برخی از توزیع‌های گسسته

فردوس گرجی

چند توزیع احتمال گسسته

- **توزیع یکنواخت گسسته (Discrete uniform distribution):**

اگر X مقادیر x_1 , x_2 , … , x_k را با احتمال‌های یکسان اختیار کند، آنگاه دارای توزیع یکنواخت گسسته به صورت زیر می‌باشد.

$$f(x;k) = \frac{1}{k} \quad ; \quad x = x_1, x_2, \dots, x_k$$

مثال ۱ : عدد ظاهرشده در پرتاب یک تاس سالم

$$f(x;6) = \frac{1}{6} \quad ; \quad x = 1, \dots, 6$$

انتخاب یک نماینده از از یک کلاس سی نفره

$$f(x;30) = \frac{1}{30} \quad ; \quad x \in \{\text{شماره‌های دانشجویی افراد کلاس}\}$$

آزمایش برنولی:

x	0	1
$P(X=x)$	$1-p$	p

جواب دو حالت است که به پیروزی و شکست تعبیر می‌شود.

با احتمال p رخ می‌دهد
$0<p<1$

با احتمال $q=1-p$ رخ می‌دهد

شیر یا خط در پرتال سکه ؛ رخداد یا عدم رخداد حادثه‌ای ؛ زوج یا فرد بودن عدد ظاهرشده در پرتاب تاس ؛ مضرب ۳ بودن یا نبودن عدد ظاهرشده در پرتاب تاس ؛ سالم یا معیوب بودن یک قطعه تولید شده توسط یک کارخانه ؛ سالم یا سوخته بودن یک لامپ انتخاب شده از یک جعبه لامپ ؛ بررسی اثربخشی یک دارو روی یک بیمار

فرایند برنولی:

- n امتحان تکراری
- هر امتحان یک آزمایش برنولی است.
- احتمال موفقیت (p) در طول امتحان‌ها ثابت است.
- آزمایش‌ها مستقل از هم هستند.

پرتاب‌های متوالی یک سکه ؛ پرتاب‌های متوالی یک تاس و بررسی زوج یا فرد بودن عدد ظاهرشده ؛ انتخاب چند لامپ از یک جعبه لامپ با جایگذاری (احتمال p ثابت می‌ماند آزمایش‌ها مستقلند) ؛ انتخاب قطعاتی ازخط تولید یک کارخانه ؛ بررسی اثربخشی یک دارو روی یک بیمار

- **توزیع دوجمله‌ای (Binomial distribution) :**

تعداد X موفقیت در n امتحان مستقل برنولی را متغیر تصادفی دوجمله‌ای گوییم که توزیع احتمال آن به صورت زیر است :

$$f(x) = P(X = x) = b(x;\ n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad ; \qquad x = 0\,, 1\,, \ldots, n$$

$p =$ احتمال موفقیت

$q = (1 - p) =$ احتمال شکست

$n =$ تعداد امتحان‌ها

$x =$ تعداد موفقیت‌ها

$p =$ احتمال موفقیت

$\binom{n}{x} =$ تعداد حالاتی که می‌توان از بین n آزمایش، x بار موفقیت کسب کرد.

➢ **مثال۲ :** احتمال اثربخشی یک دارو روی بیماران ۸۰٪ است. ۴ بیمار به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه دارو حداکثر دو بیمار را درمان کند چقدر است؟

$$p = 0.8 \qquad n = 4$$

$$f(x) = P(X = x) = b(x;\, n, p) = \binom{4}{x}\, 0.8^x\, 0.2^{4-x} \qquad ; \qquad x = 0\,, 1\,, 2\,, 3\,, 4$$

$$P(X \leq 2) = \binom{4}{0}\, 0.8^0\, 0.2^4 + \binom{4}{1}\, 0.8^1\, 0.2^3 + \binom{4}{2}\, 0.8^2\, 0.2^2 = \mathbf{0.1808}$$

➢ **مثال۳ :** یک دستگاه بسته‌بندی در کارخانه‌ای با احتمال ۹۵٪ قطعات را به درستی بسته‌بندی می‌کند. سه قطعه از خط تولید نهایی کارخانه انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی همه قطعات به درستی بسته‌بندی شده‌اند؟

$$p = 0.95 \qquad n = 3$$

$$f(x) = P(X = x) = b(x\,; 3\,, 0.95) = \binom{3}{x}\, 0.95^x\, 0.05^{3-x} \qquad ; \qquad x = 0\,, 1\,, 2\,, 3$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3}\, 0.95^3\, 0.05^0 = \mathbf{0.857}$$

➢ **مثال۴ :** در یک جعبه، سه توپ سفید و دو توپ سیاه است. دو توپ به تصادف و با جایگذاری بیرون می‌کشیم. احتمال اینکه حداقل یکبار توپ سیاه ظاهر شود چقدر است؟

ظهور توپ سیاه : موفقیت $\Longrightarrow$ $n = 2$, $p = \frac{2}{5}$

$$f(x) = P(X = x) = b(x; 2, 0.4) = \binom{2}{x} 0.4^x \, 0.6^{2-x} \qquad ; \qquad x = 0, 1, 2$$

$$P(X \geq 1) = \binom{2}{1} 0.4^1 \, 0.6^1 + \binom{2}{2} 0.4^2 \, 0.6^0 = \mathbf{0.64}$$

➢ **قضیه :** میانگین و واریانس توزیع دوجمله‌ای $b(x; n, p)$ عبارت است از:

$$\mu_X = np \qquad\qquad \sigma_X{}^2 = npq$$

اثبات: قرار می‌دهیم: متغیر تصادفی $Y_i =$ نتیجه آزمایش برنولی i ام (دو حالت صفر یا یک)

پس داریم: $X = Y_1 + \cdots + Y_n$. از طرفی داریم :

$$E(Y_i) = (0)(q) + (1)(p) = p \quad ; \quad E\left(Y_i{}^2\right) = (0)^2(q) + (1)^2(p) = p$$

$$Var(Y_i) = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

بنابراین:

$$E(X) = E(Y_1 + \cdots + Y_n) = \underbrace{\underbrace{E(Y_1)}_{p} + \ldots + \underbrace{E(Y_n)}_{p}}_{\text{بار } n} = np$$

$$Var(X) = Var(Y_1 + \cdots + Y_n) = \underbrace{\underbrace{Var(Y_1)}_{pq} + \ldots + \underbrace{Var(Y_n)}_{pq}}_{\text{بار } n} = npq$$

آزمایش‌ها از هم مستقلند

- **مثال۵ :** در مثال ۲ ، انتظار می‌رود چند نفر با دارو درمان شوند؟ انحراف معیار را نیز بیابید.

$$\mu_X = np = 4 \times 0.8 = \mathbf{3.2}$$
$$\sigma_X{}^2 = npq = 4 \times 0.8 \times 0.2 = 0.64 \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma_X = \mathbf{0.8}$$

- **مثال۶ :** اگر در مثال ۳ ، کالاهای بسته‌بندی شده را در جعبه‌های سه‌تایی بگذاریم، از یک بار شامل ۱۰۰۰ جعبه سه تایی ، انتظار می‌رود چند قطعه درست بسته‌بندی شده باشد؟

$$E(X) = np = 3 \times 0.95 = \mathbf{2.85}$$

تعداد مورد انتظار کالاها با بسته‌بندی درست در هر جعبه ۳تایی

$$1000 \times 2.85 = \mathbf{2850}$$

تعداد کالاها با بسته‌بندی درست در بار شامل ۱۰۰۰ جعبه سه تایی

توزیع چندجمله‌ای (Polynomial distribution) :

فرض کنید آزمایشی k نتیجه ممکن $E_1, E_2, \dots, E_k$ داشته باشد که به ترتیب با احتمالات $P_1, P_2, \dots, P_k$ رخ دهند ($P_1 + P_2 + \dots, P_k = 1$) . اگر این آزمایش را n بار به طور مستقل تکرار کنیم، آنگاه توزیع احتمال توأم متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_k$ که برابر با تعداد وقوع نتایج $E_1, E_2, \dots, E_k$ در n آزمایش هستند، عبارت است از:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k; p_1, p_2, \dots, p_k, n) = \binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_n} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{k} x_i = n$$

که آن را توزیع چندجمله‌ای می‌نامیم.

❋ $\frac{n!}{x_1! \dots x_k!} = \binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_n} =$ تعداد افرازهای n شی به k گروه که در گروه اول x_1 شی و در گروه دوم x_2 شی و ... و در گروه k ام، x_k شی قرار گیرد.

➢ **مثال۷ :** از یک جعبه با ۵ توپ سفید و ۲ توپ سیاه و ۳ توپ قرمز، ۶ توپ به تصادف و با جایگذاری بیرون می‌کشیم. احتمال اینکه سه بار توپ سفید، یک بار توپ سیاه و دوبار توپ قرمز مشاهده شود چقدر است؟

با جایگذاری ← آزمایش‌ها مستقلند

E_1 : سفید $\left(P_1 = \frac{5}{10}\right)$

E_2 : سیاه $\left(P_2 = \frac{2}{10}\right)$

E_3 : قرمز $\left(P_3 = \frac{3}{10}\right)$

قرمز قرمز سیاه سفید سفید سفید

قرمز قرمز سفید سیاه سفید سفید

سفید قرمز سفید قرمز سیاه سفید

...

$$P(X_1 = 3\,, X_2 = 1\,, X_3 = 2) = f(3\,,1\,,2\,; 0.5\,, 0.2\,, 0.3\,, 6)$$

$$= \binom{6}{3,2,1}\ 0.5^3\ 0.2^1\ 0.3^2 = \frac{6!}{3!\ 1!\ 2!} \times 0.125\ \times 0.2\ \times 0.09 = \mathbf{0.135}$$

۶ شی که سه تا از نوع ۱ ، یکی از نوع ۲ و دو تا از نوع ۳ هستند $\frac{6!}{3!1!2!}$

➢ توزیع فوق هندسی:

- ❋ $X =$ تعداد موفقیت‌ها در n انتخاب از N (متناهی) شی
- ❋ شبیه دو جمله‌ای به دنبال یافتن تعداد موفقیت‌ها هستیم
- ❋ ولی نمونه‌گیری‌ها بدون جایگذاری است
- ❋ در واقع آزمایش‌ها از هم مستقل نیستند و احتمال پیروزی در هر آزمایش متفاوت است

➢ توزیع فوق هندسی (**Hypergeometric distribution**):

اگر X تعداد موفقیت‌ها در یک نمونه تصادفی انتخاب شده از اندازه n شی در N شی که k تای آن‌ها برچسب موفقیت و $N-k$ تای آن برچسب عدم موفقیت دارد، باشد، آنگاه X متغیر تصادفی فوق هندسی نام دارد وتابع توزیع احتمال آن به صورت زیر است:

$$f(x) = P(X = x) = h(x\,; N\,, n\,, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}; \quad x = \max\{0, n+k-N\}, \dots, \min\{n\,, k\}$$

مثال۸ : در یک جعبه، سه توپ سفید و دو توپ سیاه است. دو توپ به تصادف انتخاب می‌کنیم و بدون جایگذاری بیرون می‌کشیم. احتمال اینکه حداقل یک توپ سیاه باشد چقدر است؟

$N = 5 \qquad k = 2 \qquad n = 2$

$$f(x) = P(X = x) = h(x\,;5\,,2\,,2) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{2}{x}\binom{3}{n-x}}{\binom{5}{2}}; \qquad x = 0\,,1\,,2$$

$$P(X \geq 1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} + \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10} + \frac{6}{10} = \frac{7}{10}$$

مثال۹:

$X =$ تعداد پزشکان   گروه ۷ نفری   ۵ پزشک   ۵ مهندس

$\Longrightarrow \qquad N = 10 \qquad n = 7 \qquad k = 5 \qquad x = 2\,,3\,,4\,,5$

➢ **قضیه :** میانگین و واریانس توزیع فوق هندسی عبارت است از:

$$\mu = \frac{nk}{N} \qquad , \qquad \sigma^2 = \frac{N-n}{N-1}.n.\frac{k}{N}.(1-\frac{k}{N})$$

اثبات:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \sum_{x=1}^{n} x \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \sum_{x=1}^{n} x \frac{k!}{x!\,(k-x)!} \frac{\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{k(k-1)!}{(x-1)!\,(k-x)!} \frac{\binom{(N-1)-(k-1)}{(n-1)-(x-1)}}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}} = \frac{nk}{N} \sum_{y=0}^{n-1} \frac{\binom{k-1}{y}\binom{(N-1)-(k-1)}{(n-1)-y}}{\binom{N-1}{n-1}}$$

$$\boxed{y = x-1}$$

$$= \frac{nk}{N} \sum_{y=0}^{n-1} h(y\,; N-1\,, n-1, k-1) = \frac{\boldsymbol{nk}}{\boldsymbol{N}}$$

➢ **مثال۱۰ :** در مثال۸ ، تعداد مورد انتظار توپ‌های سیاه ظاهر شده چقدر است؟ واریانس آن چقدر است؟

$N = 5$ $\quad k = 2$ $\quad n = 2$

$$\mu = \frac{nk}{N} = \frac{2 \times 2}{5} = \mathbf{\frac{4}{5}}$$

$$\sigma^2 = \frac{N-n}{N-1} . n . \frac{k}{N} . \left(1 - \frac{k}{N}\right)$$

$$= \frac{5-2}{5-1} \times 2 \times \frac{2}{5} . \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \mathbf{\frac{9}{25}}$$

➢ ارتباط توزیع دوجمله‌ای و فوق هندسی :

اگر $N \gg n$ ، می‌توان توزیع فوق هندسی را با توزیع دوجمله‌ای تقریب زد.

❋ مقدار احتمال موفقیت با انتخاب عضوی در آزمایش قبل خیلی کم تغییر می‌کند. به طوری که گویا $p = \frac{k}{N}$ تقریبا ثابت است.

$$\mu = \frac{nk}{N} = np \qquad\qquad \sigma^2 = \underbrace{\frac{N-n}{N-1}}_{\approx 1} . n . \underbrace{\frac{k}{N}}_{p} . \underbrace{\left(1 - \frac{k}{N}\right)}_{q} \approx n . p . q$$

➢ **مثال۱۱ :** ۱۵۰ متقاضی کار داریم که ۳۰ نفر آن‌ها خانم هستند. اگر ۱۰ نفر به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه حداقل سه‌تایشان خانم باشند چقدر است؟ تعداد مورد انتظار خانم‌ها در این ده نفر چقدر است؟

$$p = \frac{k}{N} = \frac{30}{150} = 0.2 \qquad n = 10$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \underbrace{\sum_{x=0}^{2} b(x\,; 10\,, 0.2)}_{\text{از جدول توزیع دوجمله‌ای استخراج می‌کنیم}}$$

$$= 1 - 0.6778 = 0.3222$$

$$\mu = np = 10 \times 0.2 = \mathbf{2}$$

$$\sigma_b^2 = npq = 10 \times 0.2 \times 0.8 = 1.6$$

$$\sigma_h^2 = \frac{N-n}{N-1} . n . \frac{k}{N} . \left(1 - \frac{k}{N}\right) = \frac{150 - 10}{150 - 1} \times 10 \times 0.2 \times 0.8 = 1.5$$

توزیع فوق هندسی چند متغیره:

اگر N شی را بتوان به k دسته $A_1 ,A_2 , \dots ,A_k$ به ترتیب با $a_1 ,a_2 , \dots ,a_k$ عضو افراز کرد، آنگاه توزیع احتمال توأم متغیرهای تصادفی $X_1 ,X_2 , \dots ,X_k$ که که تعداد عناصر انتخاب شده از دسته‌های $A_1 ,A_2 , \dots ,A_k$ را در یک نمونه تصادفی n تایی از N شی مورد نظر نشان می‌دهند، توزیع فوق هندسی چند متغیره نام دارد و به صورت زیر است:

$$f(x_1 , x_2 , \dots , x_k \, ; a_1 , a_2 , \dots , a_k , N , n) = \frac{\binom{a_1}{x_1}\binom{a_2}{x_2}\cdots\binom{a_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = N \quad , \quad \sum_{i=1}^{k} x_i = n$$

مثال۱۲ : از یک جعبه با ۵ توپ سفید و ۲ توپ سیاه و ۳ توپ قرمز، ۶ توپ به تصادف و بدون جایگذاری بیرون می‌کشیم. احتمال اینکه سه توپ سفید، یک توپ سیاه و دو توپ قرمز ظاهر شوند چقدر است؟

A_1 : سفید $\quad a_1 = 5 \quad x_1 = 3$

A_2 : سیاه $\quad a_2 = 2 \quad x_2 = 1 \quad N = 10$

A_3 : قرمز $\quad a_3 = 3 \quad x_3 = 2 \quad n = 6$

$$f(3, 1, 2; 5, 2, 3, 10, 6) = \frac{\binom{5}{3}\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{10}{6}} = \frac{2}{7}$$

احتمال اینکه حداکثر یک توپ سفید باشد چقدر است؟

با توجه به افراز موجود، نمی‌شود توپ سفید اصلا ظاهر نشود($n = 6$)

$$P(X_1 \leq 1) = P(X_1 = 0) + P(X_1 = 1)$$

$$= 0 + f(1, 2, 3; 5, 2, 3, 10, 6) = \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{2}\binom{3}{3}}{\binom{10}{6}} = \frac{1}{24}$$

➢ توزیع دوجمله‌ای منفی:

❋ در توزیع دوجمله‌ای به دنبال پیداکردن احتمال x موفقیت در n آزمایش هستیم که n ثابت است. حالا به دنبال پیداکردن احتمال این هستیم که k امین موفقیت در x امین آزمایش رخ دهد. یعنی x آزمایش لازم باشد تا k موفقیت کسب کنیم.

❋ در توزیع دوجمله‌ای یک نمونه n تایی (با n ثابت) داشتیم ولی حالا x تا نمونه‌گیری لازم است تا k موفقیت کسب کنیم. یعنی آنقدر آزمایش را تکرار می‌کنیم تا به k بار موفقیت برسیم.

➢ توزیع دوجمله‌ای منفی (Negative binomial distribution):

اگر متغیر تصادفی X تعداد آزمایش‌های لازم تا وقوع k امین موفقیت در فرآیند برنولی (با احتمال موفقیت p در هر آزمایش) باشد، آنگاه X دارای توزیع دوجمله‌ای منفی به صورت زیر است:

$$f(x) = P(X = x) = b^*(x; k, p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k} \quad ; \quad x = k\,, k+1\,, k+2\,, \ldots$$

➢ **مثال۱۳ :** یک بازاریاب با احتمال ۲۰٪ می‌تواند در هر تماس تلفنی، طرف مقابل را متقاعد به خرید محصول موردنظرش کند. احتمال اینکه این بازاریاب حداکثر با ۴ تماس بتواند ۲ مشتری را جذب کند چقدر است؟

$$b^*(x; 2\,, 0.2) = \binom{x-1}{2-1}\ 0.2^2\ 0.8^{x-2} \qquad ; \qquad x = 2\,, 3\,, 4\,, \ldots$$

$$P(X \le 4) = b^*(2\,; 2\,, 0.2) + b^*(3\,; 2\,, 0.2) + b^*(4\,; 2\,, 0.2)$$

$$= \binom{1}{1}\ 0.2^2\ 0.8^0 + \binom{2}{1}\ 0.2^2\ 0.8^1 + \binom{3}{1}\ 0.2^2\ 0.8^2$$

$$= 0.04 + 0.064 + 0.0768 = \mathbf{0.1808}$$

حالت خاص توزیع دوجمله‌ای منفی : $k = 1$
تعداد آزمایش‌های لازم برای وقوع اولین موفقیت

- **توزیع هندسی (Geometric distribution):**

اگر متغیر تصادفی X را تعداد آزمایش‌های لازم تا وقوع اولین موفقیت در فرآیند برنولی (با احتمال موفقیت p در هر آزمایش) در نظر بگیریم، آنگاه X دارای توزیع احتمال به صورت زیر است:

$$f(x) = P(X = x) = g(x, p) = pq^{x-1} \qquad ; \qquad x = 1, 2, 3, \ldots$$

- **مثال۱۴:** در مثال ۱۳ ، احتمال اینکه بازاریاب بتواند در چهارمین تماس اولین مشتری را جذب نماید چقدر است؟ احتمال اینکه حداکثر با ۳ بار تماس اولین مشتری را جذب کند چقدر است؟

$$P(X = 4) = g(4, 0.2) = 0.2 \times 0.8^3 = 0.1024$$

$$P(X \leq 3) = g(1, 0.2) + g(2, 0.2) + g(3, 0.2) = 0.2 + 0.16 + 0.128 = \mathbf{0.488}$$

➢ **قضیه :** میانگین و واریانس متغیر تصادفی در توزیع هندسی عبارت است از:

$$\mu = \frac{1}{p} \qquad \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

➢ **مثال۱۵:** در مثال ۱۴ ، انتظار داریم تا پس از چند تماس، بازاریاب اولین مشتری خود را جذب کند؟

$$\mu = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.2} = \mathbf{5}$$

❋ توزیع دوجمله‌ای منفی و هندسی در حوزه‌های تعیین استراتژی و کارآمدی سیستم (با در نظر گرفتن هزینه‌ها) کاربرد دارد.

❋ انجام هر آزمایش هزینه دارد. آیا اصلاً سیستم موجود برای ما مناسب است یا خیلی هزینه‌بر می‌باشد؟

فرآیند پوآسن

* تعداد رخداد پیشآمدها را در یک فاصله زمانی، یا یک ناحیه یا یک حجم در نظر می‌گیریم. مانند تعداد تماس‌های در دقیقه، تعداد تصادفات در ماه، تعداد خطاهای تایپی در صفحه، تعداد زدگی‌ها در یک متر مربع از پارچه، …

* تعداد رخداد پیشآمدها در بازه‌های مجزا یا ناحیه‌ای مجزا، از هم مستقلند (فاقد حافظه) مثلا تعداد تصادفات در ماه قبلی و این ماه یا در روز قبل و روز بعد از هم مستقلند. تعداد غلط‌های تایپی در دوخط از یک صفحه مستقلند. تعداد زدگی‌های پارچه در دو توپ مجزا یا در دو متر مربع مجزا از هم مستقلند.

* احتمال رخداد یک پیشآمد در یک فاصله زمانی کوچک یا یک ناحیه کوچک فقط متناسب با طول بازه یا اندازه ناحیه می‌باشد نه تعداد رخداد پیشآمدها در جاهای دیگر(خارج از بازه یا ناحیه مورد نظر)

* با کوچکتر شدن بازه زمانی یا ناحیه مکانی، احتمال عدم رخداد افزایش می‌یابد. یعنی احتمال اینکه پیشآمد در یک فاصله زمانی کوتاه یا در یک ناحیه کوچک بیش از یکبار اتفاق بیافتد ناچیز است.

* اگر X تعداد رخدادها باشد، آن را متغیر تصادفی پوآسن گویند.

➢ توزیع پوآسن (Poisson distribution) :

اگر متغیر تصافی X نمایش دهنده تعداد پیشآمدهای واقع شده در فاصله زمانی مفروض τ و یا ناحیه مکانی مشخص τ باشد، آن را متغیر تصادفی پوآسن گویند و توزیع احتمال آن به صورت زیر است:

$$p(x, \lambda\tau) = \frac{e^{-\lambda\tau}\,(\lambda\tau)^x}{x!} \qquad ; \qquad x = 0\,,1\,,2\,,3\,,\ldots$$

که λ میانگین تعداد پیشآمدها در واحد زمان یا مکان است و $e = 2.7182\ldots$

➢ **مثال۱۶ :** میانگین تعداد تانکرهایی که $\underbrace{\text{هرروز}}^{\text{واحد زمان}}$ به یک بندر وارد می‌شوند $\overbrace{۱۰}^{\lambda}$ دستگاه است. بندر هرروز می‌تواند به ۱۵ تانکر امکانات بدهد. احتمال اینکه در $\underbrace{\text{یک روز}}_{\tau}$ خاص تانکرها مجبور به بازگشت شوند چقدر است؟

$$\lambda\tau = 10 \times 1 = 10$$

$$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15)$$

$$= 1 - \underbrace{\sum_{x=0}^{15} p(x\,;10)}_{\text{با استفاده از جدول مجموع احتمالات پوآسن}} = 1 - 0.9513 = 0.0487$$

$$P(X \leq r) = \sum_{x=0}^{r} p(x\,;\mu) \quad ; \quad \mu = \lambda\tau$$

جدول ۲.A (ادامه) مجموع‌های احتمال پوآسن $\sum_{x=0}^{r} p(x;\mu)$

	μ								
r	10.0	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0	16.0	17.0	18.0
0	0.0000	0.0000	0.0000						
1	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000				
2	0.0028	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000		
3	0.0103	0.0049	0.0023	0.0010	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
4	0.0293	0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001
5	0.0671	0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003
6	0.1301	0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076	0.0040	0.0021	0.0010
7	0.2202	0.1432	0.0895	0.0540	0.0316	0.0180	0.0100	0.0054	0.0029
8	0.3328	0.2320	0.1550	0.0998	0.0621	0.0374	0.0220	0.0126	0.0071
9	0.4579	0.3405	0.2424	0.1658	0.1094	0.0699	0.0433	0.0261	0.0154
10	0.5830	0.4599	0.3472	0.2517	0.1757	0.1185	0.0774	0.0491	0.0304
11	0.6968	0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1848	0.1270	0.0847	0.0549
12	0.7916	0.6887	0.5760	0.4631	0.3585	0.2676	0.1931	0.1350	0.0917
13	0.8645	0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632	0.2745	0.2009	0.1426
14	0.9165	0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4657	0.3675	0.2808	0.2081
15	0.9513	0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681	0.4667	0.3715	0.2867
16	0.9730	0.9441	0.8987	0.8355	0.7559	0.6641	0.5660	0.4677	0.3750
17	0.9857	0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489	0.6593	0.5640	0.4686
18	0.9928	0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195	0.7423	0.6550	0.5622
19	0.9965	0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752	0.8122	0.7363	0.6509
20	0.9984	0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9170	0.8682	0.8055	0.7307
21	0.9993	0.9977	0.9939	0.9859	0.9712	0.9469	0.9108	0.8615	0.7991

➢ **قضیه :** هر دو مقدار میانگین و واریانس توزیع پوآسن $p(x,\lambda\tau)$ برابر است با $\lambda\tau$.

اثبات: قرار می‌دهیم $\mu = \lambda\tau$. داریم:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x\frac{e^{-\mu}\,\mu^{x}}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x\frac{e^{-\mu}\,\mu^{x}}{x(x-1)!} = \mu\sum_{x=1}^{\infty}\frac{e^{-\mu}\,\mu^{x-1}}{(x-1)!} \quad \boxed{y = x-1}$$

$$= \mu\sum_{y=0}^{n}\frac{e^{-\mu}\,\mu^{y}}{y!} = \boldsymbol{\mu}$$

* میانگین توزیع پوآسن در زمان τ ، μ است

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\mu}\,\mu^{x}}{x!} = \sum_{x=2}^{\infty}\frac{x(x-1)e^{-\mu}\,\mu^{x}}{x(x-1)(x-2)!} = \mu^{2}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{e^{-\mu}\,\mu^{x-2}}{(x-2)!} = \quad \boxed{y = x-2}$$

$$= \mu^{2}\sum_{y=0}^{n}\frac{e^{-\mu}\,\mu^{y}}{y!} = \mu^{2} \qquad \Rightarrow \qquad \mu^{2} = E\big(X(X-1)\big) = E(X^{2}-X) = E(X^{2}) - E(X)$$

$$= E(X^{2}) - \mu \qquad \Rightarrow \qquad E(X^{2}) = \mu^{2} + \mu$$

$$\sigma^{2} = E(X^{2}) - \big(E(X)\big)^{2} = \mu^{2} + \mu - \mu^{2} = \boldsymbol{\mu}$$

λ واحد زمانی

➢ **مثال۱۷ :** اگر داروخانه‌ای در هر دو دقیقه یک مراجع داشته باشد، مطلوب است احتمال اینکه بین ساعت 10 تا $10:5'$ حداقل یک مراجع داشته باشد.

$$\lambda = 1$$

$$\tau = \frac{10:5' - 10:0'}{2} = \frac{5'}{2'} = 2.5$$

$$\mu = \lambda\tau = 1 \times 2.5 = \mathbf{2.5}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \overbrace{p(0\,;2.5)}^{\text{با استفاده از جدول مجموع احتمالات پوآسن}}$$

$$= 1 - \frac{e^{-2.5}\,(2.5)^0}{0!} = 1 - e^{-2.5} = 1 - 0.0821 = \mathbf{0.9179}$$

جدول ۲.A مجموع‌های احتمال پوآسن $\sum_{x=0}^{r} p(x;\mu)$

r	μ								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6730	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865
4		1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977
5				1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997
6							1.0000	1.0000	1.0000

r	μ								
	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
1	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404
2	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247
3	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650
4	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405
5	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160
6	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622
7	1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666
8		1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319
9			1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682
10				0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863
11				1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945
12					1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
13						1.0000	0.9999	0.9997	0.9993
14							1.0000	0.9999	0.9998
15								1.0000	0.9999
16									1.0000

➢ توزیع پوآسن و توزیع دوجمله‌ای:

اگر $n \to \infty$ و $p \to 0$ و np ثابت باشد، مثلا $n \geq 30$ و $np \leq 5$
یا $1 \leq np \leq 10$ ، با قرار دادن $\mu = np$ توزیع دوجمله‌ای را با توزیع
$\approx \lambda$ $\approx \tau$
پوآسن تقریب می‌زنیم.
اگر $p \to 1$ ، آنگاه جای موفقیت و شکست را عوض می‌کنیم و باز هم با پوآسن تقریب می‌زنیم.

➢ **قضیه:** فرض کنید X متغیر تصادفی دوجمله‌ای با توزیع احتمال $b(x;n,p)$ است. وقتی اگر $n \to \infty$ و $p \to 0$ و np ثابت بماند، داریم:

$$b(x\,;n\,,p) \;\to\; p(x\,;\,\mu)$$

اثبات:

$$b(x;\ n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^x (1-p)^{n-x}$$

قرار می‌دهیم $p = \frac{\mu}{n}$ ؛ داریم:

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{x!} \left(\frac{\mu}{n}\right)^x \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{n^x} \frac{\mu^x}{x!} \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \ldots \frac{n-x+1}{n} \cdot \frac{\mu^x}{x!} \cdot \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x}$$

$$= (1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\frac{\mu^x}{x!}\left(\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{\mu}}\right)^{-\frac{n}{\mu}}\right)^{-\mu}\left(\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x}\right)$$

$$\underset{\substack{\Uparrow \\ n\to\infty}}{=} (1)\,(1)\ldots(1)\,\frac{\mu^x}{x!}\, e^{-\mu}\,(1) = \frac{e^{-\mu}\,\mu^x}{x!} = p(x\,;\mu)$$

➢ **مثال۱۸ :** فرض کنید دستگاهی در یک کارخانه با احتمال 0.01 قطعات معیوب تولید کند. در یک بار شامل ۷۰۰ قطعه تولید شده توسط این دستگاه، احتمال اینکه کمتر از ۳ قطعه خراب وجود داشته باشد، چقدر است؟

$$\mu = np = 700 \times 0.01 = 7$$

$$P(X<3) = P(X \le 2) = \sum_{x=0}^{2} p(x\,;7) = \overbrace{\sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-7}\,7^{x}}{x!}}^{\text{با استفاده از جدول مجموع احتمالات پوآسن}} = 0.0296$$

واحد مکان

➢ **مثال۱۹ :** یک تایپیست به طور متوسط در هر صفحه ۵ خطا دارد. الف) احتمال اینکه در یک صفحه بیش از ۷ خطا داشته باشد چقدر است؟ ب) اگر یک متن سه‌صفحه‌ای تایپ کند (λ)، احتمال اینکه در دو صفحه از آن هر یک بیش از ۷ خطا باشد چقدر است؟ ج)در تایپ یک مقاله، احتمال اینکه برای اولین بار در صفحه سوم بیش از ۷ خطا داشته باشد چقدر است؟

الف) $\lambda = 5 \qquad \tau = 1 \qquad \mu = \lambda\tau = 5$

$$P(X > 7) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - \sum_{x=0}^{7} p(x\,;5) = 1 - 0.87 = \mathbf{0.13}$$

ب) $p = 0.13 \qquad n = 3 \qquad x = 2$

$$b(2;3\,,0.13) = \binom{3}{2}\ 0.13^2\ 0.87^1 = \mathbf{0.04}$$

ج) $p = 0.13 \qquad x = 3$

$$g(3\,;\ 0.13) = (0.13)(0.87)^2 = \mathbf{0.1}$$