توابعی از متغیرهای تصادفی

فردوس گرجی

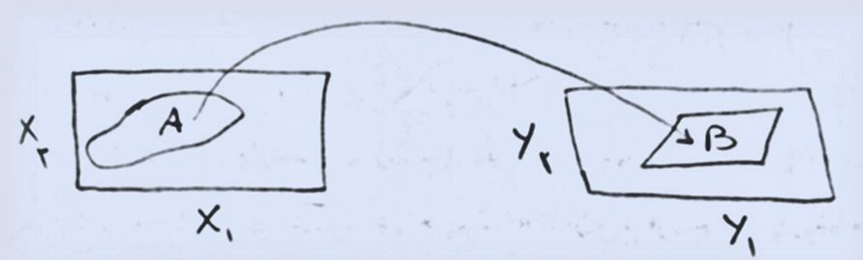
فصل ۷ : توابع متغیرهای تصادفی

$$X\ ;f(x) \qquad \xrightarrow[\text{}]{Y=u(X)} \qquad Y\ ;g(y)=?$$

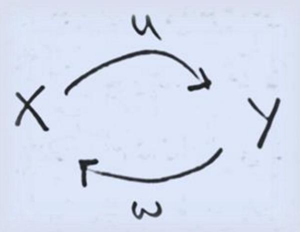
$x\ \in support(X)$ u تبدیل یک به یک $y\ \in support(Y)=?$

$$X_1,X_2\sim f(x_1,x_2) \qquad \xrightarrow{\begin{cases}Y_1=u_1(X_1,X_2)\\ Y_2=u_2(X_1,X_2)\end{cases}} \qquad Y_1,Y_2\sim g(y_1,y_2)=?$$

$(x_1,x_2)\ \in A$ $u_1\ ,u_1$ تبدیل یک به یک $(y_1,y_2)\ \in B=?$



➢ حالت گسسته یک متغیره



$$y = u(x) \xrightarrow{u\ \text{یک به یک}} x = w(y) \qquad \text{(یکتا)}$$

$$g(y) = P(Y = y) = P\Big(\underbrace{w(Y)}_{\text{متغیر تصادفی}} = \underbrace{w(y)}_{\text{عدد}}\Big) = \underbrace{P(X = x)}_{P(X = w(y))} = f(x)$$

$$P(u(X) = y) = P\big(X = u^{-1}(y)\big) = P\big(X = w(y)\big) = f(w(y))$$

قضیه : فرض کنید X متغیر تصادفی گسسته‌ای با توزیع احتمال $f(x)$ است. فرض کنید $Y = u(X)$ تبدیلی یک به یک بین مقادیر X و Y تعریف می‌کند به نحوی که معادله $y = u(x)$ را بتوان به طور منحصر به فردی به صورت x برحسب y ، یعنی $x = w(y)$ حل کرد. آنگاه توزیع احتمال Y عبارت است از:

$$g(y) = f(w(y))$$

مثال ۱ :

$$X \sim Geometric\left(p = \frac{3}{4}\right) \qquad Y = X^2 \qquad g(y) = ?$$

$$x = 1,2,3, \ldots > 0 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{y} = w(y)$$ (در تکیه‌گاه X یک به یک است $u(x) = x^2$)

$$\hookrightarrow y = 1,4,9,25, \ldots$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}\left(\frac{3}{4}\right) \quad ; \quad x = 1,2,3, \ldots$$

$$g(y) = f\big(w(y)\big) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{y}-1}\left(\frac{3}{4}\right) \quad ; \quad y = 1,4,9, \ldots$$

➢ **تمرین ۱ :** فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال زیر است. تابع احتمال $Y = 2X - 1$ را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} {}^{1}\!/_{3} & x = 1,2,3 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$Y = u(X) = 2X - 1 \quad \rightarrow \quad X = \frac{1}{2}(Y+1) = w(Y)$$

$$x = 1,2,3 \quad \rightarrow \quad y = 1,3,5$$

$$\Longrightarrow \; g(y) = \begin{cases} {}^{1}\!/_{3} & y = 1,3,5 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

تمرین ۲ : فرض کنید X متغیر تصادفی دوجمله‌ای با تابع احتمال زیر است. توزیع احتمال $Y = X^2$ را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} \binom{3}{x}\left(\frac{2}{5}\right)^{x}\left(\frac{3}{5}\right)^{3-x} & x = 0,1,2,3 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$x > 0 \quad \rightarrow$ در تکیه‌گاه X یک به یک است $u(X) = X^2 \quad \rightarrow \quad X = \sqrt{Y} = w(Y)$

$$x = 0,1,2,3 \quad \rightarrow \quad y = 0,1,4,9$$

$$g(y) = f\big(w(y)\big) = \begin{cases} \binom{3}{\sqrt{y}}\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{y}}\left(\frac{3}{5}\right)^{3-\sqrt{y}} & y = 0,1,4,9 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

➢ **مثال ۲ :** در تمرین ۲، تابع احتمال $Y = \sqrt{X}$ را بیابید.

$$Y = \sqrt{X} \quad \longrightarrow \quad X = Y^2 = w(Y)$$

$$x = 0,1,2,3 \quad \rightarrow \quad y = 0,1,\sqrt{2},\sqrt{3}$$

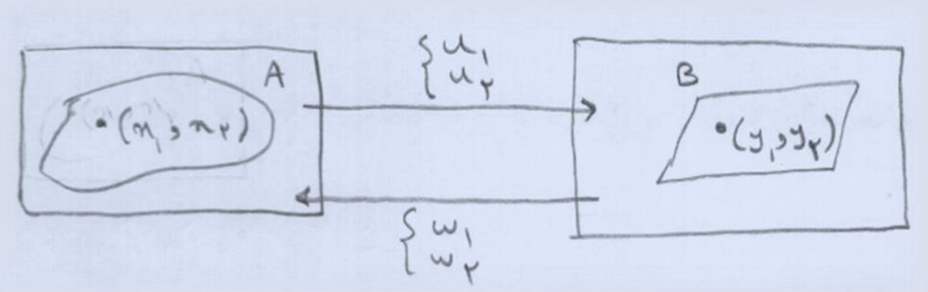
$$g(y) = f\big(w(y)\big) = \begin{cases} \binom{3}{y^2}\left(\frac{2}{5}\right)^{y^2}\left(\frac{3}{5}\right)^{3-y^2} & y = 0,1,\sqrt{2},\sqrt{3} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

➢ حالت گسسته دو متغیره :

$$X_1, X_2 \sim f(x_1, x_2) \xrightarrow[\text{تبدیل یک به یک}]{\begin{cases} Y_1 = u_1(X_1, X_2) \\ Y_2 = u_2(X_1, X_2) \end{cases}} Y_1, Y_2 \sim g(y_1, y_2) = ?$$

$$\begin{cases} Y_1 = u_1(X_1, X_2) \\ Y_2 = u_2(X_1, X_2) \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه معادلات}} \begin{cases} X_1 = w_1(Y_1, Y_2) \\ X_2 = w_2(Y_1, Y_2) \end{cases}$$

(منحصر به فرد است زیرا تبدیل u_1 , u_1 یک به یک است)



$$g(y_1, y_2) = P(Y_1 = y_1\ , Y_2 = y_2) = P\big(X_1 = w_1(y_1, y_2), X_2 = w_2(y_1, y_2)\big)$$

$$= f\big(w_1(Y_1, Y_2)\ , w_2(Y_1, Y_2)\big)$$

قضیه : فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی گسسته‌ای با توزیع احتمال توأم $f(x_1,x_2)$ باشند.

فرض کنید $Y_1 = u_1(X_1,X_2)$ و $Y_2 = u_2(X_1,X_2)$ تبدیلی یک به یک بین نقاط (x_1,x_2) و

(y_1,y_2) تعریف کند به طوری که معادلات $\begin{cases} y_1 = u_1(x_1,x_2) \\ y_2 = u_2(x_1,x_2) \end{cases}$ را بتوان به طور منحصر به فردی

به صورت x_1 و x_2 برحسب y_1 و y_2 یعنی $\begin{cases} x_1 = w_1(y_1,y_2) \\ x_2 = w_2(y_1,y_2) \end{cases}$ حل کرد. آنگاه توزیع احتمال توأم

Y_1 و Y_2 عبارت است از:

$$g(y_1, y_2) = f\left(w_1(y_1, y_2)\, , w_2(y_1, y_2)\right)$$

➢ **مثال ۳ :** فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل پوآسن با پارامترهای μ_1 و μ_2 هستند. توزیع توأم متغیرهای تصادفی $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = X_1 - X_2$ را بیابید.

مستقل $X_1, X_2 \to \; f(x_1, x_2) = f(x_1) f(x_2) = \dfrac{{\mu_1}^{x_1} e^{-\mu_1}}{x_1!} \cdot \dfrac{{\mu_2}^{x_2} e^{-\mu_2}}{x_2!} = \dfrac{{\mu_1}^{x_1} {\mu_2}^{x_2} e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{x_1! \; x_2!}$

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_1 - X_2 \end{cases} \xrightarrow{X_2 = Y_1 - X_1} \begin{cases} X_1 = \dfrac{1}{2}(Y_1 + Y_2) = w_1(Y_1, Y_2) \\ X_2 = \dfrac{1}{2}(Y_1 - Y_2) = w_2(Y_1, Y_2) \end{cases}$$

$$g(y_1, y_2) = f\big(w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)\big) = \frac{{\mu_1}^{\frac{1}{2}(y_1+y_2)} {\mu_2}^{\frac{1}{2}(y_1-y_2)} e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{\left(\frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)! \left(\frac{1}{2}(y_1 - y_2)\right)!}$$

$x_1, x_2 = 0,1,2, \ldots$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0,1,2, \ldots \\ y_2 = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \\ y_1 + y_2 = 2k \\ y_1 \geq y_2 \end{cases}$$

مثال ۴ : فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل پوآسن با پارامترهای μ_1 و μ_2 باشند؛ توزیع متغیر تصادفی $Y = X_1 + X_2$ را بیابید.

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X_1 = Y_1 - Y_2 = w_1(Y_1, Y_2) \\ X_2 = Y_2 = w_2(Y_1, Y_2) \end{cases}$$

$$\text{مستقل } X_1, X_2 \rightarrow f(x_1, x_2) = f(x_1) f(x_2) = \frac{{\mu_1}^{x_1} {\mu_2}^{x_2} e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{x_1!\ x_2!}$$

$$g(y_1, y_2) = f\big(w_1(y_1, y_2)\,, w_2(y_1, y_2)\big) = f(y_1 - y_2, y_2) = \frac{{\mu_1}^{y_1-y_2} {\mu_2}^{y_2} e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{(y_1 - y_2)!\ (y_2)!}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0,1,2, \dots \\ y_2 = 0,1,2, \dots \\ y_1 \geq y_2 \end{cases}$$

ادامه پاسخ در صفحه بعد!!!

ادامه پاسخ مثال ۴:

g(y1,y2); $\begin{cases} y_1 = 0,1,2,\ldots \\ y_2 = 0,1,2,\ldots \\ y_1 \geq y_2 \end{cases}$

$$\Longrightarrow h(y_1) = \sum_{y_2=0}^{y_1} g(y_1, y_2) = \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{{\mu_1}^{y_1-y_2}{\mu_2}^{y_2} e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{(y_1-y_2)!\ (y_2)!} \quad \times \frac{y_1!}{y_1!}$$

$$= \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{y_1!} \underbrace{\sum_{y_2=0}^{y_1} \binom{y_1}{y_2} {\mu_1}^{y_1-y_2}{\mu_2}^{y_2}}_{\text{ضرایب دوجمله‌ای اتحاد } (\mu_1+\mu_2)^{y_1}} = \frac{(\mu_1+\mu_2)^{y_1}\ e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{y_1!}$$

متغیر تصادفی $Y = X_1 + X_2$
توزیع پوآسن با پارامتر $\mu_1 + \mu_2$
دارد

$y_1 = 0,1,2,\ldots$

➢ **تمرین ۳ :** فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی گسسته با توزیع چندجمله‌ای به صورت زیر هستند. توزیع احتمال توأم $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = X_1 - X_2$ را بیابید.

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \binom{2}{x_1, x_2, 2-x_1-x_2}\left(\frac{1}{4}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}\left(\frac{5}{12}\right)^{2-x_1-x_2} & \begin{matrix} x_1 = 0,1,2 \\ x_2 = 0,1,2 \\ x_1 + x_2 \le 2 \end{matrix} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_1 - X_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2) = w_1(Y_1, Y_2) \\ X_2 = \frac{1}{2}(Y_1 - Y_2) = w_2(Y_1, Y_2) \end{cases}$$

$$g(y_1, y_2) = f\big(w_1(y_1, y_2)\,, w_2(y_1, y_2)\big)$$

$$= \binom{2}{\frac{1}{2}(y_1 + y_2)\,, \frac{1}{2}(y_1 - y_2)\,, 2 - y_1}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(y_1+y_2)}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}(y_1-y_2)}\left(\frac{5}{12}\right)^{2-y_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0,1,2 \;\; (x_1 + x_2 \le 2) & y_1 + y_2 = 2k \\ y_2 = -2,-1,0,1,2 & y_1 \ge y_2 \end{cases}$$

➢ **تمرین ۴ :** فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی گسسته با توزیع احتمال توأم زیر هستند. توزیع احتمال $Y = X_1X_2$ چیست؟

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1x_2}{18} & x_1 = 1,2 \\ & x_2 = 1,2,3 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = X_1X_2 \\ Y_2 = X_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X_1 = {}^{Y_1}/_{Y_2} = w_1(Y_1,Y_2) \\ X_2 = Y_2 = w_2(Y_1,Y_2) \end{cases}$$

$$g(y_1,y_2) = f\big(w_1(y_1,y_2)\,,w_2(y_1,y_2)\big) = \frac{1}{18}\left(\frac{y_1}{y_2}\right)y_2 = \frac{1}{18}y_1 \quad ; \quad \begin{cases} y_1 = 1,2,3,4,6 & y_1 = ky_2, k = 1,2 \\ y_2 = 1,2,3 & y_1 \geq y_2 \end{cases}$$

y_2 \ y_1	1	2	3	4	6
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	0	0	0
2	0	$\frac{2}{18}$	0	$\frac{4}{18}$	0
3	0	0	$\frac{3}{18}$	0	$\frac{6}{18}$
$h(y_1)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{6}{18}$

مثال ۱: متغیرهای تصادفی گسسته X_1 و X_2 را با جدول توزیع احتمال توأم زیر در نظر بگیرید. مطلوب است تابع توزیع احتمال $h(X_1 - X_2)$.

x_2 \ x_1	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$
2	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$
3	0	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$
4	0	0	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{25}$

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 - X_2 \\ Y_2 = X_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X_1 = Y_1 + Y_2 = w_1(Y_1, Y_2) \\ X_2 = Y_2 = w_2(Y_1, Y_2) \end{cases}$$

$$\rightarrow g(y_1, y_2) = f\big(w_1(y_1, y_2)\,, w_2(y_1, y_2)\big)$$

$$X_1 \geq X_2 \quad \rightarrow \quad Y_1 \geq 0$$
$$X_1 \leq 5 \quad \rightarrow \quad Y_1 + Y_2 \leq 5$$
$$X_2 \geq 1 \quad \rightarrow \quad Y_2 \geq 1$$

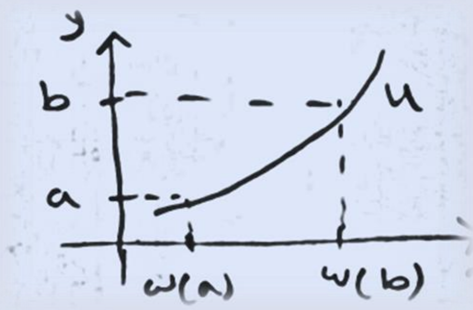
y_2 \ y_1	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$	0
3	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$	0	0
4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$	0	0	0
5	$\frac{1}{25}$	0	0	0	0
$h(x_1 - x_2) = h(y_1)$	$\frac{137}{300}$	$\frac{77}{300}$	$\frac{47}{300}$	$\frac{9}{300}$	$\frac{1}{25}$

حالت پیوسته یک متغیره

$$y = u(x) \xrightarrow{u \text{ یک به یک}} x = w(y)$$

اگر u صعودی باشد:

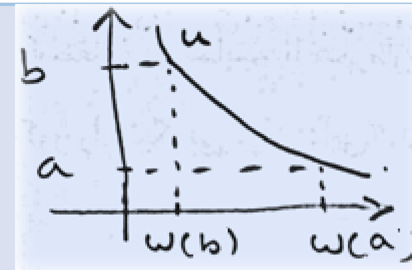
$$\forall\, a, b : P(a < Y < b) \underset{\substack{\uparrow \\ u \text{ صعودی} \to w \text{ صعودی}}}{=} P\big(w(a) < w(Y) < w(b)\big) = P\big(w(a) < X < w(b)\big)$$



$$= \int_{w(a)}^{w(b)} f(x)dx \underset{\substack{\uparrow \\ x = w(y) \\ dx = w'(y)dy \\ x = w(a) \to y = a \\ x = w(b) \to y = b}}{=} \int_a^b f(w(y))\, w'(y)d(y)$$

$$g(y) = f(w(y))\, w'(y) \xleftarrow{\text{برای هر } b,a}$$

اگر u نزولی باشد



داریم:

$$\forall\, a\,, b : P(a < Y < b) \underset{\uparrow}{=} P\big(w(b) < w(Y) < w(a)\big) = P\big(w(b) < X < w(a)\big)$$

نزولی $u \rightarrow$ نزولی w

$$= \int_{w(b)}^{w(a)} f(x)dx \underset{\uparrow}{=} \int_{b}^{a} f(w(y))\, w'(y)dy = -\int_{a}^{b} f(w(y))\, w'(y)dy$$

$$\begin{gathered} x = w(y) \\ dx = w'(y)dy \\ x = w(a) \ \rightarrow y = a \\ x = w(b) \ \rightarrow y = b \end{gathered}$$

$$\int_{a}^{b} f(w(y))\, \big(-w'(y)\big)dy \underset{\uparrow}{=} \int_{a}^{b} f(w(y))\, |w'(y)|dy$$

w نزولی $\rightarrow$ منفی w'

صعودی u → صعودی w → $w'(y) > 0$

نزولی u → نزولی w → $w'(y) < 0$ → $-w'(y) > 0$

قضیه : فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته‌ای با توزیع احتمال $f(x)$ است. فرض کنید $Y = u(X)$ تناظری یک به یک بین مقادیر X و Y تعریف می‌کند به نحوی که معادله $y = u(x)$ را بتوان به طور منحصر به فردی به صورت x برحسب y ، یعنی $x = w(y)$ حل کرد. آنگاه توزیع احتمال Y عبارت است از:

$$g(y) = f\big(w(y)\big)\,|J|$$

که $J = w'(y)$ ژاکوبی نام دارد.

➢ **مثال ۵ :** فرض کنید X متغیری تصادفی با چگالی احتمال زیر است. توزیع $Y = 2X - 3$ را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{12} & 1 < x < 5 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$Y = u(X) = 2X - 3 \;\rightarrow\; X = w(Y) = \frac{1}{2}(Y+3) \;\rightarrow\; w'(Y) = \frac{1}{2} = J$$

$$g(y) = f\big(w(y)\big)\,|\,J\,| = f\left(\frac{1}{2}(y+3)\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{y+3}{48} & -1 < y < 7 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$1 < x < 5 \;\rightarrow\; -1 < 2X - 3 < 7 \;\rightarrow\; -1 < y < 7$$

➢ **تمرین ۵ :** فرض کنید X متغیر تصادفی یکنواخت پیوسته با تابع چگالی زیر باشد. توزیع $Y = -2LnX$ را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$Y = -2LnX \;\; \rightarrow \;\; LnX = -\frac{y}{2} \;\; \rightarrow \;\; X = e^{-\frac{Y}{2}} = w(Y) \;\; \rightarrow \;\; w'(Y) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{Y}{2}} = J$$

$$g(y) = f\big(w(y)\big)\,|\,J\,| = (1)\left| -\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\right| = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$x \rightarrow 0 \;\; \rightarrow \;\; y \rightarrow \infty$

$x \rightarrow 1 \;\; \rightarrow \;\; y \rightarrow 0$

توزیع نمایی با $\beta = 2$

یا توزیع χ^2 با ۲ درجه آزادی

- **تمرین ۶ :** متغیر تصادفی X دارای توزیع احتمال زیر است. توزیع احتمال $Y = 8X^3$ را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$y = u(x) = 8x^3 \rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{y} = w(y) \ \rightarrow \ \ w'(y) = \frac{1}{6\sqrt[3]{y^2}} = J$$

$$g(y) = f\big(w(y)\big)\,|\,J\,| = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{y}\right)\left(\frac{1}{6\sqrt[3]{y^2}}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{6\sqrt[3]{y}} & 0 < y < 8 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$0 < x < 1 \quad \rightarrow \quad 0 < 8x^3 < 8 \quad \rightarrow \quad 0 < y < 8$$

تمرین ۷ : سرعت مولکولی در یک گاز یکنواخت و در حال تعادل متغیر تصادفی V است که توزیع احتمال آن به صورت زیر می‌باشد. (k ثابتی معین و b به دمای مطلق و جرم مولکولی وابسته است). توزیع احتمال انرژی جنبشی مولکول، W را پیدا کنید که $W = \frac{1}{2}mV^2$

$$f(V) = \begin{cases} kV^2 e^{-bV^2} & V > 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

ابتدا k را می‌یابیم. با استفاده از خواص تابع چگالی داریم:

$$1 = \int_0^\infty kV^2 e^{-bV^2} dV = k\int_0^\infty \frac{y}{b} e^{-y} \frac{1}{2\sqrt{b}\sqrt{y}} dy = \frac{k}{2b^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty y^{\frac{1}{2}} e^{-y} dy = \frac{k}{2b^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty y^{\frac{3}{2}-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{k\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2b^{\frac{3}{2}}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} y^{\frac{3}{2}-1} e^{-y} dy}_{1} = \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2b^{\frac{3}{2}}} = \frac{k\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4b^{\frac{3}{2}}}$$

(تغییر متغیر) $y = bV^2 \to dy = 2bVdV \to dV = \frac{dy}{2\sqrt{b}\sqrt{y}}$)

$$\Rightarrow k = \frac{4b^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \implies f(V) = \begin{cases} \frac{4b^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} V^2 e^{-bV^2} & V > 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$W = \frac{1}{2} m V^2 \;\longrightarrow\; V = \sqrt{\frac{2}{m} W} = \sqrt{\frac{2}{m}} W^{\frac{1}{2}} = h(W) \;\longrightarrow\; J = h'(w) = \frac{1}{\sqrt{2m}} W^{-\frac{1}{2}}$$

$$g(w) = f\big(h(w)\big) |\, h'| = \frac{4b^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{2}{m}\right) w\; e^{\frac{-2b}{m} W} \left(\frac{1}{\sqrt{2m}}\right) w^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{2b}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} w^{\frac{1}{2}}\; e^{\frac{-2b}{m} W}$$

$$= \frac{1}{(\frac{m}{2b})^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} w^{\frac{3}{2}-1}\; e^{\frac{-w}{(\frac{m}{2b})}} = Gamma(\alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{m}{2b})$$

$$\boxed{w > 0}$$

تمرین ۸ : سود دلالی در یک معامله اتومبیل جدید برحسب واحدهای ۵۰۰۰ دلاری، با $Y = X^2$ داده شده است که در آن، X متغیری تصادفی با تابع چگالی زیر است. الف) تابع چگالی Y را بیابید. ب) با استفاده از تابع چگالی Y، احتمال این را پیدا کنید که سود دلال در معامله اتومبیل بعدی کمتر از ۵۰۰ دلار باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

الف)

$$Y = u(X) = X^2 \xrightarrow{\text{یک به یک در تکیه‌گاه}} X = \sqrt{Y} = w(Y) \to \ J = w'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$0 < x < 1 \quad \to \quad 0 < y < 1$$

$$g(y) = f\big(w(y)\big)\,|\,J\,| = 2(1-\sqrt{y})(\frac{1}{2\sqrt{y}}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{y}} - 1 & 0 < y < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

ب)

$$P(Y < 0.1) = \int_0^{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - 1\right) dy = (2\sqrt{y} - y)\Big|_0^{0.1} = 2\sqrt{0.1} - 0.1 = 0.532$$

➢ **تمرین ۹ :** مدت زمانی بستری شدن بیمارانی که به نارسایی کلیه دچارند، برحسب روز، متغیر تصادفی $Y = X + 4$ است که در آن X دارای تابع چگالی زیر می‌باشد. الف) تابع چگالی Y را بیابید. ب) با استفاده از تابع چگالی Y ، احتمال این را پیدا کنید که زمان بستری شدن بیماران با این نوع بیماری از ۸ روز بیشتر شود.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{32}{(x+4)^3} & x > 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

الف)

$$Y = u(X) = X + 4 \ \rightarrow X = Y - 4 = w(Y) \rightarrow \ J = w'(y) = 1$$

$$g(y) = f\big(w(y)\big)\,|\,J\,| = \frac{32}{(y-4+4)^3} = \begin{cases} \dfrac{32}{y^3} & y > 4 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$x > 0 \quad \rightarrow \quad y = x + 4 > 4$$

ب)

$$P(Y > 8) = \int_8^\infty g(y)dy = \int_8^\infty \frac{32}{y^3} dy = \frac{-16}{y^2}\Big|_8^\infty = 0 - \frac{-16}{64} = \frac{1}{4}$$

➢ حالت دو متغیره و پیوسته :

قضیه : فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی پیوسته‌ای با توزیع احتمال توأم $f(x_1,x_2)$ باشند. فرض کنید $Y_1 = u_1(X_1,X_2)$ و $Y_2 = u_2(X_1,X_2)$ تبدیلی یک به یک بین نقاط (x_1,x_2) و (y_1,y_2) تعریف کند، به

نحوی که معادلات $\begin{cases} y_1 = u_1(x_1,x_2) \\ y_2 = u_2(x_1,x_2) \end{cases}$ را بتوان به طور منحصر به فردی به صورت x_1 و x_2 برحسب y_1 و y_2

یعنی $\begin{cases} x_1 = w_1(y_1,y_2) \\ x_2 = w_2(y_1,y_2) \end{cases}$ حل کرد. آنگاه توزیع احتمال توأم Y_1 و Y_2 عبارت است از:

$$g(y_1,y_2) = f\big(w_1(y_1,y_2)\,, w_2(y_1,y_2)\big)\,|\,J\,|$$

که در آن ژاکوبی (J) عبارت است از دترمینان دو در دو زیر:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

* $\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}$، مشتق جزئی $x_i = w_i(y_1,y_2)$ نسبت به y_j است

یعنی مشتق تابع w_i نسبت به y_j وقتی y_{3-j} به عنوان عدد ثابتی فرض می‌شود.

➢ **مثال ۲ :** فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی پیوسته با توزیع احتمال زیر باشند. توزیع احتمال توأم متغیرهای تصادفی $Y_1 = {X_1}^2$ و $Y_2 = X_1\, X_2$ را پیدا کنید.

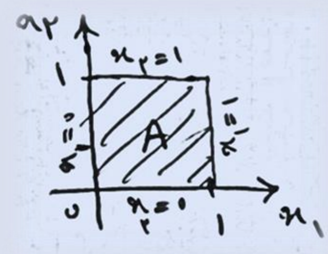
$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2 & \begin{matrix} 0 < x_1 < 1 \\ 0 < x_2 < 1 \end{matrix} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$Y_1 = {X_1}^2$ (در دامنه x_1 یک به یک است)

$$\begin{cases} y_1 = {x_1}^2 \\ y_2 = x_1\, x_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{y_1} \\ x_2 = \dfrac{y_2}{\sqrt{y_1}} \end{cases} \longrightarrow J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{y_1}} & 0 \\ \dfrac{-y_2}{2\sqrt{{y_1}^3}} & \dfrac{1}{\sqrt{y_1}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2y_1}$$

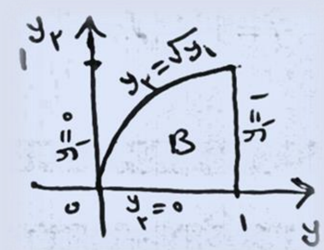
$$\rightarrow g(y_1,y_2) = f\big(w_1(y_1,y_2)\,,w_2(y_1,y_2)\big)\ |J|$$

$$= 4(\sqrt{y_1})\left(\frac{y_2}{\sqrt{y_1}}\right)\left|\frac{1}{2y_1}\right| = \frac{2y_2}{y_1} \quad ; \quad \begin{matrix} 0 < y_1 < 1 \\ 0 < y_2 < \sqrt{y_1} \end{matrix}$$



❋ ناحیه معادل
${y_2}^2 < y_1 < 1$
$0 < y_2 < 1$

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{y_1} \\ x_2 = \dfrac{y_2}{\sqrt{y_1}} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \begin{cases} x_1 > 0 & \rightarrow & y_1 > 0 \\ x_1 < 1 & \rightarrow & y_1 < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 > 0 & \rightarrow & y_2 > 0 \\ x_2 < 1 & \rightarrow & y_2 < \sqrt{y_1} \end{cases} \end{matrix}$$



تمرین ۱۰ : متغیرهای X و Y نشان‌دهنده اوزان کره و تافی جعبه‌های یک کیلویی شکلات است که از کره و تافی و مواد دیگر با چگالی توأم زیر تشکیل شده است. الف) تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Z = X + Y$ را بیابید. ب) با بکار بردن تابع چگالی Z، احتمال این را پیدا کنید که در جعبه‌ای مفروض مجموع کره و تافی حداقل $\frac{1}{2}$ و کمتر از $\frac{3}{4}$ وزن کل را تشکیل دهند.

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy & \begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ x + y \le 1 \end{matrix} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

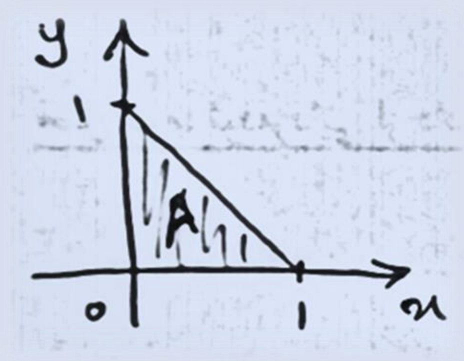
$$\begin{cases} x \ge 0 & \to u \ge 0 \\ x \le 1 & \to u \le 1 \\ y \ge 0 & \to z \ge u \\ y \le 1 & \to z \le 1 + u \\ x + y \le 1 & \to z \le 1 \end{cases}$$

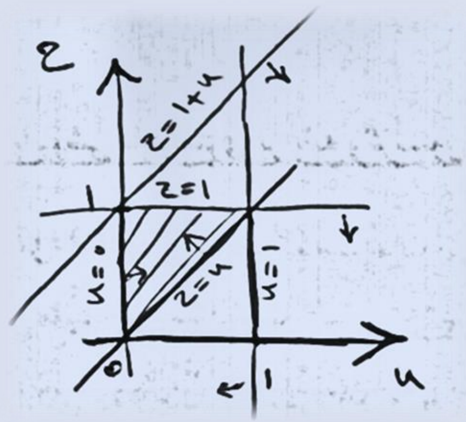
الف) قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} Z = X + Y \\ U = X \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X = U = w_1(u,z) \\ Y = Z - U = w_2(u,z) \end{cases} \longrightarrow J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$g(u,z) = f\big(w_1(u,z), w_2(u,z)\big) \mid J \mid = 24u(z-u) \mid 1 \mid$$

$$= 24u(z-u) \quad ; \quad \begin{matrix} 0 \le u \le 1 \\ u \le z \le 1 \end{matrix} \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} 0 \le z \le 1 \\ 0 \le u \le z \end{matrix} \quad \text{یا} \quad 0 \le u \le z \le 1$$





$$h(z)=\int_0^z 24u(z-u)du=(12u^2z-8u^3)\Big|_0^z=12z^3-8z^3=4z^3\ ;\ 0\le z\le 1$$

ب)

$$P\left(\frac{1}{2}<Z<\frac{3}{4}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}4z^3dz=z^4\Big|_{1/2}^{3/4}=\frac{81}{256}-\frac{16}{256}=\mathbf{\frac{65}{256}}$$

➢ **تمرین ۱۱ :** مقدار نفت سفید موجود در مخزن سوختی برحسب هزار لیتر، در شروع هرروز، متغیر تصادفی Y است که از آن مقدار تصادفی X در طول آن روز به فروش می‌رسد. با فرض اینکه تابع چگالی توأم این متغیرها به صورت زیر باشد، تابع چگالی احتمال مقدار نفت سفیدی را که در پایان روز در مخزن باقی مانده است، پیدا کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & \begin{matrix}0\le x\le y\\ 0\le y\le 1\end{matrix}\\ 0 & o.w\end{cases}$$

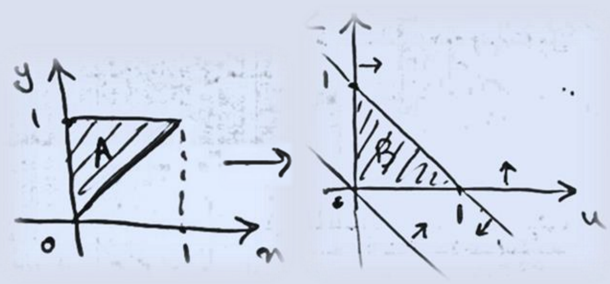
$$\boxed{Z=Y-X}$$

قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}Z=Y-X\\ U=X\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}X=U=w_1(u,z)\\ Y=Z+U=w_2(u,z)\end{cases}\longrightarrow J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$g(u,z)=f\big(w_1(u,z),w_2(u,z)\big)\,|\,J\,|=(2)(1)=2\ ;\quad \begin{matrix}u>0\\ z>0\\ z+u<1\end{matrix}$$

$$\begin{cases}x\ge 0 & \to u\ge 0\\ x\le y & \to z\ge 0\\ y\ge 0 & \to z\ge -u\\ y\le 1 & \to z+u\le 1\end{cases}$$



$$h(z)=\int_0^{1-z}2du=2u\Big|_0^{1-z}=\mathbf{2-2z}\quad ;\quad \mathbf{0<z<1}$$

تمرین ۱۲ : فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل، هر یک با توزیع احتمال $f(x)$ به صورت زیر باشند. نشان دهید که متغیرهای تصادفی $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = \frac{X_1}{X_1+X_2}$ مستقل هستند.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & o.w \end{cases} \xrightarrow[\text{مستقل } X_1 \text{ و } X_2]{} f(x_1, x_2) = f(x_1) f(x_2) = \begin{cases} e^{-(x_1+x_2)} & \begin{matrix} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{matrix} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X_1 = Y_1 Y_2 = w_1(Y_1, Y_2) \\ X_2 = Y_1 - Y_1 Y_2 = w_2(Y_1, Y_2) \end{cases} \longrightarrow J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

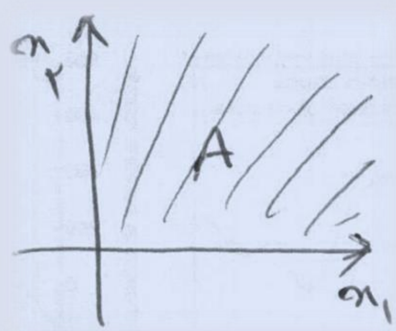
$$= \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 1 - y_2 & -y_1 \end{vmatrix} = -y_1 y_2 - y_1 + y_1 y_2 = -y_1$$

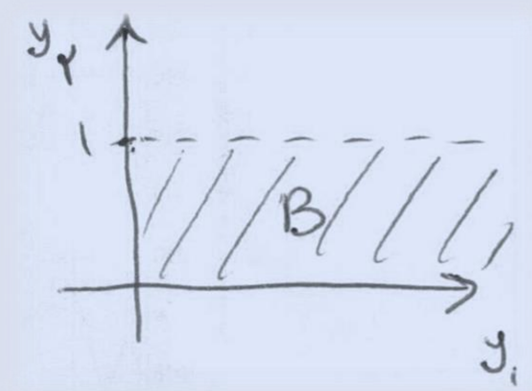
$$\rightarrow g(y_1, y_2) = f\big(w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)\big) \ |J|$$

$$= e^{-(y_1 y_2 + y_1 - y_1 y_2)} \times |-y_1| = y_1 e^{-y_1} \ ; \quad y_1 > 0 \quad , \qquad 0 < y_2 < 1$$

$$\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{matrix} y_1 > 0 \\ y_2 > 0 \end{matrix}$$

$$x_2 > 0 \quad \rightarrow y_2 < 1$$





$$h(y_1) = \int_0^1 y_1 e^{-y_1} dy_2 = y_2 y_1 e^{-y_1} \Big|_0^1 = y_1 e^{-y_1}; \quad 0 < y_1$$

$$t(y_2) = \int_0^\infty y_1 e^{-y_1} dy_1 = -y_1 e^{-y_1} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-y_1} dy_1 = 0 - (-1) = 1; \quad 0 < y_2 < 1$$

$g(y_1, y_2) = h(y_1)\, t(y_2) \implies$ Y_2 و Y_1 مستقل‌اند

- **تمرین ۱۳ :** جریانی I آمپری که مطابق توزیع احتمال $f(i)$ (به صورت زیر) تغییر می‌کند، از مقاومتی R اهمی می‌گذرد. اگر مقاومت به طور مستقل از جریان مطابق توزیع احتمال $g(r)$ تغییر کند، توزیع احتمال توان، $W = I^2R$ را پیدا کنید.

$$f(i) = \begin{cases} 6i(1-i) & 0 < i < 1 \\ 0 & o.w \end{cases} \qquad g(r) = \begin{cases} 2r & 0 < r < 1 \\ 0 & o.w \end{cases} \xrightarrow[\text{مقاومت و جریان ازهم مستقل‌اند}]{} h(i,r) = f(i)g(r) = \begin{cases} 12ri(1-i) & \begin{matrix} 0 < i < 1 \\ 0 < r < 1 \end{matrix} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\begin{cases} W = I^2R \\ Z = R \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} I = \sqrt{\dfrac{W}{Z}} = w_1(W,Z) \\ R = Z = w_2(W,Z) \end{cases} \longrightarrow J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial i}{\partial w} & \dfrac{\partial i}{\partial z} \\ \dfrac{\partial r}{\partial w} & \dfrac{\partial r}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{wz}} & \dfrac{-\sqrt{w}}{2\sqrt{z^3}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{wz}} - 0 = \frac{1}{2\sqrt{wz}}$$

$$t(w,z) = h\big(w_1(w,z), w_2(w,z)\big)\,|\,J\,| \;= 12z\sqrt{\frac{w}{z}}\left(1-\sqrt{\frac{w}{z}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{wz}}\right)$$

$$= 6-6\sqrt{\frac{w}{z}} \;\;;\quad \begin{matrix} 0<z<1 \\ 0<w<z \end{matrix} \qquad\qquad \begin{cases} i,r>0 & \to w>0 \\ i<1 & \to w<z \\ r>0 & \to z>0 \\ r<1 & \to z<1 \end{cases}$$

$$r(w) = \int_w^1 t(w,z)dz = \int_w^1 \left(6-6\sqrt{\frac{w}{z}}\right)dz = \Big(6z-(6\sqrt{w})(6\sqrt{z})\Big)\Big|_w^1$$

$$= 6-12\sqrt{w}-6w+12w = 6w-12\sqrt{w}+6 \;\;;\quad 0<w<1$$