زهرا دامان ۹۹۳۱۰۰۶

۱ - الف)

$$x_1^2 + x_2^2 + 10x_1x_2$$

$$\begin{array}{c|cc} & x_1 & x_2 \\ \hline x_1 & 1 & 5 \\ x_2 & 5 & 1 \end{array}$$

ب)

$$9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 + 8x_1x_3 - 8x_1x_2$$

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 9 & -4 & 4 \\ x_2 & -4 & 7 & 0 \\ x_3 & 4 & 0 & 11 \end{array}$$

۲ - الف)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 16 & 4-\lambda & -6 \\ -16 & 4 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda \begin{cases} 8 \\ 6 \\ 0 \end{cases}$$

for $\lambda = 8$: $\text{Null} A = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

for $\lambda = 0$: $\text{Null} A = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

for $\lambda = 6$: $\text{Null} A = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برای بررسی صحت پاسخ PDP^{-1} را محاسبه می‌کنیم که به ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & -6 \\ -16 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

می‌رسیم.

زهرا امان ۹۹۳۱۰۰۶

۲ - ب) ماتریس A متقارن است پس به صورت عمودی قطری می شود.

$$\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)\lambda^2 \Rightarrow \lambda \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 3 \end{cases}$$

$$\lambda=0 \Rightarrow v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow u_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix} \quad u_2=\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt6} \\ \frac{2}{\sqrt6} \\ -\frac{1}{\sqrt6} \end{bmatrix}$$

$$\lambda=3 \Rightarrow v_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow u_3=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt3} \end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{-1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{-1}{\sqrt2} & \frac{-1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

۳ - الف)

$$A^T=\begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad W=AA^T=\begin{bmatrix} 10 & -20 & -20 \\ -20 & 40 & 40 \\ -20 & 40 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & -20 & -20 \\ -20 & 40-\lambda & 40 \\ -20 & 40 & 40-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^2(90-\lambda)=0 \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 90 \end{cases}$$

$$\lambda=90 \quad v_1=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda=0 \quad v_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1=\sqrt{90}=3\sqrt{10} \qquad \Sigma=\begin{bmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad U=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt5}{5} & \frac{2\sqrt5}{15} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt5}{5} & -\frac{4\sqrt5}{15} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt5}{3} \end{bmatrix}$$

$$V=\begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{-\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A=U\Sigma V^T}$$

زهاد امان ۶۰۱۳۱۰۹۹

۳ - ب)

$$A^T = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & ۳ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix} \qquad A^TA = \begin{bmatrix} ۱۳ & ۱۲ & ۲ \\ ۱۲ & ۱۳ & -۲ \\ ۲ & -۲ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ۱۳-\lambda & ۱۲ & ۲ \\ ۱۲ & ۱۳-\lambda & -۲ \\ ۲ & -۲ & ۸-\lambda \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow -\lambda(\lambda-۲۵)(\lambda-۹) = ۰ \begin{cases} ۲۵ \\ ۹ \\ ۰ \end{cases}$$

$$\lambda = ۲۵ \quad \text{Null}A = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \right\} \qquad \lambda = ۹ \quad \text{Null}A = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} \\ -\frac{۱}{۴} \\ ۱ \end{bmatrix} \right\}$$

$$\lambda = ۰ \quad \text{Null}A = \left\{ \begin{bmatrix} -۲ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \right\} \qquad \boxed{\sigma_۱ = \sqrt{۲۵} = ۵} \qquad \boxed{\sigma_۲ = \sqrt{۹} = ۳}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۶} & -\frac{۲}{۳} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}} & \frac{۲}{۳} \\ ۰ & \frac{۲\sqrt{۲}}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix} \qquad \boxed{A = U\Sigma V^T}

زهرا امانی ۹۹۳۱۰۰۶

۵ - A ماتریس متقارن و حقیقی است پس توسط یک ماتریس متعامد قابل قطری سازی است.

به طوریکه $A = UDU^T$ به صورتی که U orthogonal و D قطری است.

چون A مثبت معین است تمام درایه‌های D غیرمنفی اند پس دارای ریشه دوم هستند.

پس $\sqrt{D}$ تعریف می‌شود. $B = U\sqrt{D}U^T \Rightarrow \boxed{B^۲ = A}$

۶ - $\boxed{A = Q\Lambda Q^{-1}}$

$\boxed{AQ = Q\Lambda}$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} ۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

قطری مقادیر ویژه ی A

$$Q = \begin{bmatrix} ۰/۷۰۷۱ & -۰/۴۰۸۲ & ۰/۵۷۷۴ \\ -۰/۷۰۷۱ & -۰/۴۰۸۲ & ۰/۵۷۷۴ \\ ۰ & ۰/۸۱۶۵ & ۰/۵۷۷۴ \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} ۰/۷۰۷۱ & -۰/۷۰۷۱ & ۰ \\ -۰/۴۰۸۲ & -۰/۴۰۸۲ & ۰/۸۱۶۵ \\ ۰/۵۷۷۴ & ۰/۵۷۷۴ & ۰/۵۷۷۴ \end{bmatrix}$$