فرهاد امان ۹۹۳۱۰۰۶

۱- از قبل با ماتریس های مقدمات آشنایی داریم و می دانیم که با ضرب هرکدام از این ماتریس ها در یک ماتریس می توان یک عملیات سطری مقدماتی روی آن انجام داد بنابراین توالی از این ماتریس ها وجود دارد که A را به U و همچنین U را به A برگرداند بنابراین E وجود دارد و ماتریس وارون پذیر است.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

زهرا امان ۹۹۳۱۰۰۶

۳- آ)

$$v = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \quad P_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & 4 \\ -1 & 2 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad P_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_B^{-1} v = [v]_B = \begin{bmatrix} 0 & -.5 & -.5 & -.5 \\ -.333 & .5 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{15} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -\frac{1}{6} \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$P_C^{-1} v = [v]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ -5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\underset{C \leftarrow B}{P} [x]_B = \boxed{P_C^{-1} P_B} [x]_B \Rightarrow \underset{C \leftarrow B}{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

ب)

$$v = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad P_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & -4 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_B^{-1} v = [v]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 2 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P_C^{-1} v = [v]_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P_C^{-1} P_B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

فرهاد امان ۹۹۳۱۰۰۶

۳ - پ)

$$v = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۷ \\ ۷ \end{bmatrix} \quad P_B = \begin{bmatrix} -۷ & ۴ & -۷ \\ ۴ & ۲ & ۵ \\ ۴ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} \quad P_C = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$P_B^{-۱} v = [v]_B = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۱۲۹} & \frac{۷}{۱۲۹} & \frac{۳۴}{۱۲۹} \\ \frac{۲۰}{۱۲۹} & \frac{۲۸}{۱۲۹} & \frac{۷}{۱۲۹} \\ -\frac{۴}{۴۳} & \frac{۳}{۴۳} & -\frac{۱۰}{۴۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۷ \\ ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲٫۲۶ \\ ۲٫۰۵ \\ -۱٫۲۳ \end{bmatrix}$$

$$P_C^{-۱} v = [v]_C = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۳} & \frac{۴}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۷ \\ ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ \frac{۲۲}{۳} \\ \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$$

$$P_C^{-۱} P_B = \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۵ \\ \frac{۵}{۳} & -\frac{۲}{۳} & -۴ \\ -\frac{۷}{۳} & \frac{۱}{۳} & -۴ \end{bmatrix}$$

زهرا امان ۹۹۳۱۰۰۶

۴ – در ابتدا می دانم که یک پایه برای R_3 دارای ۳ بردار است پس S_3 و S_5 حذف هستند.

$$S_1: \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 7 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -20 & 9 & 0 \\ 0 & -7 & 8 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -20 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{97}{20} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ تنها یک جواب دارد پس مستقل خطی اند و پایه هستند

$$S_2: \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & -23 & -6 & 0 \\ 0 & -10 & -8 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & -23 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-124}{23} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ تنها یک جواب دارد پس پایه است.

$$S_4: \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{25}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{3} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ تنها یک جواب دارد پس پایه است.

زهرا امان ۹۹۳۱۰۰۶

۵ - برای عضو ۰ دنباله $(0, 0, 0, \dots)$ شرط $a_{k+2} - 5a_{k+1} + 3a_k = 0$ را دارد پس در V است.

دو دنباله x_i و y_i را در نظر بگیرید.

$$x_{k+2} - 5x_{k+1} + 3x_k = 0$$

$$+$$

$$y_{k+2} - 5y_{k+1} + 3y_k = 0$$

$$(x_{k+2} + y_{k+2}) - 5(x_{k+1} + y_{k+1}) + 3(x_k + y_k) = 0$$

$$\boxed{z_{k+2} - 5z_{k+1} + 3z_k = 0}$$

شرط بسته بودن جمع

$$c x_{k+2} - 5c x_{k+1} + 3c x_k = \boxed{c(x_{k+2} - 5x_{k+1} + 3x_k) = 0}$$

شرط بسته بودن ضرب اسکالر

پس V زیرفضای ۷ است.

فرهاد امان ۹۹۳۱۰۰۴

if $x \in null(A) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A^T A x = 0 \Rightarrow x \in null(A^T A)$ - V

if $x \in null(A^T A) \Rightarrow A^T A x = 0 \Rightarrow x^T A^T A x = 0 \Rightarrow (Ax)^T (Ax) = 0$

$\Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in null(A)$

$null(A) \subseteq null(A^T A)$, $null(A^T A) \subseteq null(A) \Rightarrow null(A) = null(A^T A)$

$$\left.\begin{aligned} &\text{rank}A + \dim(null(A)) = n \\ &\text{rank}A^T A + \dim(null(A^T A)) = n \\ &\dim(null(A)) = \dim(null(A^T A)) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{rank}A = \text{rank}A^T A}$$