



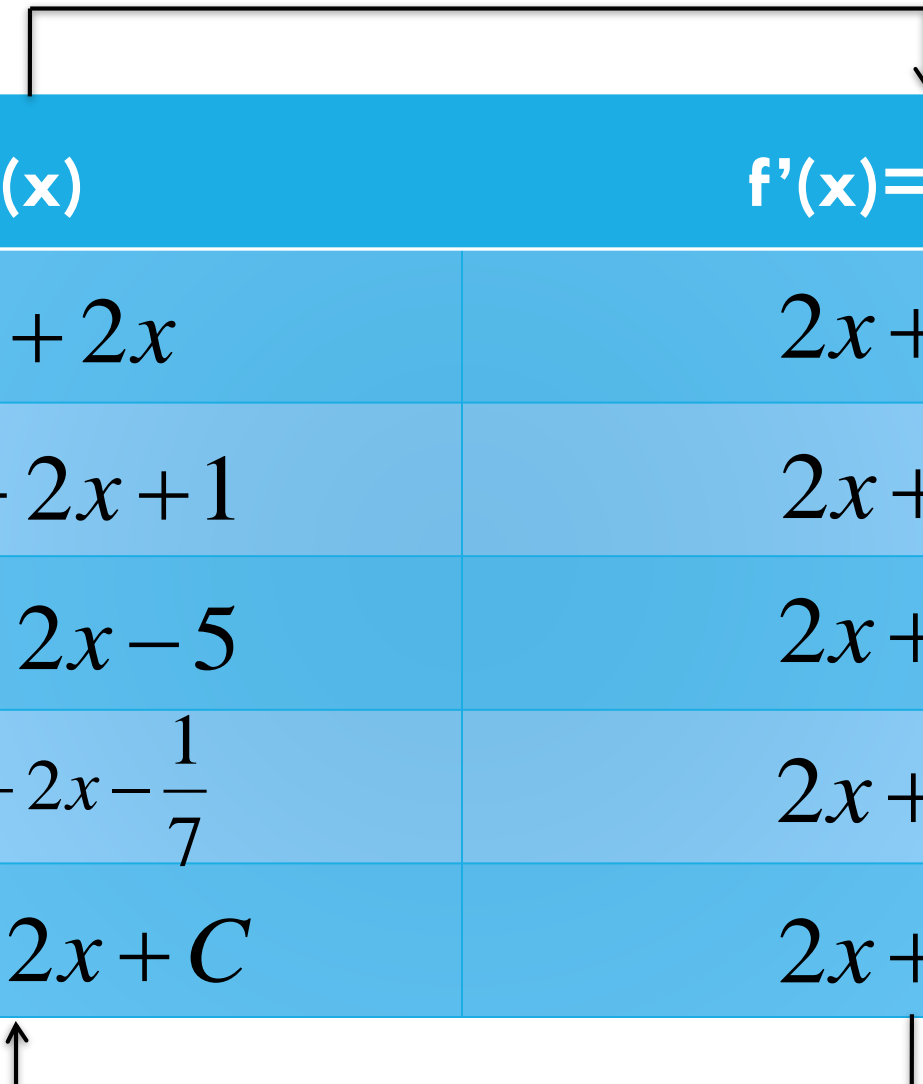
MATEMATIKA 1

Integral

KONTEN

- ❑ Definisi Integral
- ❑ Integral Substitusi
- ❑ Integral Parsial
- ❑ Luas sebagai Limit fungsi
- ❑ Kegunaan Integral Tertentu

PENDIFERENSIALAN



$f(x)$	$f'(x)=f(x)$
$x^2 + 2x$	$2x + 2$
$x^2 + 2x + 1$	$2x + 2$
$x^2 + 2x - 5$	$2x + 2$
$x^2 + 2x - \frac{1}{7}$	$2x + 2$
$x^2 + 2x + C$	$2x + 2$

PENGINTEGRALAN

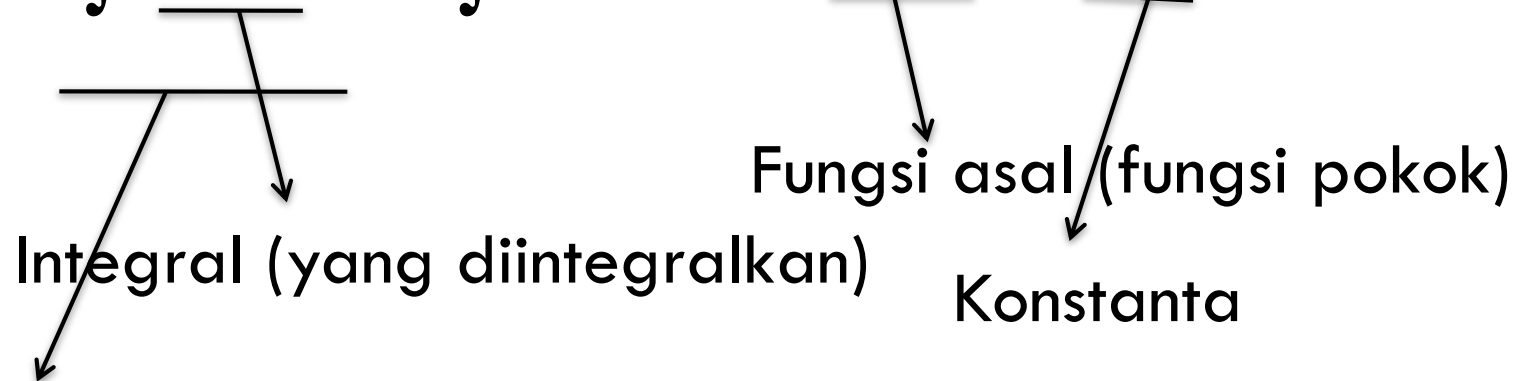
DEFINISI

Integral adalah anti turunan, sehingga jika terdapat fungsi $F(x)$ yang kontinu pada $[a,b]$ diperoleh :

$$\frac{d(F(x))}{dx} = F'(x) = f(x)$$

Anti turunan dari $f(x)$ adalah $F(x)+C$. Dinotasikan dengan :

$$\int f(x)dx = \int f'(x)dx = \underline{f(x)} + \underline{C}$$


Integral (yang diintegrasikan) Fungsi asal/(fungsi pokok)
Konstanta

unsur integrasi, dibaca “*integral $f(x)$ terhadap x* ”

INTEGRAL FUNGSI ALJABAR

Berdasarkan definisi integral,
dapatkah dirumuskan bentuk umumnya?

$$\int x^3 dx = ? \qquad \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int x^n dx = ?$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \text{ jika } n \neq -1$$

INTEGRAL FUNGSI ALJABAR

Berdasarkan definisi integral,
dapatkah dirumuskan bentuk umumnya?

$$\int (x^2 + x) dx = ?$$

$$\begin{aligned}\int (x^2 + x) dx &= \int x^2 dx + \int x dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C\end{aligned}$$

Secara umum disimpulkan

$$\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$$

INTEGRAL TRIGONOMETRI

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$$

INTEGRAL TRIGONOMETRI

$$\int \cos(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$$

$$\int \sin(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$$

$$\int \sec^2(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$$

CONTOH INTEGRAL TRIGONOMETRI

$$1. \int \sin 4x \, dx = -\frac{1}{4} \cos 4x + C$$

$$2. \int \cos (7x - 5) \, dx = \frac{1}{7} \sin (7x - 5) + C$$

$$\begin{aligned} 3. \int 3 \sin (2 - 6x) \, dx &= -\left(\frac{3}{-6}\right) \cos (2 - 6x) + C \\ &= \frac{1}{2} \cos(2 - 6x) + C \end{aligned}$$

INTEGRAL SUBSTITUSI



Digunakan jika pengintegralan tidak dapat diselesaikan dengan integrasi langsung, maka kita substitusikan variabel baru sehingga pengintegralan dapat **diselesaikan**.

INTEGRAL SUBSTITUSI

Contoh :

Tentukan : $\int x\sqrt{x^2 + 4}dx$

misalkan $u = x^2 + 4$, maka $du = 2xdx$
 $xdx = \frac{du}{2}$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2 + 4}dx &= \int x(x^2 + 4)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \int (x^2 + 4)^{\frac{1}{2}} xdx \\ &= \int (u)^{\frac{1}{2}} \frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (x^2 + 4)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

INTEGRAL PARSIAL

Integral Parsial adalah cara penyelesaian integral yang memuat perkalian fungsi, tetapi tidak dapat diselesaikan secara substitusi biasa.

INTEGRAL PARTIAL

$$\int d(uv) = \int u \, dv + \int v \, du$$

$$uv = \int u \, dv + \int v \, du$$

$$uv - \int v \, du = \int u \, dv$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

CONTOH INTEGRAL PARSIAL

Tentukanlah

$$\int 2x(3x-1)^4 dx$$

dengan menggunakan cara integral parsial !

Jawab


$$\int 2x(3x-1)^4 dx = \dots$$

Misalkan $u = 2x$ maka $\frac{du}{dx} = 2$ sehingga $du = 2dx$

$$dv = (3x-1)^4 dx$$

$$\begin{aligned} v &= \int (3x-1)^4 dx \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4+1} (3x-1)^{4+1} \end{aligned}$$

$$v = \frac{1}{15} (3x-1)^5$$


$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\begin{aligned}\int 2x(3x-1)^4 \, dx &= 2x \cdot \frac{1}{15} (3x-1)^5 - \int \frac{1}{15} (3x-1)^5 \cdot 2 \, dx \\&= \frac{2x}{15} (3x-1)^5 - \frac{2}{15} \int (3x-1)^5 \, dx \\&= \frac{2x}{15} (3x-1)^5 - \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5+1} (3x-1)^{5+1} + c \\&= \frac{2}{15} x(3x-1)^5 - \frac{2}{270} (3x-1)^6 + c\end{aligned}$$

LATIHAN SOAL (1)

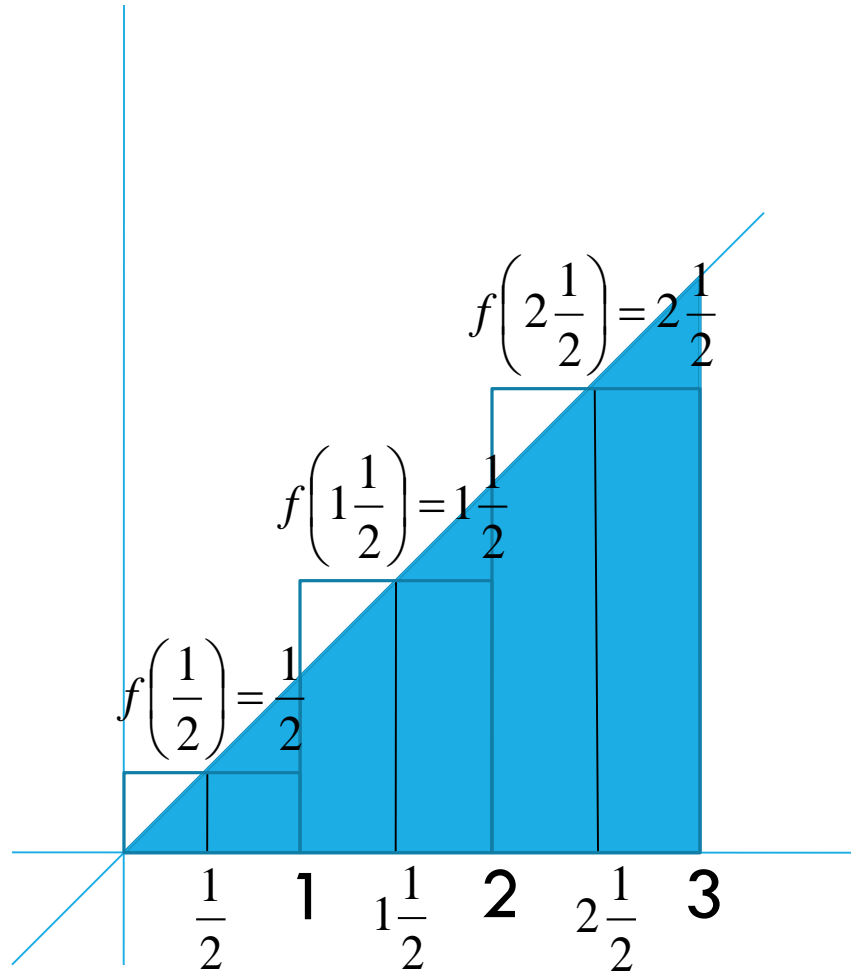
Hitung Integral berikut :

1. $\int 2x + \sin x dx$

2. $\int 3x \cos x dx$

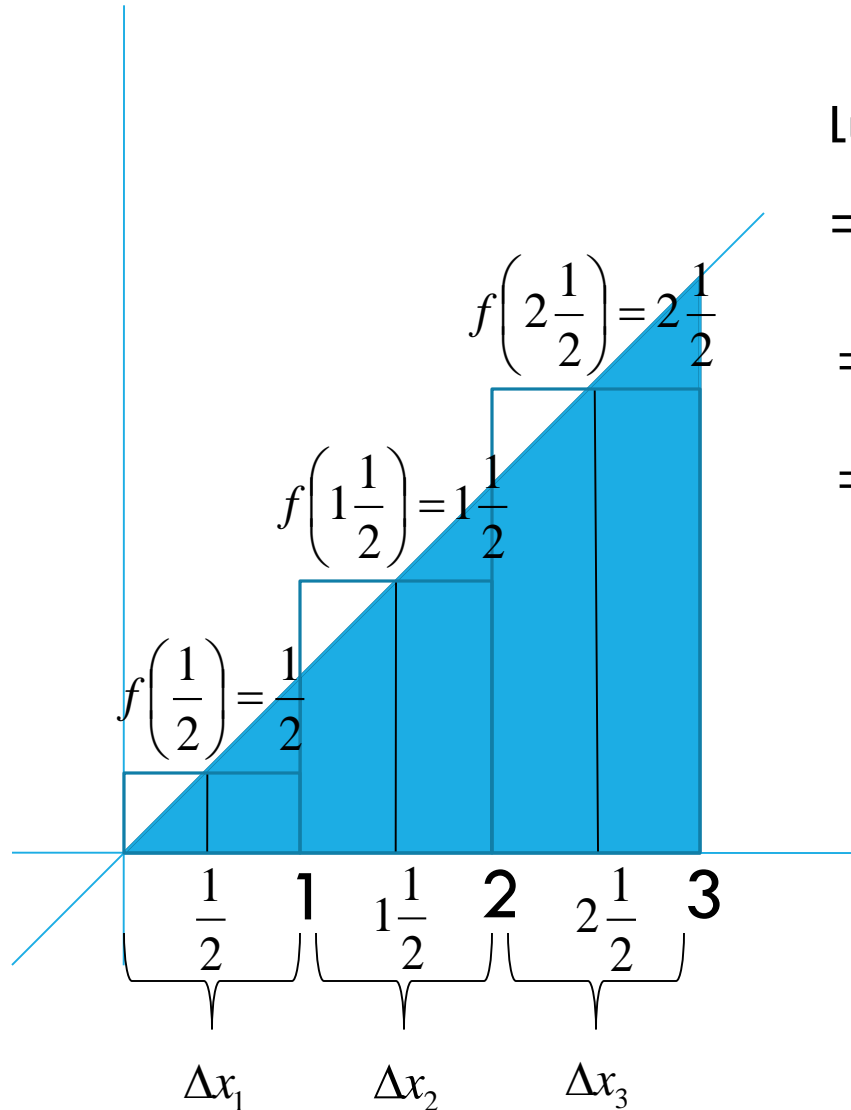
3. $\int \frac{4x - 2x^2}{3} dx$

LUAS SEBAGAI LIMIT SUATU JUMLAH



Bagaimana
apabila
gambar dibuat
seperti ini?

LUAS SEBAGAI LIMIT SUATU JUMLAH



Luas Daerah segitiga

$$= L_1 + L_2 + L_3$$

$$= f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + f(x_3)\Delta x_3$$

$$= \sum_{i=1}^3 f(x_i)\Delta x_i$$

Merupakan jumlah rieman, yang memiliki persamaan umum :

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$$

Teorema Dasar Integral Tertentu

$$\int\limits_a^b f(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$$

b disebut batas atas

a disebut batas bawah

f(x) : fungsi hasil integral dari f(x)

f(b) : Nilai fungsi f(x) untuk x = b

f(a) : Nilai fungsi f(x) untuk x = a

LATIHAN SOAL (2)

Hitung integral berikut :

1. $\int_0^1 x^2 + 3x dx$

2. $\int_0^{\pi} \sin x - \cos 2x dx$

3. $\int_{-\pi}^0 \frac{\tan x}{2} dx$



KEGUNAAN INTEGRAL TERTENTU



LUAS DAERAH ANTARA KURVA DAN SUMBU X

Contoh :

Hitunglah luas daerah antara kurva :

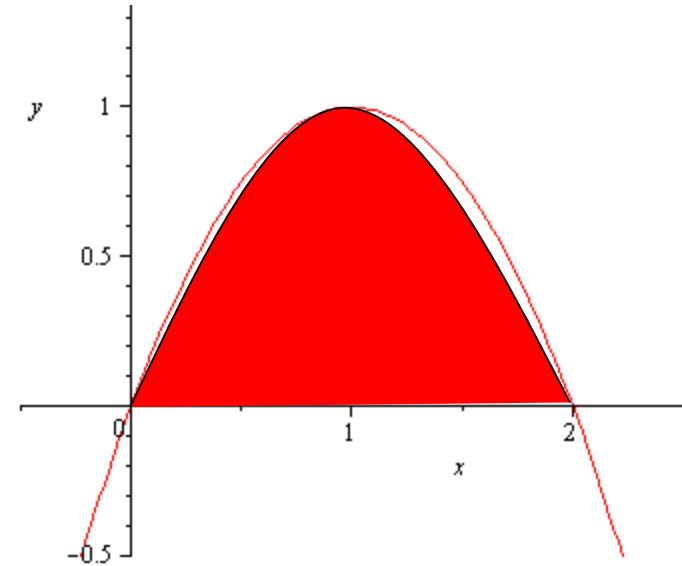
$$y = 2x - x^2 \text{ dan sumbu } x.$$

Penyelesaian :

Perhatikan gambar di samping

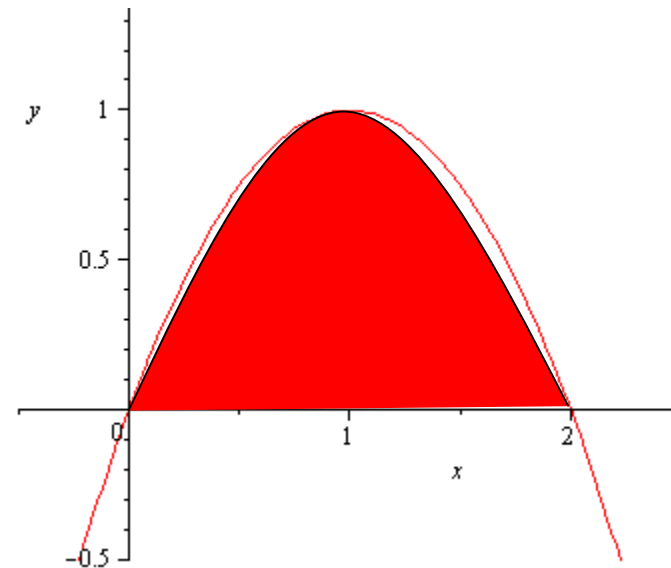
Titik potong kurva dengan
sumbu x , maka $y=0$

$$\begin{aligned} y = 2x - x^2 &\Leftrightarrow 0 = 2x - x^2 \\ &\Leftrightarrow 0 = (2 - x)x \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \end{aligned}$$

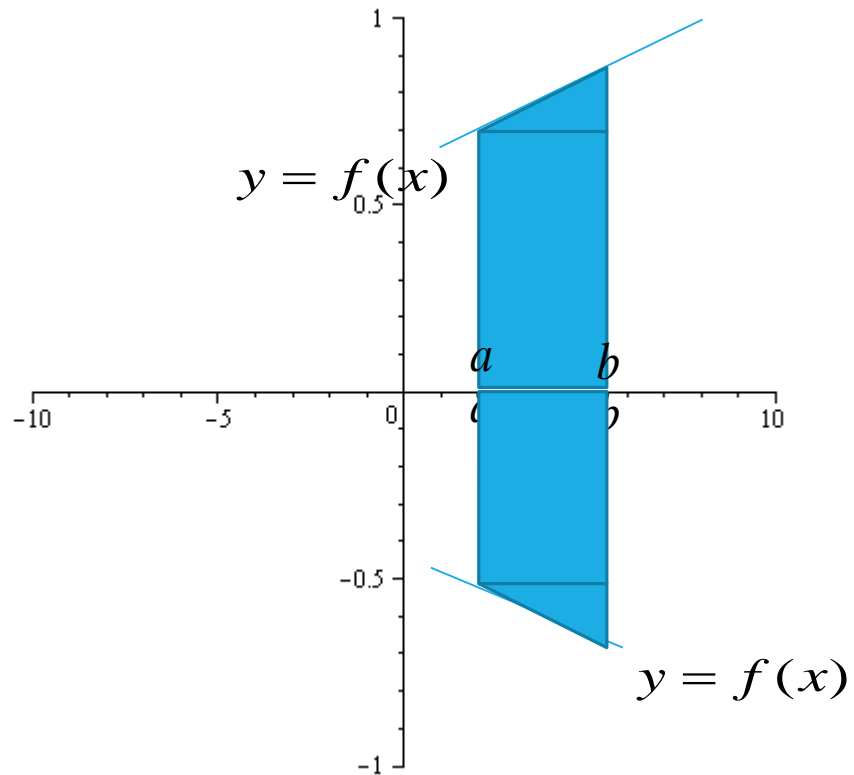


Luas Daerah antara Kurva dan Sumbu X

$$\begin{aligned} L &= \int_0^2 2x - x^2 dx = \left[\frac{2}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 \\ &= \left[2^2 - \frac{1}{3} (2)^3 \right] - [0 - 0] \\ &= \left[4 - \frac{8}{3} \right] \\ &= \frac{4}{3} \text{ Satuan Luas} \end{aligned}$$



Luas Daerah antara Kurva dan Sumbu X

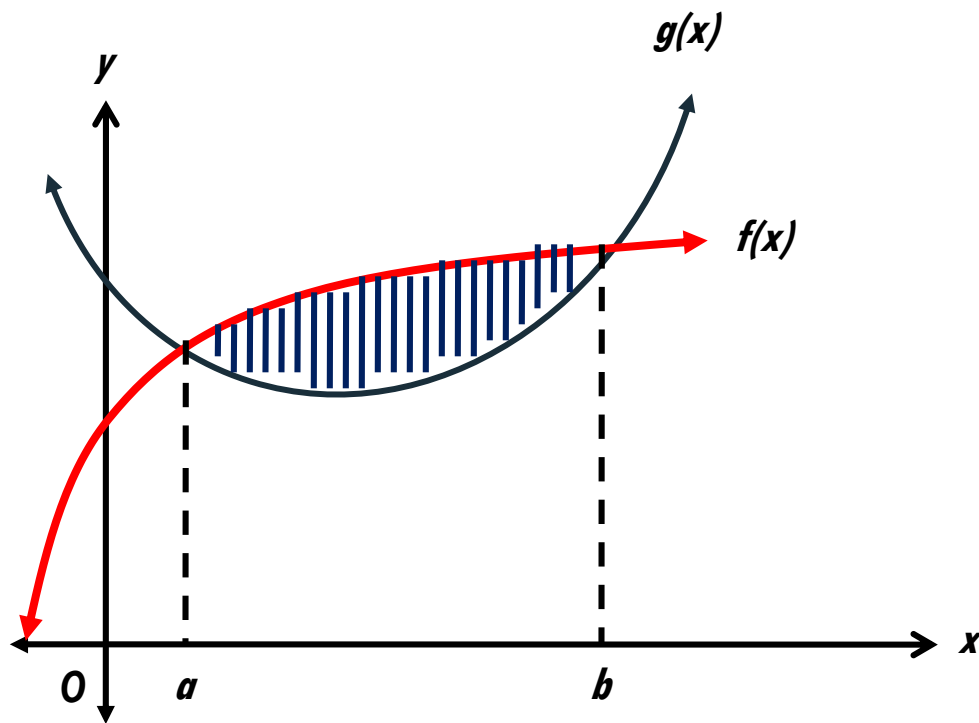


$$L_A = \int_a^b f(x) dx$$

$$L_B = -\int_a^b f(x) dx$$

$$= \int_b^a f(x) dx$$

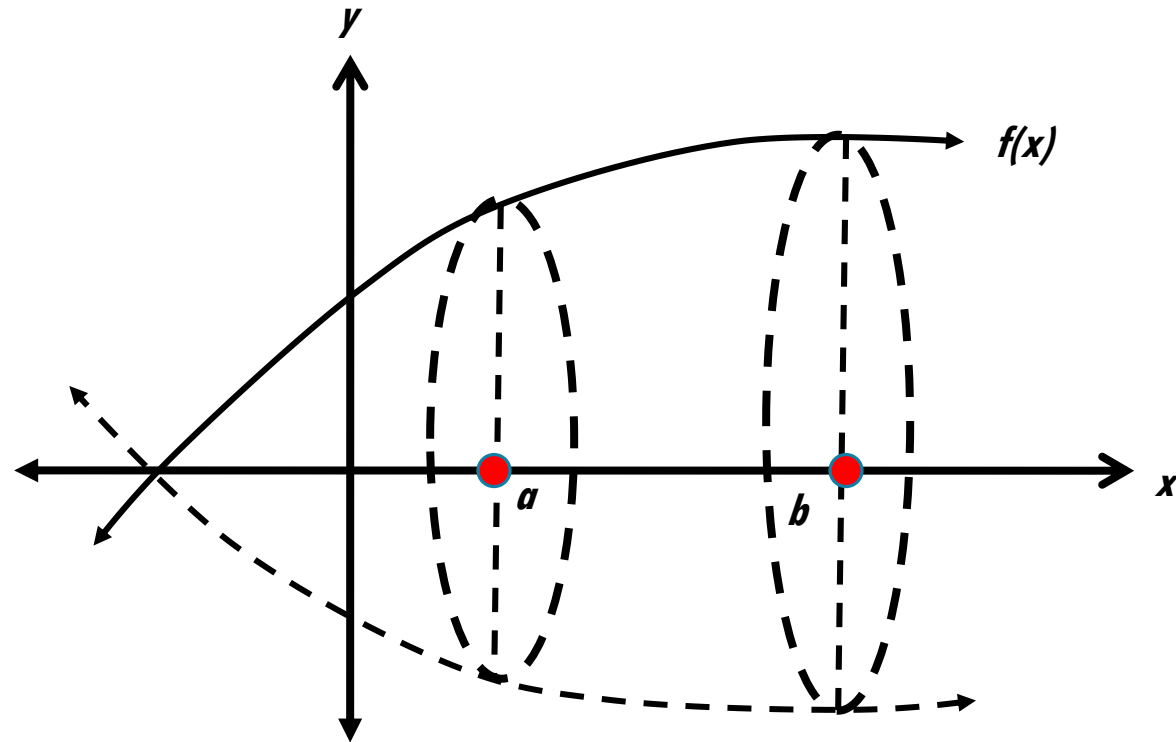
LUAS DAERAH ANTARA DUA KURVA



Luas yang diarsir
adalah :

$$\int_a^b f(x) - g(x) \, dx$$

VOLUME BENDA DIPUTAR TERHADAP SUMBU X

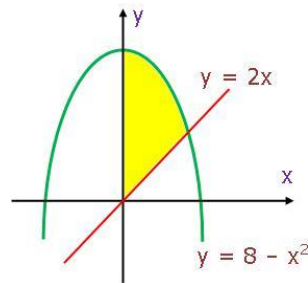


Jika diputar terhadap sumbu
x, volumenya adalah

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx$$

LATIHAN SOAL (3)

1. Luas daerah yang dibatasi parabola $y = x^2 - x - 2$ dengan garis $y = x + 1$ pada interval $0 \leq x \leq 3$ adalah ...
2. Luas daerah arsiran pada gambar di bawah ini adalah ...



3. Luas daerah di kuadran I yang dibatasi kurva $y = x^3$, $y = x$, $x = 0$, dan garis $x = 2$ adalah ...