آمار و احتمالات مهندسی
فصل اول: احتمال

فردوس گرجی

کتاب

آمار و احتمال مهندسی و علوم

نویسنده: رونالد والپول و همکاران

مترجم: اسماعیل خرم

ناشر: نشر کتاب دانشگاهی

ارزشیابی

میان ترم: فصل ۲-۶، ۷-۸ نمره

پایان ترم: فصل ۷-۱۱، ۱۲-۱۳ نمره

کوییز هفتگی : هر هفته ۰/۲۵ نمره، مجموعا ۳ الی ۳/۵ نمره اضافه بر بیست نمره

آزمایش تصادفی

تعریف: آزمایش که نتیجه آن از قبل معلوم نباشد.

- ممکن است ذاتا تصادفی نباشد ولی جوابش برای ما معلوم نیست با مثلا به دلایلی مانند وجود نویز یا اصطکاک، محاسبه آن برای تعیین نتیجه بسیار دشوار است.

مثال: پرتاب تاس، پرتاب سکه، طول عمر یک لامپ یا یک المان الکتریکی در یک مدار، زمان زلزله بعدی، تعداد قطعات معیوب تولید شده

آزمایش تصادفی

تعریف: آزمایش که نتیجه آن از قبل معلوم نباشد.

- ممکن است ذاتا تصادفی نباشد ولی جوابش برای ما معلوم نیست با مثلا به دلایلی مانند وجود نویز یا اصطکاک، محاسبه آن برای تعیین نتیجه بسیار دشوار است.

مثال: پرتاب تاس، پرتاب سکه، طول عمر یک لامپ یا یک المان الکتریکی در یک مدار، زمان زلزله بعدی، تعداد قطعات معیوب تولید شده

فضای نمونه‌ای و برآمد

تعریف: هر نتیجه ممکن برای آزمایش تصادفی را یک برآمد گویند. کلیه نتایج ممکن برای آزمایش تصادفی (مجموعه همه برآمدها) را فضای نمونه‌ای گویند و معمولا آن را با S یا Ω نشان می‌دهند.

مثال: $\{۱, ۲, \dots, ۶\}$، $\{H, T\}$، $\mathbb{R}^+$، $\mathbb{N}$، $\{۰, ۱, ۲, \dots, n\}$.

آزمایش تصادفی

تعریف: آزمایش که نتیجه آن از قبل معلوم نباشد.

- ممکن است ذاتا تصادفی نباشد ولی جوابش برای ما معلوم نیست با مثلا به دلایلی مانند وجود نویز یا اصطکاک، محاسبه آن برای تعیین نتیجه بسیار دشوار است.

مثال: پرتاب تاس، پرتاب سکه، طول عمر یک لامپ یا یک المان الکتریکی در یک مدار، زمان زلزله بعدی، تعداد قطعات معیوب تولید شده

فضای نمونه‌ای و برآمد

تعریف: هر نتیجه ممکن برای آزمایش تصادفی را یک برآمد گویند. کلیه نتایج ممکن برای آزمایش تصادفی (مجموعه همه برآمدها) را فضای نمونه‌ای گویند و معمولا آن را با S یا Ω نشان می‌دهند.

مثال: $\{۱, ۲, \ldots, ۶\}$، $\{H, T\}$، $\mathbb{R}^+$، $\mathbb{N}$، $\{۰, ۱, ۲, \ldots, n\}$.

پیشامد

تعریف: هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای $S \supseteq A$ را یک پیشامد گویند.

- تعداد کل پیشامدها در حالت گسسته: $۲^{|S|}$

مثال: زوج ظاهر شدن تاس $\{۲, ۴, ۶\}$، شیر آمدن سکه $\{H\}$، لامپ بین دو تا سه سال عمر کند $\{t | t_۱ < t < t_۲\}$

- پیامد ساده: پیشامد تک عضوی
- پیشامد قطعی: S، پیشامد ناممکن: $\varnothing$.

- اجتماع، اشتراک، متمم، تفاضل

مثال: آزمایش تصادفی پرتاب یک تاس سالم:

$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}, \quad A = \{\text{برآمدهای زوج}\} = \{۲, ۴, ۶\},$

$B = \{\text{برآمدهای مضرب سه}\} = \{۳, ۶\}, \quad C = \{۵\}, \quad D = \{\text{برآمدهای مضرب ۷}\} = \varnothing$

$A \cup B = \{۲, ۳, ۴, ۶\}$ (یا), $\quad A \cap B = \{۶\}$ (و), $\bar{A} = A' = \{۱, ۳, ۵\}, \ A - B = \{۲, ۴\},$

$A \cap C = \varnothing \rightarrow$ پیشامدهای مجزا یا دوبه‌دو ناسازگار، یعنی با هم اتفاق نمی‌افتند.

روابط بین پیشامدها (مجموعه‌ها)

- اجتماع، اشتراک، متمم، تفاضل

مثال: آزمایش تصادفی پرتاب یک تاس سالم:

$S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}, \quad A = \{\text{برآمدهای زوج}\} = \{۲,۴,۶\},$

$B = \{\text{برآمدهای مضرب سه}\} = \{۳,۶\}, \quad C = \{۵\}, \quad D = \{\text{برآمدهای مضرب ۷}\} = \varnothing$

(یا) $A \cup B = \{۲,۳,۴,۶\}$, (و) $A \cap B = \{۶\}$, $\bar{A} = A' = \{۱,۳,۵\}$, $A - B = \{۲,۴\}$,

$A \cap C = \varnothing \rightarrow$ پیشامدهای مجزا یا دوبه‌دو ناسازگار، یعنی با هم اتفاق نمی‌افتند.

- افرازی برای S: $A_۱ = \{۱,۲\}, A_۲ = \{۳,۴,۵\}, A_۳ = \{۶\}, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \quad \bigcup A_i = S$
- شرکت‌پذیری $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- توزیع‌پذیری $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- تعدی $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$
- دمورگان $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- تفاضل متقارن $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
- حاصلضرب دکارتی $A \times B = \{(x,y) | x \in A, y \in B\}$

مثال: آزمایش تصادفی پرتاب یک سکه سالم: $S = \{H, T\}$

$$S \times S = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$$

اصل جمع

- اگر کاری به n روش و کاری دیگر به m روش قابل انجام باشد و امکان انجام هم‌زمان دو کار وجود نداشته باشد، آنگاه تعداد روش‌های انجام دادن یکی از این دو کار، $n+m$ است.

مثال: فرض کنید مجبورید ناهار خود را از بیرون تهیه کنید. در اطراف شما یک رستوران ایرانی با ۵ نوع و یک فست‌فود با ۳ نوع غذا وجود دارد. به چند طریق می‌توانید غذای خود را تهیه کنید؟ $۳ + ۵ = ۸$

اصول شمارش

اصل جمع

- اگر کاری به n روش و کاری دیگر به m روش قابل انجام باشد و امکان انجام هم‌زمان دو کار وجود نداشته باشد، آنگاه تعداد روش‌های انجام دادن یکی از این دو کار، $n+m$ است.

مثال: فرض کنید مجبورید ناهار خود را از بیرون تهیه کنید. در اطراف شما یک رستوران ایرانی با ۵ نوع و یک فست‌فود با ۳ نوع غذا وجود دارد. به چند طریق می‌توانید غذای خود را تهیه کنید؟ $۳+۵=۸$

اصل ضرب (تعمیم)

- اگر کاری به $n_۱$ روش قابل انجام باشد و برای هر کدام از روش‌ها، کار دومی به $n_۲$ روش قابل اجرا باشد و برای هر یک از این روش‌ها، کار سومی به $n_۳$ روش قابل انجام باشد و این روند تا کار kام ادامه داشته باشد، آنگاه k کار مذکور را می‌توان به $n_۱ n_۲ \ldots n_k$ حالت انجام داد.

مثال: تعداد برآمدها در پرتاب دو تاس؟ $۶\times۶=۳۶$

مثال: تعداد حالت‌های یک مدار با چهار سوییچ که هر یک دو حالت on و off دارند؟ $۲^۴=۱۶$

مثال: تعداد اعداد زوج سه رقمی با ارقام ۱، ۲، ۵، ۶ و ۹ بدون رقم تکراری؟ $۴\times۳\times۲=۲۴$

اصول شمارش

اصل جمع

- اگر کاری به n روش و کاری دیگر به m روش قابل انجام باشد و امکان انجام هم‌زمان دو کار وجود نداشته باشد، آنگاه تعداد روش‌های انجام دادن یکی از این دو کار، $n + m$ است.

مثال: فرض کنید مجبورید ناهار خود را از بیرون تهیه کنید. در اطراف شما یک رستوران ایرانی با ۵ نوع و یک فست‌فود با ۳ نوع غذا وجود دارد. به چند طریق می‌توانید غذای خود را تهیه کنید؟ $۳ + ۵ = ۸$

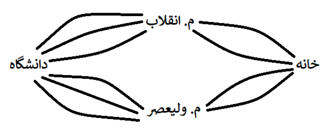
اصل ضرب (تعمیم)

- اگر کاری به $n_۱$ روش قابل انجام باشد و برای هر کدام از روش‌ها، کار دومی به $n_۲$ روش قابل اجرا باشد و برای هر یک از این روش‌ها، کار سومی به $n_۳$ روش قابل انجام باشد و این روند تا کار kام ادامه داشته باشد، آنگاه k کار مذکور را می‌توان به $n_۱ n_۲ \ldots n_k$ حالت انجام داد.

مثال: تعداد برآمدها در پرتاب دو تاس؟ $۶ \times ۶ = ۳۶$

مثال: تعداد حالت‌های یک مدار با چهار سوییچ که هر یک دو حالت on و off دارند؟ $۲^۴ = ۱۶$

مثال: تعداد اعداد زوج سه رقمی با ارقام ۱، ۲، ۵، ۶ و ۹ بدون رقم تکراری؟ $۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴$



جایگشت

تعریف: یک آرایش از عناصر یک مجموعه را یک جایگشت گوییم.

- تعداد جایگشت‌های n شی متمایز برابر است با $n(n-۱)(n-۲)\dots(۲)(۱)=n!$

مثال: جایگشت‌های عناصر مجموعه $\{a,b,c\}$؟

$abc \quad acb \quad bac \quad bca \quad cab \quad cba$ (تعداد جایگشت‌ها=۶)

- تعداد جایگشت‌های n شی متمایز که روی دایره چیده شده‌اند، برابر است با $(n-۱)!$

مثال: به چند طریق ۵ نفر دور یک میز قرار می‌گیرند؟ $\frac{۵!}{۵}=(۵-۱)!=۴!$

- تعداد جایگشت‌های n شی متمایز که هر بار r شی انتخاب می‌شوند، برابر است با ${}_n\mathrm{P}_r=\frac{n!}{(n-r)!}$

مثال: تعداد جایگشت‌های دوعضوی (اعداد دورقمی بدون تکرار رقم) از مجموعه ارقام $\{۱,۲,۳,۴\}$؟

$\frac{۴!}{۲!}=۳\times۴$

- تعداد جایگشت‌های n شی که در آن، $n_۱$ تا از نوع اول، $n_۲$ تا از نوع دوم، .... و n_k تا از نوع kام باشد، برابر است با: $\frac{n!}{n_۱!n_۲!\dots n_k!}$

مثال: به چند طریق می‌توان ریسه لامپی از ۳ لامپ قرمز، ۴ لامپ زرد و ۲ لامپ سبز ساخت؟ $\frac{۹!}{۳!۴!۲!}$

- تعداد ترکیب‌های r شی از n شی متمایز برابر است با: $\binom{n}{r}={}_n\mathrm{C}_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

مثال: به چند طریق می‌توان ۳ نماینده از یک کلاس ۲۰ نفره انتخاب کرد؟ $\frac{۲۰!}{۳!۱۷!}=\frac{۲۰\times۱۹\times۱۸}{۳!}$

تعابیر احتمال

احتمال از دیدگاه فراوانی نسبی: تکرار بسیار زیاد آزمایش و محاسبه فراوانی نسبی

$$P(A) = \frac{n_A}{n_S} \qquad \text{احتمال پیشامد } A = \frac{\text{تعداد رخداد پیشامد } A}{\text{تعداد آزمایش‌ها}}$$

که برای آزمایش‌های تکرار پذیر مناسب است، مانند پرتاب سکه

احتمال از دیدگاه تعبیر ذهنی: میزان اطمینانی که یک فرد با توجه به دانش و تجربه نسبت به رخداد یک پیشامد دارد. در این تعریف، مقدار احتمال از فردی به فرد دیگر تغییر می‌کند. مثال: احتمال ادامه یک جنگ، احتمال رخداد زلزله

تعریف احتمال بر پایه اصول موضوعی احتمال (کلموگروف): با مدل‌بندی آماری و حرکت از فضای واقعی به فضای ریاضیاتی، مقدار احتمالی که برای پیشامدها در نظر می‌گیریم (از طریق ذهنی، فراوانی نسبی، ...)، باید در اصول موضوعی احتمال، به نام اصول کلموگروف صدق کنند.

اصول کلموگروف

- برای هر پیشامد، مقدار احتمال نامنفی است: $\forall A \subseteq S : P(A) \geq ۰$
- احتمال روی کل فضای نمونه (پیشامد قطعی) برابر با یک است. $P(S) = ۱$
- احتمال خاصیت جمع‌پذیری شمارا دارد:

$$\forall \{A_i\}_{i=۱}^{\infty} \quad (A_i \subseteq S) \quad \text{s.t.} \quad A_i \cap A_j = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad P\left(\cup_{i=۱}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=۱}^{\infty} P(A_i)$$

نتیجه ۱ (جمع‌پذیری متناهی)

$$\forall \{A_i\}_{i=۱}^{n} \quad \text{s.t.} \quad A_i \cap A_j = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad P\left(\cup_{i=۱}^{n} A_i\right) = \sum_{i=۱}^{n} P(A_i)$$

نتیجه ۲

برای فضای نمونه‌ای شمارای S، احتمال رخداد پیشامد A برابر است با مجموع احتمالات تک‌عضوی‌های (پیشامدهای ساده) زیرمجموعه A:

$$A = \{a_۱, \ldots, a_n\} \quad , P(A) = P(\{a_۱\}) + \ldots + P(\{a_n\})$$

نتیجه ۳

$$P(\varnothing) = ۰, \quad P(A) + P(A') = ۱, \quad P(A) = ۱ - P(A'), \quad A \subseteq B \rightarrow P(A) \leq P(B)$$

مثال ۱:

در پرتاب یک تاس که احتمال رخداد زوج دوبرابر فرد است، مطلوب است $P(A=\{۱,۴\})$

راه حل:

$$۱ = P(S) = P(\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\})$$

$$= \underbrace{P(\{۱\})}_{w} + \underbrace{P(\{۲\})}_{۲w} + \underbrace{P(\{۳\})}_{w} + \underbrace{P(\{۴\})}_{۲w} + \underbrace{P(\{۵\})}_{w} + \underbrace{P(\{۶\})}_{۲w} \to w = \frac{۱}{۹}$$

$$P(\{۱\}) = P(\{۳\}) = P(\{۵\}) = \frac{۱}{۹}, \quad P(\{۲\}) = P(\{۴\}) = P(\{۶\}) = \frac{۲}{۹}$$

$$P(A) = P(\{۱\}) + P(\{۴\}) = \frac{۱}{۹} + \frac{۲}{۹} = \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳}$$

مثال ۱:

در پرتاب یک تاس که احتمال رخداد زوج دوبرابر فرد است، مطلوب است $P(A=\{۱,۴\})$

راه حل:

$$۱=P(S)=P(\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\})$$

$$=\underbrace{P(\{۱\})}_{w}+\underbrace{P(\{۲\})}_{۲w}+\underbrace{P(\{۳\})}_{w}+\underbrace{P(\{۴\})}_{۲w}+\underbrace{P(\{۵\})}_{w}+\underbrace{P(\{۶\})}_{۲w}\rightarrow w=\frac{۱}{۹}$$

$$P(\{۱\})=P(\{۳\})=P(\{۵\})=\frac{۱}{۹},\quad P(\{۲\})=P(\{۴\})=P(\{۶\})=\frac{۲}{۹}$$

$$P(A)=P(\{۱\})+P(\{۴\})=\frac{۱}{۹}+\frac{۲}{۹}=\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}$$

مثال ۲:

در پرتاب دو سکه سالم، مطلوب است احتمال این که حداقل یک شیر ظاهر شود.

راه حل:

$$S=\{HH,HT,TH,TT\},\quad A=\{HH,HT,TH\}$$

$$P(A)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

- اگر فضای نمونه‌ای شامل N برآمد هم‌شانس باشد و پیشامد A شامل n برآمد باشد، آنگاه $P(A)=\frac{n}{N}$

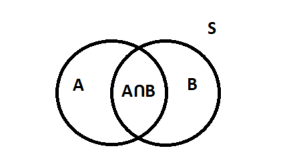
قاعده جمع احتمال

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=P(A-B)+P(A\cap B)+P(B-A)$$

$$=P(A)-P(A\cap B)+P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$



نتیجه ۱

$$P(A\cup B\cup C)=$$

$$P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

نتیجه ۲

$$A\cap B=\varnothing\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

مثال ۳

احتمال قبولی در درس ریاضی و زبان به ترتیب $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۴}{۹}$ اگر احتمال قبولی در هر دو درس $\frac{۱}{۴}$ باشد، احتمال قبولی در حداقل یک درس چقدر است؟

راه حل:

$$A = \text{قبولی در ریاضی}, \quad B = \text{قبولی در زبان}, \quad A \cap B = \text{قبولی در هر دو درس},$$
$$A \cup B = \text{قبولی در حداقل یکی از دو درس}$$
$$P(A \cup B) = \frac{۲}{۳} + \frac{۴}{۹} - \frac{۱}{۴} = \frac{۳۱}{۳۶}$$

احتمال شرطی

احتمال وقوع پیشامد B وقتی که پیشامد A رخ داده باشد، احتمال شرطی نامیده می‌شود. در واقع وقتی پیشامد A رخ داده باشد، فضای نمونه‌ای عوض شده و محدودتر می‌شود.

تعریف: احتمال شرطی B به شرط وقوع A با نماد $P(B|A)$ نشان داده می‌شود و با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \quad P(A) > ۰$$

مثال ۳

مثال ۱ را در نظر بگیرید (پرتاب تاس ناسالم)؛ اگر A پیشامد مشاهده عددی بزرگ‌تر از ۳ و B پیشامد مشاهده عدد مربع کامل باشد، مطلوب است $P(B|A)$.

راه حل:

$$A = \{۴, ۵, ۶\}, \quad B = \{۱, ۴\}$$

$$\text{فضای نمونه‌ای جدید} = \{۴, ۵, ۶\} \rightarrow P(A) = ۱, P(\{۱\}) = P(\{۲\}) = P(\{۳\}) = ۰$$

$$P(\{۵\}) = w, P(\{۴\}) = P(\{۶\}) = ۲w \rightarrow ۵w = ۱ \rightarrow w = \frac{۱}{۵}$$

$$P(B|A) = ۰ + \frac{۲}{۵} = \frac{۲}{۵}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\{۴\}) = \frac{۲}{۹}}{\frac{۵}{۹}} = \frac{۲}{۵}$$

مثال ۴

در جعبه‌ای ۵ مهره آبی و ۴ مهره قرمز وجود دارد. از این جعبه، ۳ مهره به تصادف و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. اگر بدانیم حداقل ۲ مهره از ۳ مهره خارج شده آبی هستند، احتمال این‌که مهره دیگر قرمز باشد چقدر است؟

راه حل:

$$n(S) = \binom{۹}{۳}, \quad A = \text{دو مهره خارج شده آبی هستند}, \quad B = \text{یک مهره قرمز باشد}$$

$$P(A) = \frac{\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}}{\binom{۹}{۳}} + \frac{\binom{۵}{۳}\binom{۴}{۰}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{۲۵}{۴۲}, \quad P(A\cap B) = \frac{\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{۲۰}{۴۲}.$$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{۲۰}{۴۲}}{\frac{۲۵}{۴۲}} = \frac{۴}{۵}$$

احتمال شرطی از دیدگاه فراوانی نسبی

$$P(B) \neq ۰ \rightarrow P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n_{A\cap B}}{n_S}}{\frac{n_B}{n_S}} = \frac{n_{A\cap B}}{n_B}$$

درصد وقوع A در تعداد رخدادهای B

اصول کلموگروف در احتمال شرطی

- اصول کلموگروف در احتمال شرطی نیز برقرار است.

$$P(B|A) \geq ۰$$
$$P(S|A) = ۱$$
$$B_۱ \cap B_۲ = \varnothing \rightarrow P(B_۱ \cup B_۲|A) = P(B_۱|A) + P(B_۲|A)$$

- نتایج نیز برقرار است.

$$P(\varnothing|A) = ۰, \quad P(B'|A) = ۱ - P(B|A), \ldots$$

مثال ۵

فرض کنید ۸ کارت داریم که از ۱ تا ۸ شماره‌گذاری شده‌اند. از این کارت‌ها ۳ کارت به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد ظاهر شده فرد است، احتمال این که حداقل دو کارت زوج باشد چقدر است؟

راه حل: وقتی مجموع سه کارت فرد است، یا هر سه فرد هستند و یا دو کارت زوج و یک کارت فرد است. اگر A را پیشامد این که دو کارت زوج باشد و B را پیشامد این که مجموع سه کارت فرد باشد در نظر بگیریم، داریم:

$$P(B) = \frac{\binom{۴}{۳}\binom{۴}{۰} + \binom{۴}{۱}\binom{۴}{۲}}{\binom{۸}{۳}} = \frac{۲۸}{\binom{۸}{۳}}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۲}}{\binom{۸}{۳}} = \frac{۲۴}{\binom{۸}{۳}}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۲۴}{۲۸} = \frac{۶}{۷}$$

احتمال شرطی

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > ۰$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > ۰$$

قانون ضرب احتمال

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$
$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

تعمیم قانون ضرب احتمال (قانون زنجیره‌ای)

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B)P(C|A \cap B) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

$$P(A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_k) = P(A_۱)P(A_۲|A_۱)P(A_۳|A_۱ \cap A_۲) \ldots P(A_k|A_۱ \cap \ldots \cap A_{k-۱})$$

مثال ۶

دستگاهی شامل دو موتور مختلف است که یکی از آن‌ها با احتمال ۳۰ درصد ممکن است خراب شود. اگر این موتور خراب باشد، در اثر افزایش فشار، موتور دوم ممکن است با احتمال ۴۰ درصد خراب شود. با چه احتمالی هر دو موتور خراب می‌شوند؟

مثال ۶

دستگاهی شامل دو موتور مختلف است که یکی از آن‌ها با احتمال ۳۰ درصد ممکن است خراب شود. اگر این موتور خراب باشد، در اثر افزایش فشار، موتور دوم ممکن است با احتمال ۴۰ درصد خراب شود. با چه احتمالی هر دو موتور خراب می‌شوند؟

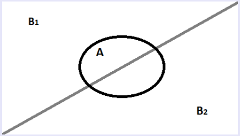
راه حل: پیشامد A را خرابی موتور اول و پیشامد B را خرابی موتور دوم در نظر می‌گیریم. داریم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = ۰/۳ \times ۰/۴ = ۰/۱۲$$

قانون احتمال کل

اگر احتمالات مشروط را داشته باشیم، احتمال بدون شرط را به دست می‌آوریم. در شکل زیر فرض کنید $P(A|B_1)$ و $P(A|B_2)$ را داریم و $P(A)$ را می خواهیم به دست آوریم.

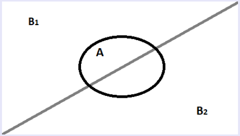
$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)$$



قانون احتمال کل

اگر احتمالات مشروط را داشته باشیم، احتمال بدون شرط را به دست می‌آوریم. در شکل زیر فرض کنید $P(A|B_1)$ و $P(A|B_2)$ را داریم و $P(A)$ را می خواهیم به دست آوریم.

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)$$



قضیه احتمال کل

اگر پیشامدهای $B_1, B_2, \ldots, B_k$ افرازی از فضای نمونه‌ای S باشند و احتمال هیچ کدام صفر نباشد، آنگاه برای هر پیشامد $A \subseteq S$ داریم:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)$$

برهان:

$$P(A) = P(A \cap S) = P(A \cap (B_1 \cup \ldots \cup B_k)) =$$

$$P((A \cap B_1) \cup \ldots \cup (A \cap B_k)) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)$$

مثال ۷

دو جعبه داریم که در اولی ۵ لامپ سالم و ۵ لامپ سوخته و در دومی ۸ لامپ سالم و ۲ لامپ سوخته قرار دارد. یک جعبه به تصادف انتخاب می‌کنیم (جعبه‌ها هم‌شانس هستند) و بدون نگاه کردن به جعبه، یک لامپ بیرون می‌کشیم. احتمال این که لامپ سالم باشد چقدر است؟

مثال ۷

دو جعبه داریم که در اولی ۵ لامپ سالم و ۵ لامپ سوخته و در دومی ۸ لامپ سالم و ۲ لامپ سوخته قرار دارد. یک جعبه به تصادف انتخاب می‌کنیم (جعبه‌ها هم‌شانس هستند) و بدون نگاه کردن به جعبه، یک لامپ بیرون می‌کشیم. احتمال این که لامپ سالم باشد چقدر است؟

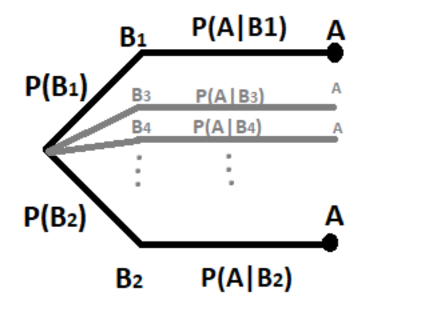
راه حل: پیشامد A را سالم بودن لامپ در نظر می‌گیریم.

$$P(B۱) = ۰/۵, P(B_۲) = ۰/۵, \quad P(A|B_۱) = ۰/۵, P(A|B_۲) = ۰/۸$$

$$P(A) = P(B_۱)P(A|B_۱) + P(B_۲)P(A|B_۲) =$$

$$۰/۵ \times ۰/۵ + ۰/۸ \times ۰/۵ = ۰/۶۵$$

احتمال سالم بودن بدون شرط لامپ خارج شده را از روی احتمالات سالم بودن مشروط به دست آورده‌ایم.


B1
P(A|B1)
A
P(B1)
B3
P(A|B3)
A
B4
P(A|B4)
A
P(B2)
A
B2
P(A|B2)

قانون بیز

گاهی اوقات واقعه‌ای رخ داده است و به دنبال علت می‌گردیم. بعد از آزمایش می‌خواهیم تحلیل کنیم که چطور شد که این نتیجه به دست آمد و از کدام مسیر به این حالت برآمد رسیدیم.
مثلا در مثال ۷، یک لامپ برداشتیم و مثلا دیدیم که سوخته است. حال احتمالا از کدام جعبه برداشته شده بود؟ یعنی احتمال انتخاب جعبه‌ها را می‌خواهیم، البته بعد از انجام آزمایش و در نتیجه با دانش بیشتر.

قضیه بیز

اگر پیشامدهای $B_۱, B_۲, \ldots, B_k$ افرازی از فضای نمونه‌ای S باشند و احتمال هیچ کدام صفر نباشد، آنگاه برای هر پیشامد $A \subseteq S$ به طوری که $P(A) \neq ۰$، و به ازای $r = ۱, ۲, \ldots, k$ داریم:

$$P(B_r|A) = \frac{P(A|B_r)P(B_r)}{\sum_{i=۱}^{k} P(A|B_i)P(B_i)}$$

برهان:

$$\underbrace{P(B_r|A)}_{\text{احتمال پسین}} = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_r \cap A)}{\underbrace{\sum_{i=۱}^{k} P(A|B_i)P(B_i)}_{\text{احتمال کل}}} = \frac{P(A|B_r)P(B_r)}{\sum_{i=۱}^{k} P(A|B_i)\underbrace{P(B_i)}_{\text{احتمال پیشین}}}$$

مثال ۸

در مثال ۷ فرض کنید که لامپی که به تصادف بیرون کشیدیم سالم بوده است. احتمال این که از جعبه اول برداشته شده باشد چقدر است؟

راه حل:

$$P(B_۱|A) = \frac{P(A|B_۱)P(B_۱)}{P(A)} = \frac{۰/۵ \times ۰/۵}{۰/۶۵} = ۰/۳۸$$

می‌بینیم که احتمال انتخاب جعبه اول پس از برداشتن لامپ و رویت سالم بودن آن (دانش اضافی) کم‌تر شده است. زیرا درصد لامپ‌های سالم در جعبه اول کم‌تر از جعبه دوم بود.

مثال ۹

اگر شخصی بیماری خاصی داشته باشد، جواب تست او با احتمال ۹۵ درصد مثبت خواهد بود و اگر سالم باشد، جواب تست با احتمال ۹۵ درصد منفی می‌شود. فرض کنید احتمال ابتلا به این بیماری خاص ۱۰ درصد باشد. حال اگر نتیجه آزمایش فردی مثبت باشد با چه احتمالی واقعا بیمار است؟

راه حل: پیشامد A را بیمار بودن، پیشامد B را مثبت بودن تست در نظر می‌گیریم. داریم:

$$P(A) = ۰/۱, \quad P(B|A) = ۰/۹۵, \quad P(B'|A') = ۰/۹۵, \quad P(A|B) = ?$$

$$P(B|A') = ۱ - P(B'|A') = ۰/۰۵, \quad P(A') = ۰/۹$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{\underbrace{P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A')}_{P(B)}} = \frac{۰/۹۵ \times ۰/۱}{۰/۹۵ \times ۰/۱ + ۰/۰۵ \times ۰/۹} = ۰/۶۸$$

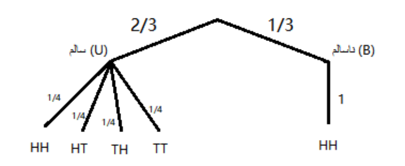
مثال ۱۰

سه سکه داریم، دو تا از آن‌ها سالم و یکی دو رویش شیر است. یک سکه به تصادف انتخاب کرده و آن را دوبار پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو بار شیر بیاید، احتمال اینکه سکه ناسالم باشد چقدر است؟

مثال ۱۰

سه سکه داریم، دو تا از آن‌ها سالم و یکی دو رویش شیر است. یک سکه به تصادف انتخاب کرده و آن را دوبار پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو بار شیر بیاید، احتمال اینکه سکه ناسالم باشد چقدر است؟

راه حل:



$$P(B|HH)=\frac{P(B\cap HH)}{P(HH)}=\frac{P(HH|B)P(B)}{P(HH|B)P(B)+P(HH|U)P(U)}$$

$$\frac{۱\times\frac{۱}{۳}}{۱\times\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۳}}=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۳}{۶}}=\frac{۲}{۳}$$

مثال ۱۱

فرض کنید برای ساختن دستگاهی قطعه‌ای لازم باشد که به ترتیب با احتمال‌های ۳۰، ۲۵ و ۴۵ درصد از سه شرکت A، B و C خریداری می‌شوند. قطعات شرکت A با احتمال ۱۰ درصد، قطعات شرکت B با احتمال ۵ درصد و قطعات شرکت C با احتمال ۱۵ درصد ممکن است خراب باشند. احتمال این‌که قطعه خریداری شده خراب باشد چقدر است؟ اگر قطعه خریداری شده سالم باشد، با چه احتمالی از شرکت B خریداری شده است؟

مثال ۱۱

فرض کنید برای ساختن دستگاهی قطعه‌ای لازم باشد که به ترتیب با احتمال‌های ۳۰، ۲۵ و ۴۵ درصد از سه شرکت A، B و C خریداری می‌شوند. قطعات شرکت A با احتمال ۱۰ درصد، قطعات شرکت B با احتمال ۵ درصد و قطعات شرکت C با احتمال ۱۵ درصد ممکن است خراب باشند. احتمال این‌که قطعه خریداری شده خراب باشد چقدر است؟ اگر قطعه خریداری شده سالم باشد، با چه احتمالی از شرکت B خریداری شده است؟

راه حل:

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) =$$
$$(۰/۱)(۰/۳) + (۰/۰۵)(۰/۲۵) + (۰/۱۵)(۰/۴۵) = ۰/۱۱$$

$$P(B|N) = \frac{P(N|B)P(B)}{\underbrace{P(N|A)P(A) + P(N|B)P(B) + P(N|C)P(C)}_{P(N)=۱-P(D)}} =$$

$$\frac{۰/۹۵ \times ۰/۲۵}{۱ - ۰/۱۱} = ۰/۲۸$$

استقلال پیشامدها

پیشامدهای مستقل

تعریف: دو پیشامد A و B را مستقل گوییم اگر و تنها اگر

$$P(A|B) = P(A) \quad (P(B|A) = P(B))$$

و آن را با نماد $A \perp B$ نشان می‌دهیم. در غیر این صورت، آن‌ها را وابسته گوییم.

قضیه

دو پیشامد A و B مستقلند اگر و تنها اگر $\quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$

از دیدگاه فراوانی نسبی، اگر A و B مستقل باشند، داریم:

$$P(A) = \frac{n_A}{n_S} = \frac{n_{A\cap B}}{n_B} = P(A|B)$$

مثلا اگر بیماری قلبی داشتن افراد و دانشجو بودن افراد از هم مستقل باشد، درصد کل بیماران قلبی با درصد بیماران قلبی در بین دانشجویان یکی است.

مثال ۱۲:

فرض کنید ۸ کارت داریم که از ۱ تا ۸ شماره گذاری شده باشند. دو کارت به تصادف انتخاب می‌کنیم.
احتمال این که کارت اول ۳ (A) و کارت دوم بزرگ‌تر از ۶ (B) باشد چقدر است؟

راه حل: حالت اول، با جایگذاری یا مستقل

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{۱}{۸} \times \frac{۲}{۸} = \frac{۲}{۱۶}$$

حالت دوم، بدون جایگذاری یا وابسته

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{۱}{۸} \times \frac{۲}{۷} = \frac{۲}{۵۶}$$

نتیجه ۱

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند ($A \perp B$)، داریم:

$$A \perp B', \quad A' \perp B', \quad A' \perp B$$

اگر A و B مستقل باشند و A و C نیز مستقل باشند **نمی‌توانیم** نتیجه بگیریم که
$A \perp B \cap C, A \perp B \cup C$

استقلال چند پیشامد

اگر داشته باشیم

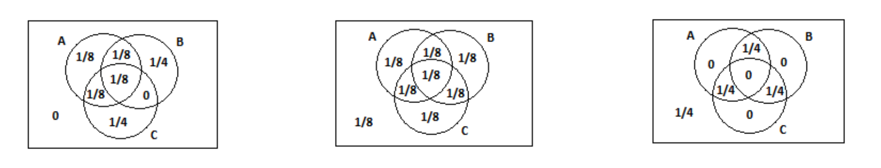
$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad P(A \cap C) = P(A)P(C),$$
$$P(B \cap C) = P(B)P(C), \quad P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

آنگاه پیشامدهای A، B و C مستقلند.

- هر کدام از این سه پیشامد نیز از هر ترکیب دوتای دیگر مستقل است.

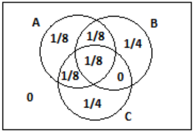
مثال ۱۳

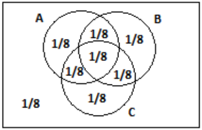
در کدام یک از تصاویر زیر، سه پیشامد A، B و C مستقل هستند:

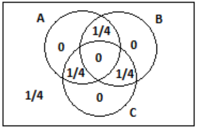


مثال ۱۳

در کدام یک از تصاویر زیر، سه پیشامد A، B و C مستقل هستند:







راه حل:

$P(A\cap B) = P(A)P(B)$ ✓

$P(A\cap C) = P(A)P(C)$ ✓

$P(B\cap C) = P(B)P(C)$ X

$P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$ ✓

$P(A\cap B) = P(A)P(B)$ ✓

$P(A\cap C) = P(A)P(C)$ ✓

$P(B\cap C) = P(B)P(C)$ ✓

$P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$ ✓

$P(A\cap B) = P(A)P(B)$ ✓

$P(A\cap C) = P(A)P(C)$ ✓

$P(B\cap C) = P(B)P(C)$ ✓

$P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$ X

قضیه

n پیشامد $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مستقلند هرگاه برای هر دسته اعداد صحیح $k_1, k_2, \ldots, k_r$ $(r \leq n)$، داشته باشیم:

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_r}) = P(A_{k_1})P(A_{k_2}) \ldots P(A_{k_r})$$

- $2^n - (n+1)$ رابطه باید برقرار باشد.

قضیه

n پیشامد $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ مستقلند هرگاه برای هر دسته اعداد صحیح $k_۱, k_۲, \ldots, k_r$ ($r \leq n$)، داشته باشیم:

$$P(A_{k_۱} \cap A_{k_۲} \cap \ldots \cap A_{k_r}) = P(A_{k_۱})P(A_{k_۲}) \ldots P(A_{k_r})$$

- $۲^n - (n+۱)$ رابطه باید برقرار باشد.

مثال ۱۴

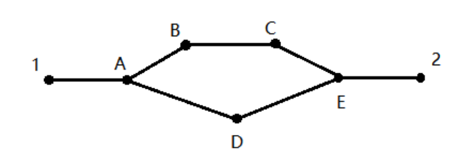
در دو بار پرتاب یک جفت تاس، احتمال رو آمدن مجموع ۷ و ۱۱ چقدر است؟

راه حل:

$$A_۱ = \text{مجموع ۷ در پرتاب اول}, \quad A_۲ = \text{مجموع ۷ در پرتاب دوم}$$
$$B_۱ = \text{مجموع ۱۱ در پرتاب اول}, \quad B_۲ = \text{مجموع ۱۱ در پرتاب دوم}$$
$$P\left((A_۱ \cap B_۲) \cup (A_۲ \cap B_۱)\right) = P(A_۱ \cap B_۲) + P(A_۲ \cap B_۱) =$$
$$P(A_۱)P(B_۲) + P(A_۲)P(B_۱) = \frac{۶}{۳۶} \times \frac{۲}{۳۶} + \frac{۲}{۳۶} \times \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۵۴}$$

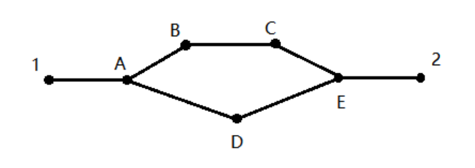
مثال ۱۵

برای ارتباط مخابراتی بین نقاط ۱ و ۲ در شکل زیر، از ایسگاه‌های A، B، C، D و E استفاده می‌شود. همه ایستگاه‌ها مثل هم هستند و خرابی آن‌ها از هم مستقل است. احتمال سالم بودن هر ایستگاه در طول زمان T برابر با p است. احتمال این که بین نقاط ۱ و ۲ در طول زمان T ارتباط برقرار باشد چقدر است؟ (برای برقراری ارتباط بین A و E، سالم بودن استگاه D و یا ایستگاه‌های B و C کافی است.)



مثال ۱۵

برای ارتباط مخابراتی بین نقاط ۱ و ۲ در شکل زیر، از ایستگاه‌های A، B، C، D و E استفاده می‌شود. همه ایستگاه‌ها مثل هم هستند و خرابی آن‌ها از هم مستقل است. احتمال سالم بودن هر ایستگاه در طول زمان T برابر با p است. احتمال این که بین نقاط ۱ و ۲ در طول زمان T ارتباط برقرار باشد چقدر است؟ (برای برقراری ارتباط بین A و E، سالم بودن استگاه D و یا ایستگاه‌های B و C کافی است.)



راه حل:

$$|S| = ۲^{۵}$$
$$S = \{(A,B,C,D,E),(A,B,C,D,E'),\ldots(A',B',C',D',E')\}$$
$$P(A\cap((B\cap C)\cup D)\cap E) = P(A)P((B\cap C)\cup D)P(E) =$$
$$P(A)\left(P(B\cap C)+P(D)-P(B\cap C\cap D)\right)P(E) =$$
$$P(A)\left(P(B)P(C)+P(D)-P(B)P(C)P(D)\right)P(E) =$$
$$p(p^{۲}+p-p^{۳})P = p^{۳}(p+۱-p^{۲})$$