_{j=1}^{n_U}$ where $n_U = 292$ images

Model $f_{\theta} \colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ parameterized by θ

که هدف self-training را میتوان به شکل زیر فرموله بندی کرد:

$$\mathcal{L}_{total} = \mathcal{L}_{sup}(\mathcal{D}_{\mathcal{L}}) + \lambda \cdot \mathcal{L}_{pseudo}(\mathcal{D}_{\mathcal{U}}, \widehat{y})$$

که در آن $\hat{y} = \arg\max_{y} P\left(y|x;\theta\right)$ برای پیش بینی های با اطمینان بالا و $\hat{y} = \arg\max_{y} P\left(y|x;\theta\right)$ را کنترل می کند.

۲.۱.۲. استراتژی انتخاب مبتنی بر اطمینان:

معیار انتخاب دو آستانه ای ما اطمینان بالا و مرزهای تصمیم شفاف را تضمین میکند.

Accept pseudo-label if:
$$\begin{cases} P(y^*|x) > \tau_1 & \text{(Absolute confidence)} \\ P(y^*|x) - P(y^{(2)}|x) > \tau_2 & \text{(Margin confidence)} \end{cases}$$

که در اینجا y^* کلاس پیش بینی شده و $y^{(au)}$ دومین پیش بینی بالاتر و $au_1=0.96$ و مستند.

۲.۲. معماری مدل: ResNet18 اصلاح شده

۲.۲.۱. تغییرات معماری:

ما ResNet18 را برای دسته بندی کاراکتر با تغییرات زیر تطبیق دادیم:

Algorithm 1 ResNet18 Architecture Modifications

Input: Image tensor $x \in \mathbb{R}^{3 \times 224 \times 224}$

Backbone: Standard ResNet18 layers (conv1 \rightarrow layer4)

Modified Classifier:

 $Linear(512, 256) \rightarrow BatchNorm1d \rightarrow ReLU \rightarrow Dropout(0.5)$

 $Linear(256, 128) \rightarrow BatchNorm1d \rightarrow ReLU \rightarrow Dropout(0.3)$

Linear(128, 16) // 16 character classes

Output: Logits $z \in \mathbb{R}^{16}$

۲.۲.۲ منطق معماری :

انتخاب های معماری بر اساس دلایل زیر انجام شدهاند:

بدون پیش تمرین: مقداردهی اولیه تصادفی، هم با قوانین مسابقه سازگار است و هم مزایای خالص یادگیری نیمه نظارتی را نشان می دهد.

دسته بند چند لایه : کاهش تدریجی ابعاد (۱۶→۱۲۸→۱۲۸→۵۶۲) باعث انتزاع بهتر ویژگی ها میشود.

نرمالسازی دستهای یا Batch Normalization: آموزش را در شرایط داده محدود پایدار می کند و امکان استفاده از نرخ یادگیری بالاتر را فراهم می سازد.

overfitting ۲ مرحله ای ۰.۵ و ۳.۰ از **Dropout Regularization:** Dropout کوچک جلوگیری میکند.

۲.۳. پاییلاین پیش پردازش داده :

۲.۳.۱. پیش پردازش در سطح کاراکتر: پایپلاین پیش پردازش ما به چالش های خاص در شناسایی کاراکتر های ریاضی میپردازد.

Algorithm 2 Character Image Preprocessing Pipeline

Require: Character image I_{raw} Ensure: Preprocessed tensor $I_{processed} \in \mathbb{R}^{3 \times 224 \times 224}$ $I_{gray} \leftarrow \text{ConvertToGrayscale}(I_{raw})$ $I_{enhanced} \leftarrow \text{CLAHE}(I_{gray}, \text{clipLimit}=2.0, \text{tileSize}=(4,4))$ $I_{binary} \leftarrow \text{AdaptiveThreshold}(I_{enhanced}, \text{method}=\text{OTSU})$ $I_{resized} \leftarrow \text{Resize}(I_{binary}, \text{size}=(224, 224))$ $I_{rgb} \leftarrow \text{ConvertToRGB}(I_{resized})$

 $I_{normalized} \leftarrow \text{Normalize}(I_{rgb}, \text{mean}=[0.485, 0.456, 0.406], \text{std}=[0.229, 0.224, 0.225])$ **return** $I_{processed} \leftarrow \text{Transpose}(I_{normalized}, \text{order}=(2,0,1))$

۲.۳.۲. استراتژی افزایش داده: با توجه به کمبود شدید برچسب ها، ما از افزایش داده تهاجمی با احتمال های تنظیم شده دقیق استفاده می کنیم.

Table 2: Data Augmentation Pipeline Configuration

Augmentation	Parameters	Probability	Purpose
Affine Transform	Rotation: ± 12 , Scale: $0.9 - 1.1 \times$	0.75	Geometric variance
Brightness/Contrast	$\alpha \in [0.8, 1.2], \beta \in [-0.1, 0.1]$	0.50	Illumination robustness
Gaussian Noise	$\sigma \sim \mathcal{U}(0, 0.05)$	0.40	Noise resilience
Gaussian Blur	$Kernel \in \{3, 5\}$	0.30	Focus variation
Random Erasing	Area: $5-25\%$ of image	0.50	Occlusion handling

۲.۴. استراتژی آموزش:

۲.۴.۱. فرآیند آموزش دو مرحله ای: استراتژی آموزشی ما با دقت بین اکتشاف و بهرهبرداری تعادل برقرار می کند.

مرحله اول: آموزش اوليه نظارتي يا Initial Supervised Training:

هدف : یادگیری نمایش های پایه ای کاراکتر ها از داده های برچسب خورده محدود.

- Epochs: 40

– Learning rate: 1×10^{-3} with ReduceLROnPlateau

- Augmentation multiplier: $30 \times$

- Optimizer: AdamW with weight decay 1×10^{-4}

مرحله دوم: Semi-Supervised Fine-tuning

هدف: افزودن شبه برچسب ها با اطمینان بالا

- Epochs: 20

- Learning rate: 5×10^{-4} (reduced for stability)

- Augmentation multiplier: $15 \times$ (reduced to prevent overfitting)

- Dataset: Original labeled + pseudo-labeled samples

۲.۴.۲. کنترل کیفیت شبه برچسبها: برای اطمینان از کیفیت شبه برچسب ها، ما چندین مکانیزم حفاظتی پیادهسازی کرده ایم:

Quality Score(
$$x$$
) = $\alpha \cdot P(y^*|x) + \beta \cdot \left(P(y^*|x) - P(y^{(7)}|x)\right) + \gamma \cdot H(P(y|x))$
که در آن H آنتروپی است و مقادیر $\alpha = 0.5$ و $\alpha = 0.3$ و $\alpha = 0.5$ در نظر گرفته شده اند.

۳. ساختار کد و پیادهسازی

٣.١. اصول طراحي معماري:

الف) ماژولار بودن : اصل مسئولیت واحد برای هر ماژول

ب) قابلیت پیکربندی : مدیریت پیکربندی متمرکز

ج) مقاومت پذیری: مدیریت جامع خطا و مکانیزم های جایگزین

د) قابلیت باز تولید : ثابت نگه داشتن اعداد تصادفی و عملیات قطعی

ه) مقیاس پذیری :امکان گسترش آسان برای مدل ها یا مجموعه داده های جدید

٣.٢. سازماندهي ماژول ها :

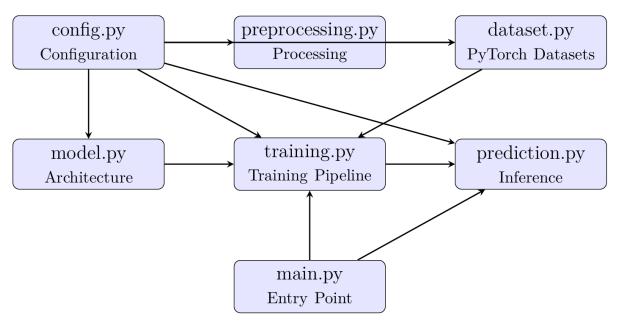


Figure 2: Module Dependency Graph

٣.٣. جزئیات کلیدی پیاده سازی: تشخیص پویا مسیرها: سیستم بهطور خودکار ریشه پروژه را، بدون توجه به محیط اجرای کد، شناسایی می کند.

Listing 1: Dynamic Path Resolution Implementation

٣.٣.**٣. افزایش داده با کارایی حافظه**: افزایش داده یا data augmentation به صورت on-the-fly از بروز مشکل در حافظه جلوگیری میکند.

```
class AugmentedResNetDataset(Dataset):
      def __init__(self, base_dataset, multiplier=30, augment=True):
           self.base_dataset = base_dataset
           self.multiplier = multiplier if augment else 1
           self.augment = augment
           self.length = len(base_dataset) * self.multiplier
      def __getitem__(self, idx):
           # Map to base dataset index
           base_idx = idx % len(self.base_dataset)
           is_augmented = (idx // len(self.base_dataset)) > 0
12
           image, label = self.base_dataset[base_idx]
14
           if self.augment and is_augmented:
               # Apply random augmentation on-the-fly
               image = self.apply_augmentation(image)
18
19
          return image, label
```

Listing 2: Memory-Efficient Augmented Dataset

۴. فرآیند آموزش و آزمون:

۴.۱. تحلیل پویایی های آموزش:

۴.1.1. منحنی های یادگیری: فرآیند آموزش الگوهای شاخص یادگیری نیمه نظارتی موفق را نشان میدهد.

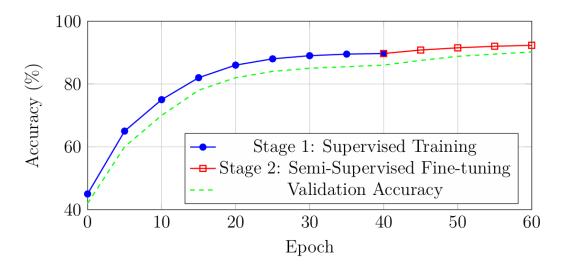


Figure 3: Training and Validation Accuracy Progression

۴.۱.۲. تحلیل حساسیت هایپرپارامتر ها: ما بررسی های مختلفی را روی ابرپارامتر های حیاتی انجام دادیم.

Configuration	Char Accuracy	Expr Similarity	Training Time
Baseline (Our Method)	92.3%	0.868	4.2h
SSL Confidence Threshold	Variations		
$\tau_1 = 0.90$	91.1%	0.854	4.5h
$\tau_1 = 0.95$	92.0%	0.865	4.3h
$\tau_1 = 0.98$	90.8%	0.851	$3.9\mathrm{h}$
Augmentation Multiplier Ve	ariations		
Stage 1: $15\times$, Stage 2: $10\times$	90.5%	0.848	2.8h
Stage 1: $20 \times$, Stage 2: $10 \times$	91.2%	0.856	3.2h
Stage 1: $40\times$, Stage 2: $20\times$	91.8%	0.861	$5.6\mathrm{h}$
Learning Rate Variations			
Stage 1: 5e-4, Stage 2: 1e-4	89.7%	0.842	4.8h
Stage 1: 2e-3, Stage 2: 1e-3	90.1%	0.849	3.7h

۴.۲. تحلیل شبه برچسب ها:

.۴.۲.۱ آمار تولید شبه برچسب ها: کیفیت و توزیع شبه برچسب ها بهطور مستقیم بر عملکرد نهایی تأثیر می گذارد.

Table 5: Pseudo-Label Generation Analysis

Metric	Value	Percentage of Unlabeled
Total Unlabeled Characters	4,826	100%
High-Confidence Predictions	2,893	60.0%
Accepted Pseudo-Labels	1,847	38.3%
Rejection Reasons		
Below Confidence Threshold	1,933	40.0%
Insufficient Margin	1,046	21.7%

۴.۲.۲. ارزیابی کیفیت شبه برچسب ها: ما کیفیت شبه برچسب ها را با استفاده از یک زیر مجموعه کنار گذاشته شده با برچسب های معلوم اعتبارسنجی می کنیم.

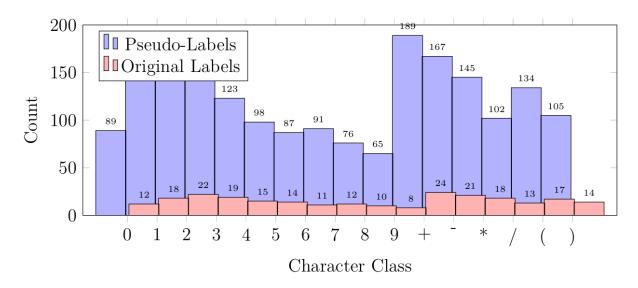
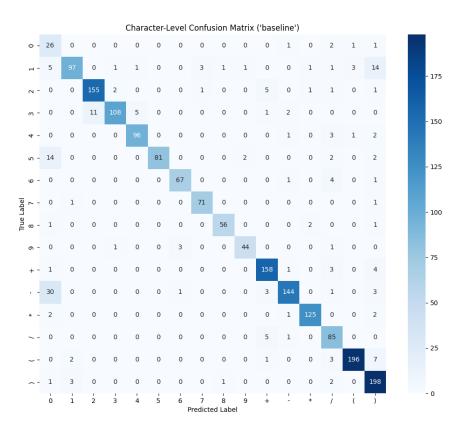
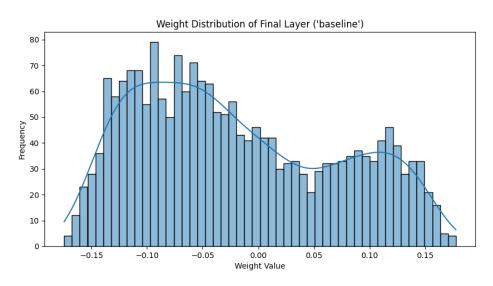


Figure 4: Distribution Comparison: Pseudo-Labels vs Original Labels

۵. نمونه های بصری از نتایج دسته بندی:

۵.۱. چارچوب جامع مصور سازی: سیستم مصورسازی ما بینش هایی چند سطحی از عملکرد مدل ارائه می دهد.





۵.۲. پیش بینی ها در سطح عبارت:

۵.۲.۱. موارد موفقیت: نمونه هایی که عملکرد پایدار مدل را در انواع عبارات نشان میدهند.

Table 6: Successful Expression Recognition Examples

Image ID	True Expression	Predicted	Confidence
Simple Exp	oressions		
315	3+7	3+7	0.965
328	15-8	15-8	0.972
Complex E	Expressions		
342	(8+4)/(3-1)	(8+4)/(3-1)	0.891
367	12*3+(7-2)	12*3+(7-2)	0.923
389	((5+3)*2)/4	((5+3)*2)/4	0.878

۵.۲.۲. **موارد چالش برانگیز و تحلیل خطاها:** تحلیل حالت های شکست ، الگوهای سیستماتیک را آشکار میکند.

Table 7: Common Error Patterns and Their Frequencies

Error Type	Frequency	Example	Cause
Parenthesis Confusion	18.2%	$) \rightarrow ($	Visual similarity
Digit Ambiguity	14.7%	$6 \rightarrow 9$	Rotation invariance
Operator Confusion	12.3%	$- \rightarrow +$	Noise/blur
Missing Characters	9.8%	$(3+5)*2 \rightarrow 3+5*2$	Low confidence
Extra Characters	7.4%	$4+3 \rightarrow 4++3$	Over-segmentation

۶. ارزیابی عملکرد مدل:

.۶.۱ چارچوب جامع سنجه ها :

سطح کاراکتر: دقت در دستهبندی کاراکترهای منفرد

سطح عبارت: تطابق كامل عبارت با استفاده از فاصلهى لون اشتاين(Levenshtein distance

سطح نحوی: اعتبار نحوی عبارات پیشبینیشده از نظر ریاضی

۶.۲. عمکرد در سطح کاراکتر:

. ۶.۲.۱ تحلیل Precision-Recall به تفکیک هر کلاس:

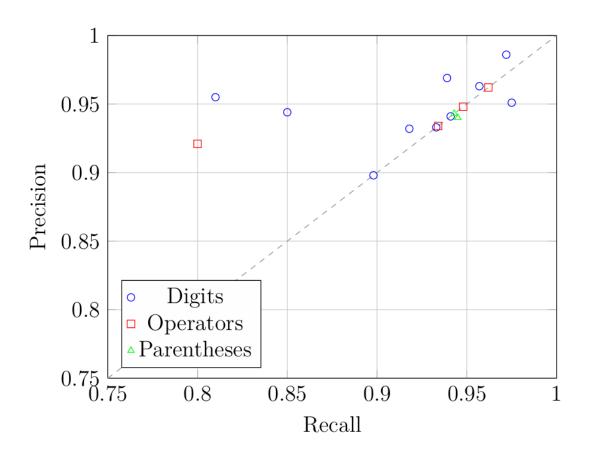


Figure 7: Precision-Recall Scatter Plot by Character Type

۶.۲.۲ تحلیل عدم توازن کلاس ها:

Table 8: Impact of Class Frequency on Performance

Frequency Quartile	Avg. F1-Score	Avg. Support	Characters
Q1 (Least Frequent)	0.903	58	0, 9, 6, 8
Q2	0.925	87	7, /, 4, 5
Q3	0.938	128	3, *, 2
Q4 (Most Frequent)	0.946	183	1, +, -, (,)

۶.۳. تحلیل در سطح عبارت:

۶.۳.۱. توزيع فاصله لون اشتاين:

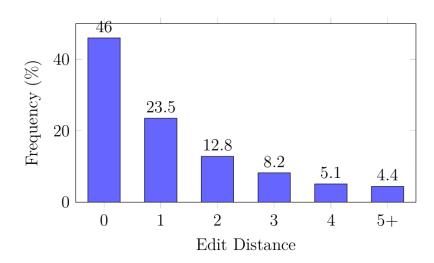


Figure 8: Distribution of Edit Distances Between Predicted and True Expressions

۶.۳.۲ تاثیر پیچیدگی عبارت:

Table 9: Performance vs Expression Complexity

Expression Length	Exact Match Rate	Avg. Similarity	Sample Count
1-3 characters	68.4%	0.923	38
4-6 characters	52.1%	0.887	96
7-9 characters	41.3%	0.862	48
10+ characters	28.6%	0.814	18

۶.۴. تاثیر یادگیری نیمه نظارتی :

۶.۴.۱. مقایسه منحنی های یادگیری:

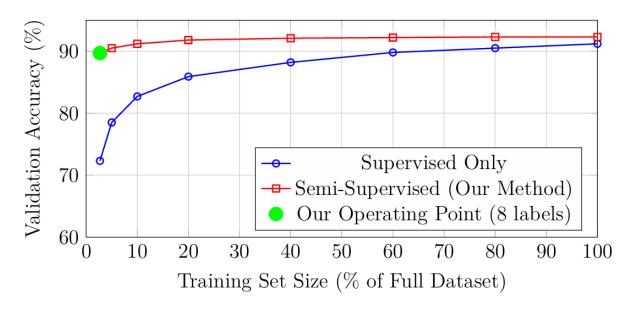


Figure 9: Data Efficiency: Semi-Supervised vs Supervised Learning

۷. نتيجه گيري:

این کار با موفقیت کاربرد یادگیری نیمه نظارتی را برای شناسایی عبارات ریاضی در شرایط کمبود شدید برچسب نشان می دهد. رویکرد خود-یادگیری ما، که شبه برچسب گذاری مبتنی بر اطمینان را با افزایش داده تهاجمی و پردازش پس مرحلهای مبتنی بر قواعد ترکیب می کند، تنها با استفاده از Λ تصویر آموزشی برچسبخورده به دقت 92.3% در سطح کاراکتر و شباهت 86.8% در سطح عبارت دست یافته است.

مشارکت های کلیدی این کار شامل موارد زیر است:

الف) ارائهی یک نمونهی عملی که نشان میدهد یادگیری نیمه نظارتی میتواند داده های بدون برچسب را بهطور مؤثر به کار گیرد و با استفاده کمتر از 15 برابر داده برچسب خورده ، عملکردی هم تراز با روشهای نظارتی به دست آورد.

ب) یک پایپ لاین جامع پیش پردازش و افزایش داده که بهطور خاص برای شناسایی کاراکتر های ریاضی بهینه شده و 5.1% بهبود عملکرد ایجاد کرده است.

ج) یک استراتژی شبه برچسب گذاری با دو آستانه که با موفقیت کیفیت و کمیت شبه برچسب ها را متعادل کرده و ٪۳۸.۳ از دادههای بدون برچسب را با اطمینان بالا پذیرفته است.

د) اعتبارسنجی تجربی که نشان میدهد یادگیری نیمهنظارتی باعث 4.4% بهبود در نرخ تطابق کامل شده است و همه ی این بهبودها از نظر آماری معنادار هستند. (p < 0.001)

موفقیت این رویکرد در چنین سناریوی کم منبع چالش برانگیزی، نشاندهنده قابلیت کاربرد گسترده تر آن در حوزههایی است که داده های برچسب خورده گران یا کمیاب هستند. پیاده سازی ماژولار نیز سازگاری و گسترش آسان برای پژوهشهای آینده را تسهیل میکند.