امید ریاضی تابعی از متغیرهای تصادفی و کوواریانس

فردوس گرجی

امید ریاضی

امید ریاضی متغیر تصادفی گسسته:

تعریف : اگر متغیر تصادفی گسسته X دارای تابع جرم احتمال $f(x)$ باشد، میانگین یا مقدار مورد انتظار یا امید ریاضی X برابر است با:

$$E(X) = \sum_x xf(x)$$

امید ریاضی متغیر تصادفی پیوسته:

تعریف : اگر متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد، میانگین یا مقدار مورد انتظار یا امید ریاضی X برابر است با:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

قضیه:

فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با توزیع احتمال $f(x)$ باشد. میانگین یا مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی $g(X)$ عبارت است از:

$$E(g(X)) = \sum_x g(x)f(x)$$

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با چگالی احتمال $f(x)$ باشد. میانگین یا مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی $g(X)$ عبارت است از:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

➢ امید ریاضی :

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع توزیع احتمال توأم $f(x,y)$ باشند.
میانگین یا مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی $g(X,Y)$ برابر است با:

در حالت گسسته:

$$\mu_{g(X,Y)} = E(g(X,Y)) = \sum_x \sum_y g(x,y)\, f(x,y)$$

در حالت پیوسته:

$$\mu_{g(X,Y)} = E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y)\, dx dy$$

➢ **مثال۱:** تابع توزیع احتمال توأم مقابل را در نظر بگیرید.
مطلوب است $E(XY)$ و $E(X-Y)$

Y \ X	1	2	3
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xyf(x,y) = (1)(1)(\tfrac{1}{3}) + (2)(1)(\tfrac{1}{6}) + (3)(1)(\tfrac{1}{9})$$
$$+ (1)(2)(0) + (2)(2)(\tfrac{1}{6}) + (3)(2)(\tfrac{1}{9}) + (1)(3)(0) + (2)(3)(0)$$
$$+ (3)(3)(\tfrac{1}{9}) = \mathbf{\frac{10}{3}}$$
$$E(X-Y) = \sum_x \sum_y (x-y)f(x,y) = (1-1)(\tfrac{1}{3}) + (2-1)(\tfrac{1}{6})$$
$$+ (3-1)(\tfrac{1}{9}) + (1-2)(0) + (2-2)(\tfrac{1}{6}) + (3-2)(\tfrac{1}{9}) + (1-3)(0)$$
$$+ (2-3)(0) + (3-3)(\tfrac{1}{9}) = \mathbf{\frac{4}{9}}$$

مثال۲ : فرض کنید شرکتی بسته‌های یک کیلویی شامل دو نوع شکلات و یک نوع آب‌نبات را بسته‌بندی می‌کند و لزوماً وزن سه نوع محصول در جعبه‌ها یکسان نیست. اگر X را وزن شکلات نوع اول و Y را وزن شکلات نوع دوم درنظر بگیریم، تابع چگالی احتمال توأم آن به صورت زیر است:

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy & 0 < x < 1\ ;\ \ 0 < y < 1 \\ & x + y \leq 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

مقدار مورد انتظار وزن مجموع شکلات‌ها چقدر است؟

$$E(X+Y) = \int_0^1 \int_0^{1-y} (x+y) \times 24xy\, dxdy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-y} (24x^2y + 24xy^2)\, dxdy = \int_0^1 \left[(8x^3y + 12x^2y^2) \Big|_0^{1-y} \right] dy$$

$$= \int_0^1 (4y^4 - 12y^2 + 8y) dy = \left(\frac{4}{5}y^5 - 4y^3 + 4y^2 \right) \Big|_0^1 = \mathbf{\frac{4}{5}}$$

➢ **مثال۳ :** تابع چگالی احتمال توأم زیر را در نظر بگیرید. اگر $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ، مطلوب است محاسبه‌ی $E(z)$.

$$f(x,y)=\begin{cases} 4xy & 0<x<1\,;\ \ 0<y<1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$E(Z)=E\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\int_0^1\int_0^1(\sqrt{x^2+y^2})\times 4xy\,dxdy$$
$$=\int_0^1 2y\int_0^1 2x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^1 2y\left[\frac{2}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^1\right]dy$$
$$=\frac{2}{3}\int_0^1(2y(1+y^2)^{\frac{3}{2}}-2y^4)dy=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}(1+y^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{5}y^5\right)\bigg|_0^1=\frac{8}{15}(2\sqrt{2}-1)$$
$$=\mathbf{0.9752}$$

➢ **قضیه :** مقدار مورد انتظار مجموع یا تفاضل دو یا چند تابع از متغیرهای تصادفی X و Y برابر با مجموع یا تفاضل مقادیر مورد انتظار توابع مذکور است. یعنی:

$$E[g(X,Y) \pm h(X,Y)] = E\big(g(X,Y)\big) \pm E(h(X,Y))$$

اثبات: (در حالت پیوسته)

$$E[g(X,Y) \pm h(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big(g(x,y) \pm h(x,y)\big) f(x,y)dxdy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y)dxdy \pm \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) f(x,y)dxdy$$
$$= E\big(g(X,Y)\big) \pm E(h(X,Y))$$

➢ **نتیجه۱:** اگر $h(X,Y) = h(Y)$ و $g(X,Y) = g(X)$ ، آنگاه :

$$E(g(X) \pm h(Y)) = E\big(g(X)\big) \pm E(h(Y))$$

➢ **نتیجه۲:** اگر $h(X,Y) = Y$ و $g(X,Y) = X$ ، آنگاه :

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

➢ **نکته:** اگر $g(X,Y) = X$ ، داریم :

$$E(g(X,Y)) = E(X)$$

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x \sum_y x f(x,y) = \sum_x x \overbrace{\sum_y f(x,y)}^{f_X(x)} = \sum_x x f(X) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)\, dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy}_{f_X(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \end{cases}$$

➢ کوواریانس

اگر قرار دهیم $g(X,Y) = (X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ ، مقدار مورد انتظار $g(X,Y)$ کمیتی به نام کوواریانس را بدست می‌دهد که میزان وابستگی X و Y به یکدیگر را نشان می‌دهد.

تعریف : فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با تابع توزیع احتمال توأم $f(x,y)$ باشد. کوواریانس X و Y عبارت است از:

حالت گسسته:

$$\sigma_{XY} = cov(x,y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x-\mu_X)(y-\mu_Y)\, f(x,y)$$

حالت پیوسته:

$$\sigma_{XY} = cov(x,y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f(x,y)\, dxdy$$

- میزان وابستگی بین X و Y را نشان می‌دهد.
- ممکن است مثبت، منفی یا صفر باشد.
- اگر X و Y مستقل باشند، کوواریانس آن‌ها صفر است ولی عکس این موضوع لزوماً برقرار نیست.

➢ قضیه :

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

<u>**اثبات:**</u> (در حالت پیوسته)

$$\sigma_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(xy-\mu_X y-\mu_Y x+\mu_X\mu_Y)f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{xyf(x,y)}_{E(XY)}\,dxdy - \mu_X\int_{-\infty}^{\infty} y\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy}_{f_Y(y)}$$

$$- \mu_Y\int_{-\infty}^{\infty} x\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dydx}_{f_X(x)} + \mu_X\mu_Y\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy}_{1} = \boldsymbol{E(XY) - \mu_X\mu_Y}$$

➢ **مثال۴:** تابع توزیع احتمال توأم مقابل را در نظر بگیرید.
مطلوب است کوواریانس X و Y .

Y \ X	1	2	3	$f_Y(y)$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{11}{18}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
$f_X(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

در مثال ۱ محاسبه کردیم که $E(XY) = \frac{10}{3}$
داریم:

$$\mu_X = E(X) = \sum_x xf(x) = (1)(\tfrac{1}{3}) + (2)(\tfrac{1}{3}) + (3)(\tfrac{1}{3}) = \mathbf{2}$$

$$\mu_Y = E(Y) = \sum_y yf(y) = (1)(\tfrac{11}{18}) + (2)(\tfrac{15}{18}) + (3)(\tfrac{1}{9}) = \mathbf{\tfrac{3}{2}}$$

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{10}{3} - (2)(\tfrac{3}{2}) = \mathbf{\tfrac{1}{3}} \quad > \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow$$

اگر X زیاد شود، انتظار می‌رود Y نیز زیاد شود. اگر Y زیاد شود، انتظار داریم X هم زیاد شود

➢ **مثال۵ :** تابع چگالی احتمال زیر را در نظر بگیرید. مطلوبست محاسبه‌ی کوواریانس X و Y .

$$f(x,y)=\begin{cases} 24xy & 0<x<1\,;\ \ 0<y<1 \\ & x+y\leq 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^{1-x}24x^2y^2\,dydx=\int_0^1 8x^2(1-x^3)dx$$

$$=\left(\frac{8x^3}{3}-6x^4+\frac{24x^5}{5}-\frac{8x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=\mathbf{\frac{4}{30}}$$

$$E(X)=\int_0^1\int_0^{1-x}24x^2y\,dydx=\int_0^1 12x^2(1-x)^2dx$$

$$=\left(4x^3-6x^4+\frac{12x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\mathbf{\frac{2}{5}}$$

$$E(Y)=\mathbf{\frac{2}{5}}$$

$$\sigma_{XY}=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{30}-\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{-2}{75}<0$$

اگر شکلات نوع اول زیاد شود، انتظار داریم شکلات نوع دوم کم شود و بالعکس.

➢ ضریب همبستگی

تعریف : فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با کوواریانس σ_{XY} و انحراف معیارهای σ_X و σ_Y باشند. ضریب همبستگی X و Y عبارت است از:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

❄ واحد ندارد

❄ $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ (نزدیک صفر ≡ همبستگی کم ؛ نزدیک ۱ و ۱- ≡ همبستگی زیاد)

❄ مقیاس اعداد در آن اثر ندارد

❄ اگر Y ترکیب خطی از X باشد $(Y = aX + b)$ ، آنگاه:

$$\rho_{XY} = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$$

➢ **مثال۶ :** در مثال ۴، ضریب همبستگی را بیابید.

از قبل محاسبه کردیم $\sigma_{XY} = \frac{1}{3}$ ، $\mu_X = 2$ ، $\mu_Y = \frac{3}{2}$. داریم:

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f(x) = (1)^2(\tfrac{1}{3}) + (2)^2(\tfrac{1}{3}) + (3)^2(\tfrac{1}{3}) = \frac{14}{3}$$

$$\sigma_X{}^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma_X = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$E(Y^2) = \sum_y y^2 f(y) = (1)^2(\tfrac{11}{18}) + (2)^2(\tfrac{15}{18}) + (3)^2(\tfrac{2}{18}) = \frac{49}{18}$$

$$\sigma_Y{}^2 = E(Y^2) - \big(E(Y)\big)^2 = \frac{49}{18} - (\frac{3}{2})^2 = \frac{17}{36} \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma_Y = \frac{\sqrt{17}}{6}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{17}}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{12}{34}}$$

➢ **مثال۷ :** در مثال ۵ ، ضریب همبستگی را محاسبه کنید.

از قبل محاسبه کردیم $\sigma_{XY} = \frac{-2}{75}$ ، $E(X) = \frac{2}{5}$ ، $E(Y) = \frac{2}{5}$. داریم:

$$E(X^2) = \int_0^1 \int_0^{1-x} 24x^3 y\, dydx = \int_0^1 [12x^3y^2 \Big|_0^{1-x}]dx = \int_0^1 12x^3(1-x)^2 dx$$

$$= \left(3x^4 - \frac{24x^5}{5} + 2x^6\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{5}$$

$${\sigma_X}^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{1}{5} - (\frac{2}{5})^2 = \frac{1}{25} \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma_X = \frac{1}{5}$$

به طریق مشابه داریم $\sigma_Y = \frac{1}{5}$. لذا :

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\frac{-2}{75}}{\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

➢ **قضیه :** فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند. در این صورت:

$$E(XY) = E(X)E(Y) \qquad \text{یا} \qquad \sigma_{XY} = 0$$

اثبات: (در حالت پیوسته)

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_X(x)f_Y(y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)\,dxdy = \mu_X\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)\,dx = \mu_X\mu_Y = E(X)E(Y)$$

نتیجه: اگر X و Y مستقل باشند، $\rho_{XY} = 0$.

➢ **قضیه :** اگر X و Y متغیرهای تصادفی با تابع توزیع احتمال توأم $f(x,y)$ باشند، آنگاه:

$$\sigma^2{}_{aX+bY} = a^2\sigma^2{}_X + b^2\sigma^2{}_Y + 2ab\sigma_{XY}$$

اثبات:

$$\sigma^2{}_{aX+bY} = E\left((aX+bY)^2\right) - \left(E(aX+bY)\right)^2 = E(a^2X^2 + 2abXY + b^2Y^2)$$

$$-\left(aE(x) + bE(y)\right)^2 = a^2E(X^2) + 2abE(XY) + b^2E(Y^2) - a^2(E(X))^2$$

$$-2abE(X)E(Y) - b^2\left(E(Y)\right)^2 = a^2\left(E(X^2) - \left(E(X)\right)^2\right) + b^2(E(Y^2) - (E(Y))^2)$$

$$+2ab\left(E(XY) - E(X)E(Y)\right) = a^2\sigma_X{}^2 + b^2\sigma_Y{}^2 + 2ab\sigma_{XY}$$

➢ **نکته :** اگر X و Y متغیرهای تصادفی با تابع توزیع احتمال توأم $f(x,y)$ باشند، آنگاه:

$$\sigma^2{}_{aX+bY+c} = \sigma^2{}_{Z+c} = \sigma^2{}_{Z}$$

$$\uparrow$$

قرار می‌دهیم $Z = aX + bY$

نتیجه: اگر X و Y مستقل باشند، آنگاه:

$$\sigma^2{}_{aX \pm bY} = a^2\sigma^2{}_X + b^2\sigma^2{}_Y$$

و اگر $X_1, \dots, X_n$ مستقل باشند، آنگاه:

$$\sigma^2{}_{a_1X_1+\dots+a_nX_n} = a_1{}^2\sigma^2{}_{X_1} + a_2{}^2\sigma^2{}_{X_2} + \dots + a_n{}^2\sigma^2{}_{X_n}$$

➢ نکته :

$$* \ \sigma^2_{(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i)} = \sigma^2_{a_1X_1 + \ldots + a_nX_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma^2_{X_i} + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_i a_j \, \sigma_{X_i X_j}$$

$* \ Cov(X,a) = 0 \qquad E(ax) - E(a)E(X) = aE(X) - aE(X) = 0$

$* \ Cov(X,X) = Var(X) \qquad E(XX) - E(X)E(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \sigma_X^2$

$* \ Cov(X,Y) = Cov(Y,X) \qquad \sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = E(YX) - E(Y)E(X) = \sigma_{YX}$

$* \ Cov(aX + bY, cZ + dW) = ac\sigma_{XZ} + ad\sigma_{XW} + bc\sigma_{YZ} + bd\sigma_{YW}$

$* \ Cov(X + t, Z + s) = Cov(X, Z)$

مثال۸ : فرض کنید شرکتی دو بازاریاب دارد که مستقل از یکدیگر و به صورت پورسانتی حقوق دریافت می‌کنند. بازاریاب اول به طور متوسط، ماهانه ۱۰۰ دلار (با انحراف معیار ۱۰ دلار) و بازاریاب دوم ماهانه به طور متوسط ۱۵۰ دلار (با انحراف معیار ۲۰ دلار) دریافت می‌کند.اگر شرکت به اندازه ۱۰٪ حقوق هر بازاریاب به شرکت بیمه پرداخت کند، میانگین و انحراف معیار مبلغی که شرکت بابت بازاریاب‌ها هزینه می‌کند چقدر است؟

$E(X) = 100 \qquad \sigma_X = 10$

$E(Y) = 150 \qquad \sigma_Y = 20$

میزان هزینه شرکت برای بازاریاب‌ها

↓

$Z_1 = 1.10\, X \quad ; \quad Z_2 = 1.10\, Y \qquad Z = Z_1 + Z_2 = 1.1\, X + 1.1\, Y$

$E(Z) = 1.1E(X) + 1.1E(Y) = 275$ دلار

X و Y مستقل

$\sigma^2{}_Z = \sigma^2{}_{1.1X+1.1Y} = 1.21\sigma^2{}_X + 1.21\sigma^2{}_Y + (1.1)(1.1)\cancel{\sigma_{XY}}^{\,0}$

$= 1.21 \times 100 + 1.21 \times 400 = 603 \qquad \Longrightarrow \quad \sigma_Z = \sqrt{603} = 24.56$ دلار

➢ **مثال۹:** فرض کنید X_3, X_2, X_1 دارای واریانس‌های ۵ و ۴ و ۷ باشند و نیز $\sigma_{X_1X_2} = 3$ ، $\sigma_{X_1X_3} = -1$ و X_2,X_3 مستقل باشند. اگر $Y_1 = X_1 - 2X_2 + 3X_3$ و $Y_2 = -2X_1 + 3X_2 + 4X_3$ مطلوب است $Cov(Y_1,Y_2)$ و $Var(Y_1)$.

$$Var(Y_1) = Var(X_1 - 2X_2 + 3X_3) = \sigma_{X_1}^2 + 4\sigma_{X_2}^2 + 9\sigma_{X_3}^2 - 4\sigma_{X_1X_2} + 6\sigma_{X_1X_3} - 12\sigma_{X_2X_3}$$

$$= 5 + 4(4) + 9(7) - 4(3) + 6(-1) + 12(0) = \mathbf{66}$$

$$Cov(Y_1, Y_2) = Cov\big((-2X_1 + 3X_2) + 4X_3 \, , (X_1 - 2X_2) + 3X_3\big)$$

$$= Cov(-2X_1 + 3X_2 \, , X_1 - 2X_2) + 3Cov(-2X_1 + 3X_2, X_3) + 4Cov(X_3, X_1 - 2X_2)$$

$$+ 12Cov(X_3, X_3) = -2Cov(X_1, X_1) + 4Cov(X_1, X_2) + 3Cov(X_2, X_1) - 6Cov(X_2, X_2)$$

$$-6Cov(X_1, X_3) + 9Cov(X_2, X_3) + 4Cov(X_3, X_1) - 8Cov(X_3, X_2)$$

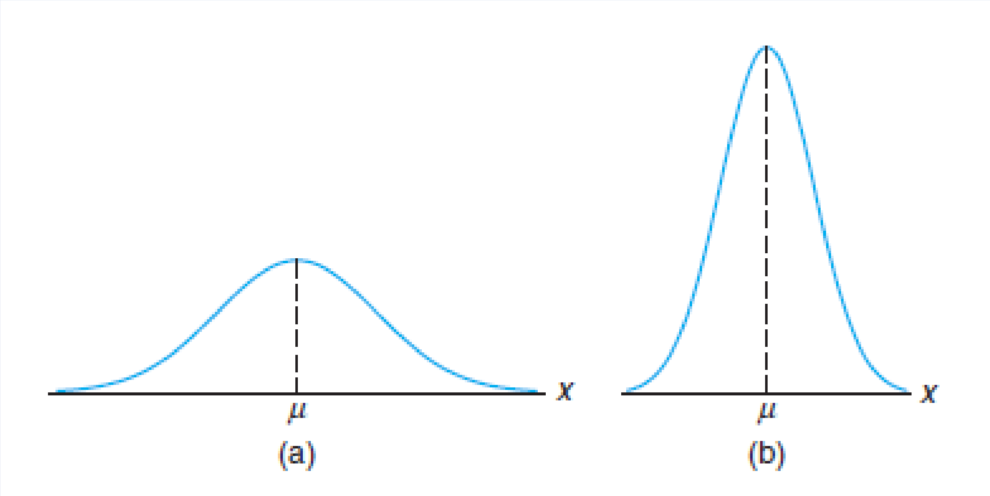
$$+12\sigma_{X_3}^2 = -2\sigma_{X_1}^2 + 7\sigma_{X_1X_2} - 6\sigma_{X_2}^2 - 2\sigma_{X_1X_3} + \sigma_{X_2X_3} + 12\sigma_{X_3}^2$$

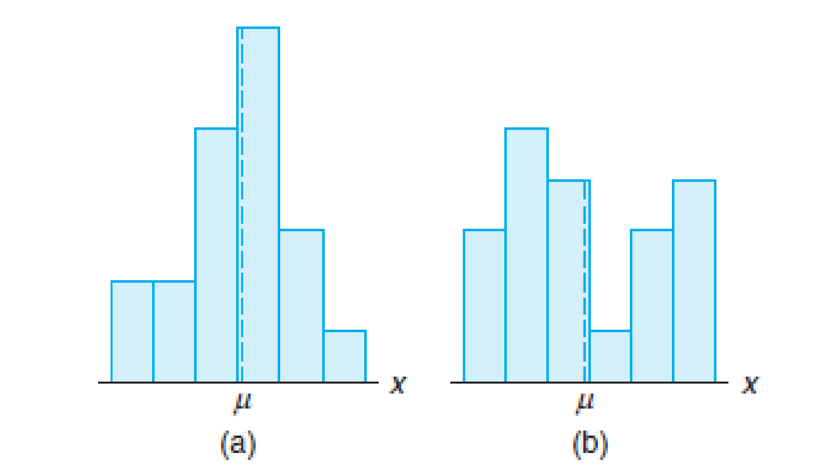
$$= -2(5) + 7(3) - 6(4) - 2(-1) + 1(0) + 12(7) = \mathbf{73}$$

- **قضیه چبیشف :** احتمال این که متغیر تصادفی دلخواه X مقداری بین k برابر انحراف معیار از میانگین را اختیار کند، حداقل $1-\frac{1}{k^2}$ است، یعنی

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

در واقع احتمال این که مشاهدات در فاصله متقارنی حول میانگین توزیع باشد، به مقدار انحراف معیار توزیع (میزان پراکندگی داده‌ها) وابسته است. مثلا می‌دانیم که همواره حداقل $\frac{3}{4}$ داده‌ها در هر توزیعی در فاصله کمتر از 2σ از میانگین توزیع هستند. این قضیه برای هر توزیع دلخواهی از مشاهدات برقرار است و تنها یک کران پایین برای احتمال به دست می‌دهد نه مقدار واقعی احتمال را. فقط زمانی که توزیع معلوم باشد می‌توان مقدار دقیق احتمال مورد نظر را به دست آورد. لذا این قضیه تنها در حالت‌هایی که شکل توزیع نامعلوم است و فقط میانگین و انحراف معیار را می‌دانیم به کار می‌رود.


x
μ
(a)
x
μ
(b)


x
μ
(a)
x
μ
(b)

مثال۱۰ : فرض کنید متغیر تصادفی X دارای میانگین $\mu = 12$ و واریانس $\sigma^2 = 9$ بوده و توزیع احتمال آن نامعلوم است. مقادیر زیر را بیابید:

$$P(6 < X < 18), \qquad P(|X-12| \geq 9).$$

$$P(6 < X < 18) = P\big(12-(3)(2) < X < 12+(3)(2)\big) \geq 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(|X-12| \geq 9) = 1 - P(|X-12| < 9)$$
$$= 1 - P\big(12-(3)(3) < X < 12+(3)(3)\big) \leq 1-(1-\frac{1}{9}) = \frac{1}{9}$$