

باسمه تعالی
مجموعه تمرینات درس بهینه‌سازی

شماره تمرین: ۱
تاریخ تحویل: پنجم آبان



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

مجموعه های محدب

- ۱ نشان دهید یک مجموعه محدب است اگر و تنها اگر اشتراک آن با هر خطی محدب باشد.
- ۲ دو نقطه a و b را در فضای \mathbf{R}^N در نظر بگیرید. نشان دهید مجموعه نقاطی که به a نسبت به b نزدیک تر اند یک half space تشکیل می دهند.
- ۳ $C \subset \mathbf{R}^N$ در نظر بگیرید که به فرم زیر تعریف می گردد.
- $$C = \{x \in \mathbf{R}^N | x^T A x + b^T x + c \leq 0\} \quad (۱)$$
- که $A \in \mathbf{S}^N$ و $b \in \mathbf{R}^N$ و $C \in \mathbf{R}$ است.
- (آ) نشان دهید C محدب است اگر $A \succcurlyeq 0$
- (ب) نشان دهید اشتراک C و $g^T x + h$ اگر g ناصفر باشد، محدب است اگر داشته باشیم $A + \lambda g g^T \succcurlyeq 0$ برای بعضی از $\lambda \in \mathbf{R}$.
- (ج) آیا معکوس گزاره (آ) برقرار است؟
- ۴ نشان دهید مجموعه هذلولوی $\{x \in \mathbf{R}_+^N | x_1 x_2 \geq 1\}$ محدب است. راهنمایی: از نامساوی $a^\theta b^{1-\theta} \leq \theta a + (1-\theta)b$ به ازای $0 \leq \theta \leq 1$ و $\{a \geq 0, b \geq 0\}$ استفاده کنید.

توابع محدب

۱. مشخص کنید کدام یک از توابع زیر convex، quasi convex، concave یا quasi concave هستند.
- (آ) $f(x) = \frac{x_1}{x_2}, x \in \mathbf{R}_{++}^2$
- (ب) $f(x) = \frac{1}{x_1 x_2}, x \in \mathbf{R}_{++}^2$
- (ج) $f(x) = \max_{i=1,2,3,\dots,k} \|A^{(i)}x - b^{(i)}\|_p, p > 0, x \in \mathbf{R}^m, b \in \mathbf{R}^m, A \in \mathbf{R}^{m \times n}$
۲. نشان دهید تابع f با دامنه و برد اعداد حقیقی، محدب است اگر و تنها اگر دامنه f محدب باشد و نامساوی زیر به ازای $x, y, z \in \text{Domain}(f), x < y < z$ برقرار باشد.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (۲)$$

۳. فرض کنید تابع محدب f با دامنه و برد اعداد حقیقی است و نامنفی است. همچنین تابع مقعر g مثبت با دامنه و برد اعداد حقیقی می باشد. ثابت کنید تابع $\frac{f^2}{g}$ بر روی دامنه مشترک دو تابع f, g محدب می باشد.

چند نکته در رابطه با تحویل تمرین

- در صورتی که سوالی در رابطه با تمرینات دارید با ایمیل arimorteza+ConvexOptimization97981@gmail.com در ارتباط باشید.
- گزارش را با فرمت pdf و با ساختار اسمی `FullName_StudentId_HwNumber.pdf` در مدل آپلود نمایید.
- در صورتی که به صورت دستنویس تمرینات را حل می کنید، فایل عکس نهایی را با کیفیت مناسب و خوانا تهیه نمایید.
- لطفا در مورد تمرینات پیاده سازی فقط موارد خواسته شده در سوال را توضیح دهید و تحلیل کنید و از نوشتن مطالب نامرتبط و بدیهی جهت افزایش طول گزارش اجتناب کنید.
- نمره تمرینات مشابه (اعم از کد و گزارش و ...) برای تمامی طرفین درگیر صفر منظور می گردد.
- شما در مجموع می توانید ۱۰ روز تاخیر داشته باشید (برای کل تمرینات جمع تاخیرهای شما نباید از ۱۰ روز بیشتر شود) و در صورت تاخیر بیش از ۱۰ روز کسر ۵ درصد نمره از نمره کل تمرینات به ازای هر روز تاخیر کم می گردد. بنابراین سعی کنید از این ۱۰ روز به نحو بهینه ای استفاده نمایید.