

Mekanika Statistik: Distribusi Boltzmann

Fargiza A. M. Mulki

Kelompok Keahlian Astronomi FMIPA, ITB

Responsi II Proses Astrofisika I

Modul sederhana ini dibuat sebagai bahan tutorial atau responsi mengenai mekanika statistika, khususnya topik distribusi Boltzmann. Modul ini diharapkan dapat membantu mahasiswa dalam memperoleh kemampuan menalar secara fisis dengan logika dan pengetahuan matematika sederhana mengenai definisi *macrostate* dan *microstate* dari sebuah sistem klasik. Selain itu, mahasiswa akan dapat memperoleh pengertian distribusi Boltzmann melalui perhitungan-perhitungan sederhana yang berangkat dari pemahaman empirik. Pendekatan perumusan yang dituliskan di modul ini merupakan komplemen dari pendekatan formal yang telah diberikan di dalam kuliah.

Disusun: Rabu, 9 September 2020

Pendahuluan

Dalam mempelajari sifat-sifat sebuah sistem yang tersusun atas partikel-partikel klasik (atom dan molekul yang menyusun sebuah gas), kajian terhadap sifat-sifat dinamik dari masing-masing individu partikel merupakan hal yang hampir mustahil dilakukan. Misalkan terdapat molekul dari sebuah gas ideal yang terkandung di sebuah bejana dengan volume dan temperatur mutlak. Pada keadaan normal di permukaan Bumi, nilai sangatlah besar, sementara itu individu-individu molekul tersebut terlalu kecil untuk dapat dilihat dan diobservasi. Molekul-molekul tersebut bergerak dengan kecepatan besar dan mengalami berbagai tumbukan, baik dengan dinding bejana maupun dengan sesamanya. Terlalu banyak dan merepotkan apabila kita menghitung satu demi satu kecepatan dan perpindahan molekul-molekul tersebut. Untuk menangani situasi dan persoalan tersebut, setidaknya terdapat tiga pendekatan kajian yang bisa digunakan.

Pendekatan pertama yaitu mempelajari aspek-aspek makroskopik dari sebuah sistem tanpa meninjau aspek mikroskopiknya. Dalam pendekatan ini, sistem diparameterisasi oleh variabel-variabel yang mendeskripsikan keadaan sistem, contohnya adalah tekanan P , volume V , dan temperatur T . Pemahaman mengenai keadaan statis dari sistem diperoleh dengan menelaah keterkaitan antar variabel tersebut. Persamaan yang mengaitkan variabel-variabel keadaan sistem disebut sebagai persamaan keadaan (Contoh: persamaan keadaan gas ideal $PV = nRT$). Pemahaman mengenai keadaan dinamis dari sebuah sistem diperoleh dengan melihat bagaimana variabel-variabel keadaan berubah apabila variabel-variabel lainnya diubah. Secara luas pendekatan ini dikenal sebagai termodinamika.

Pendekatan kedua yaitu mempelajari keadaan atau perilaku makroskopik sebuah sistem dengan melihat besaran rata-rata dari partikel-partikel penyusunnya. Dengan kata lain kita mengaitkan besaran-besaran makroskopik seperti tekanan P dan energi dalam E (di literatur termodinamika biasa dinotasikan U) dengan nilai rata-rata dari besaran-besaran mikroskopik, seperti kecepatan rata-rata partikel. Sebagai contoh: nilai tekanan yang terukur secara makroskopik dikaitkan dengan harga rata-rata dari kecepatan partikel saat menumbuk dinding bejana, melalui hubungan

$$P = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \left(\frac{1}{2} m \bar{v}^2 \right)$$

(Anda bisa buktikan sendiri atau berselancar di google). Secara luas pendekatan ini dikenal sebagai teori kinetik gas.

Pendekatan ketiga yaitu mempelajari sebuah sistem dengan memandangnya sebagai suatu 'kumpulan' atau populasi partikel-partikel yang menaati kaidah-kaidah statistika. Berbeda dengan teori kinetik gas, pendekatan ini tidak hanya meninjau harga rata-rata dari variabel-variabel sistem, melainkan menghitung keseluruhan nilai-nilai yang mungkin dengan menggunakan suatu fungsi distribusi statistika tertentu. Selain itu, pendekatan ini tidak secara langsung mengaitkan variabel-variabel mikroskopik (contoh kecepatan partikel) dengan variabel makroskopik (contoh tekanan gas). Pendekatan ini dikenal sebagai fisika/mekanika statistik. Mengombinasikan mekanika statistik dengan teori kinetik gas dapat memberikan gambaran yang lebih utuh mengenai sebuah sistem dalam tinjauan mikroskopik. Kajian

statistika Maxwell-Boltzmann adalah salah satu contoh kombinasi dari mekanika statistik dan teori kinetik gas.

Macrostate dan Microstate

Adalah Sebuah sistem termodinamika dapat dinyatakan dalam nilai-nilai volume, tekanan, dan temperatur, yang secara sederhana kita pahami sebagai keadaan makroskopik atau *macrostate*. Dengan penalaran yang sederhana, dapat kita pahami bahwa terdapat sangat banyak *microstate* berbeda (kecepatan molekul dan energi kinetik individu partikel) yang berkorespondensi dengan satu buah *macrostate*.

■ Soal 1.

Misalkan terdapat sebuah bejana dengan volume V yang terdiri dari N molekul yang boleh memiliki satu dari dua level energi, yaitu 0 dan E_1 . Molekul tersebut memiliki derajat kebebasan satu, artinya hanya bebas bergerak di satu dimensi ruang (model gas satu-dimensi). Harga dari energi totalnya adalah $E = 2 E_1$. Untuk sistem yang tidak memiliki kendala/aturan mengenai batasan energi per partikel dan pembedaan partikel:

- Buatlah skema/tabel/diagram yang menunjukkan distribusi energi dari sistem tersebut
- Dari poin a, berapakah jumlah *macrostate*-nya? Berapakah jumlah *microstate* untuk setiap *macrostate*

■ Soal 2 (OPSIONAL).

Sama dengan soal 1, namun untuk sistem yang memenuhi:

- Setiap partikel tidak boleh memiliki energi lebih dari E_1
- Partikel-partikel tersebut dapat dibedakan

■ Soal 3 (OPSIONAL).

Sama dengan soal 1, namun untuk sistem yang memenuhi:

- Tidak ada aturan mengenai batasan energi
- Partikel-partikel tersebut tidak dapat dibedakan

■ Soal 4.

Sama dengan soal 1, namun energi total sistem $E = 3 E_1$



Syarat untuk masuk ke masuk ke *section* berikutnya Anda harus bisa menjawab dan menyelesaikan khususnya soal nomor 4.

Distribusi Boltzmann

Apabila Anda membandingkan hasil yang diperoleh dari menjawab soal 1 dan soal 4, Anda akan melihat bahwa jika jumlah partikel atau energi total dinaikkan, maka jumlah *microstate* (dalam sebuah *macrostate*) terbanyak akan meningkat, dengan kata lain ketidakteraturan-nya atau *multiplicity* terbesarnya meningkat. Untuk $E = 3 E_1$ *microstate* terbesarnya adalah 6 dan untuk $E = 3 E_1$ *microstate* terbesarnya adalah 12. Jika kita gunakan pendekatan teori kinetik gas, yakni $E \propto kT$, maka semakin tinggi temperatur sebuah gas, akan semakin besar derajat ketidakteraturannya (Apakah logika ini bisa Anda terima?)

Sekarang, kita fokuskan pembahasan pada sistem yang dideskripsikan oleh soal 4 ($E = 3 E_1$). Sistem tersebut memiliki tiga buah *macrostate* yang merepresentasikan energinya yang masing-masing memiliki jumlah *microstate* 4, 4, dan 12.

■ Soal 5.

Hitunglah probabilitas terjadinya setiap *macrostate* tersebut.

Persoalan selanjutnya yang harus kita tinjau adalah menentukan banyaknya molekul (partikel) yang paling mungkin berada pada tingkat energi tertentu. Misalkan untuk tingkat energi 0, banyaknya molekul yang paling mungkin di suatu *macrostate* adalah banyaknya molekul yang memiliki energi 0 dikalikan dengan probabilitas terjadinya *macrostate* tersebut. Banyaknya molekul yang paling mungkin memiliki energi 0 merupakan penjumlahan hasil tersebut untuk semua *macrostate*.

■ Soal 6.

Hitunglah banyaknya molekul yang paling mungkin memiliki energi sebesar:

- $0 E_1$
- $1 E_1$
- $2 E_1$
- $3 E_1$

Buatlah dalam tabel dengan bentuk:

Table 0. Banyak molekul vs tingkat energi

Tingkat energi	Perhitungan	Banyak molekul
$0 E_1$
$1 E_1$
$2 E_1$
$3 E_1$

Anda boleh menggunakan alat bantu hitung apa saja, termasuk Excell.

■ Soal 7.

Buatlah sebuah plot dari tabel yang Anda peroleh di nomor 6, dengan sumbu y adalah Banyak molekul dan sumbu x adalah E

Dari kuliah di kelas, Anda sudah memperoleh pengetahuan teoretis mengenai distribusi Boltzmann yang memiliki bentuk:

$$n \propto \exp\left(\frac{E}{k T}\right)$$

■ Soal 8.

Buatlah plot dari distribusi teoretis tersebut.

■ Soal 9.

Bandingkan hasil nomor 8 dan nomor 7, serta berikan analisis Anda.

■ Soal 10.

Dengan demikian, apa yang bisa anda simpulkan mengenai distribusi Boltzmann?



Semua yang kita pelajari di atas belum menyertakan kontribusi degenerasi yang bisa terjadi pada tingkat-tingkat energi.

“Aku orangnya rumit. Tapi aku akan dengan senang hati menyamakan diriku pada segala apa yang telah Tuhan rancang untukku” - Ludwig Van Beethoven

Pustaka

A. Semua pustaka yang digunakan di dalam perkuliahan