آزمون فرض

فردوس گرجی

فرض آماری

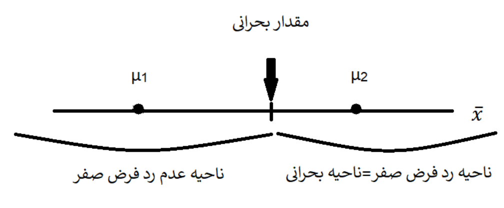
یک حدس یا ادعا یا گزاره درباره یک یا چند جامعه آماری را یک فرض آماری گویند.
درستی یا نادرستی یک فرض آماری به طور مطلق معلوم نمی‌شود، مگر این که تمام جامعه بررسی شود.

آزمون فرض

$$\begin{cases} H_0: \quad \mu = \mu_0 & \text{(Null Hypothesis) فرض صفر} \\ H_a \text{ یا } H_1: \quad \mu = \mu_1 & \text{(Alternative Hypothesis) فرض مقابل} \end{cases}$$

اگر شواهد نمونه دلایل کافی برای رد فرض صفر ارائه دهند، فرض صفر رد می‌شود. وگرنه رد نمی‌شود.
عدم رد فرض صفر به معنای قبول آن نیست. بلکه یعنی دلایل کافی برای رد آن نداریم.
آماره آزمون: آماره‌ای که بر پایه آن تصمیم‌گیری می‌کنیم.

اگر $\mu_0 < \mu_1$:



حالت‌های تصمیم‌گیری در آزمون فرض

	H_0 درست است	H_0 غلط است
عدم رد H_0	تصمیم درست	خطای نوع II
رد H_0	خطای نوع I	تصمیم درست

تعریف

خطای نوع I: رد کردن فرض H_0 وقتی که H_0 واقعا درست است.

سطح معنی‌داری آزمون $\quad P(\text{خطای نوع } I) = P(\text{رد } H_0 | H_0 \text{ درست باشد}) = \alpha$

خطای نوع II: رد نکردن فرض H_0 وقتی که H_0 واقعا غلط است.

$$P(\text{خطای نوع } II) = P(\text{رد } H_1 | H_1 \text{ درست باشد}) = \beta$$

توان آزمون: احتمال رد H_0 وقتی که H_1 واقعا درست است $= 1 - \beta$

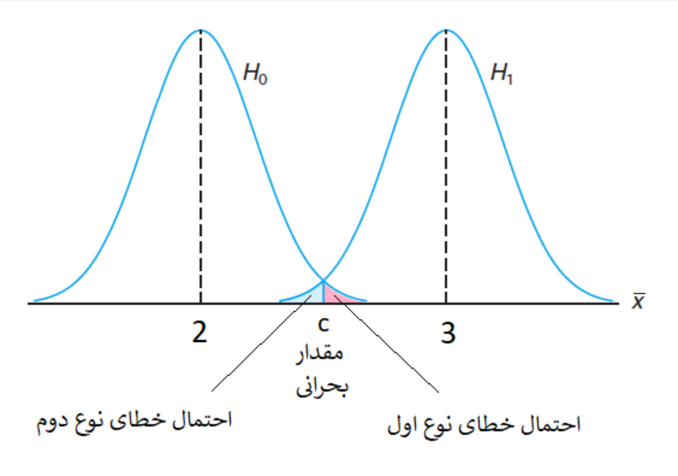
α و β با هم رابطه عکس دارند، یعنی کاهش یکی باعث افزایش دیگری می‌شود و بالعکس؛ اما با افزایش حجم نمونه (n) می‌توان هرد و را با هم کاهش داد.

معمولا برای یک αی مشخص داده شده (۰/۰۵ یا ۰/۰۱) با انتخاب آماره مناسب برای آزمون، به دنبال کاهش β و یا همان بیشترین توان آزمون هستیم.

مثال ۱

$$\begin{cases} H_. : & \mu = ۲ \\ H_۱ : & \mu = ۳ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{x} > c$



ادامه مثال ۱

برای انجام این آزمون فرض داده شده، یک نمونه تصادفی ۹ تایی از جامعه نرمال مورد نظر را بررسی کرده‌ایم. اگر ناحیه بحرانی $\{\bar{X} > \underbrace{۲/۶}_{c}\}$ انتخاب شود و انحراف معیار داده‌ها ۰/۹ باشد، مقدار خطای نوع اول را بیابید. اگر بخواهیم خطای نوع اول ۰/۰۱ باشد، مقدار نقطه بحرانی c چقدر باید باشد؟

راه حل:

$$\alpha = P(\text{خطای نوع } I) = P(H_{\cdot}\text{ رد}|H_{\cdot}\text{ درست باشد}) =$$

$$P(\bar{X} > ۲/۶|\mu = ۲) = P(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{۲/۶-۲}{\frac{۰/۹}{\sqrt{۹}}}) = P(Z > ۲) = ۰/۰۲۲۸$$

$$\alpha = ۰/۰۱ = P(\text{خطای نوع } I) = P(H_{\cdot}\text{ رد}|H_{\cdot}\text{ درست باشد}) =$$

$$P(\bar{X} > c|\mu = ۲) = P(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{c-۲}{\frac{۰/۹}{\sqrt{۹}}}) = P(Z > \underbrace{\frac{c-۲}{۰/۳}}_{z_\alpha = z_{۰/۰۱} = ۲/۳۳})$$

$$\rightarrow \quad c = ۲/۳۳ \times ۰/۳ + ۲ = ۲/۷ \quad \rightarrow \text{ناحیه بحرانی}: \{\bar{X} > ۲/۷\}$$

انواع فرض‌ها

فرض ساده: فرضی که تحت آن توزیع جامعه به طور کامل مشخص شود؛

مانند $\mu = ۳ \quad \sigma^۲ = ۴,$

فرض مرکب: فرضی که تحت آن توزیع جامعه به طور کامل مشخص نشود؛

مانند $\mu \neq ۳$ (فرض دوطرفه) $\quad \sigma^۲ > ۴,$ (فرض یک‌طرفه) $\quad p < \frac{۱}{۲},$ (فرض یک‌طرفه)

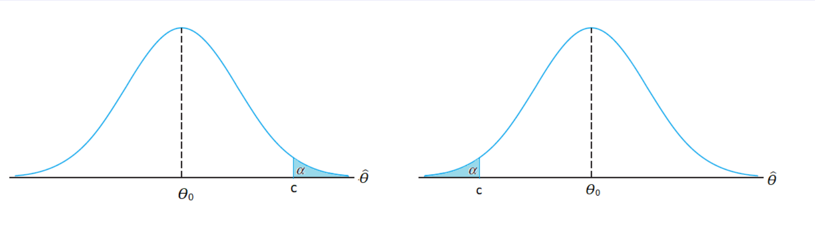
آزمون‌های یک‌دمی (با فرض مقابل ساده یا یک طرفه)

ناحیه بحرانی: $\hat{\theta} < c$

$$\begin{cases} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta < \theta_0 \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\hat{\theta} > c$

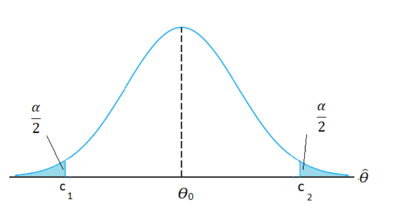
$$\begin{cases} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta > \theta_0 \end{cases}$$



آزمون‌های دودمی (با فرض مقابل دوطرفه)

$$\begin{cases} H_0 : & \theta = \theta_0 \\ H_1 : & \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\hat{\theta} < c_1 \cup \hat{\theta} > c_2$



انتخاب فرضیه‌ها

ابتدا با مطالعه و دقت در مسئله، ادعایی را که می‌خواهیم آزمایش کنیم تعیین می‌کنیم.
اگر ادعا به صورت بیشتر یا کمتر، بهتر یا بدتر و ...باشد، فرض H_0 را معادل با حالت تساوی و فرض H_1 را معادل با ادعا قرار می‌دهیم.
ولی اگر ادعا به صورت بیشتر و مساوی، حداقل، نابیشتر و ... باشد، فرض H_0 را معادل با حالت تساوی و فرض H_1 را در جهت عکس نامساوی در نظر می‌گیریم.
اگر ادعا هیچ جهتی را بیان نکند، فرض H_0 را معادل حالت تساوی و فرض H_1 را معادل با حالت نامساوی در نظر می‌گیریم.
اگر دو فرض ساده (تساوی با دو مقدار مورد نظر) مطرح است، فرض H_0 را معادل با وضعیت موجود و فرض H_1 را معادل با ادعای جدید در نظر می‌گیریم.
حالت تساوی همیشه در H_0 قرار دارد تا بتوان با استفاده از α ناحیه رد را تعیین کرد.
برای تایید قوی یک ادعا، آن را در قالب رد یه فرضیه سامان‌دهی می‌کنیم.

مثال ۲:

فرض کنید معلوم شده است که واکسنی خاص که در بازار موجود است، تنها در ۲۵ درصد مواقع بیش از دو سال نیز تاثیر خود را دارد. حال واکسنی جدید ساخته شده که کمی گران‌تر نیز هست و می‌خواهیم ببینیم که آیا از واکسن قبلی بهتر است یا خیر؟ (سازنده ادعا می‌کند که در بیش از ۲۵ درصد مواقع، اثر واکسن جدید بیش از دو سال می‌ماند.)

$$\begin{cases} H_۰ : & p = \frac{۱}{۴} \\ H_۱ : & p > \frac{۱}{۴} \end{cases} \qquad \text{ناحیه بحرانی: } \hat{p} > c_۱$$

مثال ۳:

تولیدکننده یک نوع غذای کودک ادعا می‌کند که متوسط چربی اشباع شده در هر قوطی غذا از ۱/۵ گرم بیشتر نیست. می‌خواهیم ادعای او را بررسی کنیم. ادعای او تنها در حالتی که میانگین چربی از ۱/۵ بیشتر باشد رد می‌شود وگرنه دلیل کافی برای رد آن نداریم.

$$\begin{cases} H_۰ : & \mu = ۱/۵ \\ H_۱ : & \mu > ۱/۵ \end{cases} \qquad \text{ناحیه بحرانی: } \bar{x} > c_۱$$

با این که فرض صفر حالت تساوی است ولی همه مقادیر غیر از فرض مقابل را نیز شامل می‌شود. یعنی عدم رد $H_۰$ به معنای اینکه مقدار چربی برابر با ۱/۵ باشد نیست.

مثال ۴:

کارخانه‌ای ادعا می‌کند که متوسط قطر نوعی از میلگردهایش ۱۶ میلیمتر است. برای بررسی ادعای او یک نمونه تصادفی از میلگردها را بررسی کرده و باتوجه به میانگین قطر میلگردها در نمونه تصادفی تصمیم‌گیری می‌کنیم.

$$\begin{cases} H_۰ : & \mu = ۱۶ \\ H_۱ : & \mu \neq ۱۶ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{x} > c_۱ \cup \bar{x} < c_۲$

خلاصه روش آزمون فرض

۱- فرض $H_\circ : \theta = \theta_\circ$ را در نظر بگیرید.
۲- فرض مقابل را با توجه به نوع مسئله به یکی از صورت‌های زیر انتخاب کنید:

$$\theta < \theta_\circ \quad \text{یا} \quad \theta > \theta_\circ \quad \text{یا} \quad \theta \neq \theta_\circ$$

۳- سطح معنی‌داری α را تعیین کنید.
۴- آماره آزمون را انتخاب کرده و طبق توزیع آن و فرض ۱، ناحیه بحرانی را تعیین کنید.
۵- مقدار آماره آزمون را از روی نمونه تصادفی حساب کنید.
۶- اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه بحرانی قرار گرفت، فرض صفر را رد کنید، در غیر این صورت آن را رد نکنید.

آزمون فرض میانگین تک نمونه

وقتی واریانس جامعه، $\sigma^۲$، معلوم باشد

می‌خواهیم درباره میانگین جامعه، μ، وقتی $\sigma^۲$ معلوم است، آزمون انجام دهیم.
یک نمونه تصادفی $X_۱, \dots, X_n$ درنظر می‌گیریم و آماره $\bar{X}$ را در آن حساب می‌کنیم. با توجه به نوع آزمون و مقدار $\bar{x}$ تصمیم‌گیری می‌کنیم.
می‌دانیم اگر جامعه نرمال باشد و یا نرمال نباشد ولی حجم نمونه به اندازه کافی بزرگ باشد ($n \geq ۳۰$)، توزیع $\bar{X}$ نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^۲}{n}$ است. بنابراین

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

دارای توزیع نرمال استاندارد است.

آزمون دودمی

$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{x} < a \cup \bar{x} > b$

میخواهیم احتمال خطای نوع اول (I) یعنی احتمال رد فرض صفر با ناحق، مقدار بسیار کوچک α باشد.
بنابراین داریم:

$$P(\bar{X} < a \quad or \quad \bar{X} > b | \mu = \mu_0) = \alpha \quad \rightarrow P(a < \bar{X} < b | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$$

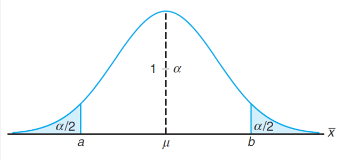
$$P\left(\frac{a-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \underbrace{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}_{Z} < \frac{b-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \quad \rightarrow -\frac{a-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{b-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{\frac{\alpha}{2}}$$

بنابراین ناحیه رد عبارت است از:

$$\bar{x} < a \quad \cup \quad \bar{x} > b$$

$$a = \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad , \quad b = \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$|z| = \left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{\frac{\alpha}{2}}$$



مثال ۵:

کارخانه‌ای محلولی تولید می‌کند که ادعا می کند میانگین PH آن‌ها ۸/۳۰ است. برای بررسی این ادعا (که آیا PH محلول های تولید شده ۸/۳۰ هست یا خیر)، یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی از محلول تولید شده را بررسی می‌کنیم و مقدار متوسط PH=۸/۳۲ به دست می‌آید. اگر بدانیم PH محلول‌ها دارای انحراف معیار ۰/۲ است، در سطح معنی‌داری ۰/۰۵، آیا ادعای کارخانه رد می‌شود؟

راه حل:

$$\begin{cases} H_۰ : & \mu = ۸/۳۰ \\ H_۱ : & \mu \neq ۸/۳۰ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{x} < a \cup \bar{x} > b$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{۸/۳۲ - ۸/۳۰}{\frac{۰/۲}{۱۰}} = ۱$$

$|۱| \not> z_{\frac{\alpha}{۲}} = ۱/۹۶ \quad \rightarrow$ عدم رد فرض صفر

ناحیه رد یا ناحیه بحرانی:

$$\bar{X} < ۸/۳۰ - ۱/۹۶(\frac{۰/۲}{۱۰}) = ۸/۲۶۰۸ \cup \bar{X} > ۸/۳ + ۱/۹۶(\frac{۰/۲}{۱۰}) = ۸/۳۳۹۲$$

$\bar{x} = ۸/۳۲ \notin$ ناحیه رد $\rightarrow$ دلیلی برای رد فرض صفر نداریم.

مثال ۶:

در کارخانه‌ای یک موتور جدید تولید می‌شود که ادعا می‌شود که این موتور با حجم مشخصی بنزین، به طور متوسط ۳۰۰ دقیقه به طور پیوسته روشن می ماند. برای بررسی صحت این ادعا، یک نمونه ۵۰ تایی از موتور ها را تست کرده و میانگین ۲۹۵ دقیقه برای زمان روشن ماندن آن‌ها به دست می‌آید. اگر انحراف معیار زمان روشن بودن همه موتور ها ۱۵ دقیقه باشد، آیا ادعای کارخانه در سطح معنی‌داری ۰/۰۵ رد می‌شود؟

راه حل:

$$\begin{cases} H_۰ : & \mu = ۳۰۰ \\ H_۱ : & \mu \neq ۳۰۰ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{x} < a \cup \bar{x} > b$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{۲۹۵ - ۳۰۰}{\frac{۱۵}{\sqrt{۵۰}}} = ۲/۳۶$$

$|۲/۳۶| > z_{\frac{\alpha}{۲}} \quad \rightarrow$ رد فرض صفر

ناحیه رد یا ناحیه بحرانی: $\quad \bar{X} < a \cup \bar{X} > b$

$$a = ۳۰۰ - ۱/۹۶(\frac{۱۵}{\sqrt{۵۰}}) = ۲۹۵/۸۴ \quad , \quad b > ۳۰۰ + ۱/۹۶(\frac{۱۵}{\sqrt{۵۰}}) = ۳۰۴/۱۶$$

$\bar{x} = ۲۹۵ < a \quad \rightarrow$ فرض صفر رد می‌شود.

آزمون یک‌دمی

ناحیه بحرانی: $\bar{x} > b$

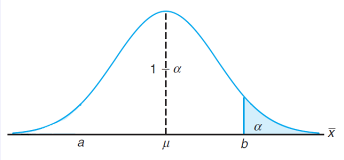
$$\begin{cases} H_۰ : & \mu = \mu_۰ \\ H_۱ : & \mu > \mu_۰ \quad \text{یا} \quad \mu = \mu_۱ (\mu_۱ > \mu_۰) \end{cases}$$

باز هم میخواهیم احتمال خطای نوع اول (I) یعنی احتمال رد فرض صفر با ناحق، مقدار بسیار کوچک α باشد. بنابراین داریم:

$$P(\bar{X} > b | \mu = \mu_۰) = \alpha \quad \rightarrow P(\bar{X} < b | \mu = \mu_۰) = ۱ - \alpha$$

$$P(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu_۰}{\sigma / \sqrt{n}}}_{Z} < \frac{b - \mu_۰}{\sigma / \sqrt{n}}) = ۱ - \alpha \quad \rightarrow \frac{b - \mu_۰}{\sigma / \sqrt{n}} = z_\alpha$$

بنابراین ناحیه رد عبارت است از:



$$\bar{x} > b \quad , \quad b = \mu_۰ + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_۰}{\sigma / \sqrt{n}} > z_\alpha$$

آزمون یک‌دمی

$$\begin{cases} H_۰: & \mu = \mu_۰ \\ H_۱: & \mu < \mu_۰ \quad \text{یا} \quad \mu = \mu_۱ (\mu_۱ < \mu_۰) \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{x} < a$

باز هم میخواهیم احتمال خطای نوع اول (I) یعنی احتمال رد فرض صفر با ناحق، مقدار بسیار کوچک α باشد. بنابراین داریم:

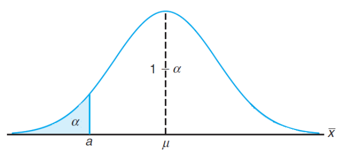
$$P(\bar{X} < a | \mu = \mu_۰) = \alpha \quad \rightarrow P(\bar{X} > a | \mu = \mu_۰) = ۱ - \alpha$$

$$P(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu_۰}{\sigma/\sqrt{n}}}_{Z} > \frac{a - \mu_۰}{\sigma/\sqrt{n}}) = ۱ - \alpha \quad \rightarrow \frac{a - \mu_۰}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{۱-\alpha} = -z_\alpha$$

بنابراین ناحیه رد عبارت است از:

$$\bar{x} < a \quad , \quad a = \mu_۰ - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_۰}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha$$



مثال ۷:

در بررسی قد پسرانی که در محدوده سنی ۴ تا ۶ سال هستند، اطلاعات قبلی نشان می‌دهد که متوسط قد این افراد برابر با ۷۵ سانتی‌متر و انحراف معیار جامعه برای قد این پسران برابر با ۳/۴۱ سانتی‌متر و توزیع آن ها نرمال است. با به کارگیری یک شیوه تغذیه جدید، اعتقاد داریم که میانگین قد پسرها در جامعه بیشتر شده و به ۸۰ سانتی‌متر رسیده است. با انتخاب یک نمونه تصادفی ۲۵ تایی میانگین قد ۸۰/۹۴ سانتی‌متر بدست آمده است. در سطح ۰/۰۵، آیا می‌توان گفت که تغییر محسوسی در میزان قد پسران رخ داده است؟

راه حل:

$$\begin{cases} H_۰ : & \mu = ۷۵ \\ H_۱ : & \mu = ۸۰ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{x} > b$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_۰}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{۸۰/۹ - ۷۵}{\frac{۳/۴۱}{۵}} = ۲/۵۶$$

$$۲/۵۷ > z_\alpha = ۱/۶۴۵ \rightarrow$$

تصمیم به رد فرض صفر می‌گیریم، یعنی تغییر محسوسی در قد پسران داشته‌ایم

$$\bar{x} = ۸۰/۹۴ > b = \mu_۰ + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = ۷۵ + ۱/۶۴۵(\frac{۳/۴۱}{۵}) = ۷۶/۱۲$$

مثال ۸

یک کارخانه تولید ضدیخ خودرو، محصول خود را در بطری‌هایی با ظرفیت دو لیتر وارد بازار می‌کند. حجم ضدیخ‌ها در هر بطری دارای توزیع نرمال با انحراف معیار ۰/۰۵ است. صاحب کارخانه مدعی است که میانگین حجم ضدیخ در هر بطری حداقل ۱/۹۸ لیتر است. برای بررسی ادعای او، یک نمونه صدتایی از بطری‌های ضدیخ تولید شده را انتخاب کرده و با اندازه گیری حجم آن‌ها، مقدار متوسط ۱/۹۷۳ لیتر به دست آمده است.در سطح معنی‌داری ۰/۰۵، آیا ادعای این کارخانه دار رد می‌شود؟ اگر انحراف معیار جامعه ۰/۰۳ باشد، چطور؟

راه حل:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = ۱/۹۸ \\ H_1: & \mu < ۱/۹۸ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{x} < a$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{۱/۹۷۳ - ۱/۹۸}{\frac{۰/۰۵}{۱۰}} = -۱/۴ \qquad -۱/۴ \not< -z_\alpha = -۱/۶۴۵$$

$$a = \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = ۱/۹۸ - ۱/۶۴۵(\frac{۰/۰۵}{۱۰}) = ۱/۹۷۲ \qquad \bar{x} = ۱/۹۷۳ \not< a$$

در این حالت، دلیلی برای رد فرض صفر (ادعا) نداریم.

$$Z = \frac{۱/۹۷۳ - ۱/۹۸}{\frac{۰/۰۳}{۱۰}} = -۲/۳۳ < -z_\alpha = -۱/۶۴۵ \qquad \bar{x} = ۱/۹۷۳ < a' = ۱/۹۷۵$$

در این حالت، فرض صفر رد می‌شود.

آزمون فرض میانگین تک نمونه

وقتی واریانس جامعه، $\sigma^۲$، نامعلوم باشد

حال می‌خواهیم درباره میانگین یک جامعه نرمال، μ، وقتی $\sigma^۲$ نامعلوم است، آزمون انجام دهیم.
یک نمونه تصادفی $X_n ,\dots, X_۱$ درنظر می‌گیریم و آماره‌های $\bar{X}$ و $S^۲$ را در آن حساب می‌کنیم. با توجه به نوع آزمون و مقدار $\bar{x}$ و $S^۲$ تصمیم‌گیری می‌کنیم.
می‌دانیم اگر جامعه نرمال باشد ، آماره $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ دارای توزیع t-استودنت با $n-۱$ درجه آزادی است.

تنکته

اگر توزیع داده‌ها شبیه نرمال (زنگدیس) باشد، می‌توان به طور تقریبی آزمون فوق را به کار برد؛ اگر توزیع داده‌ها نرمال نباشد ولی $n \geq ۳۰$، می‌توان به طور تقریبی از جدول نرمال نیز برای آماره T استفاده کرد.

آزمون دودمی

$$\begin{cases} H_۰: & \mu = \mu_۰ \\ H_۱: & \mu \neq \mu_۰ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{x} < a \cup \bar{x} > b$

میخواهیم احتمال خطای نوع اول (I) یعنی احتمال رد فرض صفر با ناحق، مقدار بسیار کوچک α باشد.
بنابراین داریم:

$$P\left(\bar{X} < a \quad or \quad \bar{X} > b | \mu = \mu_۰\right) = \alpha \quad \rightarrow P\left(a < \bar{X} < b | \mu = \mu_۰\right) = ۱ - \alpha$$

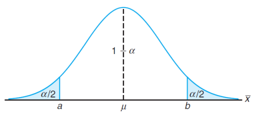
$$P\left(\frac{a-\mu_۰}{S/\sqrt{n}} < \underbrace{\frac{\bar{X}-\mu_۰}{S/\sqrt{n}}}_{T} < \frac{b-\mu_۰}{S/\sqrt{n}} | \mu = \mu_۰\right) = ۱ - \alpha, -\frac{a-\mu_۰}{S/\sqrt{n}} = \frac{b-\mu_۰}{S/\sqrt{n}} = t_{\frac{\alpha}{۲}, n-۱}$$

بنابراین ناحیه رد عبارت است از:

$$\bar{x} < a \quad \cup \quad \bar{x} > b$$

$$a = \mu_۰ - t_{\frac{\alpha}{۲}, n-۱} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad , \quad b = \mu_۰ + t_{\frac{\alpha}{۲}, n-۱} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$|t| = \left|\frac{\bar{X}-\mu_۰}{S/\sqrt{n}}\right| > t_{\frac{\alpha}{۲}, n-۱}$$



مثال ۹

حسابرسی ادعا کرده که میانگین مانده بدهکاران یک موسسه قرض‌الحسنه ۴۳۰ هزار تومان می باشد برای بررسی ادعای او، یک نمونه ۱۰ تایی ازبدهکاران به موسسه انتخاب می شود که میانگین آن ۴۳۳ هزار تومان با انحراف معیار ۲۰ هزار تومان است با توجه به اینکه توزیع این نوع حساب ها نرمال است ادعا را در سطح خطای ۳ درصد بررسی کنید.

راه حل: ناحیه بحرانی: $\bar{x} < a \cup \bar{x} > b$

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 430000 \\ H_1: & \mu \neq 430000 \end{cases}$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{433 - 430}{\frac{20}{\sqrt{10}}} = 0/474$$

$$|0/474| \ngtr t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0/015, 9} = 2/574$$

$$a = 430000 - 2/574\left(\frac{20000}{\sqrt{10}}\right) = 413721$$

$$b = 430000 + 2/574\left(\frac{20000}{\sqrt{10}}\right) = 446279$$

$$\bar{x} = 433000,$$

$\bar{x} \nless a, \bar{x} \ngtr b \quad \rightarrow$ دلیلی برای رد فرض صفر (ادعای مطرح شده) نداریم.

آزمون یک‌دمی

$$\begin{cases} H_. : & \mu = \mu_. \\ H_۱ : & \mu > \mu_. \quad \text{یا} \quad \mu = \mu_۱ (\mu_۱ > \mu_.) \end{cases}$$

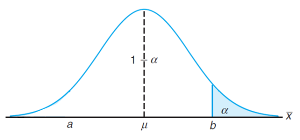
ناحیه بحرانی: $\bar{x} > b$

در سطح معنی‌داری (احتمال خطای نوع I) α برای محاسبه ناحیه رد داریم:

$$P\left(\bar{X} > b | \mu = \mu_. \right) = \alpha \quad \rightarrow P\left(\bar{X} < b | \mu = \mu_. \right) = ۱ - \alpha$$

$$P\left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu_.}{S/\sqrt{n}}}_{T} < \frac{b - \mu_.}{S/\sqrt{n}} \quad | \quad \mu = \mu_. \right) = ۱ - \alpha \qquad \frac{b - \mu_.}{S/\sqrt{n}} = t_{\alpha, n-۱}$$

بنابراین ناحیه رد عبارت است از:



$$\bar{x} > b \quad , \quad b = \mu_. + t_{\alpha, n-۱} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_.}{S/\sqrt{n}} > t_{\alpha, n-۱}$$

آزمون فرض میانگین تک نمونه، (σ^2) نامعلوم

آزمون یک‌دمی

$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu < \mu_0 \quad \text{یا} \quad \mu = \mu_1 (\mu_1 < \mu_0) \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{x} < a$

باز هم در سطح معنی‌داری (احتمال خطای نوع I) α برای ناحیه رد فرض صفر داریم:

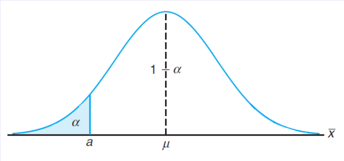
$$P(\bar{X} < a | \mu = \mu_0) = \alpha \quad \rightarrow P\left(\bar{X} > a | \mu = \mu_0\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}}_{T} > \frac{a - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \quad \middle| \quad \mu = \mu_0\right) = 1 - \alpha \qquad \frac{a - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = t_{1-\alpha, n-1} = -t_{\alpha, n-1}$$

بنابراین ناحیه رد عبارت است از:

$$\bar{x} < a \quad , \quad a = \mu_0 - t_{\alpha, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_{\alpha, n-1}$$



مثال ۱۰

معلمی ادعا می‌کند که میانگین سطح نمرات دانش‌آموزان او در یک آزمون استاندارد زبان بیشتر از ۶۰ خواهد بود. برای بررسی این ادعا، یک نمونه تصادفی ده تایی از بین زبان آموزان او انتخاب کرده و با انجام آزمون، نمرات زیر به دست می‌آیند:

۴۰ ،۳۵ ،۲۵ ،۲۰ ،۶۰ ،۷۵ ،۵۰ ،۶۵ ،۶۰،۷۰

با فرض نرمال بودن توزیع نمرات، در سطح ۰/۰۲، آیا ادعای او رد می‌شود؟

راه حل:

$$\begin{cases} H_۰ : & \mu = ۶۰ \\ H_۱ : & \mu > ۶۰ \end{cases} \qquad \text{ناحیه بحرانی: } \bar{x} > b$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_۰}{S/\sqrt{n}} = \frac{۵۰ - ۶۰}{\frac{۱۹/۱۵}{\sqrt{۱۰}}} = -۱/۶۵ \not> t_{\alpha, n-۱} = t_{۰/۰۲,۹} = ۲/۳۹۸$$

$$b = \mu_۰ + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} = ۶۰ + ۲/۳۹۸(\frac{۱۹/۱۵}{\sqrt{۱۰}}) = ۷۴/۵۲$$

$\bar{x} = ۵۰ \not> b \rightarrow$ دلیلی برای رد فرض صفر نداریم (ادعای معلم رد می‌شود)

مثال ۱۱

در یک ارتباط دیجیتال، تعداد بیت‌هایی که به نادرست دریافت می‌شوند، دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۰۰ بیت در دقیقه است. تغییراتی را به منظور کاهش خطای ارتباطی در سیستم سخت‌افزاری اعمال می‌کیم. پس از اعمال تغییرات، با بررسی نمونه تصادفی ۲۵ تایی از سیگنال‌های مخابره شده مقدار خطای متوسط ۹۶ بیت در دقیقه و انحراف معیار ۱۰/۵ بیت به دست می‌آید. در سطح معنی‌داری ۵ درصد، آیا می‌توان گفت که تغییرات سخت‌افزاری موجب بهبود سیستم مخابراتی شده است؟

راه حل:

$$\begin{cases} H_. : & \mu = ۱۰۰ \\ H_۱ : & \mu < ۱۰۰ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{x} < a$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_.}{s/\sqrt{n}} = \frac{۹۶ - ۱۰۰}{\frac{۱۰/۵}{۵}} = -۱/۹۰ < -t_{\alpha, n-۱} = -t_{./۰۵,۲۴} = -۱/۷۱۱$$

$$a = ۱۰۰ - ۱/۷۱۱ \frac{۱۰/۵}{۵} = ۹۶/۴۱$$

$$\bar{x} = ۹۶ < a = ۹۶/۴۱ \quad \to$$

با شواهد موجود، فرض صفر رد می‌شود و لذا تغییرات سبب بهبود سیستم شده است.

آزمون فرض تفاضل میانگین دو نمونه

فرض کنید دو جامعه داشته باشیم.
جامعه‌ی اول دارای میانگین μ_1 و واریانس σ_1^2 باشد.
جامعه‌ی دوم دارای میانگین μ_2 و واریانس σ_2^2 باشد.
یک نمونه‌ی تصادفی n تایی $X_1, \ldots, X_n$ از جامعه‌ی اول انتخاب کرده و میانگین این نمونه را با $\bar{X}$ نمایش می‌دهیم.
یک نمونه‌ی تصادفی m تایی $Y_1, \ldots, Y_m$ از جامعه‌ی دوم انتخاب کرده و میانگین این نمونه را با $\bar{Y}$ نشان می‌دهیم.
فرض کنید نمونه‌گیری از دو جامعه مستقل از یکدیگر باشد.
می‌خواهیم آزمون فرض را برای $\mu_1 - \mu_2$ انجام دهیم.

وقتی واریانس جامعه‌ها، σ_1^2 و σ_2^2، معلوم باشند

حال می‌خواهیم درباره اختلاف میانگین دو جامعه، $\mu_1 - \mu_2$، وقتی σ_1^2 و σ_2^2 معلوم هستند، آزمون انجام دهیم.
نمونه تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ و نمونه تصادفی $Y_1, \ldots, Y_m$ را به ترتیب از جامعه اول و دوم درنظر گرفته و آماره‌های $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ را در آن‌ها حساب می‌کنیم.
می‌دانیم اگر جامعه‌ها نرمال باشند و یا نرمال نباشند ولی حجم دو نمونه به اندازه کافی بزرگ باشد ($n, m \geq 30$)، توزیع $\bar{X} - \bar{Y}$ نرمال با میانگین $\mu_1 - \mu_2$ و واریانس $\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}$ است. بنابراین آماره آزمون به صورت

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}$$

است که توزیع نرمال استاندارد دارد.

آزمون دودمی

$$\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 \neq d_0 \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{x} - \bar{y} < a \cup \bar{x} - \bar{y} > b$

در سطح معنی‌داری (احتمال خطای نوع I) α برای ناحیه رد داریم:

$$P\left(\bar{x} - \bar{y} < a \cup \bar{x} - \bar{y} > b | \mu_1 - \mu_2 = d_0\right) = \alpha \quad \rightarrow$$

$$P\left(a < \bar{x} - \bar{y} < b | \mu_1 - \mu_2 = d_0\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{a - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} < \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} < \frac{b - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \quad | \quad \mu_1 - \mu_2 = d_0\right) = 1 - \alpha$$

$$-\frac{a - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} = \frac{b - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} = z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$|z| = \left|\frac{\bar{X} - \bar{Y} - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}\right| > z_{\frac{\alpha}{2}}$$

بنابراین ناحیه رد عبارت است از:

$$\bar{x} - \bar{y} < a \quad \cup \quad \bar{x} - \bar{y} > b$$

$$a = d_0 - z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right) \quad , \quad b = d_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right)$$

مثال ۱۲

فرض کنید می‌خواهیم میانگین سوخت مصرفی دو نوع اتومبیل را با یکدیگر مقایسه کنیم و ببینیم که آیا مصرف یکسانی دارند یا خیر. به این منظور دو نمونه تصادفی ۱۰ تایی از هر یک از انواع خودرو را انتخاب کرده و میزان مصرف سوخت آن‌ها را در ۱۰۰۰ کیلومتر حساب می‌کنیم. مقادیر $\bar{X} = ۷۱/۲$ و $\bar{Y} = ۶۹/۵$ به ترتیب برای خودوری نوع ۱ و خودروی نوع ۲ به دست آمده‌اند. اگر واریانس میزان سوخت مصرفی در هر هزار کیلومتر برای خودروی نوع اول و دوم به ترتیب ۵/۵ و ۶/۶ بوده و توزیع مصرف سوخت نرمال باشد، آیا می‌توان در سطح ۰/۰۵، ادعا کرد که میزان مصرف دو خودرو بایکدیگر برابر است؟

راه حل:

$$\begin{cases} H_. : & \mu_۱ - \mu_۲ = ۰ \\ H_۱ : & \mu_۱ - \mu_۲ \neq ۰ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{x} - \bar{y} < a \cup \bar{x} - \bar{y} > b$

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - d.}{\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n} + \frac{\sigma_۲^۲}{m}}} = \frac{(۷۱/۲ - ۶۹/۵) - ۰}{\sqrt{\frac{۵/۵}{۱۰} + \frac{۶/۶}{۱۰}}} = ۱/۵۵ \rightarrow |Z| = |۱/۵۵| \not> z_{\frac{\alpha}{۲}} = ۱/۹۶$$

$$a = ۰ - ۱/۹۶(\sqrt{\frac{۶/۶}{۱۰} + \frac{۵/۵}{۱۰}}) = -۲/۱۵۶ \quad b = ۰ + ۱/۹۶(\sqrt{\frac{۶/۶}{۱۰} + \frac{۵/۵}{۱۰}}) = ۲/۱۵۶$$

$$\bar{x} - \bar{y} = ۱/۷ \not< a, \bar{x} - \bar{y} = ۱/۷ \not> b$$

بنابراین دلیل کافی برای رد ادعا نداریم.

آزمون یک‌دمی

$$\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 > d_0 \quad \text{یا} \quad \mu_1 - \mu_2 = d_1 (d_1 > d_0) \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{x} - \bar{y} > b$

در سطح معنی‌داری (احتمال خطای نوع I) α برای ناحیه بحرانی داریم:

$$P\left(\bar{X} - \bar{Y} > b | \mu_1 - \mu_2 = d_0\right) = \alpha \quad \rightarrow P\left(\bar{X} - \bar{Y} < b | \mu_1 - \mu_2 = d_0\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} < \frac{b - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \quad | \quad \mu_1 - \mu_2 = d_0\right) = 1 - \alpha \quad \frac{b - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} = z_\alpha$$

بنابراین ناحیه رد عبارت است از:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} > z_\alpha$$

$$\bar{x} - \bar{y} > b \quad , \quad b = d_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}(\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}})$$

مثال ۱۳

کارخانه‌ای ادعا می‌کند که طول عمر لامپ‌هایی که تولید می‌کند به طور متوسط بیش از ۵ ماه از طول عمر لامپ‌های تولید شده توسط کارخانه رقیب بیشتر است. برای بررسی صحت ادعای او، یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی از کارخانه او (شماره ۱) و یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تای از لامپ‌های کارخانه رقیب (شماره ۲) انتخاب نموده و میانگین طول عمر لامپ‌ها را در هر نمونه محاسبه می‌کنیم. مقادیر $\bar{x}_۱ = ۲۴$ و $\bar{x}_۲ = ۱۸$ ماه به دست می‌آیند. اگر واریانس طول عمر لامپ‌ها در دوکارخانه، به ترتیب ۴ و ۵ باشد، آیا می‌توان در سطح ۰/۰۵ ادعای او را پذیرفت؟

راه حل:

$$\begin{cases} H_۰ : & \mu_۱ - \mu_۲ = ۵ \\ H_۱ : & \mu_۱ - \mu_۲ > ۵ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{x} - \bar{y} > b$

$$Z = \frac{(\bar{X}_۱ - \bar{X}_۲) - d_۰}{\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n} + \frac{\sigma_۲^۲}{m}}} = \frac{(۲۴ - ۱۸) - ۵}{\sqrt{\frac{۴}{۱۰۰} + \frac{۵}{۱۰۰}}} = ۳/۳۳ > z_\alpha = ۱/۶۴۵$$

$$\bar{x} - \bar{y} = ۶ > b = ۵ + ۱/۶۴۵(\sqrt{\frac{۴}{۱۰۰} + \frac{۵}{۱۰۰}}) = ۵/۴۹$$

بنابراین فرض صفر رد می‌شود و ادعای کارخانه اول را می‌پذیریم.

وقتی واریانس جامعه‌ها نامعلوم ولی مساوی باشند، $\sigma = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

برای آزمون فرض اختلاف میانگین دو جامعه، $\mu_1 - \mu_2$، وقتی σ_1^2 و σ_2^2 نامعلوم ولی مساوی هستند، $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$، نمونه تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ و نمونه تصادفی $Y_1, \ldots, Y_m$ را به ترتیب از جامعه اول و دوم درنظر می‌گیریم. آماره‌های $\bar{X}$ و S_1^2 را که به ترتیب میانگین و واریانس نمونه اول هستند، و نیز آماره‌های $\bar{Y}$ و S_2^2 را که به ترتیب میانگین و واریانس نمونه دوم هستند محاسبه می‌کنیم.

می‌دانیم اگر جامعه‌ها نرمال باشند، آماره

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

دارای توزیع t-استودنت با $n + m - 2$ درجه آزادی است که در آن

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}.$$

این آزمون را اصطلاحا، آزمون t ادغام شده دونمونه‌ای گویند.

آزمون فرض تفاضل میانگین‌ها، $\mu_1 - \mu_2$ ($\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ نامعلوم)

آزمون دودمی

$$\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 \neq d_0 \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{x} - \bar{y} < a \cup \bar{x} - \bar{y} > b$

در سطح معنی‌داری (احتمال خطای نوع I) α برای ناحیه بحرانی داریم:

$$P\left(\bar{x} - \bar{y} < a \cup \bar{x} - \bar{y} > b | \mu_1 - \mu_2 = d_0\right) = \alpha \rightarrow$$

$$P\left(a < \bar{X} - \bar{Y} < b | \mu_1 - \mu_2 = d_0\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{a - d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} < \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} < \frac{b - d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \quad | \quad \mu_1 - \mu_2 = d_0\right) = 1 - \alpha$$

$$-\frac{a - d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = \frac{b - d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = t_{\frac{\alpha}{2}, n+m-2}$$

$$|T| = \left|\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}\right| > t_{\frac{\alpha}{2}, n+m-2}$$

بنابراین ناحیه رد عبارت است از:

$$\bar{x} - \bar{y} < a \quad \cup \quad \bar{x} - \bar{y} > b$$

$$a = d_0 - t_{\frac{\alpha}{2}, n+m-2}\left(S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right) \quad , \quad b = d_0 + t_{\frac{\alpha}{2}, n+m-2}\left(S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right)$$

مثال ۱۴

یک پژوهشگر پزشکی ادعا می‌کند که که میزان فشارخون در آقایان سالمند به طور متوسط دو واحد از فشارخون خانم‌های سالمند بیشتر است. برای بررسی ادعای او، دو نمونه تصادفی ۱۶ نفری از آقایان و خانم‌های سالمند انتخاب کرده و فشار خون آن‌ها را اندازه گیری می‌کنیم. مقادیر $\bar{X}_۱ = ۱۴/۱$ و $S_۱^۲ = ۰/۸$ برای آقایان و $\bar{X}_۲ = ۱۲/۵$ و $S_۲^۲ = ۱$ برای خانم‌ها به دست آمده است. با فرض نرمال بودن توزیع فشار خون و برابری واریانس‌ها در هر دو جامعه، آیا می‌توان در سطح ۵ درصد، ادعای پژوهشگر را رد کرد؟

راه حل:

$$\begin{cases} H_۰ : & \mu_۱ - \mu_۲ = ۲ \\ H_۱ : & \mu_۱ - \mu_۲ \neq ۲ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{x} - \bar{y} < a \cup \bar{x} - \bar{y} > b$

$$T = \frac{(\bar{X}_۱ - \bar{X}_۲) - d_۰}{S_p\sqrt{\frac{۱}{n} + \frac{۱}{m}}} = \frac{۱/۶ - ۲}{(۰/۹۵)(۰/۳۷)} = -۱/۱۴$$

$$|T| = |-۱/۱۴| \not> t_{\frac{\alpha}{۲}, n+m-۲} = T_{۰/۰۲۵,۳۰} = ۲/۰۴۲$$

$$\bar{x}_۱ - \bar{x}_۲ = ۱/۶ \not< a = ۲ - ۲/۰۴۲(۰/۹۵ \times ۰/۳۷) = ۱/۲۸$$

$$\bar{x}_۱ - \bar{x}_۲ = ۱/۶ \not> b = ۲ + ۲/۰۴۲(۰/۹۵ \times ۰/۳۷) = ۲/۷۲$$

دلیل کافی برای رد ادعای پژوهشگر نداریم.

آزمون یک‌دمی

$$\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 > d_0 \quad \text{یا} \quad \mu_1 - \mu_2 = d_1 (d_1 > d_0) \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{x} - \bar{y} > b$

در سطح معنی‌داری (احتمال خطای نوع I) α برای ناحیه بحرانی (رد) داریم:

$$P\left(\bar{X} - \bar{Y} > b | \mu_1 - \mu_2 = d_0\right) = \alpha \quad \to P\left(\bar{X} - \bar{Y} < b | \mu_1 - \mu_2 = d_0\right) = \alpha$$

$$P\left(\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} < \frac{b - d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} | \mu_1 - \mu_2 = d_0\right) = 1 - \alpha$$

$$\frac{b - d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = t_{\alpha, n+m-2}$$

بنابراین ناحیه رد عبارت است از:

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} > t_{\alpha, n+m-2}$$

$$\bar{x} - \bar{y} > b \quad , \quad b = d_0 + t_{\alpha, n+m-2}\left(S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right)$$

مثال ۱۵

برای مقایسه میزان مس موجود در دو نوع خاک، یک نمونه ۱۳ تایی از واحدهای حجمی از خاک نوع اول و یک نمونه ۱۵ تایی از واحدهای حجمی از خاک نوع دوم را بررسی می کنیم. مقادیر $\bar{x}_۱ = ۴/۵$ و $s_۱^۲ = ۰/۳$ گرم به ترتیب برای میانگین و واریانس مقدار مس در خاک نوع اول و مقادیر $\bar{x}_۲ = ۸$ و $s_۲^۲ = ۰/۴$ گرم برای میانگین و واریانس مقدار مس در خاک نوع دوم به دست آمده‌اند. آیا در سطح معنی‌داری ۰/۰۵، می‌توان گفت که متوسط مقدار مس در خاک نوع دوم بیش از سه گرم بیشتر از متوسط مقدار مس در خاک نوع اول است؟ (فرض کنید مقدار مس در دونوع خاک توزیع نرمال با واریانس‌های برابر داشته باشد.)

راه حل:

$$\begin{cases} H_۰ : & \mu_۲ - \mu_۱ = ۳ \\ H_۱ : & \mu_۲ - \mu_۱ > ۳ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{x}_۲ - \bar{x}_۱ > b$

$$t > t_\alpha$$

$$s_p = \sqrt{\frac{(۱۳-۱)(۰/۳)+(۱۵-۱)(۰/۴)}{۱۳+۱۵-۲}} = ۰/۵۹, \quad \alpha = ۰/۰۵, n+m-۲ = ۲۶$$

$$T = \frac{(\bar{x}_۲ - \bar{x}_۱) - d_۰}{s_p\sqrt{\frac{۱}{n}+\frac{۱}{m}}} = \frac{(۸-۴/۵)-۳}{(۰/۵۹)(۰/۳۸)} = ۲/۲۳ > t_{\alpha,n+m-۲} = ۱/۷۰۶)$$

$$b = ۳ + ۱/۷۰۶(۰/۵۹ \times ۰/۳۸) = ۳/۳۸ \quad \bar{x}_۲ - \bar{x}_۱ = ۳/۵ > b$$

فرض صفر رد می‌شود و ادعا را می‌پذیریم.

آزمون فرض تفاضل میانگین‌ها در مشاهدات جفت شده

مشاهدات جفت شده

فرض کنید دو نمونه تصادفی داریم (که می‌توانند از یک یا دوجامعه باشند). ممکن است واریانس یکسان نداشته باشند. اعضای دو نمونه به صورت جفت-جفت به هم وابسته هستند. می‌خواهیم درباره تفاضل میانگین‌ها در دو نمونه آزمون انجام دهیم.

مثال: وزن افراد قبل و بعد از یک رژیم غذایی. وضعیت بیماران قبل و بعد از یک دوره درمانی، نمره دانش‌آموزان قبل و بعد از گذراندن یک دوره آموزشی، نمره افراد با ضریب هوشی یکسان با دو نوع متد آموزشی متفاوت

تفاضل میانگین‌ها در مشاهدات جفت شده: $d_۱, d_۲, \ldots, d_n$

می‌دانیم که این مقادیر از جامعه تفاضل‌ها با میانگین $\mu_D = \mu_۱ - \mu_۲$ و واریانس $\sigma^۲_D = \sigma^۲_{X-Y} = \sigma^۲_X + \sigma^۲_Y - ۲\sigma_{X,Y}$ هستند و فرض می‌کنیم توزیع نرمال دارند.

آماره آزمون به صورت

$$T = \frac{\bar{D} - d.}{s_D/\sqrt{n}}$$

است که دارای توزیع t با $n - ۱$ درجه آزادی می‌باشد.

آزمون دودمی

$$\begin{cases} H_۰: & \mu_D = \mu_۱ - \mu_۲ = d_۰ \\ H_۱: & \mu_D = \mu_۱ - \mu_۲ \neq d_۰ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{D} < a \cup \bar{D} > b$

$$T < -t_{\frac{\alpha}{۲}} \cup T > t_{\frac{\alpha}{۲}}$$

در سطح معنی‌داری (احتمال خطای نوع I) α برای داریم:

$$P\left(\bar{D} < a \quad or \quad \bar{D} > b | \mu_D = d_۰\right) = \alpha \rightarrow P\left(a < \bar{D} < b | \mu_D = d_۰\right) = ۱ - \alpha$$

$$P\left(\frac{a - d_۰}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}} < \underbrace{\frac{\bar{D} - d_۰}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}}}_{T} < \frac{b - d_۰}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}}\right) = ۱ - \alpha \quad \rightarrow \quad -\frac{a - d_۰}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}} = \frac{b - d_۰}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}} = t_{\frac{\alpha}{۲}, n-۱}$$

بنابراین ناحیه رد عبارت است از:

$$|T| = \left|\frac{\bar{D} - d_۰}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}}\right| > t_{\frac{\alpha}{۲}, n-۱}$$

$$\bar{D} < a \quad \cup \quad \bar{D} > b$$

$$a = d_۰ - t_{\frac{\alpha}{۲}, n-۱} \frac{s_D}{\sqrt{n}} \quad , \quad b = d_۰ + t_{\frac{\alpha}{۲}, n-۱} \frac{s_D}{\sqrt{n}}$$

مثال ۱۶

برای بررسی اثر یک کاتالیزور در تصفیه یک محلول، یک نمونه دوازده تایی از محلول را انتخاب نموده و میزان غلظت ناخالصی را در آن‌ها، قبل و بعد از استفاده از کاتالیزور اندازه گیری می‌کنیم. مقادیر تفاضل (غلظت ثانویه-غلظت اولیه) به صورت زیر به دست آمده‌اند. در صورت نرمال بودن توزیع داده‌ها و با خطای ۰/۰۱، آیا می‌توان گفت که اضافه کردن کاتالیزور در تغییر غلظت ناخالصی‌ها موثر بوده است؟

$$d_i = -۵, -۵, -۷, ۰, -۶, -۵, -۳, -۱۰, -۵, -۸, -۸, -۶$$

راه حل:

$$\begin{cases} H_0 : & \mu_D = \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 : & \mu_D = \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{D} < a \cup \bar{D} > b$

$$T < -t_{\frac{\alpha}{2}} \cup T > t_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$T = \frac{\bar{D} - d_0}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}} = \frac{-۵/۶۷}{\frac{۲/۵۷}{\sqrt{۱۲}}} = -۷/۶۴$$

$$|T| = |-۷/۶۴| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0/005, 11} = ۳/۱۰۶$$

$$a = d_0 - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s_D}{\sqrt{n}} = 0 - ۳/۱۰۶ (\frac{۲/۵۷}{\sqrt{۱۲}}) = -۲/۳$$

$$b = d_0 + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s_D}{\sqrt{n}} = 0 + ۳/۱۰۶ (\frac{۲/۵۷}{\sqrt{۱۲}}) = ۲/۳$$

بنابراین فرض صفر رد می‌شود (استفاده از کاتالیزور در تغییر غلظت ناخالصی موثر است). $\bar{d} = -۵/۶۷ < a$

آزمون یک‌دمی

$$\begin{cases} H_0: & \mu_D = \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1: & \mu_D = \mu_1 - \mu_2 > d_0 \\ & (\text{یا } \mu_D = \mu_1 - \mu_2 = d_1; d_1 > d_0) \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{D} > b$

$T > t_\alpha$

در سطح معنی‌داری (احتمال خطای نوع I) α داریم:

$$P\left(\bar{D} > b | \mu_D = d_0\right) = \alpha \quad \rightarrow \quad P\left(\bar{D} < b | \mu_D = d_0\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\underbrace{\frac{\bar{D} - d_0}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}}}_{T} < \frac{b - d_0}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}}\right) = 1 - \alpha \quad \rightarrow \quad \frac{b - d_0}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}} = t_{\alpha, n-1}$$

بنابراین ناحیه رد عبارت است از:

$$\frac{\bar{D} - d_0}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}} > t_{\alpha, n-1}$$

$$\bar{D} > b \quad , \quad b = d_0 + t_\alpha \frac{s_D}{\sqrt{n}}$$

مثال ۱۷

پزشکی می‌خواهد بداند که آیا قرص معینی باعث کاهش فشار خون بیماران می‌شود یا خیر. به این منظور، ۱۵ خانم را انتخاب کرده و فشار خون آن‌ها را ثبت می‌نماید. پس از مصرف منظم قرص موردنظر در یک دوره درمانی شش ماهه، پزشک دوباره فشار خون افراد را ثبت می‌نماید. با توجه به نتایج حاصل که در جدول زیر ثبت شده‌اند و با فرض نرمال بودن توزیع داده‌ها، آیا فرضیه پزشک در سطح ۰/۰۵ رد می‌شود؟

افراد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
قبل	۷۰	۸۰	۷۲	۷۶	۷۶	۷۶	۷۲	۷۸	۸۲	۶۴	۷۴	۹۲	۷۴	۶۸	۸۴
بعد	۶۸	۷۲	۶۲	۷۰	۵۸	۶۶	۶۸	۵۲	۶۴	۷۲	۷۴	۶۰	۷۴	۷۲	۷۴
d_i	۲	۸	۱۰	۶	۱۸	۱۰	۴	۲۶	۱۸	$-$۸	۰	۳۲	۰	$-$۴	۱۰

راه حل:

$$\begin{cases} H_۰ : & d = \mu_۱ - \mu_۲ = ۰ \\ H_۱ : & d = \mu_۱ - \mu_۲ > ۰ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{d} > b$

$T > t_\alpha$

$$T = \frac{\bar{D} - d_۰}{s_D/\sqrt{n}} = \frac{۸/۸ - ۰}{\frac{۱۰/۹۸}{\sqrt{۱۵}}} = ۳/۱ > t_{\alpha,n-۱} = t_{۰/۰۵,۱۴} = ۱/۷۶۱$$

$$b = ۰ + ۱/۷۶۱(\frac{۱۰/۹۸}{\sqrt{۱۵}}) = ۳/۸۷ \quad \bar{d} = ۸/۸ > b$$

بنابراین فرض صفر رد می‌شود و فرضیه مورد نظر $(H_۱)$ پذیرفته می‌شود.

H_0	Value of Test Statistic	H_1	Critical Region
$\mu = \mu_0$	$z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$; σ known	$\mu < \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$z < -z_\alpha$ $z > z_\alpha$ $z < -z_{\alpha/2}$ or $z > z_{\alpha/2}$
$\mu = \mu_0$	$t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$; $v = n - 1$, σ unknown	$\mu < \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$t < -t_\alpha$ $t > t_\alpha$ $t < -t_{\alpha/2}$ or $t > t_{\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$z = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$; σ_1 and σ_2 known	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$z < -z_\alpha$ $z > z_\alpha$ $z < -z_{\alpha/2}$ or $z > z_{\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$t = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{s_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$; $v = n_1 + n_2 - 2$, $\sigma_1 = \sigma_2$ but unknown, $s_p^2 = \dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$t < -t_\alpha$ $t > t_\alpha$ $t < -t_{\alpha/2}$ or $t > t_{\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$t' = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$; $v = \dfrac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$ and unknown	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$t' < -t_\alpha$ $t' > t_\alpha$ $t' < -t_{\alpha/2}$ or $t' > t_{\alpha/2}$
$\mu_D = d_0$ paired observations	$t = \dfrac{\bar{d} - d_0}{s_d/\sqrt{n}}$; $v = n - 1$	$\mu_D < d_0$ $\mu_D > d_0$ $\mu_D \neq d_0$	$t < -t_\alpha$ $t > t_\alpha$ $t < -t_{\alpha/2}$ or $t > t_{\alpha/2}$

آزمون فرض نسبت یک جامعه

کاربردها: تصمیم‌گیری درباره میزان درصد افرادی که به یک شخص در انتخابات رای می‌دهند، درصد قطعات معیوب تولید شده در یک کارخانه، احتمال بهبودی پس از دریافت نوعی دارو

می‌دانیم

$$\hat{P} = \frac{X}{n}, \quad X = \text{تعداد موفقیت‌ها در } n \text{ آزمایش}$$

برای nهای بزرگ، توزیع نرمال با میانگین p و واریانس $\frac{pq}{n}$ است.

برای nهای کوچک، نمی‌توان با استفاده از تقریب توزیع پیوسته نرمال، ناحیه بحرانی را برای مقدار αی داده شده حساب کرد. در این صورت از p-مقدار استفاده می‌کنیم.

برای nهای بزرگ، آماره آزمون به صورت

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}} = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

است که توزیع نرمال استاندارد دارد.

نکته: در آزمون فرض نسبت جامعه نیز فرض می‌کنیم مقدار واقعی نسبت، خیلی نزدیک صفر یا یک نباشد، خصوصا وقتی n کوچک است.

آزمون دودمی

$$\begin{cases} H_0: & p = p_0 \\ H_1: & p \neq p_0 \end{cases} \qquad \text{ناحیه بحرانی:} \quad \frac{X}{n} < a \cup \frac{X}{n} > b \qquad Z < -z_{\frac{\alpha}{2}} \cup Z > z_{\frac{\alpha}{2}}$$

در سطح معنی‌داری (خطای نوع I) α داریم:

$$P\left(\hat{p} < a \quad or \quad \hat{p} > b | p = p_0\right) = \alpha \quad P\left(a < \hat{p} < b | p = p_0\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{a - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} < \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}} < \frac{b - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$-\frac{a - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} = \frac{b - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} = z_{\frac{\alpha}{2}}$$

بنابراین ناحیه رد عبارت است از:

$$|Z| = \left|\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}}\right| > z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} < a \quad \cup \quad \hat{p} = \frac{x}{n} > b$$

$$a = p_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}} \quad , \quad b = p_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$$

مثال ۱۸

مهندسی در یک کارخانه ادعا می‌کند که یک دستگاه تولید قطعات، به طور متوسط ۹۰ درصد قطعات را بدون ایراد تولید کند. برای بررسی ادعای او یک نمونه تصادفی ۲۰۰ تایی از قطعات تولید شده توسط دستگاه را بررسی کرده و می‌بینیم که ۱۷۰ تای آن‌ها بدون ایراد است. در سطح ۰/۰۵، آیا می‌توانیم ادعای مهندس را رد کنیم؟

راه حل:

$$\begin{cases} H_\circ: & p = \cdot/۹ \\ H_۱: & p \neq \cdot/۹ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\frac{X}{n} < a \cup \frac{X}{n} > b$

$$Z < -z_{\frac{\alpha}{۲}} \cup Z > z_{\frac{\alpha}{۲}}$$

$$Z = \frac{x - np_\circ}{\sqrt{np_\circ q_\circ}} = \frac{۱۷\cdot - ۱۸\cdot}{\sqrt{(۲\cdot\cdot)(\cdot/۹)(۱ - \cdot/۹)}} = -۲/۳۶$$

$$|Z| = |-۲/۳۶| > z_{\frac{\alpha}{۲}} = ۱/۹۶$$

$$a = p_\circ - z_{\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{pq/n} = \cdot/۹ - ۱/۹۶\sqrt{\frac{(\cdot/۹)(\cdot/۱)}{۲\cdot\cdot}} = \cdot/۸۵۸, \quad b = \cdot/۹۴۲$$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \cdot/۸۵ < a$$

بنابراین فرض صفر یا همان ادعای مهندس رد می‌شود.

آزمون یک‌دمی

$$\begin{cases} H_0: & p = p_0 \\ H_1: & p > p_0 \quad \text{یا} \quad p = p_1 (p_1 > p_0) \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\frac{X}{n} > b$

$Z > z_\alpha$

در سطح معنی‌داری (خطای نوع I) α داریم:

$$P(\hat{p} > b | p = p_0) = \alpha \quad P(\hat{p} < b | p = p_0) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}} < \frac{b - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}}\right) = 1 - \alpha \qquad \frac{b - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} = z_\alpha$$

بنابراین ناحیه رد عبارت است از:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}} > z_\alpha$$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} > b \quad , \quad b = p_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$$

مثال ۱۹

یک دستگاه موقعیت‌یاب مکانی به طور متوسط در ۶۰ درصد مواقع موقعیت مورد نظر را به طور دقیق و بدون خطا مشخص میکند. با اعمال تغییراتی در ساختار آن، انتظار می‌رود که میزان دقت دستگاه بهتر شده باشد. به این منظور دستگاهی را که در آن تغییرات مذکور صورت گرفته، برای سنجش ۱۰۰ موقعیت مکانی تصادفی تست می‌کنیم. می‌بینیم که در ۷۰ مورد، دستگاه جدید موقعیت مکانی را به طور دقیق تشخیص داده است. در سطح معنی‌داری ۵ درصد، آیا می‌توان گفت که تغییرات مذکور سبب بهبود دستگاه شده است؟

راه حل:

$$\begin{cases} H_۰ : & p = ۰/۶ \\ H_۱ : & p > ۰/۶ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\frac{X}{n} > b$

$$Z > z_\alpha$$

$$Z = \frac{x - np_۰}{\sqrt{np_۰ q_۰}} = \frac{۷۰ - ۶۰}{\sqrt{(۱۰۰)(۰/۶)(۱ - ۰/۶)}} = ۲/۰۴$$

$$z = ۲/۰۴ > z_\alpha = ۱/۶۴۵$$

$$b = p_۰ + z_\alpha \sqrt{pq/n} = ۰/۶ + ۱/۶۴۵ \sqrt{\frac{(۰/۶)(۰/۴)}{۱۰۰}} = ۰/۶۸$$

$$\frac{x}{n} = ۰/۷ > b$$

بنابراین فرض صفر رد می‌شود و تغییرات سبب بهبودی سیستم شده است.

آزمون فرض تفاضل نسبت دو جامعه

فرض کنید دو جامعه داشته باشیم که جامعه‌ی اول دارای پارامتر نسبت p_1 و جامعه‌ی دوم دارای پارامتر نسبت p_2 باشد. می‌خواهیم درباره $p_1 - p_2$ آزمون انجام دهیم. در آزمون فرض تفاضل نسبت‌ها، عموما می‌خواهیم برابری پارامترهای نسبت در دو جامعه را آزمون کنیم، یعنی $H_0 : p_1 = p_2$

به این منظور یک نمونه‌ی تصادفی n_1 تایی از جامعه‌ی اول انتخاب کرده و با شمارش تعداد موفقیت‌ها در آن، x_1، مقدار $\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}$ را به دست می‌آوریم؛ یک نمونه‌ی تصادفی n_2 تایی نیز از جامعه‌ی دوم انتخاب کرده و با شمارش تعداد موفقیت‌ها در آن، x_2،مقدار $\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$ را محاسبه می‌کنیم. نمونه‌گیری‌ها از دو جامعه مستقل انجام می‌شوند.

آماره آزمون به صورت

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}}$$

است که توزیع نرمال استاندارد دارد. طبق فرض صفر $(H_0 : p_1 = p_2)$، آماره آزمون به صورت زیر می‌شود:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{pq(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

که در آن $\hat{p} = \frac{x_1+x_2}{n_1+n_2}$ و $\hat{q} = 1 - \hat{p}$

آزمون دودمی

$$\begin{cases} H_0: & p_1 - p_2 = 0 \\ H_1: & p_1 - p_2 \neq 0 \end{cases}$$

ناحیه بحرانی:

$$Z < -z_{\frac{\alpha}{2}} \cup Z > z_{\frac{\alpha}{2}}$$

در سطح معنی‌داری (خطای نوع I) α داریم:

$$P\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > a \quad or \quad \hat{p}_1 - \hat{p}_2 > b | p_1 = p_2\right) = \alpha$$

$$P\left(a < \hat{p}_1 - \hat{p}_2 < b | p_1 = p_2\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{a}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} < \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} < \frac{b}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}\right) = 1 - \alpha$$

$$-\frac{a}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{b}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = z_{\frac{\alpha}{2}}$$

بنابراین ناحیه رد عبارت است از:

$$|Z| = \left|\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}\right| > z_{\frac{\alpha}{2}}$$

مثال ۲۰

برای مقایسه میزان دقت دو دستگاه در ساخت قطعه، دو نمونه ۲۰۰ تایی از قطعات ساخته شده توسط هر یک از دو دستگاه را بررسی کرده و نسبت قطعات سالم را بررسی می‌کنیم. دستگاه اول ۹۳ درصد قطعات و دستگاه دوم ۹۰ درصد قطعات را بدون ایراد ساخته‌اند. در سطح معنی‌داری ۰/۰۵، آیا می‌توان گفت که میزان دقت دو دستگاه در ساخت قطعه یکسان است؟

راه حل:

$$\begin{cases} H_0: & p_1 - p_2 = 0 \\ H_1: & p_1 - p_2 \neq 0 \end{cases}$$

ناحیه بحرانی:

$$Z < -z_{\frac{\alpha}{2}} \cup Z > z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\hat{p}_1 = 0/93, \quad \hat{p}_2 = 0/90, \quad \hat{p} = \frac{186 + 180}{400} = 0/915, \quad \hat{q} = 0/085$$

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{0/93 - 0/90}{\sqrt{(0/915)(0/085)(\frac{1}{200} + \frac{1}{200})}} = 1/08$$

$$|Z| = |1/08| \not> z\frac{\alpha}{2} = 1/96$$

بنابراین فرض صفر رد نمی‌شود.

آزمون یک‌دمی

$$\begin{cases} H_0: & p_1 - p_2 = 0 \\ H_1: & p_1 - p_2 > 0 \end{cases}$$

ناحیه بحرانی:

$$Z > z_\alpha$$

در سطح معنی‌داری (خطای نوع I) α داریم:

$$P\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > b | p_1 = p_2\right) = \alpha$$

$$P\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 < b | p_1 = p_2\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} < \frac{b}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}\right) = 1 - \alpha \qquad \frac{b}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = z_{\frac{\alpha}{2}}$$

بنابراین ناحیه رد عبارت است از:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} > z_\alpha$$

مثال ۲۱

یک شرکت دارویی نمونه جدیدی از یک قرص را تولید کرده که ادعا می‌کند میزان اثربخشی آن از نمونه موجود در بازار بیشتر است. برای بررسی صحت ادعا او، دو نمونه صد نفری از بیماران داوطلب انتخاب شده و برای یک گروه قرص نوع قدیمی و برای گروه دیگر قرص تولید شده جدید تجویز می‌شود. پس از طی دوره درمان، می بینیم که از گروه اول (با قرص نوع قدیم) ۷۳ نفر و از گروه دوم (با قرص نوع جدید) ۸۴ نفر بهبود یافتند. با خطای ۰/۰۵، آیا می‌توان ادعای شرکت دارویی را پذیرفت؟

راه حل:

$$\begin{cases} H_۰ & p_۱ - p_۲ = ۰ \\ H_۱ & p_۱ - p_۲ < ۰ \end{cases} \qquad \begin{matrix} \text{ناحیه بحرانی:} \\ Z < -z_\alpha \end{matrix}$$

$$\hat{p}_۱ = ۰/۷۳, \quad \hat{p}_۲ = ۰/۸۴, \quad \hat{p} = \frac{۷۳ + ۸۴}{۲۰۰} = ۰/۷۸۵, \quad \hat{q} = ۰/۲۱۵$$

$$z = \frac{\hat{p}_۱ - \hat{p}_۲}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{۱}{n_۱} + \frac{۱}{n_۲})}} = \frac{۰/۷۳ - ۰/۸۴}{\sqrt{(۰/۷۸۵)(۰/۲۱۵)(\frac{۱}{۱۰۰} + \frac{۱}{۱۰۰})}} = -۱/۸۹$$

$$z = -۱/۸۹ < -z_\alpha = -۱/۶۴۵$$

بنابراین فرض صفر رد می‌شود و ادعای شرکت را می‌پذیریم.

آزمون فرض واریانس یک جامعه

فرض کنید جامعه‌ای نرمال دارای میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشد.
می‌خواهیم درباره واریانس جامعه که در واقع میزان پرکندگی جامعه را نشان می‌دهد، آزمون انجام دهیم.
یک نمونه تصادفی n تایی از جامعه مورد نظر انتخاب کرده و واریانس نمونه را در آن حساب می‌کنیم:

$$S^۲ = \frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(X_i - \bar{X})^۲$$

آماره آزمون به صورت

$$\chi^۲ = \frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲}$$

است که توزیع خی-۲ با $(n-۱)$ درجه آزادی دارد.

نکته

آزمون فرض واریانس تک جامعه نسبت به شرط نرمال بودن استوار نیست. یعنی لازم است که حتما جامعه نرمال باشد تا آزمون فرض درست باشد. این عدم استواری در محاسبه p-مقدار کاملا مشهود است.

آزمون دودمی

$$\begin{cases} H_۰ : & \sigma^۲ = \sigma_۰^۲ \\ H_۱ : & \sigma^۲ \neq \sigma_۰^۲ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی:

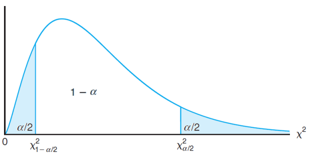
$$\chi^۲ < \chi^۲_{۱-\frac{\alpha}{۲}} \cup \chi^۲ > \chi^۲_{\frac{\alpha}{۲}}$$

در سطح معنی‌داری (احتمال خطای نوع I) α داریم:

$$P\left(S^۲ < a \quad or \quad S^۲ > b | \sigma^۲ = \sigma_۰^۲\right) = \alpha \rightarrow P\left(a < S^۲ < b | \sigma^۲ = \sigma_۰^۲\right) = ۱ - \alpha$$

$$P\left(\frac{(n-۱)a}{\sigma_۰^۲} < \underbrace{\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma_۰^۲}}_{\chi^۲_{n-۱}} < \frac{(n-۱)b}{\sigma_۰^۲}\right) = P\left(\chi^۲_{۱-\frac{\alpha}{۲}} < \frac{(n-۱)S^۲}{\sigma_۰^۲} < \chi^۲_{\frac{\alpha}{۲}}\right) = ۱ - \alpha$$

بنابراین ناحیه بحرانی (رد) عبارت است از:



$$\chi^۲ = \frac{(n-۱)S^۲}{\sigma_۰^۲} < \chi^۲_{۱-\frac{\alpha}{۲}} \cup \chi^۲ = \frac{(n-۱)S^۲}{\sigma_۰^۲} > \chi^۲_{\frac{\alpha}{۲}}$$

مثال ۲۲

یک تولید کننده لامپ ادعا می کند که طول عمر لامپ‌هایش توزیع نرمال با میانگین ۱۸ ماه و انحراف معیار ۱/۵ ماه دارد. برای بررسی ادعای او، یک نمونه ۲۰ تایی از لامپ‌هایش را آزمایش کرده و انحراف معیار ۲ ماه را برای طول عمر نمونه به دست می‌آوریم. آیا در سطح ۰/۵ می‌توان ادعای او را رد کرد؟

راه حل:

$$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = ۲/۲۵ \\ H_1: & \sigma^2 \neq ۲/۲۵ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی:

$$\chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cup \chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(۲۰-۱)(۴)}{۲/۲۵} = ۳۳/۷۸$$

$$\chi^2 = ۳۳/۷۸ > \chi^2_{\frac{\alpha}{2},۱۹} = ۳۲/۸۵۲ \quad (\chi^2 = ۳۳/۷۸ \not< \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},۱۹} = ۸/۹۰۷)$$

بنابراین فرض صفر (ادعای تولیدکننده) رد می‌شود.

آزمون یک‌دمی

$$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

ناحیه بحرانی:
$\chi^2 > \chi^2_\alpha$

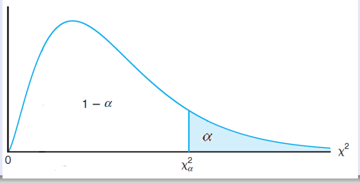
در سطح معنی‌داری (احتمال خطای نوع I) α داریم:

$$P\left(S^2 > b|\sigma^2 = \sigma_0^2\right) = \alpha \to P\left(S^2 < b|\sigma^2 = \sigma_0^2\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\underbrace{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}}_{\chi^2_{n-1}} < \frac{(n-1)b}{\sigma_0^2}\right) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

بنابراین ناحیه بحرانی (رد) عبارت است از:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_\alpha$$



آزمون فرض واریانس یک جامعه

آزمون یک‌دمی

$$\begin{cases} H_۰: & \sigma^۲ = \sigma_۰^۲ \\ H_۱: & \sigma^۲ < \sigma_۰^۲ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی:

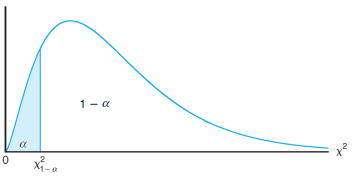
$$\chi^۲ < \chi^۲_{۱-\alpha}$$

در سطح معنی‌داری (احتمال خطای نوع I) α داریم:

$$P\left(S^۲ < a|\sigma^۲ = \sigma_۰^۲\right) = \alpha \rightarrow P\left(S^۲ > a|\sigma^۲ = \sigma_۰^۲\right) = ۱ - \alpha$$

$$P\left(\underbrace{\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma_۰^۲}}_{\chi^۲_{n-۱}} > \frac{(n-۱)a}{\sigma_۰^۲}\right) = P\left(\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma_۰^۲} > \chi^۲_{۱-\alpha}\right) = ۱ - \alpha$$

بنابراین ناحیه بحرانی (رد) عبارت است از:



$$\chi^۲ = \frac{(n-۱)S^۲}{\sigma_۰^۲} < \chi^۲_{۱-\alpha}$$

مثال ۲۳

طراح یک دستگاه خودکار پرکردن مایعات ادعا میکند که برای پر کردن بطری‌هایی با حجم زیر دولیتر، دستگاه بطری‌ها را با واریانسی کمتر از ۵ cm^6 پر می‌کند. برای بررسی صحت ادعای او، یک نمونه ۲۰ تایی از بطری‌های یک‌ونیم لیتری را با دستگاه مورد نظر پر کرده و حجم مایع داخل بطری‌ها را اندازه می‌گیریم. مقدار واریانس ۴ cm^6 برای نمونه انتخاب شده به دست می‌آید. اگر مقدار مایع پر شده توسط دستگاه دارای توزیع نرمال باشد، ادعای او را در سطح ۰/۰۵ آزمون کنید.

راه حل:

$$\begin{cases} H_0: \quad \sigma^2 = 5 \\ H_1: \quad \sigma^2 < 5 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \text{ناحیه بحرانی:} \\ \chi^2 < \chi^2_{1-\alpha} \end{array}$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(20-1)(4)}{5} = 15/2$$

$$\chi^2 = 15/2 \not< \chi^2_{1-\alpha,19} = 10/117$$

بنابراین دلیل کافی برای رد فرض صفر (پذیرش اعای طراح) نداریم.

آزمون فرض نسبت واریانس‌های دو جامعه

فرض کنید دو جامعه نرمال با میانگین‌های μ_1 و μ_2 و واریانس‌های σ_1^2 و σ_2^2 داریم.
می‌خواهیم درباره نسبت واریانس‌های دو جامعه آزمون انجام دهیم.
یک نمونه تصادفی n_1 تایی از جامعه اول و یک نمونه تصادفی n_2 تایی از جامعه دوم انتخاب کرده و واریانس نمونه‌ها، S_1^2 و S_2^2، را حساب می‌کنیم.
آماره آزمون به صورت

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

است که توزیع F با درجات آزادی $\nu_1 = n_1 - 1$ و $\nu_2 = n_2 - 1$ دارد. در آزمون نسبت واریانس‌ها، عموما می‌خواهیم برابری واریانس دو جامعه را آزمون کنیم، یعنی $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.
بنابراین آمار آزمون به صورت زیر می‌شود:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

نکته

آزمون فرض نسبت واریانس‌های دو جامعه، به صورت فوق را می‌توان برای جامعه‌های تقریبا نرمال نیز به‌کار برد.

آزمون دودمی

$$\begin{cases} H_۰ : & \sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲ \\ H_۱ : & \sigma_۱^۲ \neq \sigma_۲^۲ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی:

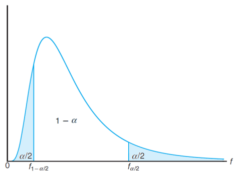
$$F < f_{۱-\frac{\alpha}{۲},\nu_۱,\nu_۲} \cup F > f_{\frac{\alpha}{۲},\nu_۱,\nu_۲}$$

در سطح معنی‌داری (احتمال خطای نوع I) α داریم:

$$P\left(\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} < a \quad or \quad \frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} > b | \sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲\right) = \alpha \to P\left(a < \frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} < b | \sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲\right) = ۱ - \alpha$$

$$P(a \underbrace{\frac{\sigma_۲^۲}{\sigma_۱^۲}}_{۱} < \underbrace{\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} \underbrace{\frac{\sigma_۲^۲}{\sigma_۱^۲}}_{۱}}_{F} < b \underbrace{\frac{\sigma_۲^۲}{\sigma_۱^۲}}_{۱}) = P\left(f_{۱-\frac{\alpha}{۲},\nu_۱,\nu_۲} < \frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} < f_{\frac{\alpha}{۲},\nu_۱,\nu_۲}\right) = ۱ - \alpha$$

بنابراین ناحیه بحرانی (رد) عبارت است از:



$$F = \frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} < f_{۱-\frac{\alpha}{۲},\nu_۱,\nu_۲} \cup F = \frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} > f_{\frac{\alpha}{۲},\nu_۱,\nu_۲}$$

مثال ۲۴

در مثال ۱۴ این فصل، در سطح معنی‌داری ۰/۱، آیا فرض برابری واریانس‌ها درست بوده است؟
راه حل: مثال ۱۴ مربوط به مقایسه میانگین فشار خون در سالمندان آقا و خانم بود که در نمونه مربوط به هر گروه، به ترتیب واریانس‌های ۰/۸ و ۱ به دست آمده بود. با فرض اینکه تعداد اعضای هر نمونه ۱۶ باشد داریم:

$$\begin{cases} H_0 : & \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : & \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

ناحیه بحرانی:

$$F < f_{1-\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2} \cup F > f_{\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2}$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0/8}{1} = 0/8$$

$$f_{\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2} = f_{0/05,15,15} = 2/40$$

$$f_{1-\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2} = \frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2},\nu_2,\nu_1}} = \frac{1}{f_{0/05,15,15}} = \frac{1}{2/40} = 0/42$$

$$F = 0/8 \nless 0/42, F = 0/8 \ngtr 2/40$$

دلیل کافی برای رد فرض صفر یا وجود تفاوت بین واریانس‌ها نداریم.

آزمون یک‌دمی

$$\begin{cases} H_{۰}: & \sigma_{۱}^{۲} = \sigma_{۲}^{۲} \\ H_{۱}: & \sigma_{۱}^{۲} > \sigma_{۲}^{۲} \end{cases}$$

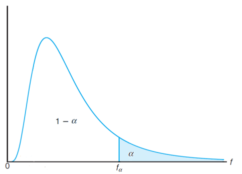
ناحیه بحرانی: $F > f_{\alpha,\nu_{۱},\nu_{۲}}$

در سطح معنی‌داری (احتمال خطای نوع I) α داریم:

$$P\left(\frac{S_{۱}^{۲}}{S_{۲}^{۲}} > b|\sigma_{۱}^{۲} = \sigma_{۲}^{۲}\right) = \alpha \rightarrow P\left(\frac{S_{۱}^{۲}}{S_{۲}^{۲}} < b|\sigma_{۱}^{۲} = \sigma_{۲}^{۲}\right) = ۱ - \alpha$$

$$P(\underbrace{\frac{S_{۱}^{۲}}{S_{۲}^{۲}} \times \underbrace{\frac{\sigma_{۲}^{۲}}{\sigma_{۱}^{۲}}}_{۱}}_{F} < b \underbrace{\frac{\sigma_{۲}^{۲}}{\sigma_{۱}^{۲}}}_{۱} |\sigma_{۱}^{۲} = \sigma_{۲}^{۲}) = P\left(\frac{S_{۱}^{۲}}{S_{۲}^{۲}} < f_{\alpha,\nu_{۱},\nu_{۲}}\right) = ۱ - \alpha$$

بنابراین ناحیه بحرانی (رد) عبارت است از:



$$F = \frac{S_{۱}^{۲}}{S_{۲}^{۲}} > f_{\alpha,\nu_{۱},\nu_{۲}}$$

آزمون یک‌دمی

$$\begin{cases} H_0: & \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: & \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$$

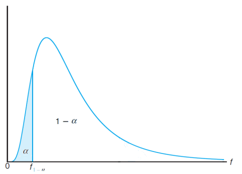
ناحیه بحرانی: $F < f_{1-\alpha,\nu_1,\nu_2}$

در سطح معنی‌داری (احتمال خطای نوع I) α داریم:

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < a | \sigma_1^2 = \sigma_2^2\right) = \alpha \rightarrow P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > a | \sigma_1^2 = \sigma_2^2\right) = 1 - \alpha$$

$$P(\underbrace{\frac{S_1^2}{S_2^2} \times \underbrace{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}_{1}}_{F} > a \underbrace{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}_{1} | \sigma_1^2 = \sigma_2^2) = P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > f_{1-\alpha,\nu_1,\nu_2}\right) = 1 - \alpha$$

بنابراین ناحیه بحرانی (رد) عبارت است از:



$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} < f_{1-\alpha,\nu_1,\nu_2}$$

مثال ۲۵

برای مقایسه عملکرد دو دستگاه که یک نوع قطعه را تولید می‌کنند، یک نمونه تصادفی ۱۳ تایی از قطعات ساخته شده با دستگاه اول و یک نمونه تصادفی ۱۴ تایی از قطعات ساخته شده با دستگاه دوم انتخاب کرده و به ترتیب مقادیر انحراف معیار ۶ و ۳/۵ میلی‌متر را برای طول قطعات ساخته شده به دست می‌آوریم. در سطح ۰/۰۵ و با فرض نرمال بودن طول قطعات، آیا می‌توان ادعا کرد که واریانس طول قطعات در دستگاه اول بیشتر از دستگاه دوم است؟

راه حل:

$$\begin{cases} H_۰ : & \sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲ \\ H_۱ : & \sigma_۱^۲ > \sigma_۲^۲ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $F > f_{\alpha,\nu_۱,\nu_۲}$

$$F = \frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} = \frac{۳۶}{۱۲/۲۵} = ۲/۹۴$$

$$f_{\alpha,\nu_۱,\nu_۲} = f_{۰/۰۵,۱۲,۱۳} = ۲/۶$$

$$F = ۲/۹۴ > ۲/۶$$

بنابراین فرض صفر رد و ادعای مورد نظر پذیرفته می‌شود.

خلاصه روش آزمون فرض

۱- فرض $H_. : \theta = \theta_.$ را در نظر بگیرید.
۲- فرض مقابل را با توجه به نوع مسئله به یکی از صورت‌های زیر انتخاب کنید:

$$\theta < \theta_. \quad \text{یا} \quad \theta > \theta_. \quad \text{یا} \quad \theta \neq \theta_.$$

۳- سطح معنی‌داری α را تعیین کنید.
۴- آماره آزمون را انتخاب کرده و طبق توزیع آن و فرض ۱، ناحیه بحران را تعیین کنید.
۵- مقدار آماره آزمون را از روی نمونه تصادفی حساب کنید.
۶- اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه بحرانی قرار گرفت، فرض صفر را رد کنید، در غیر این صورت آن را رد نکنید.

مثال ۱۴.۴ یک کارخانه تولید کننده لامپ‌های روشنایی لامپ‌هایی تولید می‌کند که طول عمر آن‌ها از توزیع نرمال با حد متوسط ۸۰۰ ساعت و انحراف معیار ۴۰ ساعت پیروی می‌کند. یک دستگاه جدید برای تولید لامپ به بازار آمده است و ادعا می‌شود که میانگین طول عمر لامپ‌های تولیدی توسط این دستگاه افزایش یافته است. یک نمونهٔ تصادفی ۳۰ تایی از لامپ‌های تولیدی توسط این دستگاه دارای حد متوسط طول عمر ۸۱۰ ساعت است. این ادعا را در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ و ۰/۱ آزمون کنید.

حل: در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_0 : \mu = ۸۰۰ \\ H_1 : \mu > ۸۰۰ \end{cases}$ مواجه هستیم پس فرض H_0 را رد می‌کنیم

اگر $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$ و یا $\overline{X} > c = \mu_0 + z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. چون $\mu_0 = ۸۰۰$، $\sigma = ۴۰$، $n = ۳۰$ و $\overline{x} = ۸۱۰$ پس در سطح معنی‌دار $\alpha = ۰/۰۵$ داریم

$$z_\alpha = z_{۰/۰۵} = ۱/۶۴۵ \Longrightarrow c = ۸۰۰ + ۱/۶۴۵ \frac{۴۰}{\sqrt{۳۰}} = ۸۱۲/۰۱$$

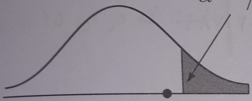
چون $c = ۸۱۲/۰۱ \ngtr \overline{x} = ۸۱۰$ پس در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ فرض H_0 رد نمی شود.

همچنین در سطح معنی‌دار ۰/۱ داریم

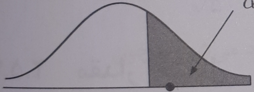
$$z_\alpha = z_{۰/۱} = ۲/۳۳ \Longrightarrow c = ۸۰۰ + ۱/۲۸۱ \frac{۴۰}{\sqrt{۳۰}} = ۸۰۹/۳۶$$

چون $۸۱۰ = \overline{x} > c = ۸۰۹/۳۶$ پس در سطح معنی‌دار ۰/۱ فرض $H_۰$ رد می‌شود.

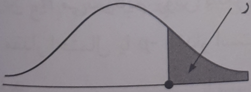
در شکل ۴.۴ ناحیه بحرانی به‌صورت ناحیه هاشور زده شده برای سطح‌های معنی‌دار ۰/۰۵ و ۰/۱ و نقطه $\overline{x} = ۸۱۰$ نمایش داده شده است.



ناحیه بحرانی با α=۰/۰۵



ناحیه بحرانی با α=۰/۱

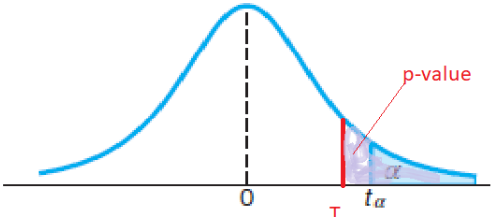


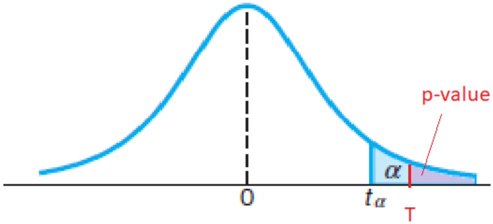
p- مقدار

همان‌گونه که مشاهده شد فرض $H_۰$ به‌ازای $\alpha = ۰/۰۵$ پذیرفته شد ولی به‌ازای $\alpha = ۰/۱$ رد شد. در حالت $\alpha = ۰/۰۵$ مقدار آمارهٔ آزمون $\overline{x} = ۸۱۰$ در ناحیهٔ بحرانی قرار نگرفت و $H_۰$ پذیرفته شد و در حالت $\alpha = ۰/۱$ مقدار آمارهٔ آزمون $\overline{x} = ۸۱۰$ در ناحیهٔ بحرانی قرار گرفت و $H_۰$ رد شد. حال این سوال مطرح می‌شود که کوچک‌ترین مقداری از α که موجب می‌شود فرض $H_۰$ رد شود چه مقدار است؟ این مقدار را

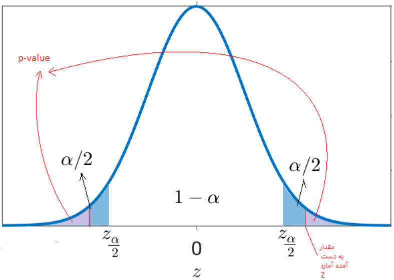
p-مقدار $(p-\text{value})$

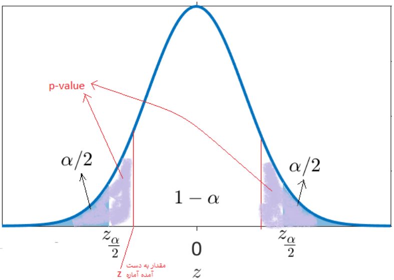
کمترین مقداری از سطح معنی‌داری α که مقدار مشاهده شده آماره آزمون موجب رد فرض صفر می‌شود را p-مقدار گویند.


p-value
0
T
t_α
α


p-value
α
0
t_α
T

p-مقدار ($p-$value)





روش آزمون فرض با استفاده از P-مقدار

۱- فرض $H_0 : \theta = \theta_0$ را در نظر بگیرید.
۲- فرض مقابل را با توجه به نوع مسئله به یکی از صورت‌های زیر انتخاب کنید:

$$\theta < \theta_0 \quad \text{یا} \quad \theta > \theta_0 \quad \text{یا} \quad \theta \neq \theta_0$$

۳- آماره آزمون را انتخاب کنید.
۴- مقدار آماره آزمون را از روی نمونه تصادفی حساب کنید.
۵- با توجه به نوع فرض مقابل، p-مقدار را حساب کنید.
۶- سطح معنی‌داری α را انتخاب کنید، اگر p-مقدار کمتر از α باشد، فرض صفر را رد کنید، در غیر این صورت آن را رد نکنید. ممکن است مقدار α را نداشته باشیم و فقط بر اساس p-مقدار تصمیم‌گیری کنیم.

مثال ۲۶

مثال ۱۹ را با p-مقدار حل کنید.

یک دستگاه موقعیت‌یاب مکانی به طور متوسط در ۶۰ درصد مواقع موقیت مورد نظر را به طور دقیق و بدون خطا مشخص میکند. با اعمال تغییراتی در ساختار آن، انتظار می‌رود که میزان دقت دستگاه بهتر شده باشد. به این منظور دستگاهی را که در آن تغیرات مذکور صورت گرفته، برای سنجش ۱۰۰ موقعیت مکانی تصادفی تست می‌کنیم. می‌بینیم که در ۷۰ مورد، دستگاه جدید موقعیت مکانی را به طور دقیق تشخیص داده است. در سطح معنی‌داری ۵ درصد، آیا می‌توان گفت که تغییرات مذکور سبب بهبود دستگاه شده است؟

راه حل:

$$\begin{cases} H_۰ : & p = ۰/۶ \\ H_۱ : & p > ۰/۶ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\frac{X}{n} > b$

$$Z > z_\alpha$$

$$Z = \frac{x - np_۰}{\sqrt{np_۰q_۰}} = \frac{۷۰ - ۶۰}{\sqrt{(۱۰۰)(۰/۶)(۱ - ۰/۶)}} = ۲/۰۴$$

$$P(Z > ۲/۰۴) = ۰/۰۲۰۷ < \alpha = ۰/۰۵$$

بنابراین طبق p-مقدار فرض صفر رد می‌شود و تغییرات سبب بهبودی سیستم شده است.

مثال ۲۷

مثال ۱۲ را با p-مقدار حل کنید.
فرض کنید می‌خواهیم میانگین سوخت مصرفی دو نوع اتوموبیل را با یکدیگر مقایسه کنیم و ببینیم که آیا مصرف یکسانی دارند یا خیر. به این منظور دو نمونه تصادفی ۱۰ تایی از هر یک از انواع خودرو را انتخاب کرده و میزان مصرف سوخت آن‌ها را در ۱۰۰۰ کیلومتر حساب می‌کنیم. مقادیر $\bar{X} = ۷۱/۲$ و $\bar{Y} = ۶۹/۵$ به ترتیب برای خودوری نوع ۱ و خودروی نوع ۲ به دست آمده‌اند. اگر واریانس میزان سوخت مصرفی در هر هزار کیلومتر برای خودروی نوع اول و دوم به ترتیب ۵/۵ و ۶/۶ باشد، آیا می‌توان در سطح ۰/۰۵، ادعا کرد که میزان مصرف دو خودرو بایکدیگر برابر است؟

راه حل:

$$\begin{cases} H_۰: & \mu_۱ - \mu_۲ = ۰ \\ H_۱: & \mu_۱ - \mu_۲ \neq ۰ \end{cases}$$

ناحیه بحرانی: $\bar{x} - \bar{y} < a \cup \bar{x} - \bar{y} > b$

$$Z > z_{\frac{\alpha}{۲}} \cup Z < -z_{\frac{\alpha}{۲}}$$

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - d_۰}{\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n} + \frac{\sigma_۲^۲}{m}}} = \frac{(۷۱/۲ - ۶۹/۵) - ۰}{\sqrt{\frac{۵/۵}{۱۰} + \frac{۶/۶}{۱۰}}} = ۱/۵۵$$

$$۲P(Z > ۱/۵۵) = ۲(۰/۰۶۰۶) = ۰/۱۲۱۲ > \alpha = ۰/۰۵$$

بنابراین طبق p-مقدار، دلیل کافی برای رد ادعا نداریم.