دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

تمرین سری یک

درس بهینه‌سازی

فرهاد دلیرانی

۹۶۱۳۱۱۲۵

dalirani@aut.ac.ir

dalirani.1373@gmail.com

فهرست

ابزارهای استفاده شده

زبان برنامه نویسی: –

محیط توسعه: –

سیستم عامل: –

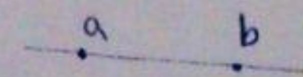
مجموعه‌های محدب

1) A

اشتراک مجموعه با هر خطی محدب است ⟵ اگر یک مجموعه محدب باشد

اگر a, b دو نقطه روی خط باشند ، خطی (L) که از a, b می‌گذرد به صورت

$$\theta a + (1-\theta) b$$



است.

$$\left.\begin{array}{l} a \in L \\ b \in L \end{array}\right. \xrightarrow[\text{for } 0 \leq \theta_1 \leq 1]{} \theta_1 a + (1-\theta_1) b \in L .$$

با توجه به عبارت بالا ، یک خط مجموعه‌ای محدب است . از خواص مجموعه‌های محدب این است که اشتراک دو مجموعه‌ی محدب ، مجموعه‌ای محدب است . به همین دلیل اشتراک هر خط دلخواهی با مجموعه‌ی محدب مجموعه‌ای محدب است .

B

اگر اشتراک مجموعه‌ای با هر خطی محدب باشد ⟵ مجموعه محدب است

از اشتراک خط و مجموعه دو نقطه‌ی دلخواه c و d را انتخاب می‌کنیم . از آنجایی که

اشتراک خط و مجموعه محدب است هر نقطه‌ای بین c, d نیز در اشتراک خط و مجموعه قرار می‌گیرد به عبارت دیگر

$$\left.\begin{array}{l} c, d \in \text{Intersection} \\ \text{Intersection is convex} \end{array}\right\} \rightarrow \theta_2 c + (1-\theta_2) d \in \text{Intersection}$$

از آنجایی که اشتراک با هر خط و دو نقطه دلخواه c, d بود این مسئله برای هر دو نقطه از مجموعه برقرار است . که همان تعریف محدب بودن یک مجموعه است . به همین دلیل مجموعه محدب است .

مجموعه‌های محدب

2) x مجموعه نقاطی است که به a نزدیک‌تر از b است:

$$\|x-a\|_2 \leqslant \|x-b\|_2$$

$$\sqrt{(x-a)^T(x-a)} \leqslant \sqrt{(x-b)^T(x-b)}$$

$$(x-a)^T(x-a) \leqslant (x-b)^T(x-b)$$

$$(x^T-a^T)(x-a) \leqslant (x^T-b^T)(x-b)$$

$$\cancel{x^Tx} - x^Ta - a^Tx + a^Ta \leqslant \cancel{x^Tx} - x^Tb - b^Tx + b^Tb$$

$$x^Tb - x^Ta + b^Tx - a^Tx + a^Ta - b^Tb \leqslant 0$$

$$\begin{cases} b^Tx = x^Tb & \text{(ضرب داخلی)} \\ x^Ta = a^Tx \end{cases}$$

$$\longrightarrow$$

$$b^Tx - a^Tx + b^Tx - a^Tx + a^Ta - b^Tb \leqslant 0$$

$$2b^Tx - 2a^Tx + a^Ta - b^Tb \leqslant 0$$

$$\underbrace{2(b^T-a^T)}_{A}\,x + \underbrace{a^Ta - b^Tb}_{-B} \leqslant 0$$

$$Ax \leqslant B \longrightarrow$$ half space معادله‌ی یک

(3) مجموعه های محدب

(۲) و (c)

* روش اول

$f(x) = x^T A x + b^T x + c$ dom f is convex

$\nabla^2 f = A \xrightarrow{A \succeq 0} f$ is a convex function

تمام sublevel set های یک تابع محدب ، مجموعه‌هایی محدب هستند.

مجموعه ی $C = \{x \in \text{dom } f \mid f(x) \leq 0\}$ یک sublevel set تابع محدب f است پس C مجموعه‌ای محدب است.

* روش دوم

C یک مجموعه‌ی محدب است اگر (و تنها اگر) اشتراک آن با هر خط دلخواهی محدب باشد. خط دلخواه را با $\{x_0 + tv \mid t \in R\}$ نشان می‌دهیم

$(x_0 + tv)^T A (x_0 + tv) + b^T (x_0 + tv) + c =$

$(x_0^T + tv^T) A (x_0 + tv) + b^T (x_0 + tv) + c =$

$x_0^T A x_0 + t\, x_0^T A v + t\, v^T A x_0 + t^2 v^T A v + b^T x_0 + t b^T v + c$

$= \underbrace{(v^T A v)}_{a} t^2 + \underbrace{(x_0^T A v + v^T A x_0 + b^T v)}_{b_1} t + \underbrace{(x_0^T A x_0 + b^T x_0 + c)}_{c_1}$

Intersection $= \{x_0 + tv \mid at^2 + b_1 t + c_1 \leq 0\}$

$v^T A v$

این مجموعه اشتراک محدب است اگر $a \geq 0$ باشد چون v هر مقدار دلخواهی می‌تواند داشته باشد باید همواره نامنفی باشد و این زمانی اتفاق می‌افتد که $A \succeq 0$ باشد.

* می‌توان از عکس قضیه استفاده کرد به همین دلیل عکس (۲) درست نیست.

۴ مجموعه‌های محدب

می‌خواهیم نشان دهیم مجموعه‌ی $C=\{x\in \mathbb{R}^2_+ \mid x_1 x_2 \geq 1\}$ مجموعه‌ای محدب است

فرض: $p \in C$ و $q \in C$

حکم: $\theta p + (1-\theta) q \in C$ به ازای $0 \leq \theta \leq 1$

$$p \in C \rightarrow p_1 p_2 \geq 1$$
$$q \in C \rightarrow q_1 q_2 \geq 1$$

$$\theta p + (1-\theta) q = \begin{bmatrix} \theta p_1 + (1-\theta) q_1 \\ \theta p_2 + (1-\theta) q_2 \end{bmatrix}$$

* اگر نشان دهیم عبارت $\left(\theta p_1 + (1-\theta) q_1\right)\left(\theta p_2 + (1-\theta) q_2\right)$ بزرگ‌تر مساوی یک است حکم اثبات می‌شود.

$a^{\theta} b^{1-\theta} \leq \theta a + (1-\theta) b$, $0 \leq \theta \leq 1$, $0 \leq a, b$

$$\rightarrow (p_1)^{\theta} (q_1)^{(1-\theta)} \leq \theta p_1 + (1-\theta) q_1$$
$$(p_2)^{\theta} (q_2)^{(1-\theta)} \leq \theta p_2 + (1-\theta) q_2$$

ضرب [illegible] دو نامساوی مثبت

$$(p_1)^{\theta} (q_1)^{(1-\theta)} (p_2)^{\theta} (q_2)^{(1-\theta)} \leq \left(\theta p_1 + (1-\theta) q_1\right)\left(\theta p_2 + (1-\theta) q_2\right)$$

$$(p_1 p_2)^{\theta} (q_1 q_2)^{1-\theta} \leq \left(\theta p_1 + (1-\theta) q_1\right)\left(\theta p_2 + (1-\theta) q_2\right)$$

* طبق فرض $1 \leq p_1 p_2$ و $1 \leq q_1 q_2$ است. از آنجایی که $0 \leq \theta \leq 1$ مقادیر $(q_1 q_2)^{1-\theta}$ و $(p_1 p_2)^{\theta}$ بزرگ‌تر مساوی یک باقی می‌مانند

$$\left.\begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 1 \\ 1 \leq q_1 q_2 \\ 1 \leq p_1 p_2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} 1 \leq (p_1 p_2)^{\theta} \\ 1 \leq (q_1 q_2)^{1-\theta} \end{matrix}\right\} \rightarrow 1 \leq (p_1 p_2)^{\theta} (q_1 q_2)^{1-\theta} \leq \left(\theta p_1 + (1-\theta) q_1\right)\left(\theta p_2 + (1-\theta) q_2\right)$$

حکم ثابت شد.

(1) توابع محدب

(آ)

$$f(x) = \frac{x_1}{x_2} \qquad x \in \mathbb{R}^2_{++}$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_2} & -\frac{x_1}{x_2^2} \end{bmatrix} \longrightarrow \nabla^2 f = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{x_2^2} \\ -\frac{1}{x_2^2} & 2x_1 x_2^{-3} \end{bmatrix}$$

$$(0)\times\left(2\frac{x_1}{x_2^3}\right) - \left(-\frac{1}{x_2^2}\right)\left(-\frac{1}{x_2^2}\right) = 0 - \frac{1}{x_2^4} = -\frac{1}{x_2^4} < 0$$

ماتریس شرایط positive semidefinte را ندارند بنابراین convex نیست

اگر منفی تابع باشد تابع مقعر خواهد بود

$$f(x) = -\frac{x_1}{x_2}$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_2} & \frac{x_1}{x_2^2} \end{bmatrix} \rightarrow \nabla^2 f = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{x_2^2} \\ \frac{1}{x_2^2} & -2\frac{x_1}{x_2^3} \end{bmatrix}$$

$-\frac{2x_1}{x_2^3} < 0$ ← این ماتریس شرایط positive semi-definte را ندارد، در

نتیجه منفی تابع convex نیست در نتیجه تابع concave نیست.

sub level set های این تابع به این شکل است

$$\text{sublevel set} = \{ x \mid x_1 x_2 \leqslant \alpha \}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leqslant \alpha$$

$$A^T x \leqslant \alpha$$

همین طور که مشاهده می‌شود sub-level set های این تابع half space هستند

در نتیجه convex هستند، super-level set ها هم چنین وضعیتی دارند

در نتیجه این تابع هم Quasiconvex و هم Quasiconcave است.

(۱) توابع محدب

(ب)

$$f(x) = \frac{1}{x_1 x_2} \qquad x \in R^2_{++}$$

دامنه‌ی $f(x)$ یک مجموعه‌ی Convex است.

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_1^2 x_2} & -\frac{1}{x_1 x_2^2} \end{bmatrix} \longrightarrow \nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{2}{x_1^3 x_2} & \frac{1}{x_1^2 x_2^2} \\ \frac{1}{x_1^2 x_2^2} & \frac{2}{x_1 x_2^3} \end{bmatrix}$$

$$\frac{2}{x_1^3 x_2} > 0 \qquad \frac{2}{x_1 x_2^3} > 0$$

$$\left(\frac{2}{x_1^3 x_2}\right)\left(\frac{2}{x_1 x_2^3}\right) - \left(\frac{1}{x_1^2 x_2^2}\right)\left(\frac{1}{x_1^2 x_2^2}\right) = \frac{4}{x_1^4 x_2^4} - \frac{1}{x_1^4 x_2^4} = \frac{3}{x_1^4 x_2^4}$$

$$\cancel{x \in R^2} \longrightarrow \frac{3}{x_1^4 x_2^4} > 0$$

ماتریس $\nabla^2 f$ تمام شرایط positive semidefinte را دارد در نتیجه تابع Convex است.

توابع محدب

1

ج

$$f(x) = \max_{i=1,2,3,\dots,k} \|A^{(i)}x - b^{(i)}\|_p \qquad p>0,\ x \in R^m,\ A \in R^{m\times n}$$

$P(x) = \|x\|_p \longrightarrow$ تابع norm یک تابع convex است

$q_i(x) = A^{(i)}x - b^{(i)} \longrightarrow$ $q_i(x)$ یک تابع Affine و خطی است و Convex است

$\|A^{(i)}x-b^{(i)}\|_p = P\circ q_i(x) \longrightarrow$ Composition یک تابع convex با یک تابع affine یک تابع Convex است.

$$f(x) = \max_{i=1,2,\dots,k}\|A^{(i)}x-b^{(i)}\|_p = \max\{A^{(1)}x-b^{(1)}, A^{(2)}x-b^{(2)},\dots,A^{(k)}x-b^{(k)}\}$$

از point-wise maximum استفاده می‌کنیم. ماکزیمم چند تابع convex خود تابعی convex است.

* دامنه‌ی $f(x)$ مجموعه‌ی convex است.

* در نتیجه $f(x)$ یک تابع convex است.

(2) توابع محدب

$f: R \longrightarrow R$

f is convex $\longleftrightarrow$ dom f is convex & $\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ f(x) & f(y) & f(z)\end{bmatrix} \geq 0$

$$\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ f(x) & f(y) & f(z)\end{bmatrix} = 1\times\det\begin{bmatrix}y & z\\ f(y) & f(z)\end{bmatrix} - 1\times\det\begin{bmatrix}x & z\\ f(x) & f(z)\end{bmatrix} + 1\times\det\begin{bmatrix}x & y\\ f(x) & f(y)\end{bmatrix}$$

$$= y f(z) - z f(y) - x f(z) + z f(x) + x f(y) - y f(x)$$

$$= (y-x) f(z) + (x-z) f(y) + (z-y) f(x) \geq 0$$

$x < y < z \qquad y = \theta x + (1-\theta) z = \theta x + z - \theta z = z + \theta(x-z)$

$\rightarrow \theta = \dfrac{y-z}{x-z}$

dom f is R and convex

f is convex $\leftrightarrow f(\theta x + (1-\theta) y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(z) \leftrightarrow$

$f(y) \leq \dfrac{y-z}{x-z} f(x) + \left(1 - \dfrac{y-z}{x-z}\right) f(z) \longleftrightarrow$

$f(y) \leq \left(\dfrac{y-z}{x-z}\right) f(x) + \left(\dfrac{x-y}{x-z}\right) f(z) \xleftrightarrow{x-z<0}$

$(x-z) f(y) \geq (y-z) f(x) + (x-y) f(z) \longleftrightarrow$

$(x-z) f(y) + (z-y) f(x) + (y-x) f(z) \geq 0 \leftrightarrow \det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ f(x) & f(y) & f(z)\end{bmatrix} \geq 0$

dom f is R and convex

ثابت شد.

(۳) تابع‌های محدب

$h(x,y) = \frac{x^2}{y}$. for $(y>0)$ dom $h = \{(x,y) \mid y>0\}$

$$\nabla h(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ -\frac{x}{y^2} & \frac{x^2}{y^3} \end{bmatrix} = \frac{2}{y^3}\begin{bmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{y^3}\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y, & -x \end{bmatrix} = \frac{2}{y^3}\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}^T \succeq 0$$

. $h(x,y)$ is convex ← positive semidefinite

برای x های غیرمثبت $h(x,y)$ در x غیرنزولی است.

برای y های مثبت $h(x,y)$ در y غیرصعودی است.

اکنون می‌توانیم از قوانین Composition استفاده کنیم.

چون $f(x)$ تابعی با برد نامنفی است و convex است و $g(x)$ تابعی با برد مثبت و مقعر است و $h(x,y)$ در x غیرنزولی است و $h(x,y)$ در y غیرصعودی است

نتیجه می‌شود $h(f(x),g(x)) = \frac{f^2(x)}{g(x)}$ تابعی convex است.