

سوال ۱)

(الف)

توزیع توام در واقع یک جدول نشات گرفته شده از توزیع حاشیه ای است. با حذف یک یا چند متغیر تصادفی از یک جدول و جمع احتمالات متناظر با آنها می توان به توزیع حاشیه مد نظر رسید. برای مثال در جدول مقابل با حذف متغیرهای B و C خواهیم داشت:

A	P
+	0.55
-	0.45

که یک توزیع حاشیه ای برای متغیر تصادفی A است
(ب)

$$P(A+|B+) = \frac{P(A+, B+)}{P(B+)} = \frac{0.3}{0.45} = \frac{2}{3}$$

$$P(A+|B-, C+) = \frac{P(A+, B-, C+)}{P(B-, C+)} = \frac{0.05}{0.1} = \frac{1}{2}$$

(ج)

سطرهای C+ را نگه می داریم و باقی را حذف می کنیم.

A	C	P
+	+	0.25
-	+	0.1

حال با جمع کل حالات C+ و تناسب مقادیر را از A باز می نویسم:

A	C	P
+	+	0.71
-	+	0.29

(د)

$$P(A|B+, C -)$$

evidence variables: B+, C -

query = A

hidden variables = None

سطر های متناظر با شواهد مد نظر را نگه می داریم

A	B	C	P
+	+	-	0.1
-	+	-	0.1

حال مشابه قسمت قبل متغیر های اضافی را حذف و نرمالایز می کنیم و به احتمال از ۱ می بریم

A	P
+	0.5
-	0.5

$$P(A|B +)$$

evidence variable: B +

query = A

hidden variable = C

مانند بخش قبل سطر های متناظر با شواهد مد نظر را نگه می داریم

A	B	P
+	+	0.3
-	+	0.15

سپس متغیر های اضافی را حذف و نرمالایز می کنیم و به احتمال از ۱ می بریم

A	P
+	0.67
-	0.33

(ه)

ساده تر کردن مدل سازی مسئله و کاهش محاسبات. اتفاقات دنیا عموماً روابط پیچیده ای با هم دارند اما با مستقل کردن آنها تحت شرایط خاصی (و تحمل مقداری خطا) می توانیم مسائل را به نحو بهینه ای مدلسازی کرده و حل کنیم.

(و)

شبکه های بیزین مدل مختصر و کارایی در اختیار ما قرار می دهند تا ارتباطات پیچیده میان متغیر ها را به صورت مستقل شرطی بنویسیم و بعداً به راحتی ارتباط هر دو متغیر را حساب کنیم. به این صورت از حجم جداول عظیمی که در غیر آن باید ایجاد می کردیم به صورت چشمگیری کاسته میشود و فقط ضروری ترین اطلاعات نگه داشته می شوند و موارد مورد نیاز در لحظه محاسبه می شوند.

سوال ۲)

الف) چون A و B از هم مستقل هستند داریم:

$$\sum_a P(a|B)P(C|a) = \sum_a P(a)P(C|a)$$

حال با کمک قانون زنجیره داریم:

$$\sum_a P(a)P(C|a) = \sum_a P(a, C)$$

در نتیجه با جمع زدن مقادیر مختلف a، $P(C)$ به دست می‌آید.

ب) چون B و C به شرط A از هم مستقل هستند داریم:

$$P(B|A)P(C|A) = P(B, C|A)$$

حال با اعمال قانون زنجیره در صورت و مخرج داریم:

$$\frac{P(A)P(B, C|A)}{P(B|C)P(C)} = \frac{P(A, B, C)}{P(B, C)}$$

با توجه به تعریف احتمال شرطی عبارت به دست آمده برابر است با: $P(A|B, C)$

ج) با استفاده از قانون زنجیره داریم:

$$\frac{P(C, A|B)P(B)}{P(C)} = \frac{P(A, B, C)}{P(C)}$$

با توجه به تعریف احتمال شرطی عبارت فوق برابر است با: $P(A, B|C)$ که طبق فرض داده شده داریم:

$$P(A, B|C) = P(A|C)P(B|C)$$

سوال ۳)

• درست

$$\frac{P(A) P(B|A) P(C|A,B)}{P(C) P(B|C)} = \frac{P(A,B)}{P(A)} \cdot \frac{P(A)}{P(C)} \cdot \frac{P(A,B,C)}{P(A,B)} \cdot \frac{P(C)}{P(B,C)} = \frac{P(A,B,C)}{P(B,C)} = P(A|B,C)$$

• نادرست

دو عبارت داده شده تنها در صورتی برابرند که $P(B|C)$ برابر یک باشد و در حالت کلی درست نیست.

• نادرست

$$P(A|B,C) = \frac{P(A,B,C)}{P(B,C)}$$

$$P(A|C) P(C|B) = \frac{P(A,C)}{P(C)} \cdot \frac{P(B,C)}{P(B)}$$

می بینیم که این دو عبارت با هم مساوی نیستند.

Elimination :

$$P(A|b_+, c_-) \propto P(A, b_+, c_-)$$

$$P(A, b_+, c_-) = \sum_{D, E} P(b_+) P(E|b_+) P(A|b_+) P(c_-|A) P(D|A)$$

$$= P(b_+) P(A|b_+) P(c_-|A) \sum_D P(D|A) \sum_E P(E|b_+)$$

$$= P(b_+) P(A|b_+) P(c_-|A)$$

حساب محاسبات بالا برای a_+ نیاز به ۲ عمل ضرب دارد. برای a_- هم به همین شکل است.
پس در کل ۴ ضرب لازم است. البته یک جمع و تقسیم هم برای normalization نیاز است.

$$P(a_+, b_+, c_-) = P(b_+) P(a_+|b_+) P(c_-|a_+) = 0.9 \times 0.8 \times 0.7 = 0.504$$

$$P(a_-, b_+, c_-) = P(b_+) P(a_-|b_+) P(c_-|a_-) = 0.9 \times 0.2 \times 0.9 = 0.162$$

$$\Rightarrow P(a_+|b_+, c_-) = \frac{0.504}{0.666} = 0.757$$

$$\Rightarrow P(a_-|b_+, c_-) = 1 - 0.757 = 0.243$$

Enumeration:

$$P(A|b_+,c_-) \propto P(A, b_+, c_-)$$

$$P(A, b_+, c_-) = \sum_{D, E} P(b_+) P(E|b_+) P(A|b_+) P(c_-|A) P(D|A)$$

محاسبه عبارت بالا برای a_+ ۴ حالت روی D دارد. بنابراین ۴ عبارت باید با هم جمع شوند. در عبارت ۱ از ۴ عبارات ضرب به دست می آید. همین مراحل برای a_- نیز باید تکرار شود. پس در کل ۸ ضرب و ۶ جمع داریم. البته یک تقسیم و جمع هم برای normalization نیاز است.

$$P(a_+, b_+, c_-) = P(b_+) P(a_+|b_+) P(c_-|a_+) \{ P(e_+|b_+) P(d_+|a_+) + P(e_+|b_+) P(d_-|a_+) + P(e_-|b_+) P(d_+|a_+) + P(e_-|b_+) P(d_-|a_+) \}$$

$$= 0.9 \times 0.1 \times 0.7 \times \{ 0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.1 + 0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.1 \} = 0.1504$$

$$P(a_-, b_+, c_-) = P(b_+) P(a_-|b_+) P(c_-|a_-) \{ P(e_+|b_+) P(d_+|a_-) + P(e_+|b_+) P(d_-|a_-) + P(e_-|b_+) P(d_+|a_-) + P(e_-|b_+) P(d_-|a_-) \}$$

$$= 0.1 \times 0.2 \times 0.9 \times \{ 0.5 \times 0.1 + 0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.1 + 0.5 \times 0.4 \} = 0.142$$

$$\Rightarrow P(a_+|b_+, c_-) = \frac{P(a_+|b_+, c_-)}{P(a_+|b_+, c_-) + P(a_-|b_+, c_-)} = \frac{0.1504}{0.1504 + 0.142} \approx 0.515$$

$$\Rightarrow P(a_-|b_+, c_-) = 1 - P(a_+|b_+, c_-) \approx 0.485$$

سوال ۵)

الف) 1- حذف A:

$$\sum_a P(a)P(B|a) = f_1(B)$$

فاکتور	P(C B)	P(D C)	P(E C,D)	P(+f C,E)	P(G C,+f)	$f_1(B)$
سایز	4	4	8	4	4	2

2- حذف C:

$$\sum_c P(c|B)P(D|c)P(E|c,D)P(+f|c,E)P(G|c,+f) = f_2(B,D,E,+f,G)$$

فاکتور	$f_1(B)$	$f_2(B,D,E,+f,G)$
سایز	2	16

3- حذف E:

$$\sum_e f_2(B,D,E,+f,G) = f_3(B,D,+f,G)$$

فاکتور	$f_1(B)$	$f_3(B,D,+f,G)$
سایز	2	8

4- حذف G:

$$\sum_g f_3(B,D,+f,G) = f_4(B,D,+f)$$

فاکتور	$f_1(B)$	$f_4(B,D,+f)$
سایز	2	4

(ب)

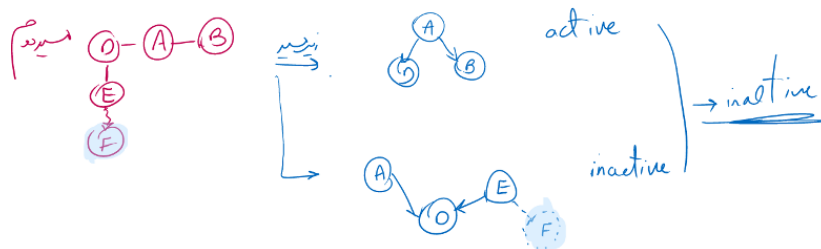
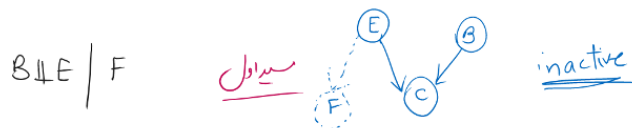
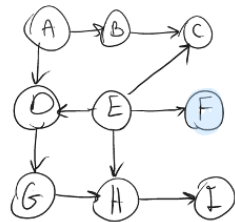
$$P(b, d | + f) = \frac{f_1(b)f_4(b, d, + f)}{\sum_{b', d'} f_1(b')f_4(b', d', + f)}$$

سوال ۶)

(الف)

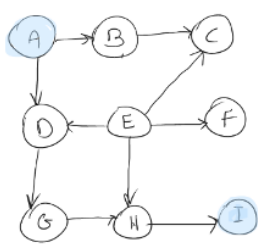
تکامل‌های از u به v را رسم می‌کنیم و active بودن هر کدام را **میریدگی** (رابطه‌ای که بین) می‌نامیم.
میریدگی‌ها را بش از آنکه هسته‌های زوجی (مطابق با داده‌ها) و active بودن **نی** **میریدگی** (رابطه‌ای که بین) می‌نامیم.

• برای سنجش بودن **میریدگی** زیرمجموعه‌های اصلی **inactive** باشد و حتی
اگر **active** باشد در مورد استقلال قضایی نیست.
• برای **inactive** بودن **میریدگی** داشتن یک سبب **inactive** کافی است.



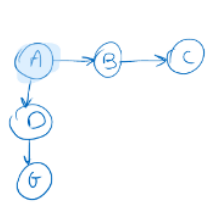
حذف **inactive** استقلال می‌کند

ب)

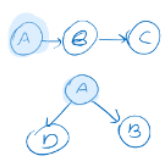


$C \perp G \mid \{A, I\}$

سیر اول

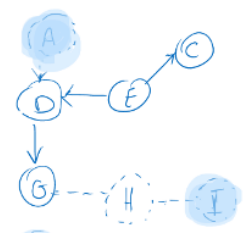


تغییر ساختار

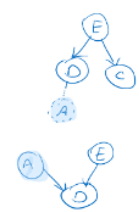


active
inactive

سیر دوم

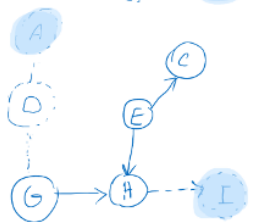


تغییر ساختار

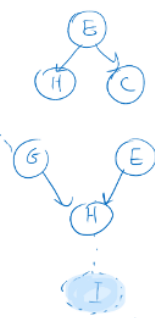


active
inactive

سیر سوم



تغییر ساختار



active
active

تایید دومی (در سیر دومی) هم وجود ندارد

در سیر active پس از آنکه در صورت فعال سازی دهم
(چون یک اتصال به هر دو active و inactive می باشد)

ج) درست است زیرا تمام مسیرهای بین w, t غیرفعال هستند.

سوال ۷

الف) نمونه‌هایی که خط می‌خورند:

$(-a, -b, +c, +d), (+a, -b, -c, +d), (+a, -b, -c, -d), (-a, +b, +c, +d)$

مقدار تخمینی احتمال خواسته شده برابر $\frac{1}{2}$ است.

ب)

$$W_1 = P(-a)P(-b)P(-d|-c) = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{5}$$

$$W_2 = W_3 = P(-a)P(-b)P(-d|+c) = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{15}$$

$$P(+c|-a, -b, -d) \simeq \frac{\frac{4}{15} + \frac{4}{15}}{\frac{2}{5} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15}} = \frac{4}{7}$$

ج) ترتیب اول و سوم می‌توانند در نمونه‌برداری Gibbs رخ دهند زیرا در هر ردیف نسبت به ردیف قبل حداکثر یک متغیر تغییر پیدا می‌کند.

سوال ۸

برای اینکه بخواهیم متغیرهای A و L مستقل باشند باید تمام مسیرهای بین A, L غیرفعال باشند. پس در هر مسیر اصلی حداقل یک سه تایی غیرفعال باید وجود داشته باشد تا آن زیر مسیر را غیرفعال کند. همان طور که

مشخص است در تمام مسیرها یک سه تایی به شکل



نیاز به مشاهده نود نیست.