زهرا امان ۹۹۳۱۰۰۶

$$\det(A-\lambda I)=0=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -1\\ 1 & 3-\lambda & -1\\ -1 & -2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+5)-1$$

$$=-(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-5)=0$$

$$\boxed{\lambda_1=5}\Rightarrow\begin{bmatrix}-3 & 2 & -1\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}v_1=0\Rightarrow v_1=\left\{\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\boxed{\lambda_2=1}\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}v_2=0\Rightarrow v_2=\left\{\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\det(B-\lambda I)=0=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 4 & -2\\ -3 & 4-\lambda & 0\\ -3 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

$$\boxed{\lambda_1=3}\Rightarrow\begin{bmatrix}-4 & 4 & -2\\ -3 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}v_1=0\Rightarrow v_1=\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{3}{4}\\ 1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\boxed{\lambda_2=2}\Rightarrow\begin{bmatrix}-3 & 4 & -2\\ -3 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 1\end{bmatrix}v_2=0\Rightarrow v_2=\left\{\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\boxed{\lambda_3=1}\Rightarrow\begin{bmatrix}-2 & 4 & -2\\ -3 & 3 & 0\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix}v_3=0\Rightarrow v_3=\left\{\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\right\}$$

فرهاد امان ۹۹۳۱۰۰۶

۲ - الف) از قبل می دانیم که $\det(A) = \det(A^T)$

برای اینکه λ مقدار ویژه ی یک ماتریس باشد باید $\det(A - \lambda I) = 0$

پس در نتیجه $\det(M - \lambda I) = 0$

هنگامی که یک ماتریس مربعی ترانهاده می شود درایه های روی قطر اصلی آن تغییر نمی کنند.

پس می توان نتیجه گرفت $\boxed{(M - \lambda I)^T = (M^T - \lambda I)}$

$$\det(M - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det((M - \lambda I)^T) = 0 \Rightarrow \boxed{\det(M^T - \lambda I) = 0}$$

از این نتیجه می گیریم که λ مقدار ویژه برای M^T است.

ب) چون در ماتریس پایین مثلثی تمام درایه های بالای قطر اصلی صفر هستند با کمی دقت متوجه می شویم که ترانهاده آن یک ماتریس بالا مثلثی خواهد بود یعنی تمام درایه های زیر قطر اصلی صفر هستند و طبق (الف) مقدارهای ویژه ی ماتریس اول مقدار ویژه ماتریس دوم هم خواهد بود از طرف دیگر در عمل ترانهاده کردن ماتریس های مربعی درایه های روی قطر اصلی ثابت اند پس همان درایه ها مقادیر ویژه هستند.

ج) ماتریس با مجموع s برای درایه های هر سطر را در نظر گرفته و بردار تمام ۱ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ را به عنوان بردار ویژه در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} \overline{\quad s \quad} \\ \overline{\quad s \quad} \\ \overline{\quad s \quad} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ \vdots \\ s \end{bmatrix} \Rightarrow A \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

پس s یک مقدار ویژه برای A است A^T ماتریس با مجموع هر ستون برابر s است

پس s یک مقدار ویژه برای A^T هم می باشد.

فرهاد امان ۹۹۳۱۰۰۶

۳ -

a)
$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \end{array}$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = v_3$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda\underbrace{\left(-\lambda^2 + 7\lambda - 14\right)}_{\text{ریشه ی حقیقی ندارد}} = 0$$

در نتیجه ماتریس ۳ مقدار ویژه حقیقی ندارد در نتیجه نمی تواند در فضای حقیقی قطری شود.

فرهاد امان ۹۹۳۱۰۰۶

۵ - الف) $Av = \lambda v \Rightarrow A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v$

$\Rightarrow v = \lambda A^{-1} v \Rightarrow \frac{v}{\lambda} = A^{-1} v \Rightarrow \boxed{\lambda^{-1} v = A^{-1} v}$

تعریف مقدار ویژه برای A^{-1}

ب) اگر مقدار ویژه ماتریس A صفر باشد در نتیجه $\det(A) \neq 0$

در نتیجه A وارون پذیر است

$A^{-1}A^{2} = A^{-1}0 \Rightarrow \boxed{A = 0}$

اما می‌دانیم $\det(A=0) = 0$ مقدار مقدار ویژه آن ۰ است.

پ)

$\|u+v\|^2 = (u+v).(u+v) = u.u + v.v + 2u.v$

$\|u-v\|^2 = (u-v).(u-v) = u.u + v.v - 2u.v$

$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2u.u + 2v.v$

$\left. u.u = \|u\|^2 \quad v.v = \|v\|^2 \right\} \Rightarrow \boxed{2\|u\|^2 + 2\|v\|^2}$

ج) $\|au+bv\| = \|bu+av\| \Leftrightarrow \|au+bv\|^2 = \|bu+av\|^2$

$(au+bv).(au+bv) = (bu+av).(bu+av) \Leftrightarrow$

$a^2(u.u) + b^2(v.v) + 2ab(u.v) = b^2(u.u) + a^2(v.v) + 2ab(u.v)$

$\Leftrightarrow a^2\left(\|u\|^2 - \|v\|^2\right) + b^2\left(\|v\|^2 - \|u\|^2\right) = 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{\|u\| = \|v\| \text{ یا } a=0, b=0}$

فرهاد امان ۹۹۳۱۰۰۶

۷ - ۹)

$$A \approx \begin{bmatrix} 0 &&&&&&&& \\ & 0 &&&&&&& \\ && 3 &&&&&& \\ &&& -2 &&&&& \\ &&&& -2 &&&& \\ &&&&& -2 &&& \\ &&&&&& +4 && \\ &&&&&&& 4 & \\ &&&&&&&& 4 \end{bmatrix}$$

شکل روبرو یکی از شکل های ماتریس A ابعاد ماتریس A 9×9 می باشد.

b) باید $\dim(Null(A-4I))$ را حساب کنیم.

$$A-4I \approx \begin{bmatrix} -4 &&&&&&&& \\ & -4 &&&&&&& \\ && -6 &&&&&& \\ &&& -6 &&&&& \\ &&&& -6 &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& 0 & \\ &&&&&&&& 0 \end{bmatrix} \quad (A-4I)x=0,$$

$$x = x_7\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + x_8\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + x_9\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

ابعاد فضای ویژه ۳ است

$$Ax=0 \Rightarrow x = x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

c) ابعاد فضای تهی برابر ۲ است

فرهاد امان ۹۹۲۱۰۰۶

-۹

$$u_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{Proj}_{u_1} v_2 = \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \frac{2}{3} u_1 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = v_2 - u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{15}}{15} \\ \frac{\sqrt{15}}{5} \\ \frac{\sqrt{15}}{15} \\ \frac{\sqrt{15}}{15} \end{bmatrix}$$