آمار و احتمالات مهندسی
متغیرهای تصادفی، امید ریاضی و واریانس

فردوس گرجی

متغیر تصادفی

تعریف: متغیر تصادفی تابعی است که به هر عنصر فضای نمونه‌ای یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد.

$$X : S \to \mathbb{R}$$

- معمولا برای کمی‌سازی نیاز به متغیرهای تصادفی داریم. مثلا تعداد قطعات ناسالم، طول عمر لامپ، ...

مثال ۱

در آزمایش پرتاب یک جفت تاس، متغیر تصادفی X را مجموع خال‌ها در نظر بگیریم:

$$S = \{(۱,۱), \ldots, (۱,۶), (۲,۱), \ldots, (۲,۶), \ldots, (۶,۱), \ldots, (۶,۶)\}$$

$$X : S \to \{۲, ۳, \ldots, ۱۲\} \subseteq \mathbb{R} \qquad (\omega \to X(\omega))$$

$$(۱,۱) \to ۲, \quad (۱,۲) \to ۳, \ldots, (۱,۶) \to ۷$$

$$\vdots$$

$$(۶,۱) \to ۷, \quad (۶,۲) \to ۸, \ldots, (۶,۶) \to ۱۲$$

- برد X مجموعه‌ای متناهی است.

$$\text{پیشامد } \{\omega | X(\omega) \leq ۳\} = \text{پیشامد } \{X \leq ۳\} = \{(۱,۱), (۱,۲), (۲,۱)\} \text{ پیشامد}$$

مثال ۲

از خط تولید یک کارخانه سه قطعه به تصادف انتخاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را تعداد قطعات سالم در نظر بگیریم:

$$S = \{(N,N,N),(N,N,D),(N,D,N),(D,N,N),(N,D,D),(D,N,D),(D,D,N),(D,D,D)\}$$

$$X : S \to \{۰,۱,۲,۳\} \subseteq \mathbb{R} \qquad (\omega \to X(\omega))$$

$$\begin{aligned}&(N,N,N)\to ۳,\\ &(N,N,D)\to ۲,\quad (N,D,N)\to ۲,\quad (D,N,N)\to ۲,\\ &(N,D,D)\to ۱,\quad (D,N,D)\to ۱,\quad (D,D,N)\to ۱,\\ &(D,D,D)\to ۰\end{aligned}$$

- برد X مجموعه‌ای متناهی است.

پیشامد $\{(N,N,D),(N,D,N),(D,N,N)\}$ = پیشامد $\{X=۲\}$ = پیشامد $\{\omega | X(\omega)=۲\}$

مثال ۳

در بررسی مدت زمان کارکرد یک لامپ، متغیر تصادفی X را طول عمر لامپ (بر حسب یک واحد زمانی مانند ماه یا سال) در نظر بگیریم:

$$S = (۰, \infty)$$

$$X : S \to (۰, \infty) \subseteq \mathbb{R}$$

- برد X مجموعه‌ای نامتناهی و ناشمارا است.

پیشامد این‌که لامپ بیش از $t_{۱}$ و کم‌تر از $t_{۲}$ ماه کار کند:

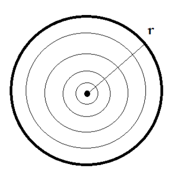
$$\{\omega | t_{۱} < X(\omega) < t_{۲}\} = \{t_{۱} < X < t_{۲}\}$$

مثال ۴

در پرتاب یک دارت به سمت یک سیبل، متغیر تصادفی X را میزان فاصله نقطه برخورد دارت تا مرکز سیبل در نظر بگیریم:

$S =$ نقاط سطح دایره

$$X : S \to [۰, r] \subseteq \mathbb{R}$$



- برد X مجموعه‌ای نامتناهی و ناشمارا است.

پیشامد این که دارت در فاصله کم‌تر از d تا مرکز سیبل برخورد کند $\{\omega | X(\omega) < d\} = \{X < d\}$ =

مثال ۵

یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا شیر ظاهر شود (به محض ظهور شیر، پرتاب سکه متوقف می شود).
متغیر تصادفی X را تعداد پرتاب‌های لازم برای ظاهر شدن شیر در نظر بگیریم:

$$S = \{H, TH, TTH, TTTH, \ldots, \underbrace{TT\ldots T}_{k-۱\ \text{بار}}H, \ldots\}$$

$$X : S \to \{۱, ۲, ۳, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$$

- برد X مجموعه‌ای نامتناهی ولی شمارا (قابل شمارش) است.

پیشامد این که حداقل ۴ پرتاب تا رخداد اولین شیر انجام شود $= \{X \geq ۴\} = \{\omega | X(\omega) \geq ۴\}$

متغیر تصادفی گسسته

تعریف: اگر مجموعه مقادیر ممکن برای متغیر تصادفی X قابل شمارش باشد، X را متغیر تصادفی گسسته نامیم.
در این حالت با دانستن احتمال رخداد هر یک از مقادیر ممکن X (تک تک نقاط) می‌توان احتمال همه پیشامدها را محاسبه کرد.

در مثال ۱ (پرتاب یک جفت تاس)، مثال ۲ (تعداد قطعات سالم) و مثال ۵ (پرتاب مکرر سکه تا رخداد شیر)، متغیرهای تصادفی تعریف شده گسسته هستند.
در مثال ۳ (طول عمر لامپ) و مثال ۴ (پرتاب دارت)، متغیرهای تصادفی تعریف شده پیوسته هستند. در چنین متغیرهایی احتمال در بازه‌ها و مساحت‌ها و ... محاسبه می‌شود و احتمال در یک نقطه صفر است.

- فعلا با متغیرهای تصادفی گسسته کار می‌کنیم.

حال می‌خواهیم احتمال پیشامدها را در فضای متغیرهای تصادفی گسسته بیابیم.

- در مثال ۱ (پرتاب یک جفت تاس)، برای محاسبه احتمال پیشامد $\{X \leq ۳\}$ داریم:

$$P\underbrace{(X \leq ۳)}_{\text{پیشامد}} = P(\{\omega | X(\omega) \leq ۳\}) = P(\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱)\}) = \frac{۳}{۳۶}$$

- در مثال ۲ (تعداد قطعات سالم)، برای محاسبه احتمال پیشامد $\{X = ۲\}$ داریم:

$$P\underbrace{(X = ۲)}_{\text{پیشامد}} = P(\{\omega | X(\omega) = ۲\}) =$$

$$P(\{(N,N,D),(N,D,N),(D,N,N)\}) = \frac{۳}{۸}$$

- در مثال ۵ (پرتاب مکرر سکه تا رخداد اولین شیر)، برای محاسبه احتمال پیشامد $\{X \geq ۳\}$ داریم:

$$P(X \geq ۳) = P(\{\omega | X(\omega) \geq ۳\}) =$$
$$P(\{(T,T,H),(T,T,T,H),(T,T,T,T,H),\dots\})$$

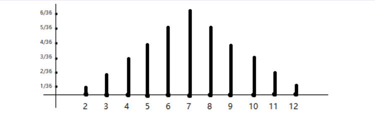
تابع جرم احتمال

تعریف: مجموعه زوج‌های مرتب $(x, f(x))$ را تابع احتمال یا تابع جرم احتمال یا توزیع احتمال متغیر تصادفی گسسته X می‌نامیم اگر به ازای هر مقدار $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = P(X = x); \quad f(x) \geq ۰; \quad \sum_x f(x) = ۱. \qquad (۱)$$

جدول توزیع احتمال مثال ۱

x	۲	۳	۴	$\dots$	۱۲	
$f(x)$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\dots$	$\frac{۱}{۳۶}$	۱(مجموع)

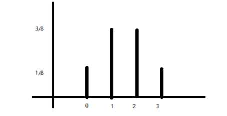


نکته

برد متغیر تصادفی (به عنوان تابعی از فضای نمونه‌ای به توی اعداد حقیقی) یا تکیه‌گاه (support) آن (به عنوان دامنه تابع احتمال) برابر است با مجموعه مقادیری از $\mathbb{R}$ که متغیر تصادفی آن‌ها را با احتمال ناصفر اختیار می‌کند.

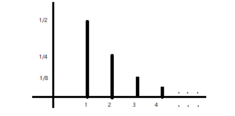
جدول توزیع احتمال مثال ۲

x	۰	۱	۲	۳	
$f(x)$	۱/۸	۳/۸	۳/۸	۱/۸	(مجموع)۱



جدول توزیع احتمال مثال ۵

x	۱	۲	۳	$\dots$	k	$\dots$	
$f(x)$	۱/۲	۱/۴	۱/۸	$\dots$	$(۱/۲)^k$	$\dots$	(مجموع)۱



مثال ۶

جعبه‌ای شامل ۱۰ لامپ است که سه تای آن‌ها سوخته است. سه لامپ به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X تعداد لامپ‌های سالم در بین لامپ‌های انتخاب شده باشد، تابع احتمال آن را حساب کنید. مطلوب است احتمال اینکه حداقل دو لامپ سالم انتخاب شده باشد.

$$f(۰) = P(X = ۰) = \frac{\binom{۳}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۱}{۱۲۰} \quad f(۱) = P(X = ۱) = \frac{\binom{۳}{۲}\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۲۱}{۱۲۰} \tag{۲}$$

$$f(۲) = P(X = ۲) = \frac{\binom{۳}{۱}\binom{۷}{۲}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۶۳}{۱۲۰} \quad f(۳) = P(X = ۳) = \frac{\binom{۷}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۳۵}{۱۲۰}$$

x	۰	۱	۲	۳	
$f(x)$	$\frac{۱}{۱۲۰}$	$\frac{۲۱}{۱۲۰}$	$\frac{۶۳}{۱۲۰}$	$\frac{۳۵}{۱۲۰}$	۱ (مجموع)

$$P(X \geq ۲) = f(۲) + f(۳) = \frac{۹۸}{۱۲۰} \tag{۳}$$

مثال ۷

در جدول زیر، $f(x)$ یک تابع جرم احتمال است. مقدار a را بیابید.

x	۱	۲	۳
$f(x)$	$\frac{۱}{۸}$	a	$۳a$

اولا باید $a \geq ۰$

ثانیا باید مجموع مقادیر تابع احتمال به همه مقادیر ممکن x یک باشد. پس

$$\frac{۱}{۸} + a + ۳a = ۱ \rightarrow \frac{۳۲a + ۱}{۸} = ۱ \rightarrow a = \frac{۷}{۳۲}(\geq ۰)$$

مثال ۸

$f(x)$ یک تابع جرم احتمال است، مقدار a را بیابید.

$$f(x) = a(\frac{۱}{۳})^x; \quad x = ۰, ۱, ۲, \ldots. \tag{۴}$$

اولا مقدار a باید نامنفی باشد ($a \geq ۰$)
ثانیا باید مجموع مقادیر f به ازای همه مقادیر x یک شود.

$$\sum_{x=۰}^{\infty} a(\frac{۱}{۳})^x = ۱ \quad \to a \times \frac{(\frac{۱}{۳})^۰}{۱ - \frac{۱}{۳}} = ۱ \quad \to \underbrace{a = \frac{۲}{۳}}_{\geq ۰} \tag{۵}$$

مثال ۹

$f(x)$ یک تابع جرم احتمال است. $P(X<۵)$ را بیابید.

$$f(x)=a(۲^{-x});\quad x=۲,۳,۴,\ldots. \tag{۶}$$

اولا مقدار a باید نامنفی باشد $(a\geq ۰)$

ثانیا باید مجموع مقادیر f به ازای همه مقادیر x یک شود.

$$\sum_{x=۲}^{\infty}a(۲^{-x})=۱\quad\rightarrow a\sum_{x=۲}^{\infty}(\frac{۱}{۲})^{x}=۱\quad\rightarrow a\times\frac{(\frac{۱}{۲})^{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}}=۱\quad\rightarrow\underbrace{a=۲}_{\geq ۰} \tag{۷}$$

$$P(X<۵)=\underline{f(۲)}+f(۳)+f(۴)=\frac{۲}{۴}+\frac{۲}{۸}+\frac{۲}{۱۶}=\frac{۱۴}{۱۶} \tag{۸}$$

تابع توزیع تجمعی (cdf)

تعریف: توزیع تجمعی متغیر تصادفی گسسته X که دارای تابع (جرم) احتمال یا توزیع احتمال $f(x)$ است عبارت است از:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t); \quad -\infty < x < \infty \tag{۹}$$

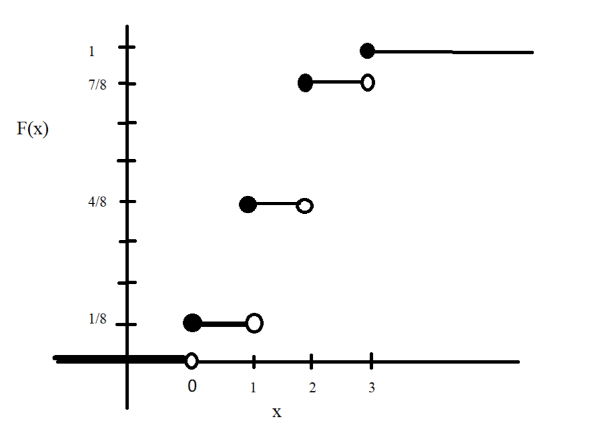
با داشتن توزیع تجمعی در متغیرهای تصادفی پیوسته، احتمال همه پیشامدها را می‌توان حساب کرد.

محاسبه توزیع تجمعی مثال ۲

x	۰	۱	۲	۳	
$f(x)$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	۱(مجموع)

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & ; x < ۰ \\ \frac{۱}{۸} & ; ۰ \leq x < ۱ \\ \frac{۴}{۸} & ; ۱ \leq x < ۲ \\ \frac{۷}{۸} & ; ۲ \leq x < ۳ \\ ۱ & ; x \geq ۳ \end{cases} \tag{۱۰}$$

نمودار توزیع تجمعی مثال ۲

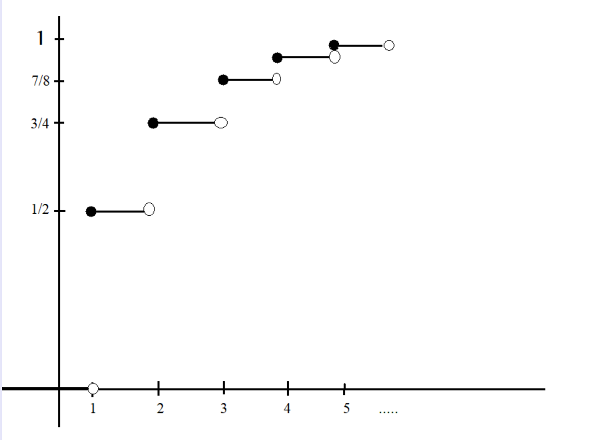


محاسبه توزیع تجمعی مثال ۵

x	۱	۲	۳	$\dots$	k	$\dots$	
$f(x)$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	$\dots$	$(\frac{۱}{۲})^k$	$\dots$	۱(مجموع)

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & ; x < ۱ \\ \frac{۱}{۲} & ; ۱ \leq x < ۲ \\ \frac{۳}{۴} & ; ۲ \leq x < ۳ \\ \frac{۷}{۸} & ; ۳ \leq x < ۴ \\ \vdots & \vdots \\ \frac{(\frac{۱}{۲} - (\frac{۱}{۲})^{k+۱})}{۱ - \frac{۱}{۲}} & ; k \leq x < k+۱ \\ \vdots & \vdots \end{cases} \quad (۱۱)$$

نمودار تابع توزیع تجمعی مثال ۵



مثال ۱۰

فرض کنید احتمال تولد نوزاد دختر p و احتمال تولد نوزاد پسر $p-۱$ باشد. $(۰<p<۱)$. اگر متغیر تصادفی X را تعداد تولد های ثبت شده تا تولد اولین دختر از زمان مشخصی در نظر بگیریم، مطلوب است $F(X=۳)=P(X\leq ۳)$

(احتمال این که حداکثر پس از ثبت سومین تولد نوزاد دختری به دنیا آمده باشد.)

x	۱	۲	۳	...	k	...	
$f(x)$	p	$(۱-p)p$	$(۱-p)^۲p$	...	$(۱-p)^{k-۱}p$	...	۱(مجموع)

$$F(x)=\begin{cases} ۰ & ;x<۱ \\ p & ;۱\leq x<۲ \\ ۱-(۱-p)^۲ & ;۲\leq x<۳ \\ ۱-(۱-p)^۳ & ;۳\leq x<۴ \\ \vdots & \vdots \\ ۱-(۱-p)^k & ;k\leq x<k+۱ \\ \vdots & \vdots \end{cases} \qquad F(۳)=۱-(۱-p)^۳ \tag{۱۲}$$

تابع توزیع تجمعی

خواص تابع توزیع تجمعی

- $\forall x \in \mathbb{R}: \quad ۰ \leq F(x) \leq ۱$
- $x_۱ < x_۲ \quad \Longrightarrow \quad F(x_۱) \leq F(x_۲)$ غیر نزولی
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = ۰ \qquad (F(-\infty) = ۰)$
- $\lim_{x\to+\infty} F(x) = ۱ \qquad (F(+\infty) = ۱)$
- $\lim_{x\to a^+} = F(a) \qquad (F(x^+) = F(x))$ از راست پیوسته
- $P(X < a) = \lim_{x\to a^-} F(x) = F(a^-)$
- $P(X = a) = P(X \leq a) - P(X < a) = F(a) - F(a^-)$

مقدار پرش در نقطه a که از آن برای محاسبه $f(a)$ استفاده می‌کنیم.

$$\{X \leq a\} = \{X < a\} \cup \{X = a\} \Rightarrow P(X \leq a) = P(X < a) + P(X = a)$$

نکته: اگر $F(x)$ پلکانی باشد، متغیر تصادفی X گسسته است و اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد، $F(x)$ پلکانی می شود. مقدار پرش در پله‌ها در واقع همان مقدار جرم احتمال در نقاط پرش است.

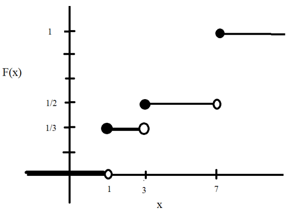
خواص تابع توزیع تجمعی

- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) = F(b) - F(a^-)$
- $P(X > a) = ۱ - P(X \leq a) = ۱ - F(a)$
- $P(X \geq a) = ۱ - P(X < a) = ۱ - F(a^-)$

مثال ۱۱

تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی گسسته X به صورت زیر است. تابع جرم احتمال را بیابید.

$$F(x)=\begin{cases} ۰ & ;x<۱ \\ \frac{۱}{۳} & ;۱\leq x<۳ \\ \frac{۱}{۲} & ;۳\leq x<۷ \\ ۱ & ;x\geq ۷ \end{cases}$$



$$\forall x<۱: f(x)=۰;$$

$$f(۱)=P(X=۱)=F(۱)-F(۱^-)=\frac{۱}{۳}-۰=\frac{۱}{۳}$$

$$\forall ۱<x<۳: f(x)=P(X=x)=F(x)-F(x^-)=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}=۰$$

$$f(۳)=P(X=۳)=F(۳)-F(۳^-)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}$$

$$\forall ۳<x<۷: f(x)=P(X=x)=F(x)-F(x^-)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}=۰$$

$$f(۷)=P(X=۷)=F(۷)-F(۷^-)=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$\forall x>۷: f(x)=P(X=x)=F(x)-F(x^-)=۱-۱=۰$$

جدول توزیع احتمال مثال ۱۱

x	۱	۳	۷	
$f(x)$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۲}$	۱(مجموع)

مثال ۱۲

در مثال ۱۱، مقادیر زیر رابیابید: $P(x > ۳), P(۲ < X < ۶)$

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & ; x < ۱ \\ \frac{۱}{۳} & ; ۱ \leq x < ۳ \\ \frac{۱}{۲} & ; ۳ \leq x < ۷ \\ ۱ & ; x \geq ۷ \end{cases}$$

$$P(X > ۳) = ۱ - P(X \leq ۳) = ۱ - F(۳) = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$
$$P(۲ < X < ۶) = P(X < ۶) - P(X \leq ۲) = F(۶^{-}) - F(۲) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۶}$$

امید ریاضی

تعریف: اگر متغیر تصادفی گسسته X دارای تابع جرم احتمال $f(x)$ باشد، میانگین یا مقدار مورد انتظار یا امید ریاضی X برابر است با:

$$E(X) = \sum_x xf(x)$$

امید ریاضی در واقع مرکز ثقل جامعه آماری است. آن را با μ نیز نمایش می‌دهند.

مثال ۱۳: مفهوم امید ریاضی

فروشنده‌ای یک بار ۳۰۰ تایی لامپ را به صورت بسته‌های سه‌تایی می‌فروشد. در هر بسته، هر لامپ با احتمال $\frac{۱}{۲}$ ممکن است سالم یا خراب باشد. در صورت خرابی هر لامپ، فروشنده موظف است یک لامپ سالم تست شده به قیمت ۱۰۰۰ تومان از موجودی قبلی‌اش به مشتری بدهد. مقدار سود برای هر بسته سه‌تایی چقدر تعیین شود تا پس از فروش کامل بار، او ضرر نکند؟

هر بسته سه‌تایی به ترتیب با احتمالات $\frac{۱}{۸}$، $\frac{۳}{۸}$، $\frac{۳}{۸}$ و $\frac{۱}{۸}$ ممکن است صفر، یک ، دو و یا سه لامپ خراب داشته باشند. پس در مجموع ۱۰۰ بسته سه‌تایی، با احتمال $\frac{۱}{۸}$ فروشنده ضرر نمی‌کند، با احتمال $\frac{۳}{۸}$ مبلغ ۱۰۰۰ تومان، با احتمال $\frac{۳}{۸}$ مبلغ ۲۰۰۰ تومان و با احتمال $\frac{۱}{۸}$ مبلغ ۳۰۰۰ تومان ضرر می‌کند. بنابراین انتظار می‌رود که او در فروش کل بار که صد بسته است، به اندازه

$$(۱۰۰\times\frac{۱}{۸}\times ۰)+(۱۰۰\times\frac{۳}{۸}\times ۱۰۰۰)+(۱۰۰\times\frac{۳}{۸}\times ۲۰۰۰)+(۱۰۰\times\frac{۱}{۸}\times ۳۰۰۰) = ۱۵۰,۰۰۰$$

تومان ضرر کند. بنابراین اگر هر بسته سه‌تایی لامپ را با سودی حداقل معادل با $۱۵۰۰ = \frac{۱۵۰۰۰۰}{۱۰۰}$ تومان بفروشد، انتظار می‌رود که در فروش بار ضرر نکند.

در این جا در واقع میانگین وزنی ضرر احتمالی او را حساب کردیم که وزن‌های مربوطه، همان احتمال تعداد مختلف لامپ‌های خراب بود.

$$E(X) = \frac{۱}{۸}\times ۰ + \frac{۳}{۸}\times ۱۰۰۰ + \frac{۳}{۸}\times ۲۰۰۰ + \frac{۱}{۸}\times ۳۰۰۰ = ۱۵۰۰$$

مثال ۱۴

در یک کارخانه نساجی، توزیع احتمال تعداد ایرادها در هر ده متر از پارچه‌ای به صورت زیر است. میانگین ایرادها در هر ده متر را بیابید. در ده توپ صدمتری، چه تعداد ایراد مورد انتظار است؟

x	۰	۱	۲	۳	۴
$f(x)$	۰/۴۱	۰/۳۷	۰/۱۶	۰/۰۵	۰/۰۱

$$E(X) = \sum_x x f(x)$$
$$= ۰ \times ۰/۴۱ + ۱ \times ۰/۳۷ + ۲ \times ۰/۱۶ + ۳ \times ۰/۰۵ + ۴ \times ۰/۰۱ = ۰/۸۸$$

تعداد مورد انتظار (میانگین تعداد) ایراد ها در هر ده متر

$$۱۰ \times \frac{۱۰۰}{۱۰} \times ۰/۸۸ = ۸۸$$

تعداد مورد انتظار ایرادها در ده توپ صد متری

مثال ۱۵

پیک یک رستوران به تعداد دفعاتی که غذا تحویل مشتری می‌دهد پول دریافت می‌کند. او با احتمال ۳۵ درصد روزی پرترافیک با درآمد حداقل ۱۰۰ هزارتومان و با احتمال ۵ درصد روزی بدون سفارش دارد. با احتمال ۶۰ درصد نیز روزی معمولی با درآمد حداقل ۴۰ هزار تومان درآمد دارد. مقدار مورد انتظار درآمد روزانه او را حساب کنید.

متغیر تصادفی X را میزان دستمزد روزانه در نظر می‌گیریم. داریم:

$$E(X) = \sum_x xf(x) = \frac{۳۵}{۱۰۰} \times ۱۰۰۰۰۰ + \frac{۵}{۱۰۰} \times ۰ + \frac{۶۰}{۱۰۰} \times ۴۰۰۰۰ = ۵۹۰۰۰$$

قضیه

فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با توزیع احتمال $f(x)$ باشد. میانگین یا مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی $g(X)$ عبارت است از:

$$E(g(X)) = \sum_x g(x)f(x)$$

نکته

امید ریاضی X خاصیت خطی دارد:

$$E(aX+b) = \sum_x (ax+b)f(x) = \sum_x axf(x) + \sum_x bf(x) = \underbrace{a\sum_x xf(x)}_{E(X)} + \underbrace{b\sum_x f(x)}_{۱} = aE(X)+b$$

مثال ۱۶

کارگری در یک کارواش به ازای شستن هر خودرو ۲ دلار دریافت می‌کنند و هر روز سه دلار هزینه رفت و آمد می‌دهد. فرض کنید جدول توزیع احتمال برای تعداد خودروهایی که در یک روز به کارواش می‌آیند به صورت زیر است. مقدار مورد انتظار درآمد خالص کارگر در هر روز چقدر است؟

x	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$f(x)$	۱/۶	۱/۶	۱/۴	۱/۴	۱/۱۲	۱/۱۲

اگر متغیر تصادفی X را تعداد خودروهایی که به کارواش می‌ایند در نظر بگیریم، درآمد خالص کارگر در پایان هر روز برابر با $g(X) = ۲X - ۳$ است. برای میانگین درآمد او داریم:

$$E(g(X)) = \sum_X g(x)f(x) =$$
$$۱۱ \times ۱/۶ + ۱۳ \times ۱/۶ + ۱۵ \times ۱/۴ + ۱۷ \times ۱/۴ + ۱۹ \times ۱/۱۲ + ۲۱ \times ۱/۱۲ = ۱۵/۳۳$$

مثال ۱۷

فرض کنید توزیع احتمال تعداد خریداری شده از محصولی از یک کارخانه برای یک شرکت در یک سال به صورت زیر است.

x	۱	۲	۳	۴
$f(x)$	۱/۲	۱/۴	۱/۸	۱/۸

قیمت هر محصول صد دلار است و شرکت برای هر خرید، تخفیفی معادل $۳X^۲$ می‌گیرد که X تعداد محصول خریداری شده است. مقدار مورد انتظار پولی که شرکت برای خرید محصول مورد نظر در یک سال پرداخت می‌کند چقدر است؟

مقدار پول پرداختی $= g(X) = ۱۰۰X - ۳X^۲$

$$E(g(X)) = \sum_x g(x)f(x) = \sum_x (۱۰۰x - ۳x^۲)f(x) = ۱۰۰\sum_x xf(x) - ۳\sum_x x^۲ f(x) = ۱۰۰(۱(۱/۲)+۲(۱/۴)+۳(۱/۸)+۴(۱/۸)) - ۳(۱(۱/۲)+۴(۱/۴)+۹(۱/۸)+۱۶(۱/۸)) = ۱۰۰(۱۵/۸) - ۳(۳۷/۸) = ۱۸۷/۵ - ۱۳/۸۷۵ = ۱۷۳/۶۲۵$$

واریانس

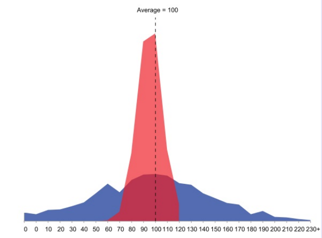
واریانس

تعریف: فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با توزیع احتمال $f(x)$ و میانگین $E(X)=\mu$ باشد. واریانس X عبارت است از:

$$VAR(X)=\sigma^۲=E[(X-\mu)^۲]=\sum_x (x-\mu)^۲ f(x)$$

میانگین نشان می‌دهد که داده‌ها حول چه عددی قرار دارند و مرکزشان کجاست. واریانس نشان می‌دهد که داده‌ها چگونه حول این مرکز پراکنده شده‌اند. آیا همه در نزدیکی این مرکز قرار دارند یا از آن دور هستند.

واریانس کمیتی همواره نامنفی است. جذر واریانس را انحراف معیار گویند و معمولا با σ نشان می‌دهند.



مثال ۱۸

فرض کنید برای متغیر تصادفی X داریم:

$$f(X) = \frac{|x|+۱}{۵}; \quad x = -۱, ۰, ۱$$

واریانس X را حساب کنید.
داریم:

x	-۱	۰	۱
$f(x)$	۲/۵	۱/۵	۲/۵

$$\mu_X = E(X) = -۱(۲/۵) + ۰(۱/۵) + ۱(۲/۵) = ۰$$
$$Var(X) = E((X-\mu_X)^۲) = \sum_x (x-\mu_X)^۲ f(x) =$$
$$(-۱-۰)^۲(۲/۵) + (۰-۰)^۲(۱/۵) + (۱-۰)^۲(۲/۵) = \frac{۴}{۵}$$

واریانس

قضیه

واریانس متغیر تصادفی X عبارت است از:

$$\sigma^۲ = E(X^۲) - \mu^۲ = E(X^۲) - (E(X))^۲$$

مثال ۱۹

فرض کنید جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی گسسته X به صورت زیر است:

x	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	۱/۱۰	۲/۱۰	۳/۱۰	۴/۱۰

واریانس X را بیابید.
داریم:

$$E(X) = ۰(۱/۱۰) + ۱(۲/۱۰) + ۲(۳/۱۰) + ۳(۴/۱۰) = ۲$$
$$E(X^۲) = ۰^۲(۱/۱۰) + ۱^۲(۲/۱۰) + ۲^۲(۳/۱۰) + ۳^۲(۴/۱۰) = ۵$$
$$Var(X) = E(X^۲) - (E(X))^۲ = ۵ - ۲^۲ = ۱$$

قضیه

فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع توزیع احتمال $f(x)$ باشد. واریانس متغیر تصادفی $g(X)$ عبارت است از:

$$\sigma^2_{g(X)} = E[(g(X) - \underbrace{\mu_{g(X)}}_{E(g(X))})^2] = \sum_x (g(x) - \mu_{g(x)})^2 f(x)$$

$$= E[g(X)^2] - (E[g(X)])^2$$

نکته:

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

مثال ۲۰

در مثال ۱۹، مطلوب است

$$Var(۲^X), Var(\frac{X-۱}{۳})$$

داریم:

$$Var(۲^X) = E[(۲^X - E(۲^X))^۲] = E[(۲^X)^۲] - (E(۲^X))^۲$$
$$E[(۲^X)^۲] = E(۲^{۲X}) = ۲^۰(۱/۱۰) + ۲^۲(۲/۱۰) + ۲^۴(۳/۱۰) + ۲^۶(۴/۱۰) = ۳۱/۳$$
$$E(۲^X) = ۲^۰(۱/۱۰) + ۲^۱(۲/۱۰) + ۲^۲(۳/۱۰) + ۲^۳(۴/۱۰) = ۴/۹$$
$$Var(۲^X) = ۳۱/۳ - ۴/۹^۲ = ۷/۲۹$$

$$Var(\frac{X-۱}{۳}) = E[(\frac{X-۱}{۳} - E(\frac{X-۱}{۳}))^۲] = E[(\frac{X-۱}{۳})^۲] - (E(\frac{X-۱}{۳}))^۲$$
$$E[(\frac{X-۱}{۳})^۲] =$$
$$(-۱/۳)^۲(۱/۱۰) + (۰/۳)^۲(۲/۱۰) + (۱/۳)^۲(۳/۱۰) + (۲/۳)^۲(۴/۱۰) = ۲/۹$$
$$E(\frac{X-۱}{۳}) = (-۱/۳)(۱/۱۰) + (۰/۳)۲/۱۰) + (۱/۳)(۳/۱۰) + (۲/۳)(۴/۱۰) = ۱/۳$$
$$Var(\frac{X-۱}{۳}) = ۲/۹ - ۱/۹ = ۱/۹$$

متغیر تصادفی پیوسته

متغیر تصادفی

تعریف: متغیر تصادفی تابعی است که به هر عنصر فضای نمونه‌ای یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد.

$$X : S \to \mathbb{R} \tag{۱۳}$$

متغیر تصادفی پیوسته

تعریف: اگر مجموعه مقادیر ممکن برای متغیر تصادفی X نامتناهی و غیرقابل شمارش (اصطلاحا به تعداد نقاط یک پاره‌خط) باشد، X رامتغیر تصادفی پیوسته نامیم.
در این حالت احتمال رخداد هر یک نقطه از مقادیر ممکن X صفر است (صفر حدی).
معمولا احتمال را روی بازه ها بررسی می‌کنیم که به صورت محاسبه مساحت زیر منحنی تابع احتمال در بازه مربوطه است.

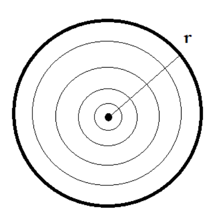
نکته

برد متغیر تصادفی (به عنوان تابعی از فضای نمونه‌ای به توی اعداد حقیقی) یا تکیه‌گاه (support) آن (به عنوان دامنه تابع احتمال) برابر است با مجموعه مقادیری از $\mathbb{R}$ که متغیر تصادفی آن‌ها را با احتمال ناصفر اختیار می‌کند.

متغیر تصادفی پیوسته

مثال ۱

در پرتاب یک دارت به سمت یک سیبل، متغیر تصادفی X را میزان فاصله نقطه برخورد دارت تا مرکز سیبل در نظر می‌گیریم.



$$S = \text{نقاط سطح دایره} \tag{۱۴}$$

$$X : S \to [۰, r] \subseteq \mathbb{R} \tag{۱۵}$$

تکیه‌گاه X بازه‌ای از اعداد حقیقی است که شامل تعداد نامتناهی و ناشمارا نقطه می‌باشد. X یک متغیر تصادفی پیوسته است.

مثال ۲

- طول عمر یک لامپ: $X \in [۰, \infty)$
- مسافت طی شده با یک اتومبیل با ۱ لیتر بنزین: $X \in [a, b]$
- مدت زمان یک مکالمه تلفنی $X \in [۰, T]$

تابع چگالی احتمال

$$P(a<X\leq b)=P(a<X<b)+\underbrace{P(X=b)}_{\text{۰}}=P(a<X<b)$$

$$P(a<X<b)=P(a<X\leq b)=P(a\leq X<b)=P(a\leq X\leq b)$$

تابع چگالی احتمال

تابع $f(x)$، که روی مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ تعریف شده است، تابع چگالی احتمال (یا تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته X نامیده می‌شود اگر:

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx; \quad f(x)\geq \text{۰} (\forall x\in\mathbb{R}); \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\text{۱}$$

تابع چگالی را نمی‌توان به صورت جدول توزیع احتمال نشان داد و معمولا با فرمول نشان داده می‌شود.
ممکن است در تابع چگالی تعداد متناهی ناپیوستگی داشته باشیم، ولی در مثال‌های کاربردی غالبا این تابع پیوسته است.
در واقع $f(x)$ به گونه ای ساخته می‌شود که مقدار احتمال هر پیشامد با محاسبه مساحت زیر نمودار $f(x)$ در بازه مربوط به آن پیشامد به دست می‌آید.
چون احتمال هر پیشامد نامنفی است، نمودار تابع چگالی احتمال رو و یا بالای محور طول‌ها (که نشان دهنده مقادیر متغیر تصادفی X است)، قرار دارد.

مثال ۳

فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X نشان دهنده مدت زمان کارکرد یک قطعه بر حسب روز بوده و تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد. احتمال این که قطعه مذکور بین ۵ تا ۱۵ روز کار کند چقدر است؟ احتمال این که قطعه بیش از ۱۰ روز کار کند چقدر است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۱۰} e^{\frac{-x}{۱۰}} & ; x \geq ۰ \\ ۰ & ; ow(\text{در غیر این صورت}) \end{cases}$$

داریم:

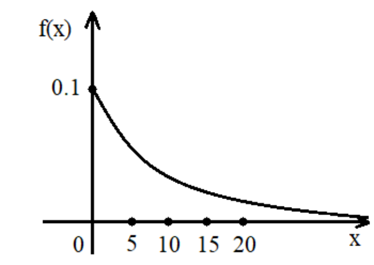
$$P(۵ \leq X \leq ۱۵) = \int_{۵}^{۱۵} f(x)dx = \int_{۵}^{۱۵} \frac{۱}{۱۰} e^{\frac{-x}{۱۰}} dx = -e^{\frac{-x}{۱۰}} |_{۵}^{۱۵} = -e^{\frac{-۱۵}{۱۰}} + e^{\frac{-۵}{۱۰}} = ۰/۳۸$$

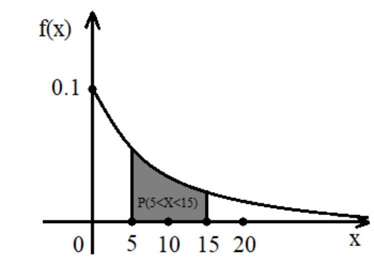
همچنین:

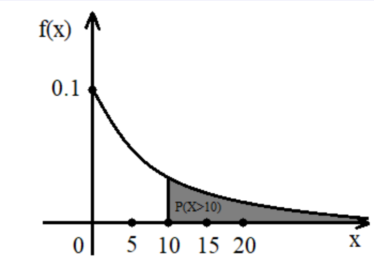
$$P(X \geq ۱۰) = \int_{۱۰}^{\infty} f(x)dx = \int_{۱۰}^{\infty} \frac{۱}{۱۰} e^{\frac{-x}{۱۰}} dx = -e^{\frac{-x}{۱۰}} |_{۱۰}^{\infty} = -e^{-\infty} + e^{\frac{-۱۰}{۱۰}} = ۰ + \frac{۱}{e} = ۰/۳۷$$

تابع چگالی احتمال

نمودار تابع چگالی احتمال مثال ۳







مثال ۴

فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X نشان دهنده میزان فاصله نقطه برخورد دارت تا مرکز سیبلی به شعاع ۳۰ سانتی‌متر بوده و تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد. اولا مقدار a را بیابید. ثانیا احتمال این که دارت در فاصله‌ای کمتر از ۱۰ سانتی‌متر تا مرکز سیبل به آن اصابت کند چقدر است؟

$$f(x) = \begin{cases} a(۳۰ - x) & ; ۰ \leq x \leq ۳۰ \\ ۰ & ; ow(\text{در غیر این صورت}) \end{cases}$$

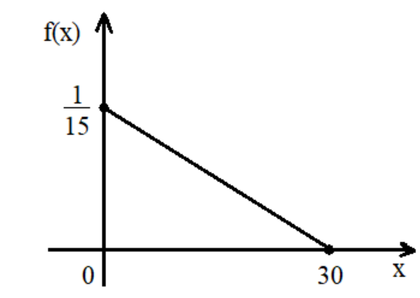
داریم:

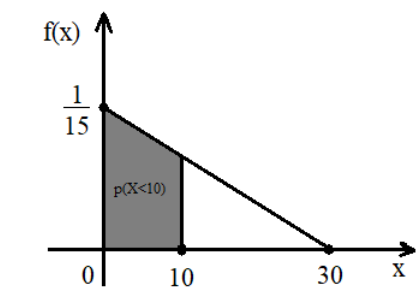
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = ۱ \Rightarrow \int_{-\infty}^{۰} ۰ dx + \int_{۰}^{۳۰} a(۳۰ - x)dx + \int_{۳۰}^{\infty} ۰ dx = ۱$$
$$\Rightarrow \int_{۰}^{۳۰} a(۳۰ - x)dx = ۱ \Rightarrow a(۳۰x - \frac{x^۲}{۲})|_{۰}^{۳۰} = ۱ \Rightarrow a(۹۰۰ - \frac{۹۰۰}{۲} - ۰) = ۱ \Rightarrow$$
$$a = \frac{۱}{۴۵۰} \quad ; f(x) \geq ۰ \checkmark$$

همچنین

$$P(X \leq ۱۰) = \int_{۰}^{۱۰} f(x)dx = \int_{۰}^{۱۰} \frac{۱}{۴۵۰}(۳۰ - x)dx = -\frac{۱}{۴۵۰}(۳۰x - \frac{x^۲}{۲})|_{۰}^{۱۰} =$$
$$\frac{۱}{۴۵۰}(۳۰۰ - ۵۰ - ۰) = \frac{۵}{۹}$$

نمودار تابع چگالی احتمال مثال ۴





مثال ۵

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر باشد. مقدار a چقدر است؟ احتمال $P(X \geq ۱)$ چقدر است؟

$$f(x) = \begin{cases} a(۲x - x^۲) & ; ۰ \leq x \leq ۲ \\ ۰ & ; ow(\text{در غیر این صورت}) \end{cases}$$

داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = ۱ \Rightarrow \int_{-\infty}^{۰} ۰dx + \int_{۰}^{۲} a(۲x - x^۲)dx + \int_{۲}^{\infty} ۰dx = ۱$$

$$\Rightarrow \int_{۰}^{۲} a(۲x - x^۲)dx = ۱ \Rightarrow a(x^۲ - \frac{x^۳}{۳})|_{۰}^{۲} = ۱ \Rightarrow a(۴ - \frac{۸}{۳} - ۰) = ۱ \Rightarrow a = \frac{۳}{۴}$$

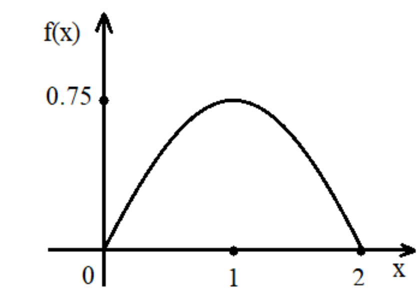
همچنین:

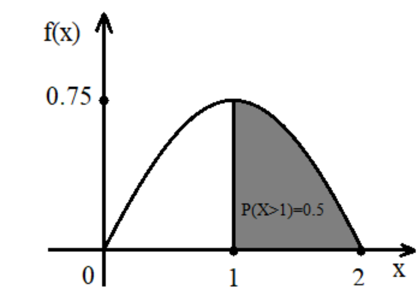
$$P(X \geq ۱) = \int_{۱}^{\infty} f(x)dx = \int_{۱}^{۲} \frac{۳}{۴}(۲x - x^۲)dx = \frac{۳}{۴}(x^۲ - \frac{x^۳}{۳})|_{۱}^{۲} =$$

$$\frac{۳}{۴}((۴ - \frac{۸}{۳}) - (۱ - \frac{۱}{۳})) = \frac{۱}{۲}$$

تابع چگالی احتمال

نمودار تابع چگالی احتمال مثال ۵





مثال ۶

می‌خواهیم عددی در بازه $(۰/۱, ۰/۵)$ به تصادف انتخاب کنیم (هیچ عددی بر اعداد دیگر برتری ندارد). فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته‌ای است که مقدار عدد انتخاب شده را نشان می‌دهد. تابع چگالی احتمال X به صورت زیر تعریف می‌شود. مقدار a چقدر است؟ احتمال این که عددی بزرگتر از ۰/۳۵ انتخاب شود چقدر است؟

$$f(x)=\begin{cases} a & ; ۰/۱ \leq x \leq ۰/۵ \\ ۰ & ; ow(\text{در غیر این صورت}) \end{cases}$$

داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = ۱ \Rightarrow \int_{-\infty}^{۰/۱} ۰dx + \int_{۰/۱}^{۰/۵} adx + \int_{۰/۵}^{\infty} ۰dx = ۱$$

$$\Rightarrow \int_{۰/۱}^{۰/۵} adx = ۱ \Rightarrow ax|_{۰/۱}^{۰/۵} = ۱ \Rightarrow a(۰/۵ - ۰/۱) = ۱ \Rightarrow a = \frac{۱۰}{۴} = ۲/۵ \Rightarrow$$

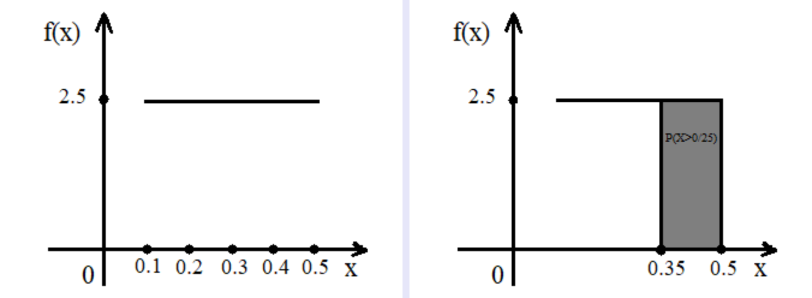
$$f(x)=\begin{cases} ۲/۵ & ; ۰/۱ \leq x \leq ۰/۵ \\ ۰ & ; ow \end{cases}$$

همچنین:

$$P(X \geq ۰/۳۵) = \int_{۰/۳۵}^{\infty} f(x)dx = \int_{۰/۳۵}^{۰/۵} ۲/۵dx = ۲/۵x|_{۰/۳۵}^{۰/۵} = ۱/۲۵ - ۰/۸۷۵ = ۰/۳۷۵$$

تابع چگالی احتمال

نمودار تابع چگالی احتمال مثال ۶



تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته

تعریف: تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته X که دارای چگالی احتمال $f(x)$ است عبارت است از:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt; \quad -\infty < x < \infty \tag{۱۶}$$

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، تابع توزیع تجمعی آن پیوسته است و بالعکس. یعنی در هیچ نقطه‌ای در تابع توزیع پرش نداریم. زیرا در همه تک‌نقطه‌ها مقدار احتمال صفر است.
- برای متغیر تصادفی پیوسته X داریم:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

- $F(x)$ غیر نزولی است و مقدار آن در بازه $[۰, ۱]$ قرار می‌گیرد (برد).

مثال ۷

تابع توزیع را در مثال ۳ بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۱۰} e^{\frac{-x}{۱۰}} & ; x \geq ۰ \\ ۰ & ; ow(\text{در غیر این صورت}) \end{cases}$$

داریم:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt =$$
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{x} ۰ dt = ۰ & ; x < ۰ \\ \underbrace{\int_{-\infty}^{۰} ۰ dt}_{۰} + \underbrace{\int_{۰}^{x} \frac{۱}{۱۰} e^{\frac{-t}{۱۰}} dt}_{-e^{\frac{-t}{۱۰}} |_{۰}^{x}} = -e^{\frac{-x}{۱۰}} + ۱ & ; x \geq ۰ \end{cases}$$

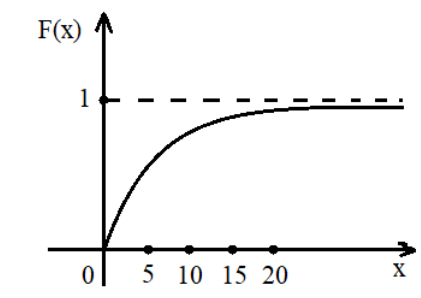
بنابراین:

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & ; x < ۰ \\ -e^{\frac{-x}{۱۰}} + ۱ & ; x \geq ۰ \end{cases}$$

$$P(۵ \leq X \leq ۱۵) = F(۱۵) - F(۵) = (-e^{\frac{-۱۵}{۱۰}} + ۱) - (-e^{\frac{-۵}{۱۰}} + ۱) = ۰/۳۸$$

$$P(X \geq ۱۰) = P(X > ۱۰) = ۱ - P(X \leq ۱۰) = ۱ - F(۱۰) =$$
$$۱ - (-e^{\frac{-۱۰}{۱۰}} + ۱) = \frac{۱}{e} = ۰/۳۷$$

نمودار توزیع تجمعی مثال ۷



مثال ۸

تابع توزیع را در مثال ۴ بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۴۵۰}(۳۰ - x) & ; ۰ \le x \le ۳۰ \\ ۰ & ; ow \end{cases}$$

داریم:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt =$$

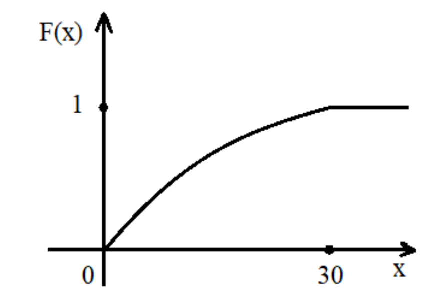
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{x} ۰ dt = ۰ & ; x < ۰ \\ \underbrace{\int_{-\infty}^{۰} ۰ dt}_{۰} + \underbrace{\int_{۰}^{x} \frac{۱}{۴۵۰}(۳۰ - t)dt}_{\frac{۱}{۴۵۰}(۳۰t - \frac{t^۲}{۲})|_۰^x} = \frac{۱}{۴۵۰}(۳۰x - \frac{x^۲}{۲}) & ; ۰ \le x < ۳۰ \\ \underbrace{\int_{-\infty}^{۰} ۰ dt}_{۰} + \underbrace{\int_{۰}^{۳۰} \frac{۱}{۴۵۰}(۳۰ - t)dt}_{\frac{۱}{۴۵۰}(۹۰۰ - \frac{۹۰۰}{۲})} + \underbrace{\int_{۳۰}^{x} ۰ dt}_{۰} = \frac{۱}{۴۵۰}(۴۵۰) = ۱ & ; x \ge ۳۰ \end{cases}$$

بنابراین:

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & ; x < ۰ \\ \frac{۱}{۴۵۰}(۳۰x - \frac{x^۲}{۲}) & ; ۰ \leq x < ۳۰ \\ ۱ & ; x \geq ۳۰ \end{cases}$$

$$P(X \leq ۱۰) = F(۱۰) = \frac{۱}{۴۵۰}(۳۰(۱۰) - \frac{۱۰^۲}{۲}) = \frac{۵}{۹}$$

نمودار توزیع تجمعی مثال ۸



مثال ۹

تابع توزیع را در مثال ۵ بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{۳}{۴}(۲x-x^{۲}) & ;۰\leq x\leq ۲ \\ ۰ & ;ow \end{cases}$$

داریم:

$$F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=$$

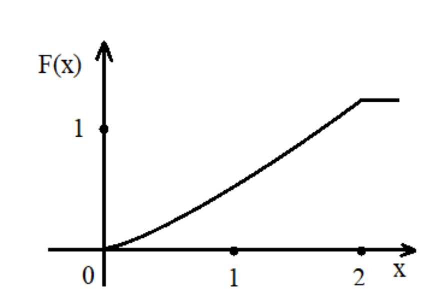
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{x} ۰dt=۰ & ;x<۰ \\ \underbrace{\int_{-\infty}^{۰} ۰dt}_{۰}+\underbrace{\int_{۰}^{x} \frac{۳}{۴}(۲t-t^{۲})dt}_{\frac{۳}{۴}(t^{۲}-\frac{t^{۳}}{۳})|_{۰}^{x}}=\frac{۳}{۴}(x^{۲}-\frac{x^{۳}}{۳}) & ;۰\leq x<۲ \\ \underbrace{\int_{-\infty}^{۰} ۰dt}_{۰}+\underbrace{\int_{۰}^{۲} \frac{۳}{۴}(۲t-t^{۲})dt}_{\frac{۳}{۴}(۴-\frac{۸}{۳})}+\underbrace{\int_{۲}^{x} ۰dt}_{۰}=\frac{۳}{۴}(\frac{۴}{۳})=۱ & ;x\geq ۲ \end{cases}$$

بنابراین:

$$F(x)=\begin{cases} ۰ & ; x<۰ \\ \frac{۳}{۴}(x^{۲}-\frac{x^{۳}}{۳}) & ; ۰\leq x<۲ \\ ۱ & ; x\geq ۲ \end{cases}$$

$$P(X\geq ۱)=P(X>۱)=۱-P(X\leq ۱)=۱-F(۱)=۱-\frac{۳}{۴}(x^{۲}-\frac{x^{۳}}{۳})=\frac{۱}{۲}$$

نمودار توزیع تجمعی مثال ۹



مثال ۱۰

تابع توزیع را در مثال ۶ بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} ۲/۵ & ; ۰/۱ \leq x \leq ۰/۵ \\ ۰ & ; ow \end{cases}$$

داریم:

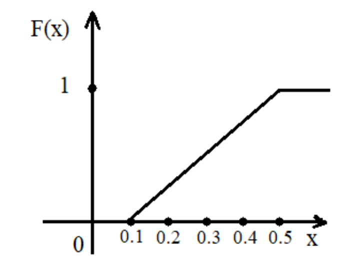
$$F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=$$
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{x} ۰ dt = ۰ & ; x < ۰/۱ \\ \underbrace{\int_{-\infty}^{۰/۱} ۰ dt}_{۰} + \underbrace{\int_{۰/۱}^{x} ۲/۵ dt}_{۲/۵t|_{۰/۱}^{x}} = ۲/۵x - ۰/۲۵ & ; ۰/۱ \leq x < ۰/۵ \\ \underbrace{\int_{-\infty}^{۰/۱} ۰ dt}_{۰} + \underbrace{\int_{۰/۱}^{۰/۵} ۲/۵ dt}_{۱/۲۵-۰/۲۵} + \underbrace{\int_{۰/۵}^{x} ۰ dt}_{۰} = ۱ & ; x \geq ۰/۵ \end{cases}$$

بنابراین:

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & ; x < ۰/۱ \\ ۲/۵x - ۰/۲۵ & ; ۰/۱ \leq x < ۰/۵ \\ ۱ & ; x \geq ۰/۵ \end{cases}$$

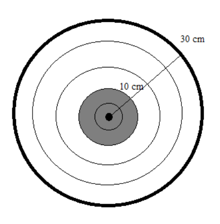
$P(X \geq ۰/۳۵) = P(X > ۰/۳۵) = ۱ - P(X \leq ۰/۳۵) = ۱ - F(۰/۳۵) =$
$۱ - (۲/۵(۰/۳۵) - ۰/۲۵) = ۰/۳۷۵$

نمودار توزیع تجمعی مثال ۱۰



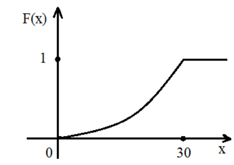
مثال ۱۱

فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X نشان دهنده میزان فاصله نقطه برخورد دارت تا مرکز سیبلی به شعاع ۳۰ سانتی‌متر باشد. در این مثال فرض کنید همه نقاط سیبل شانس یکسانی در برخورد دارت دارند. تابع توزیع تجمعی X را بیابید. ثانیا احتمال این که دارت در فاصله‌ای کمتر از ۱۰ سانتی‌متر تا مرکز سیبل به آن اصابت کند چقدر است؟ تابع چگالی احتمال X را نیز بیابید.



$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & ; x < ۰ \\ \frac{\pi x^۲}{\pi ۳۰^۲} & ; ۰ \leq x < ۳۰ \\ ۱ & ; x \geq ۳۰ \end{cases}$$



داریم:

$$P(X \leq ۱۰) = F(۱۰) = \frac{۱۰^۲}{۳۰^۲} = \frac{۱}{۹}$$

برای متغیر تصادفی پیوسته X با تابع توزیع $F(x)$، به شرط وجود مشتق $F(x)$، داریم:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

مثال ۱۲

در مثال ۱۱ تابع چگالی احتمال را بیابید.

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & ; x < ۰ \\ \frac{\pi x^{۲}}{\pi ۳۰^{۲}} & ; ۰ \leq x < ۳۰ \\ ۱ & ; x \geq ۳۰ \end{cases}$$

داریم:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{۲}}{۹۰۰}\right) = \frac{۲x}{۹۰۰} = \frac{x}{۴۵۰} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{۴۵۰} & ; ۰ \leq x \leq ۳۰ \\ ۰ & ; ow \end{cases}$$

مثال ۱۳

فرض کنید تابع توزیع متغیر تصادفی پیوسته X به صورت زیر است. مقدار a را بیابید. تابع چگالی X را به دست آورید.

$$F(x)=\begin{cases} \cdot & ;x<\cdot \\ ax^{۲}+\frac{۲}{۳}x & ;\cdot\le x<۳ \\ ۱ & ;x\ge ۳\end{cases}$$

$F(\infty)=۱\surd$ ، $F(-\infty)=\cdot\surd$

حال باید a را به گونه‌ای بیابیم که F پیوسته، غیر نزولی و بین ۰ و ۱ باشد:

$$F(۳)=F(۳^{-})\Rightarrow ۱=a(۳^{۲})+\frac{۲}{۳}(۳)\Rightarrow ۹a+۲=۱\Rightarrow ۹a=-۱\Rightarrow a=\frac{-۱}{۹}$$

$F'(x)=\cdot\to x=۳;\quad F''(x)=\frac{-۲}{۹}<\cdot\Rightarrow x=۳$ ماکزیمم نسبی

$\Rightarrow \cdot\le F(x)\le ۱\surd,\quad F$ غیرنزولی$\surd$

همچنین

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{-۱}{۹}x^{۲}+\frac{۲}{۳}x\right)=\frac{-۲}{۹}x+\frac{۲}{۳}\quad\Rightarrow$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{-۲}{۹}x+\frac{۲}{۳} & ;\cdot\le x\le ۳\\ \cdot & ;ow\end{cases}$$

امید ریاضی

تعریف: اگر متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد، میانگین یا مقدار مورد انتظار یا امید ریاضی X برابر است با:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

امید ریاضی در واقع مرکز ثقل جامعه آماری است. آن را با μ نیز نمایش می‌دهند.

قضیه

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با چگالی احتمال $f(x)$ باشد. میانگین یا مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی $g(X)$ عبارت است از:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

نکته

امید ریاضی X خاصیت خطی دارد:

$$E(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} axf(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} bf(x)dx =$$

$$a\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx}_{E(X)} + b\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx}_{۱} = aE(X)+b$$

$$\forall b \in \mathbb{R}: \quad E(b) = b$$

واریانس متغیر تصادفی پیوسته

واریانس

تعریف: فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با چگالی احتمال $f(x)$ و میانگین $E(X)=\mu$ باشد. واریانس X عبارت است از:

$$VAR(X)=\sigma^۲=E[(X-\mu)^۲]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^۲f(x)dx$$

واریانس کمیتی همواره نامنفی است. جذر واریانس را انحراف معیار گویند و معمولا با σ نشان می‌دهند.

قضیه

واریانس متغیر تصادفی X عبارت است از:
$$\sigma^۲=E(X^۲)-\mu^۲=E(X^۲)-(E(X))^۲$$

قضیه

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد. واریانس متغیر تصادفی $g(X)$ عبارت است از:

$$\sigma^۲_{g(X)}=E[(g(X)-\underbrace{\mu_{g(X)}}_{E(g(X))})^۲]=\int_{-\infty}^{\infty}(g(x)-\mu_{g(x)})^۲f(x)dx$$

نتیجه: $Var(aX+b)=a^۲Var(X);\quad \forall b\in\mathbb{R}:\quad Var(b)=۰$

مثال ۱۴

در مثال ۴، مقدار فاصله‌ای که انتظار می‌رود نقطه برخورد دارت با مرکز سیبل داشته باشد چقدر است؟ واریانس و انحراف معیار X را نیز حساب کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۴۵۰}(۳۰ - x) & ; ۰ \leq x \leq ۳۰ \\ ۰ & ; ow(\text{در غیر این صورت}) \end{cases}$$

داریم:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{۰} x \times ۰ dx} + \int_{۰}^{۳۰} x \times \frac{۱}{۴۵۰}(۳۰ - x) dx + \underbrace{\int_{۳۰}^{\infty} x \times ۰ dx}_{۰} = \frac{۱}{۴۵۰}(۱۵x^۲ - \frac{x^۳}{۳})|_{۰}^{۳۰} = ۳۰ - ۲۰ = ۱۰$$

همچنین

$$E(X^۲) = \int_{-\infty}^{\infty} x^۲ f(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{۰} x^۲ \times ۰ dx}_{۰} + \int_{۰}^{۳۰} x^۲ \times \frac{۱}{۴۵۰}(۳۰ - x) dx + \underbrace{\int_{۳۰}^{\infty} x^۲ \times ۰ dx}_{۰} = \frac{۱}{۴۵۰}(۱۰x^۳ - \frac{x^۴}{۴})|_{۰}^{۳۰} = ۶۰۰ - ۴۵۰ = ۱۵۰$$

$$Var(X) = E(X^۲) - (E(X))^۲ = ۱۵۰ - ۱۰۰ = ۵۰; \qquad \sigma_X = \sqrt{۵۰} = ۷/۰۷$$

مثال ۱۵

در مثال ۱۴، فرض کنید به هر بازیکن، بسته به میزان فاصله نقطه برخورد دارتش تا مرکز، X، به مقدار $۰/۳X - ۹$ دلار جایزه می‌دهند. مقدار متوسط جایزه‌ای که یک بازیکن دریافت می‌کند چقدر است؟ مقدار انحراف از معیار را برای جایزه دریافتی بیابید.

با توجه به این که

$$E(X) = ۱۰, Var(X) = ۵۰.$$

داریم:

$$E(۹ - ۰/۳X) = ۹ - ۰/۳E(X) = ۹ - ۰/۳ \times ۱۰ = ۶$$

$$Var(۹ - ۰/۳X) = ۰/۰۹Var(X) = ۰/۰۹ \times ۵۰ = ۴/۵$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{۹-۰/۳X} = \sqrt{۴/۵} = ۲/۱۲$$

نکته

$$\sigma_{aX+b} = |a|\sigma_X$$

مثال ۱۶

برای متغیر تصادفی X با چگالی احتمال

$$f(x)=\begin{cases} \frac{۳}{۴}(۲x-x^۲) & ; ۰\leq x\leq ۲\\ ۰ & ; ow(\text{در غیر این صورت})\end{cases}$$

مقادیر $E(X)$، $Var(X)$، $E(\frac{۱}{X})$ و $\sigma_{\sqrt{(X)}}$ را بیابید:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_۰^۲ x\times\frac{۳}{۴}(۲x-x^۲)dx=\frac{x^۳}{۲}-\frac{۳x^۴}{۱۶}\Big|_۰^۲=۴-۳=۱$$

$$E(X^۲)=\int_{-\infty}^{\infty}x^۲f(x)dx=\int_۰^۲ x^۲\times\frac{۳}{۴}(۲x-x^۲)dx=\frac{۳x^۴}{۸}-\frac{۳x^۵}{۲۰}\Big|_۰^۲=۱/۲$$

$$Var(X)=E(X^۲)-(E(X))^۲=۱/۲-۱^۲=۰/۲$$

$$E(\frac{۱}{X})=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{x}f(x)dx=\int_۰^۲\frac{۱}{x}\times\frac{۳}{۴}(۲x-x^۲)dx=\frac{۳x}{۲}-\frac{۳x^۲}{۸}\Big|_۰^۲=۳-\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

$$E(\sqrt{X})=\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x}f(x)dx=\int_۰^۲\sqrt{x}\times\frac{۳}{۴}(۲x-x^۲)dx=$$
$$\frac{۳}{۵}x^۲\sqrt{x}-\frac{۳}{۱۴}x^۳\sqrt{x}\Big|_۰^۲=۰/۹۶$$
$$E(\sqrt{X}^۲)=E(X)=۱\quad\Rightarrow\quad Var(\sqrt{X})=۱-۰/۹۶^۲=۰/۰۷۸۴$$
$$\Rightarrow\quad \sigma_{\sqrt{X}}=\sqrt{۰/۰۷۸۴}=۰/۲۸$$

مثال ۱۷

فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X نشان دهنده مدت زمان کارکرد یک قطعه بر حسب روز بوده و تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد. مقدار مورد انتظار مدت زمان کارکرد این قطعه چقدر است؟ واریانس این زمان را حساب کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۱۰}e^{\frac{-x}{۱۰}} & ; x \geq ۰ \\ ۰ & ; ow \end{cases}$$

داریم:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{۰}^{\infty} \underbrace{x}_{u} \times \underbrace{\frac{۱}{۱۰}e^{\frac{-x}{۱۰}} dx}_{dv} =$$

$$\underbrace{(-xe^{-\frac{x}{۱۰}})|_{۰}^{\infty}}_{۰} - \int_{۰}^{\infty} -e^{-\frac{x}{۱۰}} dx = -۱۰e^{-\frac{x}{۱۰}}|_{۰}^{\infty} = ۰ + ۱۰ = ۱۰$$

$$E(X^{۲}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{۲}f(x)dx = \int_{۰}^{\infty} \underbrace{x^{۲}}_{u} \times \underbrace{\frac{۱}{۱۰}e^{\frac{-x}{۱۰}} dx}_{dv} =$$

$$\underbrace{(-x^{۲}e^{-\frac{x}{۱۰}})|_{۰}^{\infty}}_{۰} - \int_{۰}^{\infty} -۲xe^{-\frac{x}{۱۰}} dx = ۲۰۰ \quad \Rightarrow \quad Var(X) = ۲۰۰ - ۱۰^{۲} = ۱۰۰$$

خواص امید ریاضی و واریانس

خواص امید ریاضی

- اگر a، b و c اعداد حقیقی ثابت باشند، آنگاه

$$E(aX+b) = aE(X)+b; \qquad E(c) = c$$

- اگر $X \geq ۰$، آنگاه $E(X) \geq ۰$
- اگر $a \leq X \leq b$، آنگاه $a \leq E(X) \leq b$
- اگر $g(X)$ و $h(X)$ دو تابع دلخواه از X باشند، آنگاه

$$E(g(X) \pm h(X)) = E(g(X)) \pm E(h(X))$$

خواص واریانس و انحراف معیار

- برای هر متغیر تصادفی X، همواره $Var(X) \geq ۰$
- اگر a، b و c اعداد حقیقی ثابت باشند، آنگاه

$$Var(aX+b) = a^۲ Var(X), \sigma_{aX+b} = |a|\sigma_X; \qquad Var(c) = ۰, \sigma_c = ۰$$

- اگر $g(X)$ تابعی از متغیر تصادفی X باشند، آنگاه

$$Var(g(X)) = E([g(X)-E(g(X))]^۲) = E([g(X)]^۲) - [E(g(X))]^۲$$