دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

تمرین سری دو-پیاده‌سازی

درس بهینه‌سازی

فرهاد دلیرانی

۹۶۱۳۱۱۲۵

dalirani@aut.ac.ir

dalirani.1373@gmail.com

فهرست

آزمایش‌های مختلف که شامل پارامترها و نتایج آزمایش‌ها هستند.

ابزارهای استفاده شده

زبان برنامه نویسی: پایتون ۳٫۶

محیط توسعه: PyCharm

سیستم عامل: Windows 10

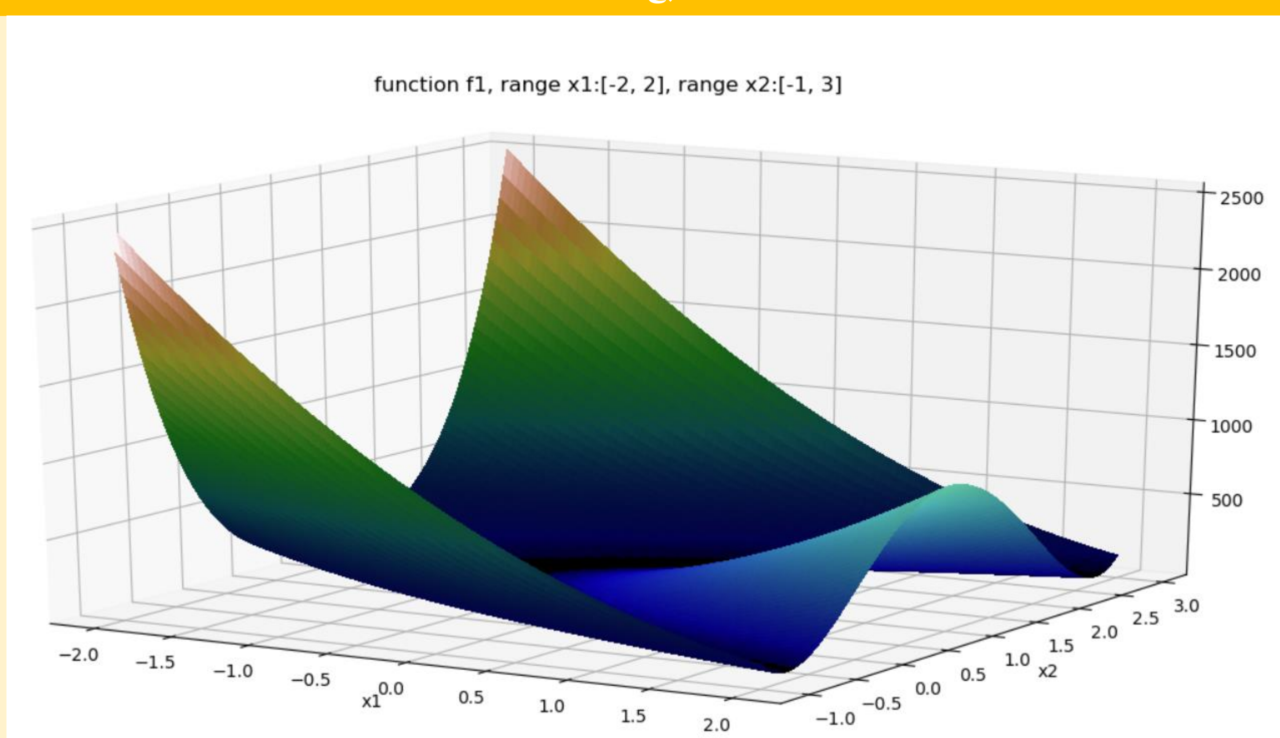
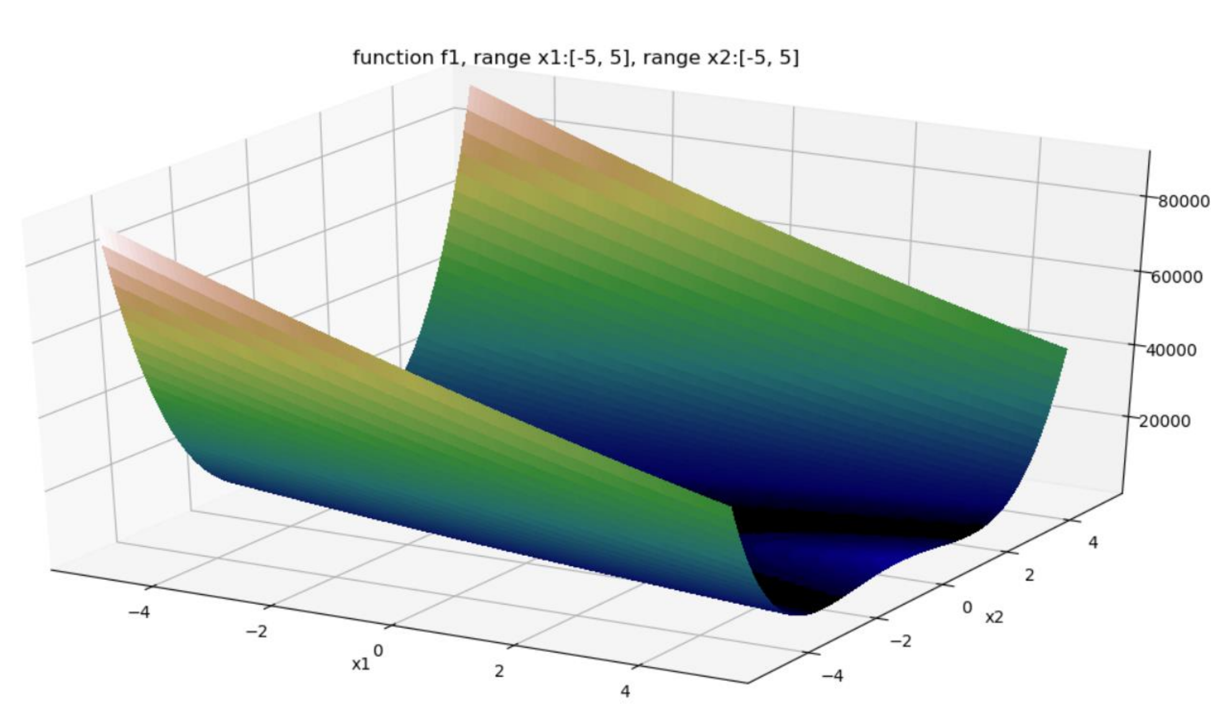
تمرین ۱

قسمت آ،ب)

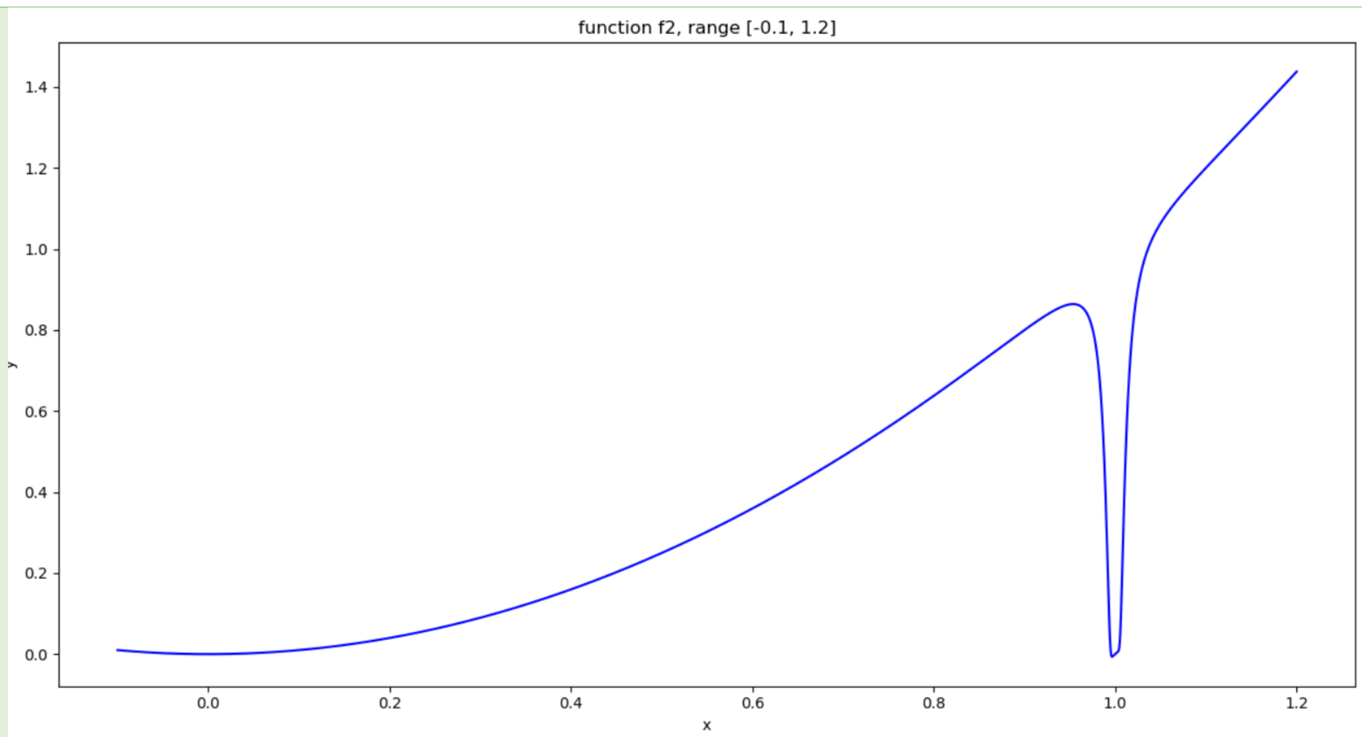
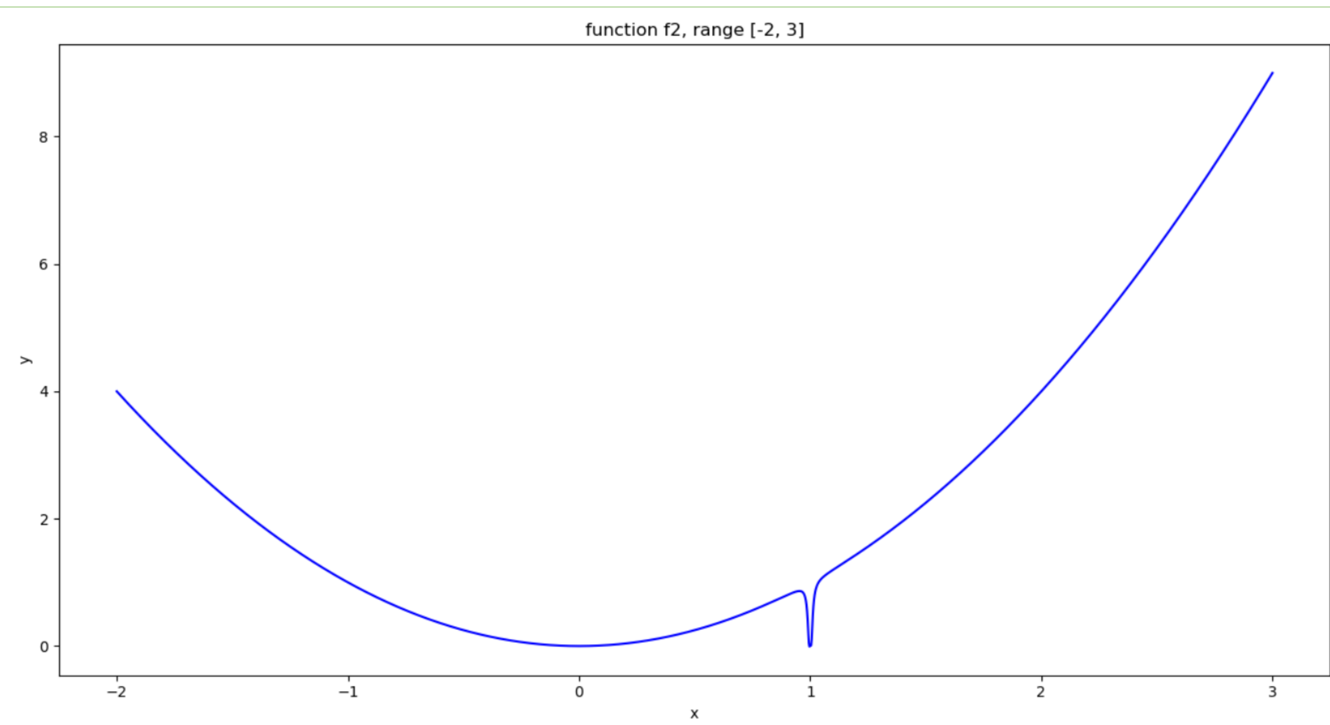
- **در قسمت ج، تابع F1 را به ازای نقاط شروع [1,1-] [0,1] [2,1] و تابع F2 را به ازای نقاط شروع [1-] [2] با استفاده از تمام روش‌های ممکن(۲ روش Steepest Descent ، Quasi-Newton و دو متد Interpolation و Backtracking) مینیموم می‌کنیم. نتایج و پارامترهای هر اجرا در جدول‌های "آزمایش ۱۲" تا "آزمایش ۳۰" ارائه شده است که شامل ۱۸ جدول می‌شود، در بخش آ و ب، علاوه بر آزمایش‌هایی که شده است از نتایج آزمایش‌های قسمت ج هم برای نتیجه‌گیری استفاده می‌شود.**

قسمت ز

در این قسمت باید تابع‌های f1 و f2 را رسم کنیم و Convex بودن آن‌ها را بررسی کنیم. در شکل‌های زیر، دو تابع f1 و f2 را مشاهده می‌کنید که در بازه‌های مختلف آن‌ها را رسم کرده‌ام:

بازه	تابع f1
`range_x1= [-2, 2], range_x2= [-1,3]`	
`range_x1= [-5, 5], range_x2= [-5, 5]`	

بازه	تابع f2

	range_x1= [-0.1, 1.2]
	range_x1= [-2, 3]

همان طور که در دو شکل تابع f1 و f2 مشاهده می‌شود، می‌توان در هر دو شکل دو نقطه پیدا کرد که رابطه زیر برقرار نباشد:

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$$

در نتیجه هر دو تابع Convex نیستند.

قسمت ii

در این قسمت از سوال خواسته شده است شرایط ولف و گلدستن را بررسی کنیم و ناحیه‌های قابل قبول را گزارش کنیم و در مورد هر دو شرایط صحبت کنیم.

شرط ولف و شرط گلدستین به صورت زیر است:

شرایط ولف		$f(x_k + \alpha_k p_k) \leq f(x_k) + c_1 \alpha_k \nabla f_k^T p_k,$ $\nabla f(x_k + \alpha_k p_k)^T p_k \geq c_2 \nabla f_k^T p_k,$	
شرایط گلدستین		$f(x_k) + (1-c)\alpha_k \nabla f_k^T p_k \leq f(x_k + \alpha_k p_k) \leq f(x_k) + c\alpha_k \nabla f_k^T p_k$	

نامساوی زیر

$$f(x_k + \alpha_k p_k) \leq f(x_k) + c_1 \alpha_k \nabla f_k^T p_k$$

در هر دو شرایط ولف و گلدستین وجود دارد. این شرط، شرط sufficient decrease است، یعنی تضمین می‌کند که مقدار تابع کاهش پیدا می‌کند و این کاهش متناسب با مقدار آلفا و گرادیان است. اگر شرط به صورت زیر می‌بود، در آن صورت شرط این نکته را بیان می‌کرد که میزان کاهش در f مهم نیست، و فقط لازم است کاهشی رخ داده باشد.

$$f(x_k + \alpha_k p_k) \leq f(x_k)$$

ولی وقتی شرط به صورت زیر است، بیان می‌کند که نه تنها کاهش باید رخ دهد، بلکه این کاهش باید متناسب با گرادیان و آلفا باشد.

$$f(x_k + \alpha_k p_k) \leq f(x_k) + c_1 \alpha_k \nabla f_k^T p_k$$

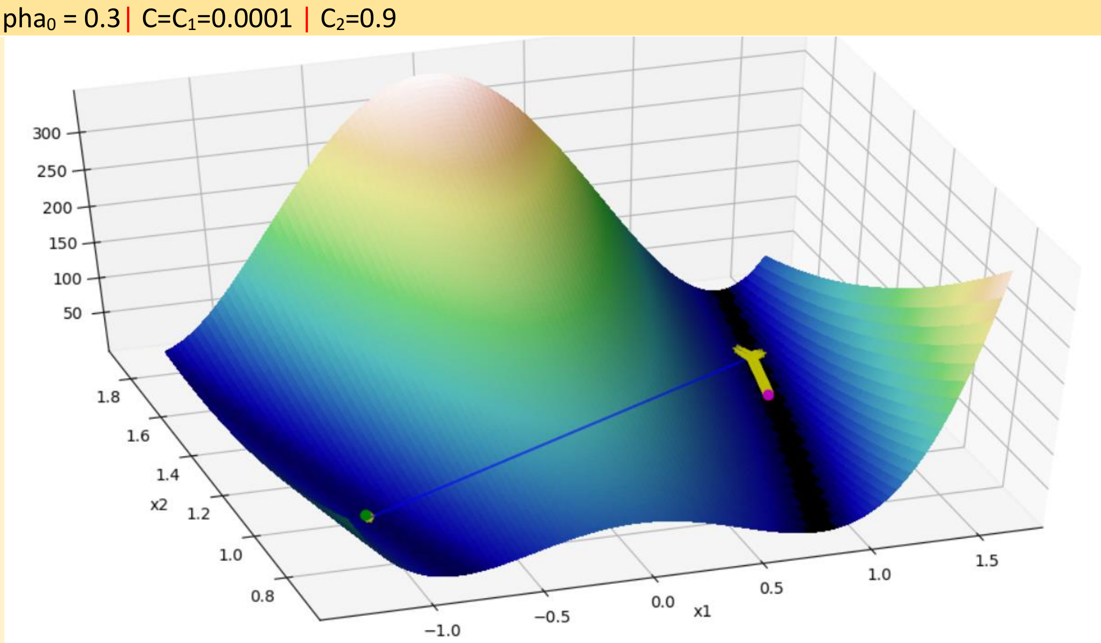
پارامتر c1 در شرایط ولف و پارامتر c در شرایط گلدستین، میزان کاهش متناسب با گرادیان و آلفا را کنترل می‌کند. هر چه c1 بیشتر باشد، کاهش بیشتری باید رخ دهد و پیدا کردن alpha که در شرایط صدق کند سخت‌تر می‌شود و تعداد آلفاهای مورد قبول کاهش می‌یابد.

نامساوی سمت چپ ولف، مشخص می‌کند که آلفاهایی مورد قبول است که باعث شود مشتق فی در نقطه آلفا بیشتر از مشتق فی در نقطه آلفا برابر با صفر ضرب در c2 شود. این نامساوی بیان می‌کند اگر مشتق فی در یک آلفا نسبت به مشتق فی در صفر کمتر است، احتمال اینکه به یک آلفا بهتر برسیم هست پس آن آلفاها را قبول نمی‌کند. c2 این شرط را کنترل می‌کند.

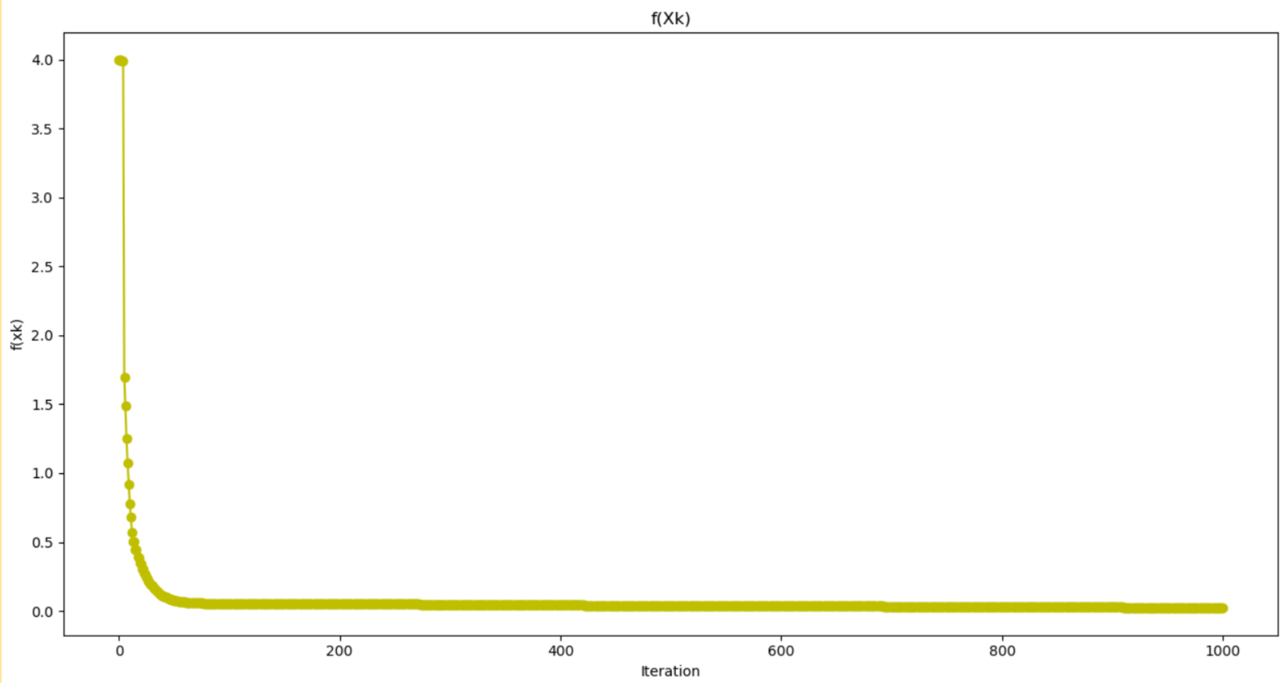
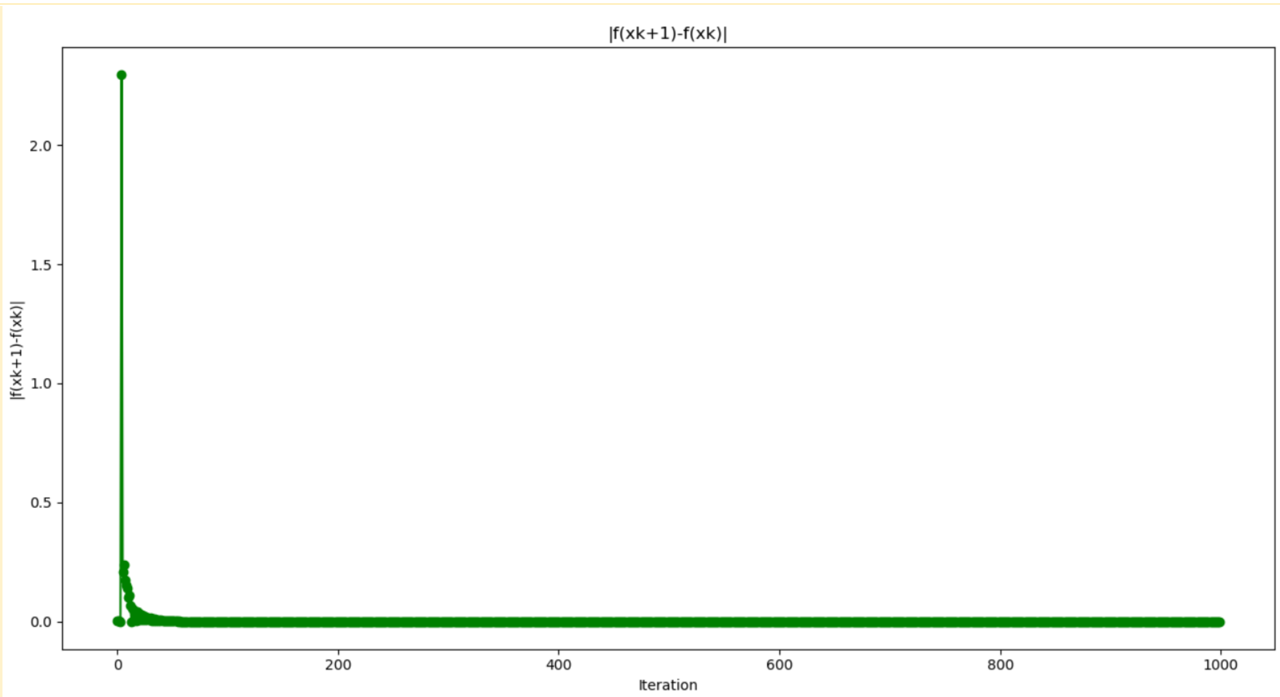
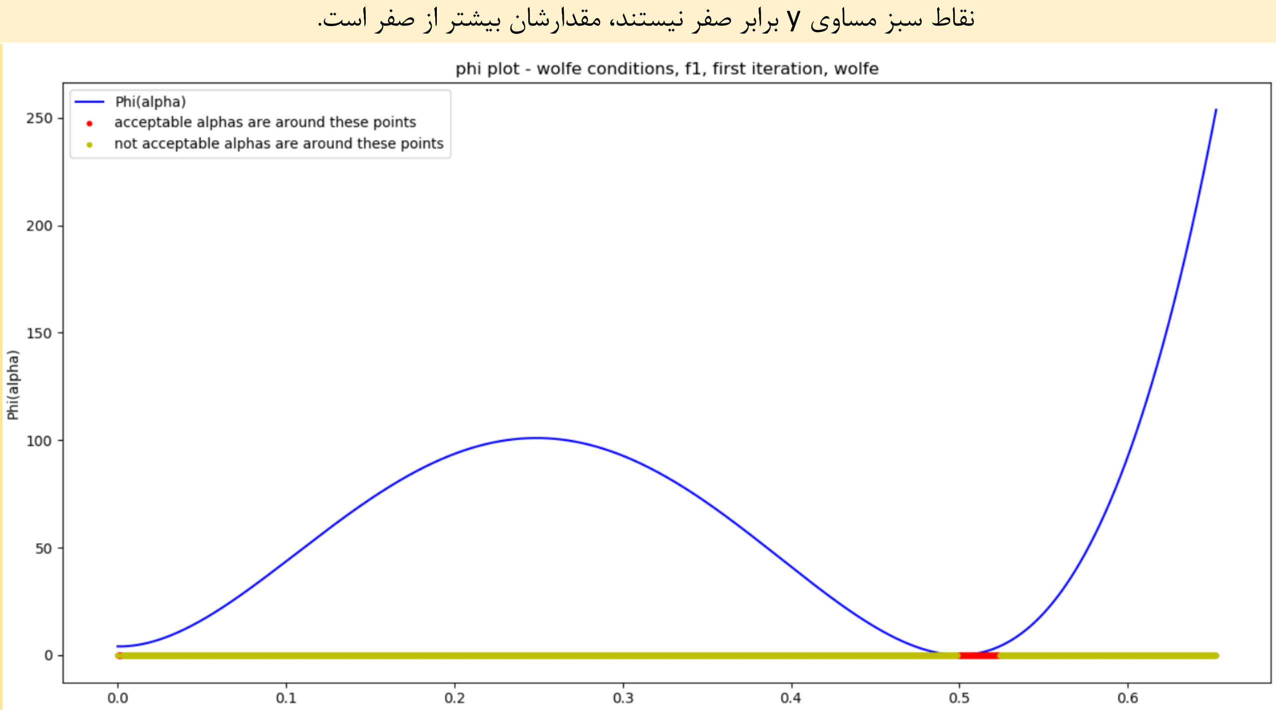
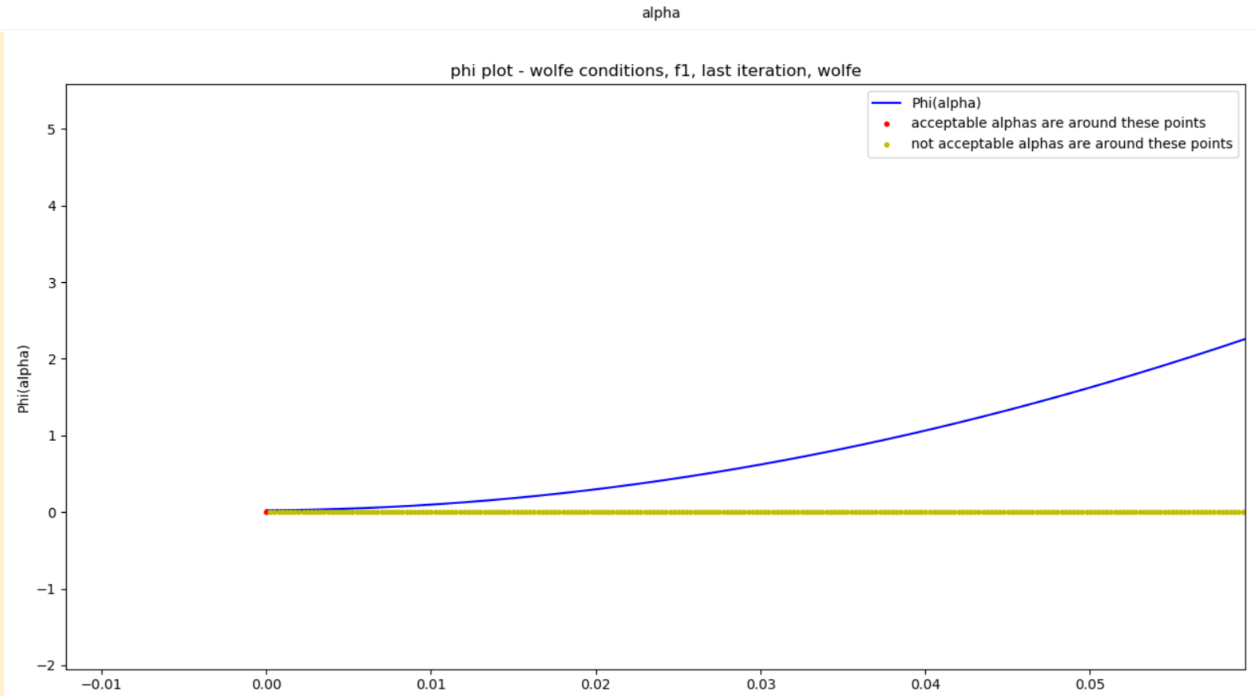
طبق توضیحاتی که داده شد، برای c1 و c باید یک مقدار کوچک در نظر گرفت، در کتاب نوسدال برای c1 مقدار ۰٫۰۰۰۱ پیشنهاد شده است، برای c2 باید یک مقدار نسبتا بزرگ در نظر گرفت که در کتاب نوسدال ۰٫۹ پیشنهاد شده است.

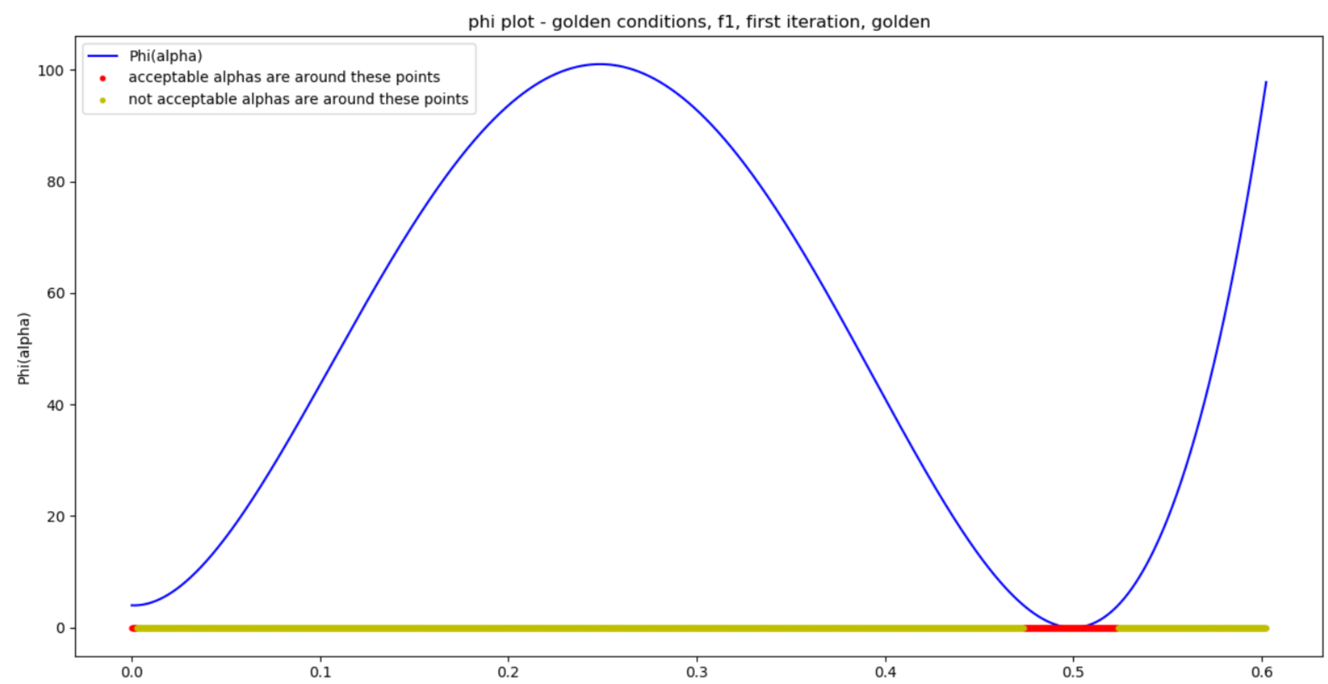
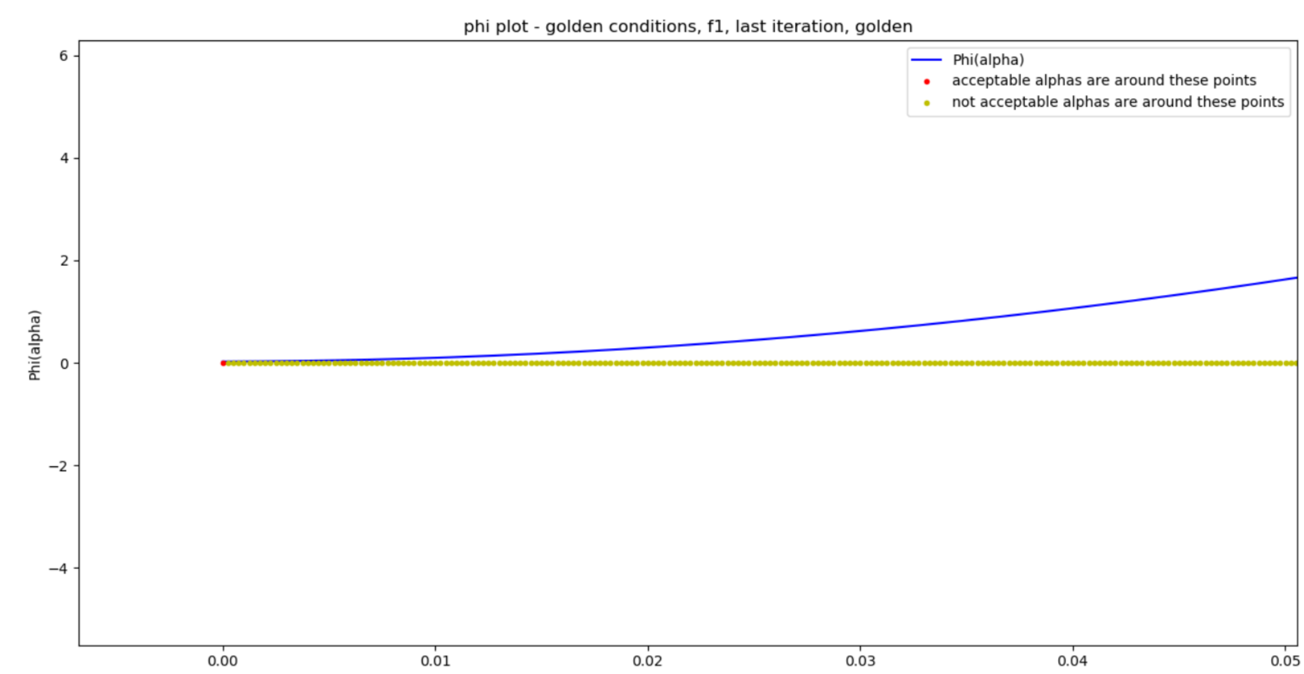
در ادامه به ازای روش‌های Steepest Descent وQuasi-Newton ، تابع‌های f1 و f2 و روش‌های Backtracking و Interpolation عمل پیدا کردن مینیمم را انجام می‌دهیم و بازه‌های قابل قبول آلفا و سایر نتایج را گزارش می‌کنیم. در ادامه نتایج آزمایش‌های مختلف با پارامترهایی که به آن‌ها اشاره شد را مشاهده می‌کنید که نتایج درستی پارامترهای انتخاب شده را نمایش می‌دهد.

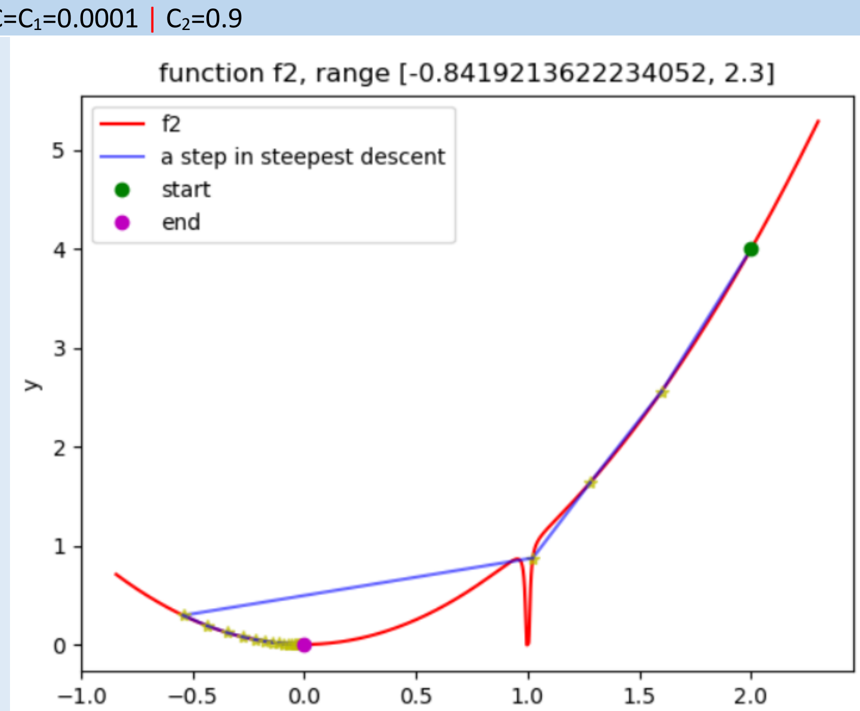
<table dir="rtl">
<tr><td></td><td>آزمایش ۱</td></tr>
<tr><td>مشخصات اجرا</td><td>Function: f1 | Algorithm: Steepest Descent | Method: backtracking
X0 = [-1,1] | $alpha_0$ = 0.3 | $C=C_1$=0.0001 | C_2=0.9</td></tr>
<tr><td>رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.</td><td>



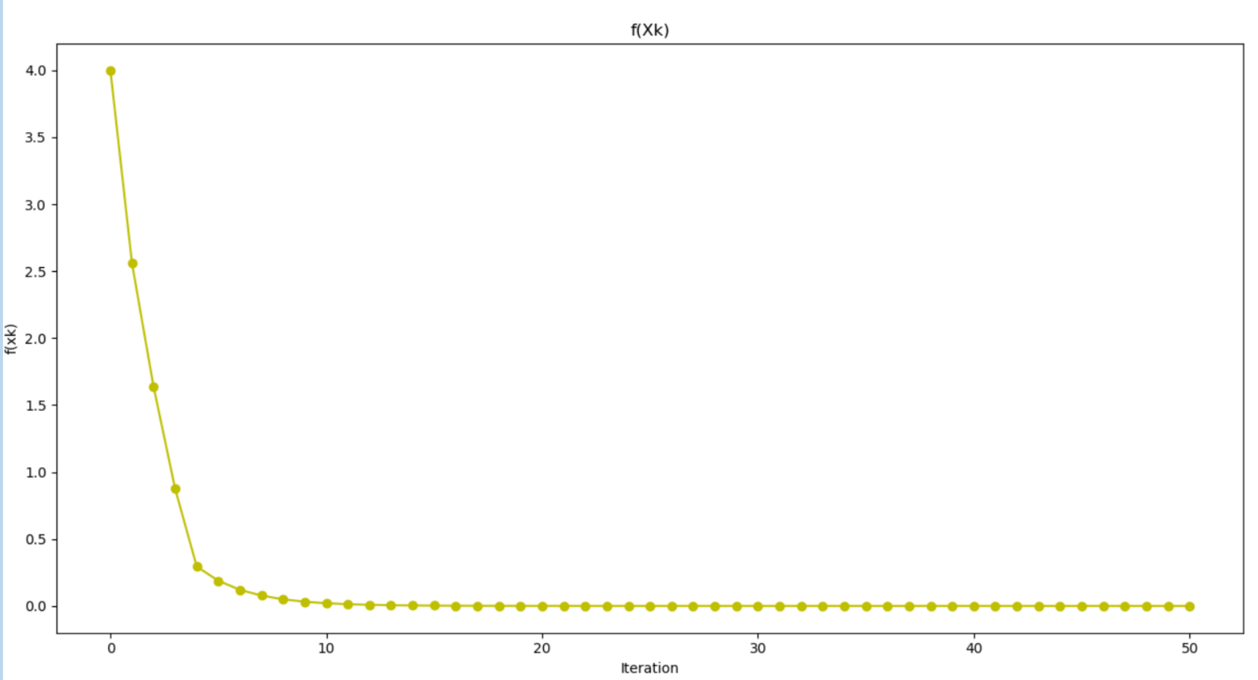
</td></tr>
</table>

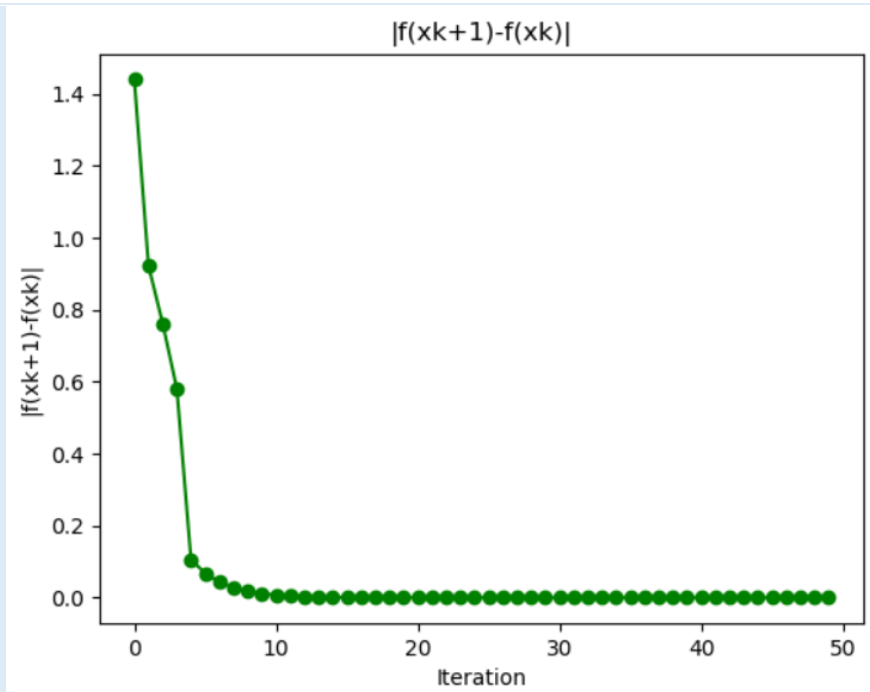
میزان کاهش در f	
	 نقاط سبز مساوی ۷ برابر صفر نیستند، مقدارشان بیشتر از صفر است.
شرط ولف در iteration یک	
شرط ولف در iteration آخر	

شرط گلدستن در iteration یک	
شرط گلدستن در iteration آخر	

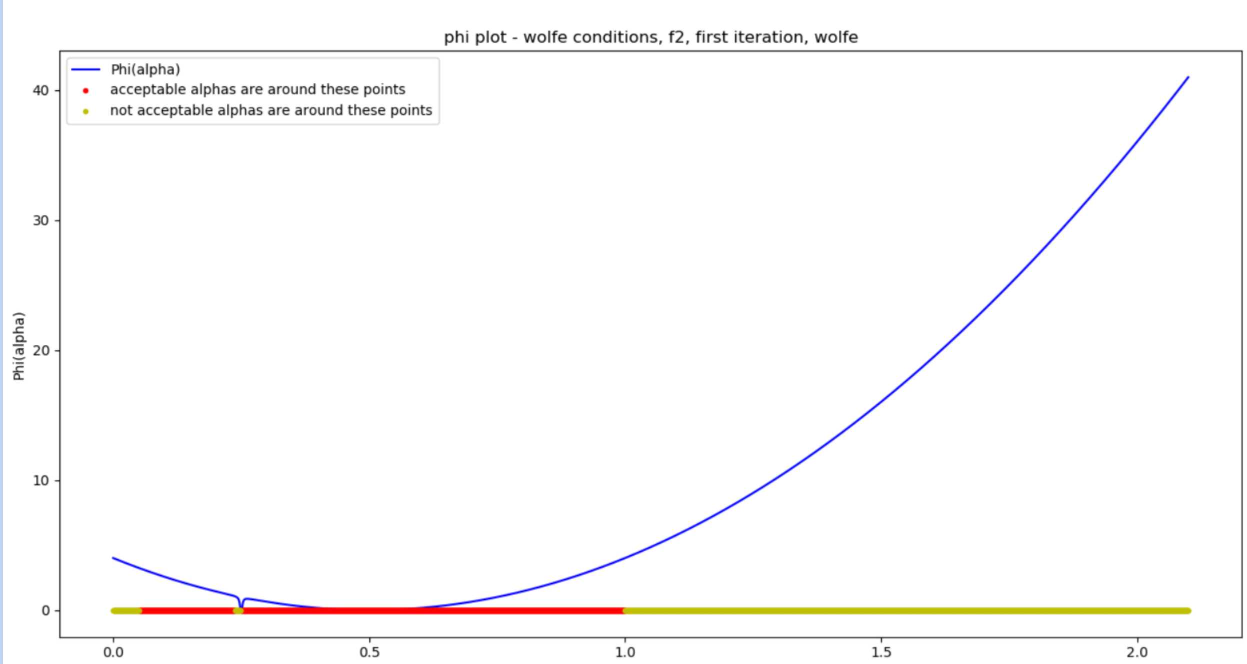
	آزمایش ۳
مشخصات اجرا	Function: f2 | Algorithm: Steepest Descent | Method: backtracking X0 = [2] | $alpha_0$ = 0.1| $C=C_1=0.0001$ | $C_2=0.9$
رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.	

میزان کاهش در f

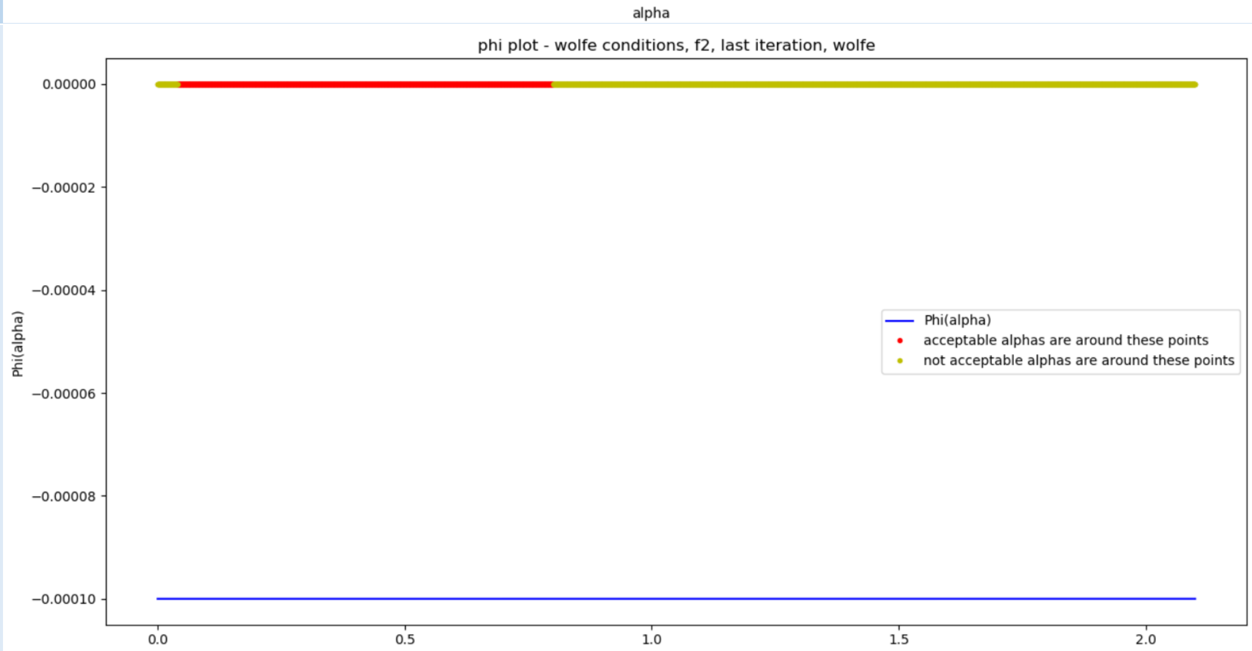


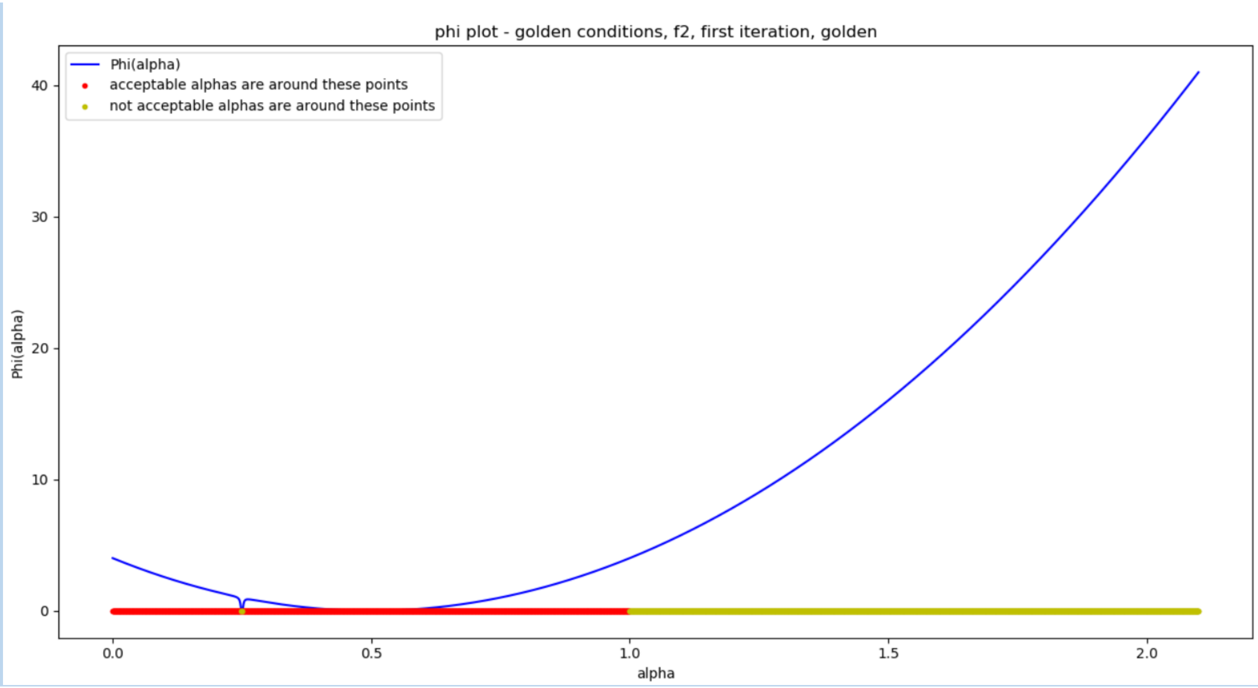
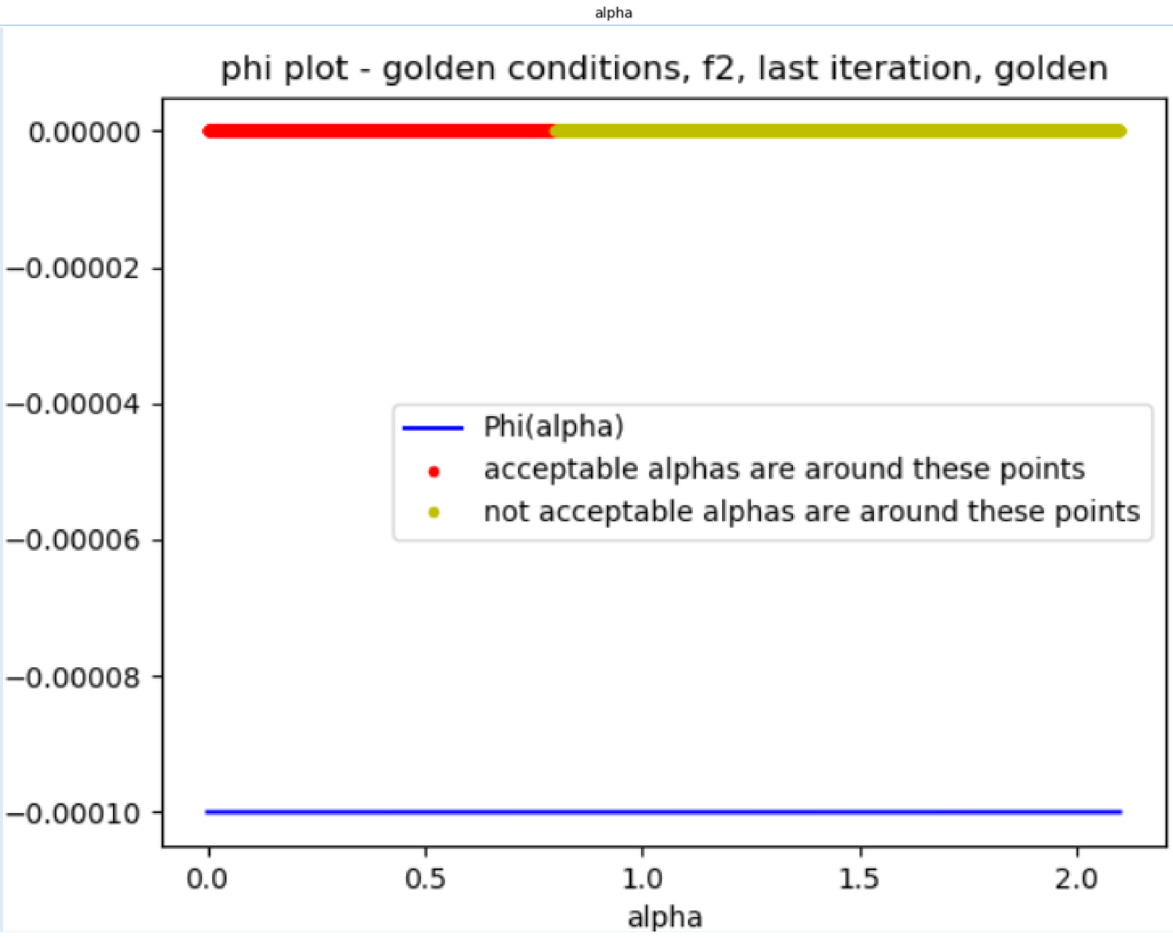


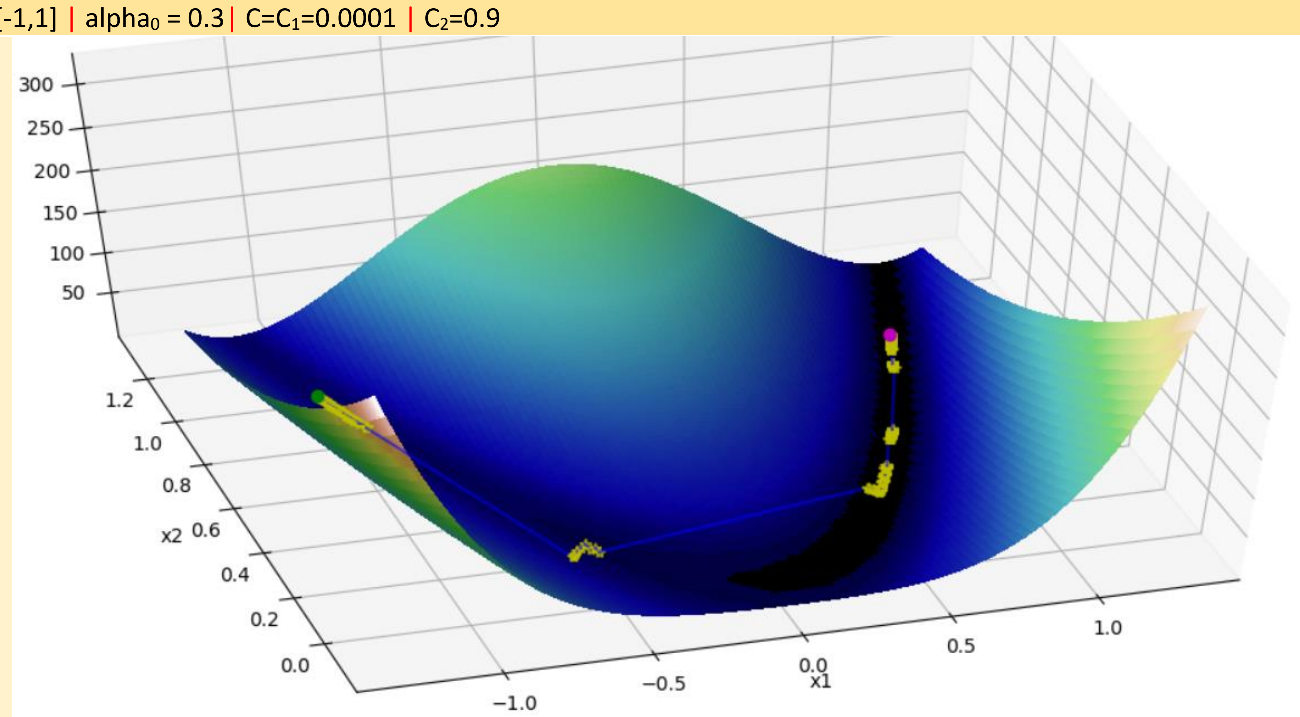
شرط ولف در iteration یک



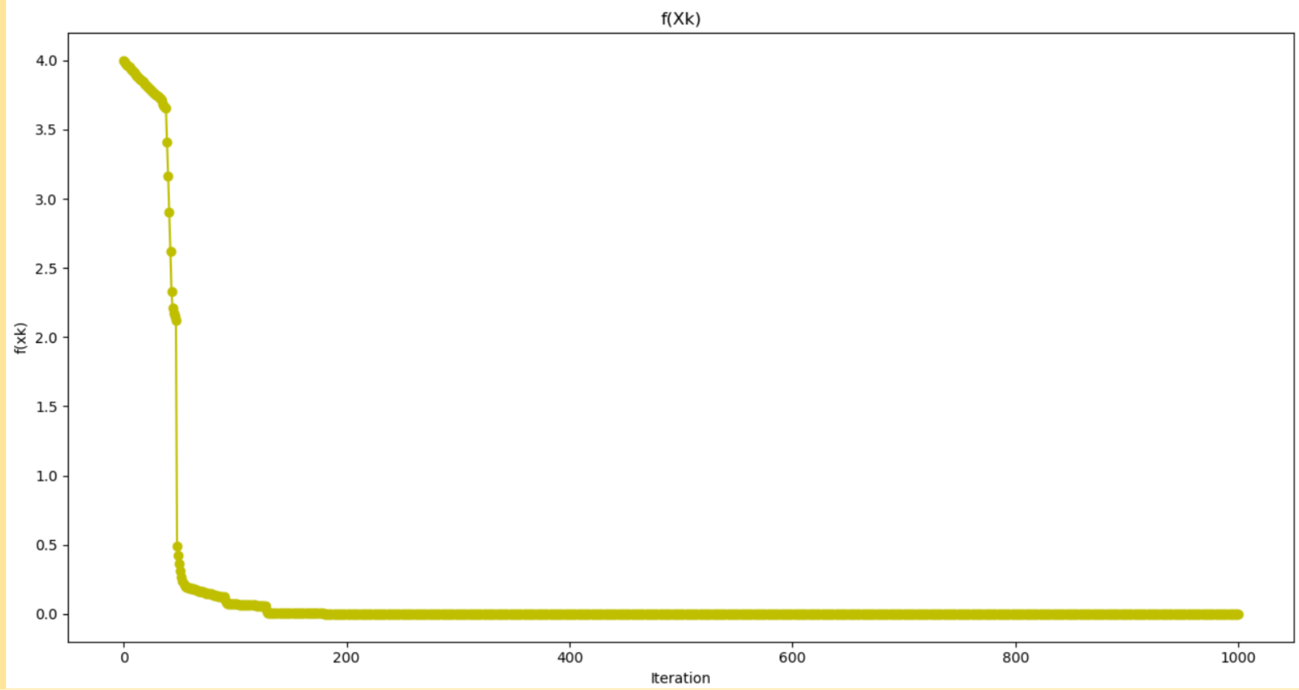
شرط ولف در iteration آخر

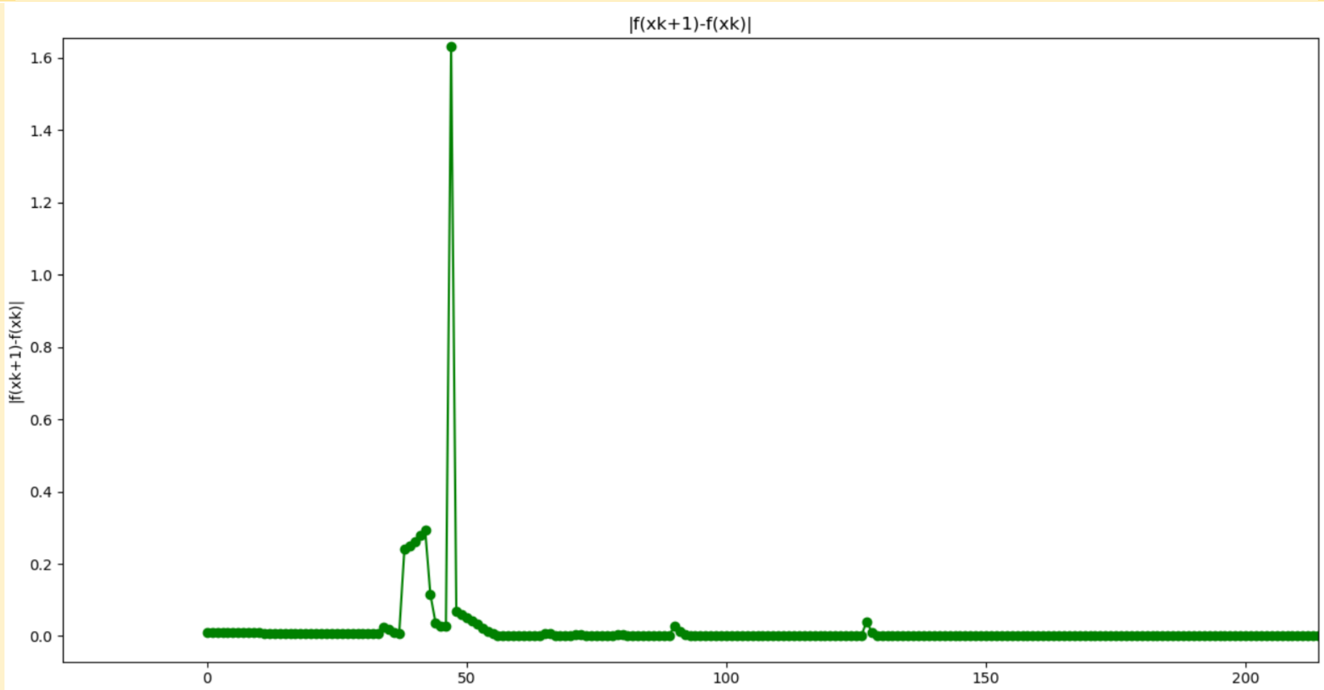


<table>
<tr><td>شرط گلدستن در iteration یک</td><td>
</td></tr>
<tr><td>شرط گلدستن در iteration آخر</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>آزمایش ۳</td></tr>
<tr><td>مشخصات اجرا</td><td>Function: f1 | Algorithm: Steepest Descent | Method: interpolation
X0 = [-1,1] | $alpha_0$ = 0.3 | $C=C_1=0.0001$ | $C_2=0.9$</td></tr>
<tr><td>رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.</td><td>
</td></tr>
</table>

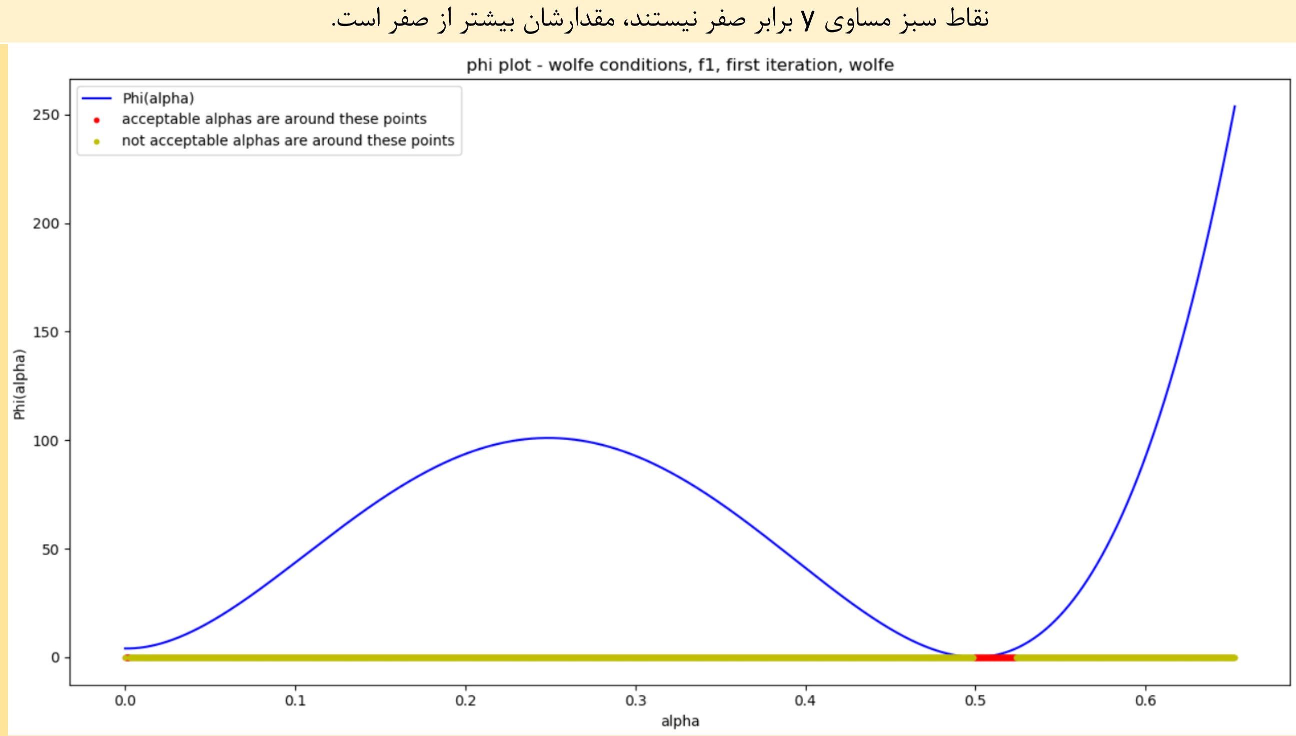
میزان کاهش در f



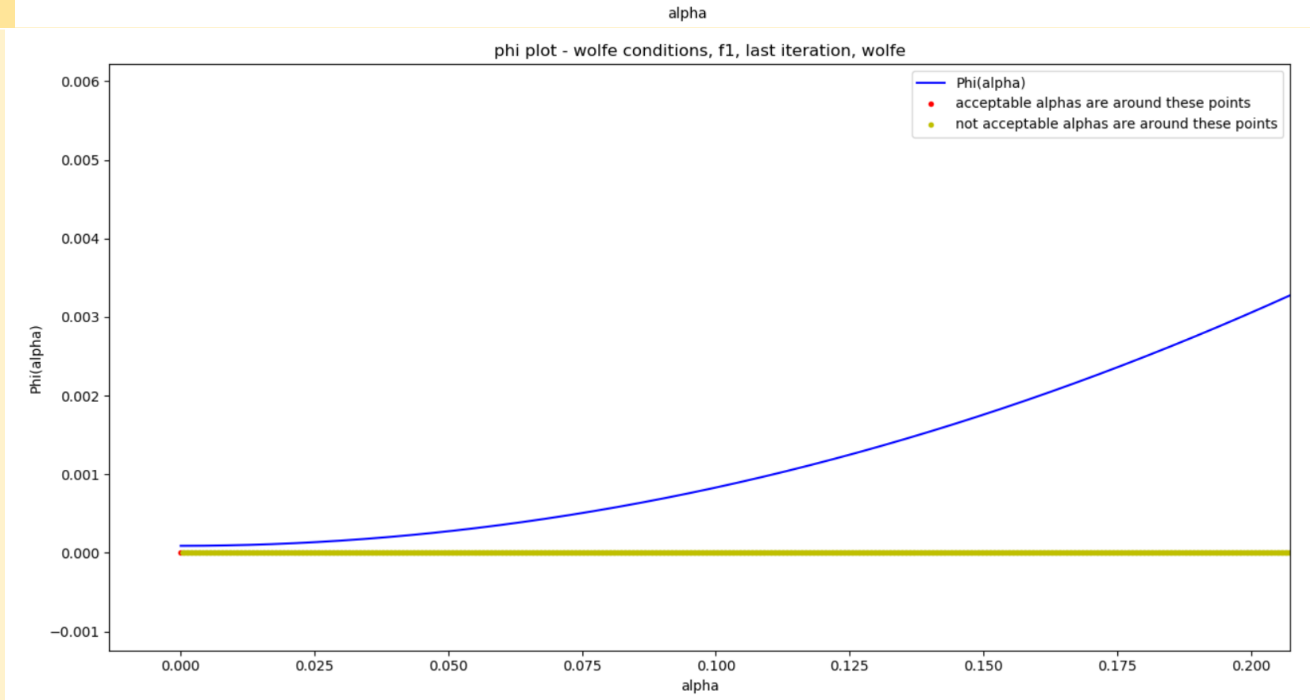


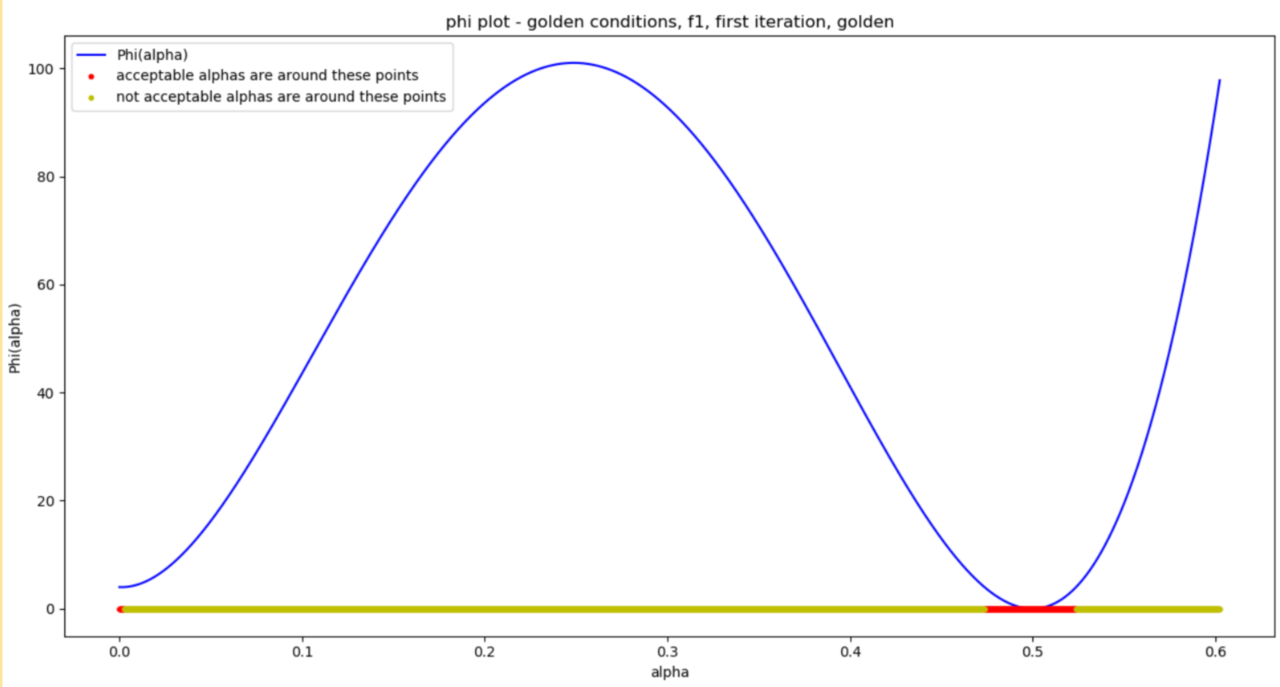
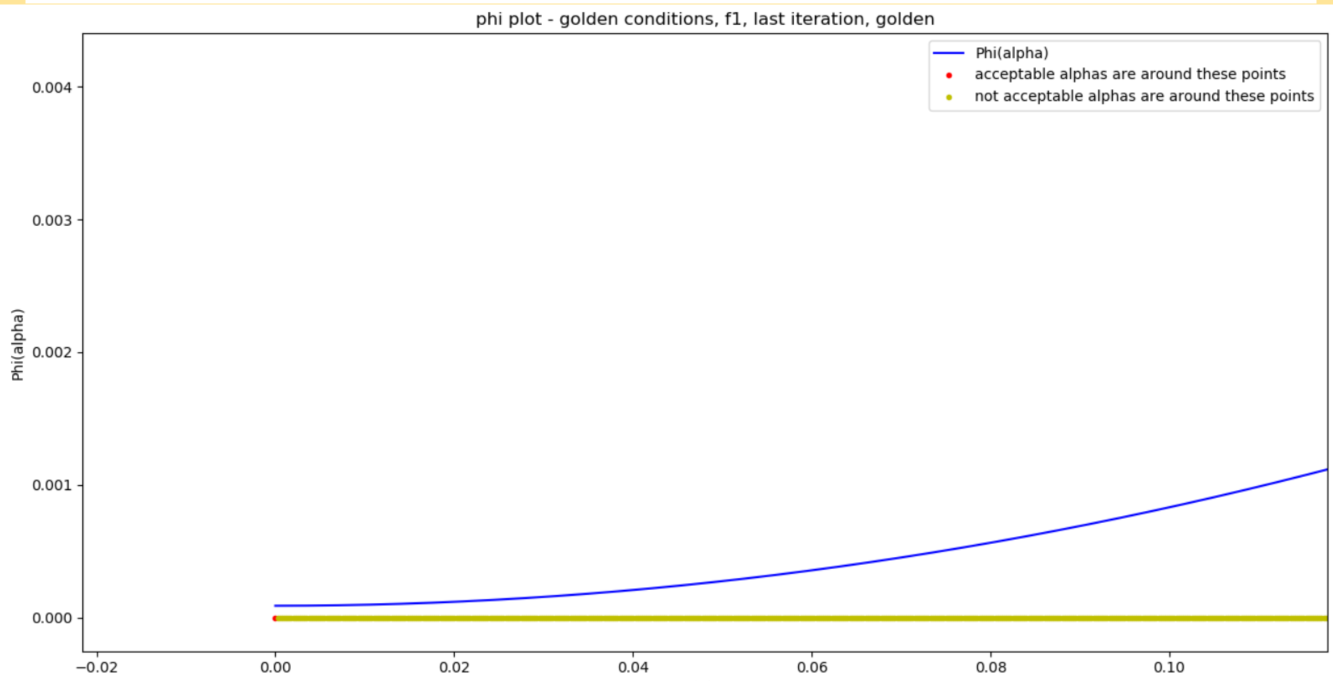
نقاط سبز مساوی ۷ برابر صفر نیستند، مقادارشان بیشتر از صفر است.

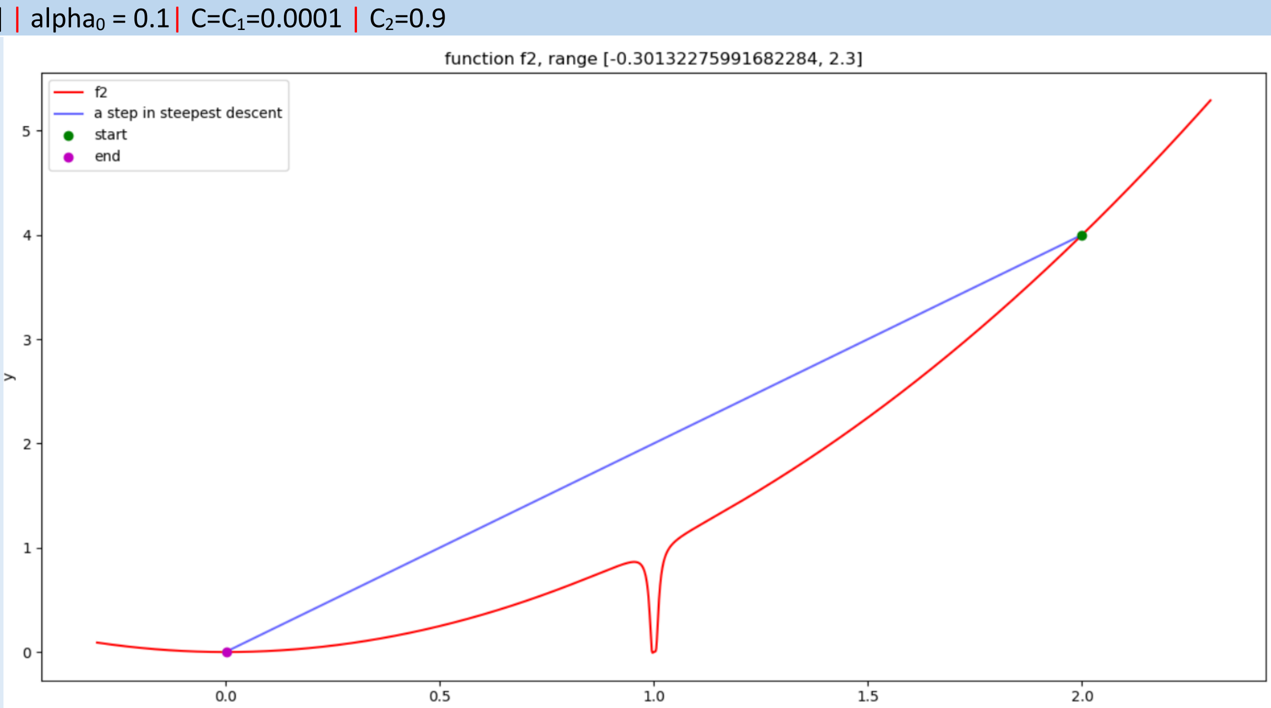
شرط ولف در iteration یک

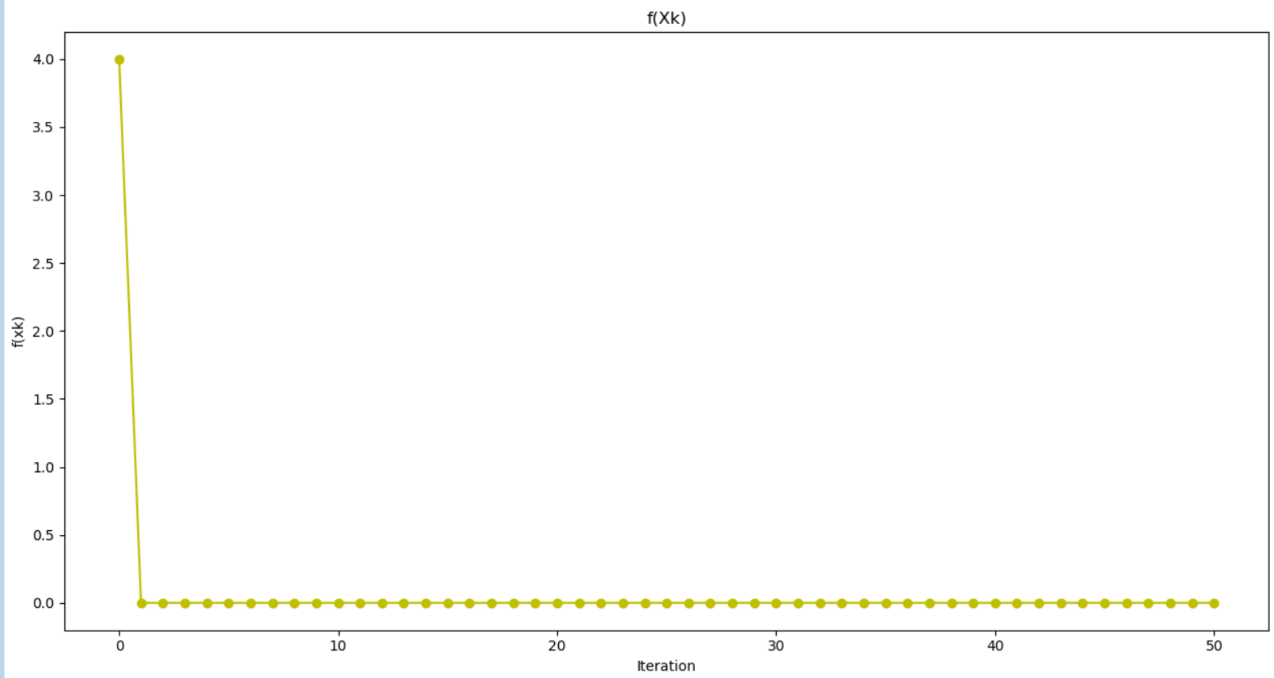
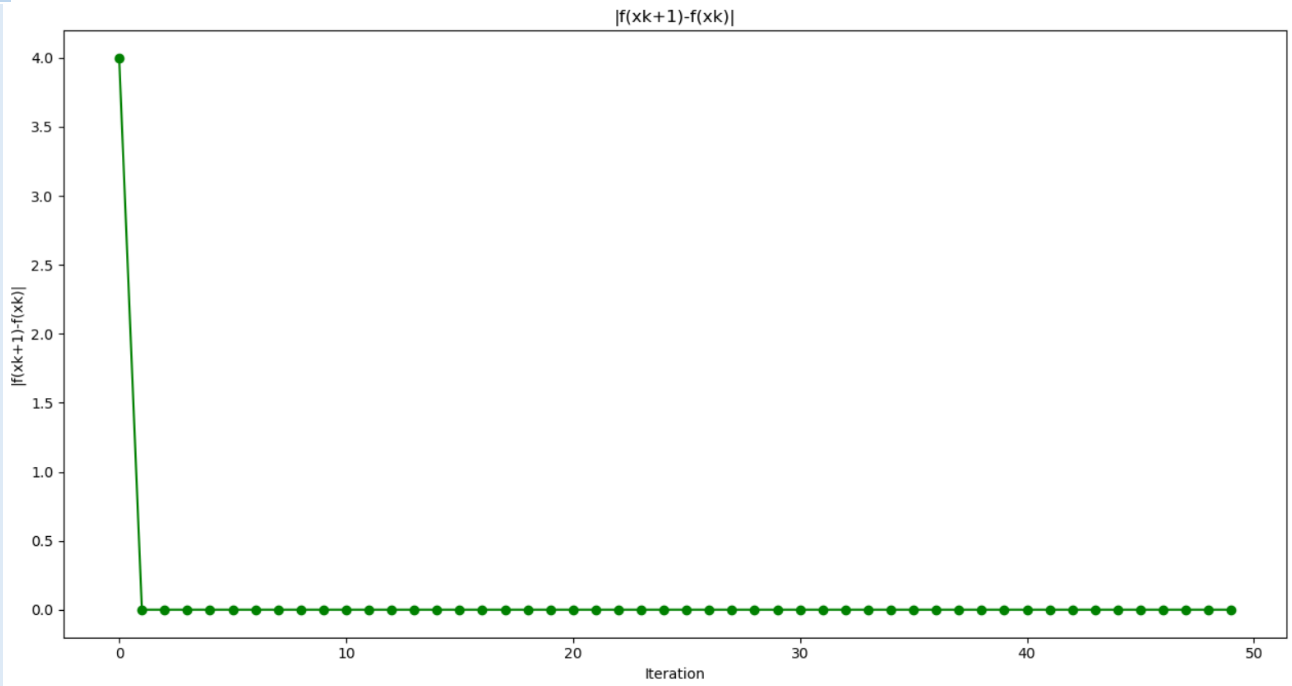
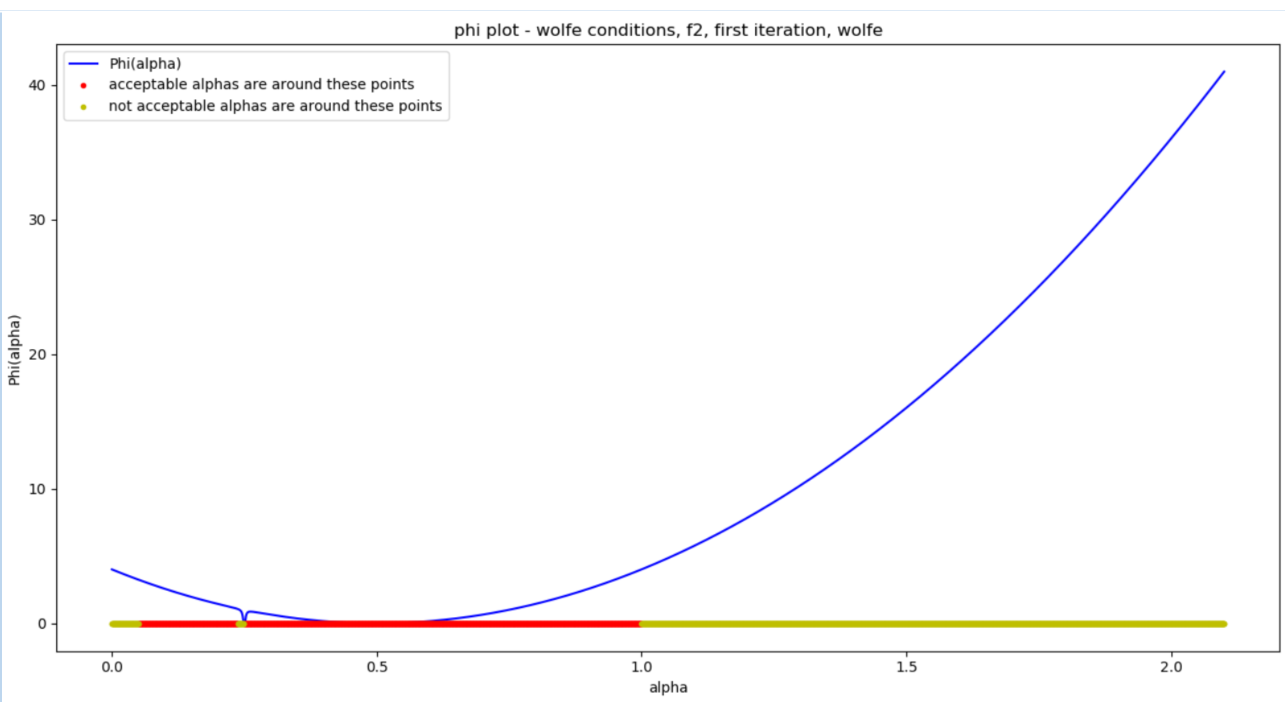
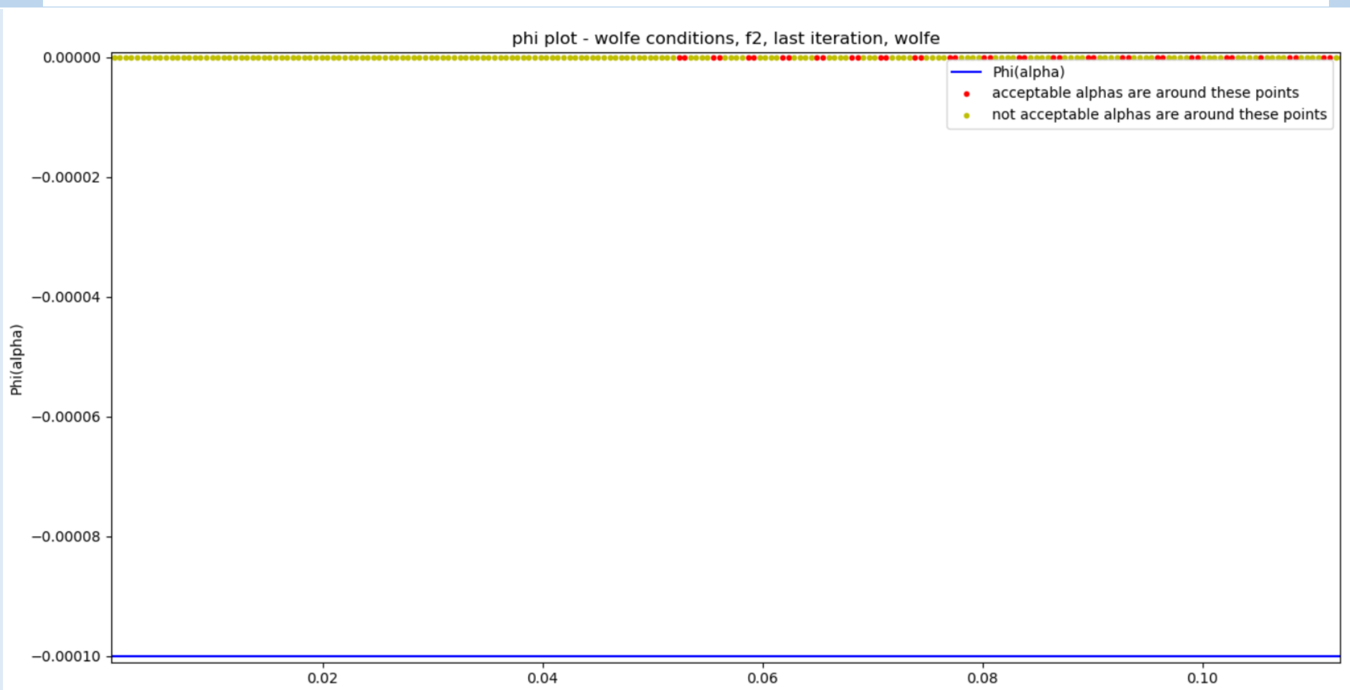


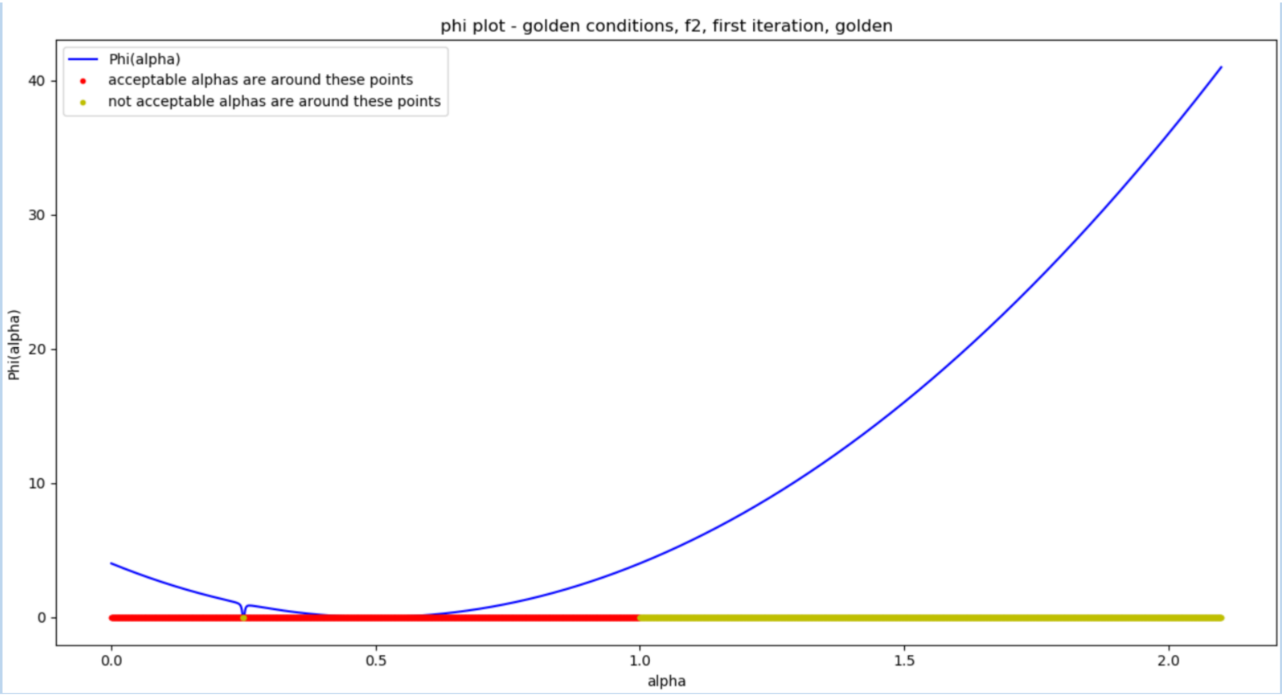
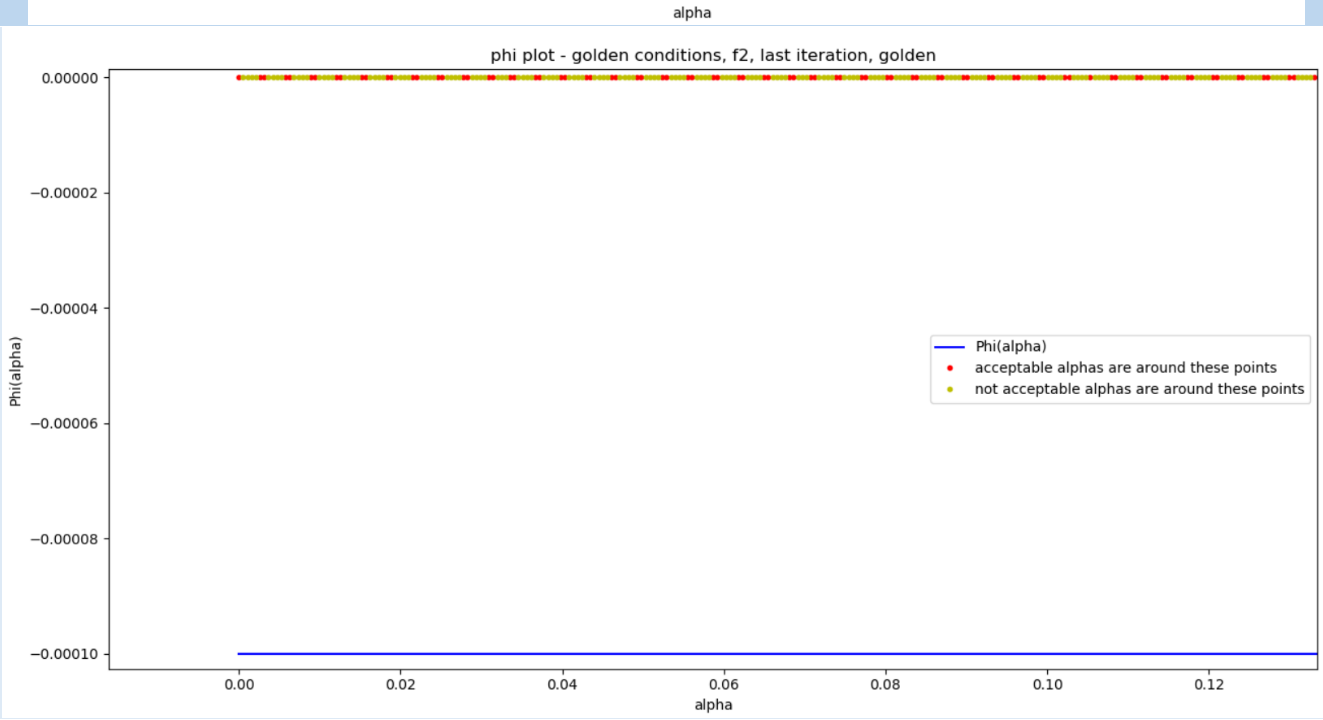
شرط ولف در iteration آخر

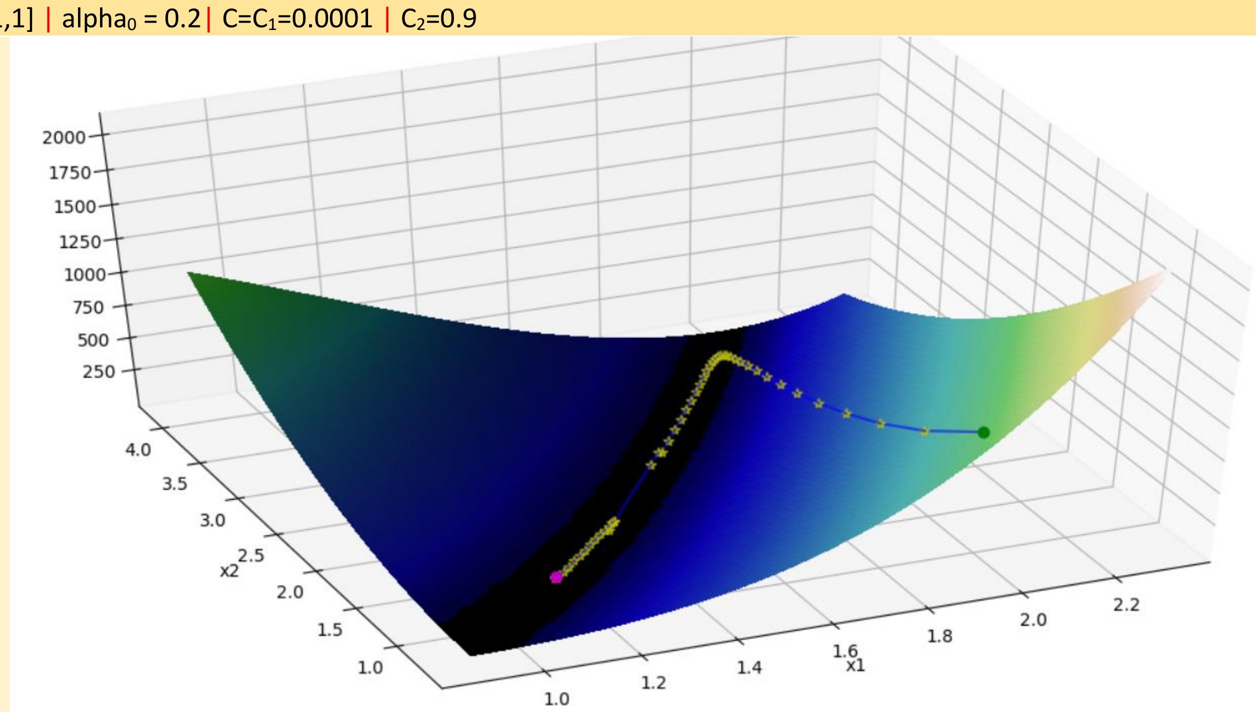


شرط گلدستن در iteration یک	
شرط گلدستن در iteration آخر	

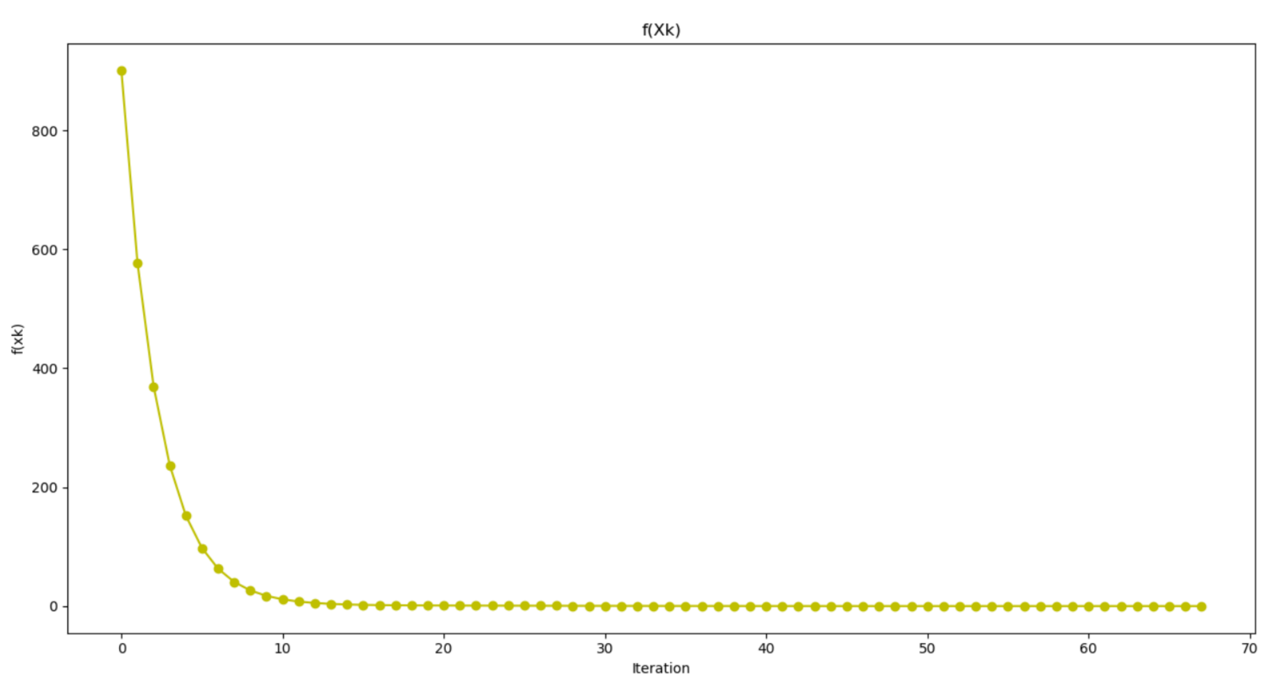
	آزمایش ۴
مشخصات اجرا	Function: f2 | Algorithm: Steepest Descent | Method: Interpolation X0 = [2] | alpha$_0$ = 0.1| C=C$_1$=0.0001 | C$_2$=0.9
رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.	

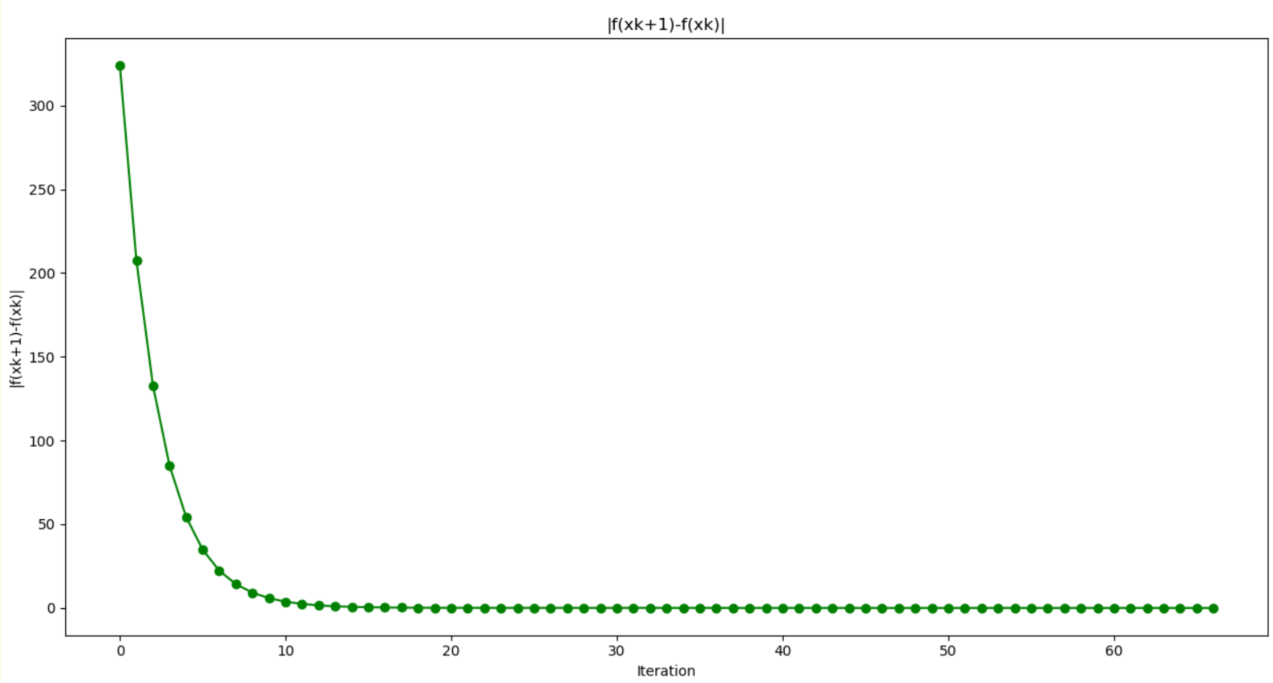
میزان کاهش در f	
	
شرط ولف در iteration یک	
شرط ولف در iteration آخر	

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>شرط گلدستن در iteration یک</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>شرط گلدستن در iteration آخر</td>
</tr>
</table>

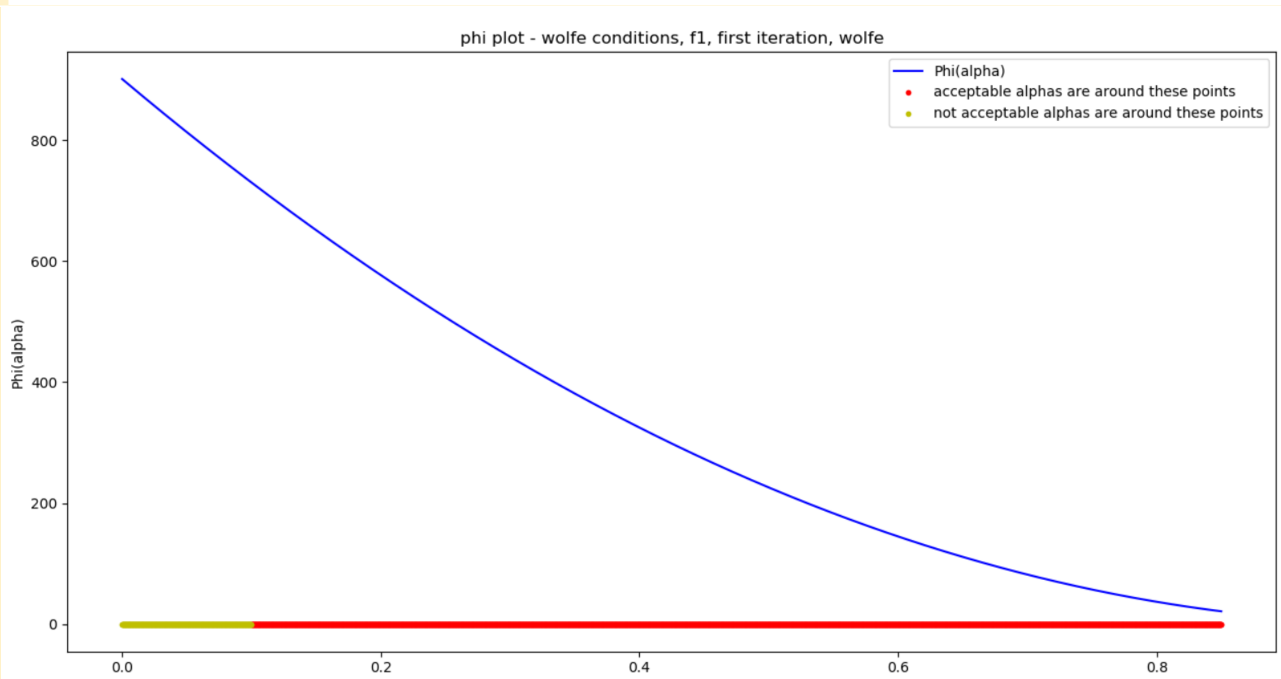
<table>
<tr>
<td>آزمایش ۵</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Function: f1 | Algorithm : Quasi-Newton | Method: backtracking
X0 = [-1,1] | alpha$_0$ = 0.2 | C=C$_1$=0.0001 | C$_2$=0.9</td>
<td>مشخصات اجرا</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.</td>
</tr>
</table>

میزان کاهش در f

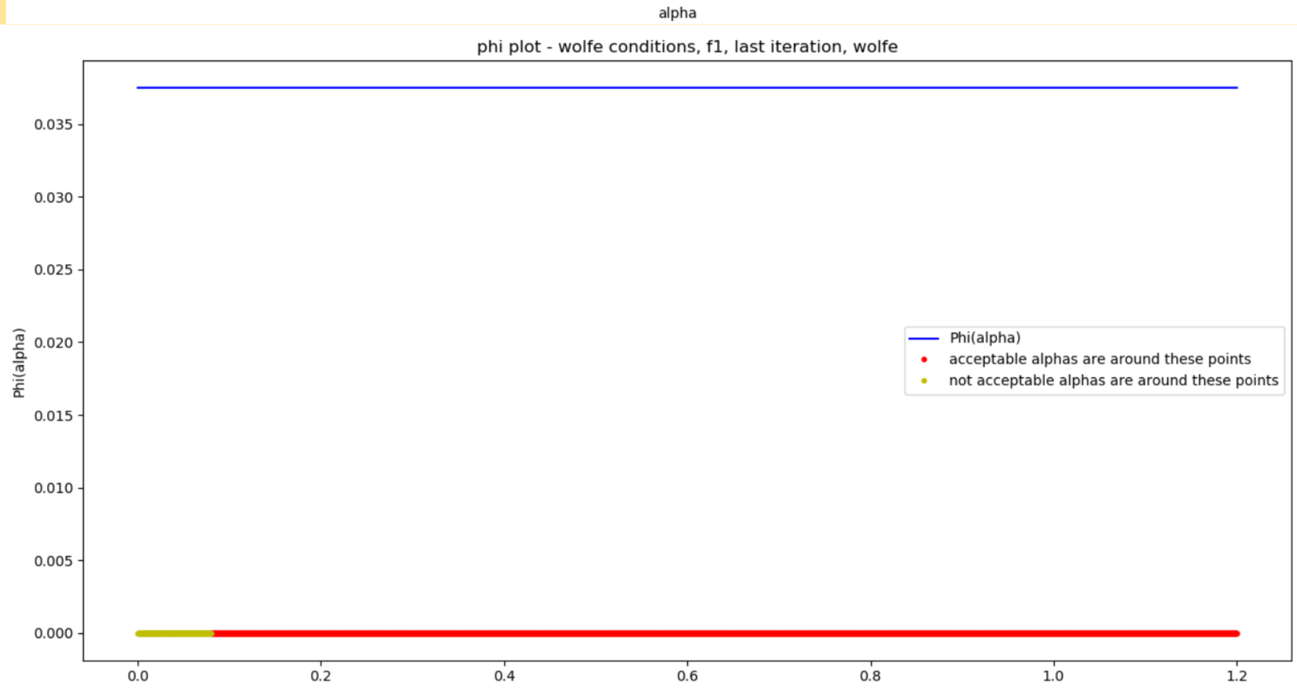


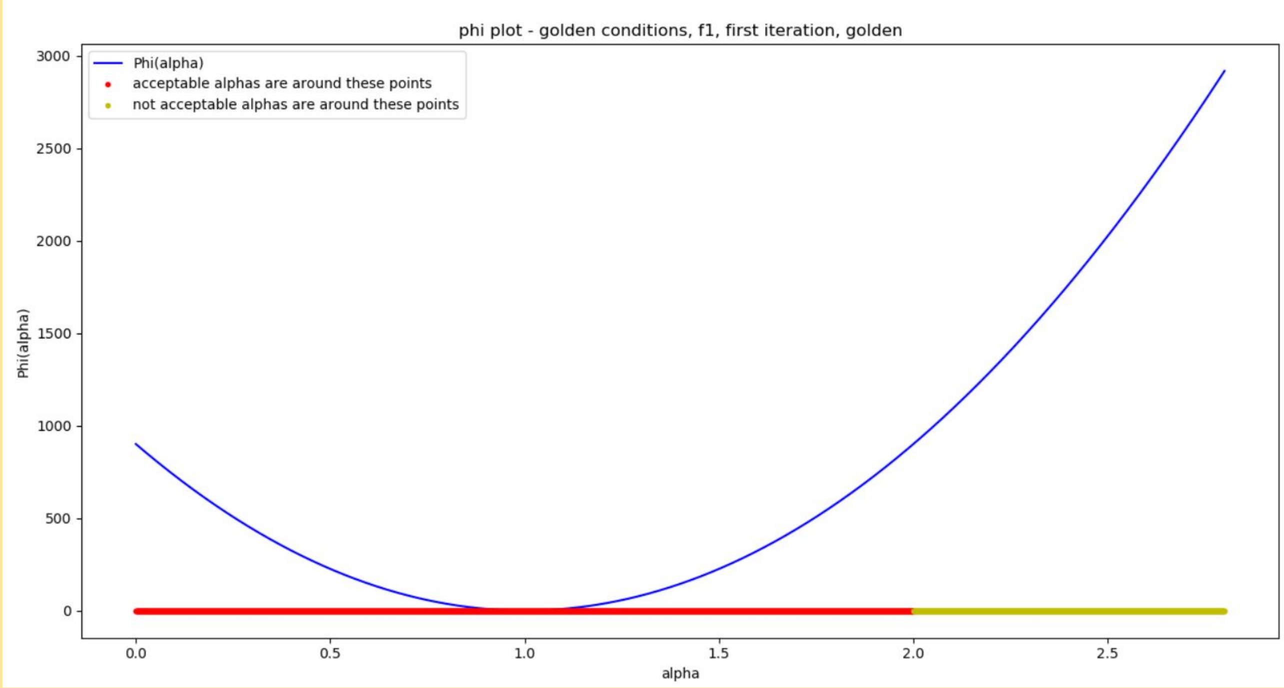
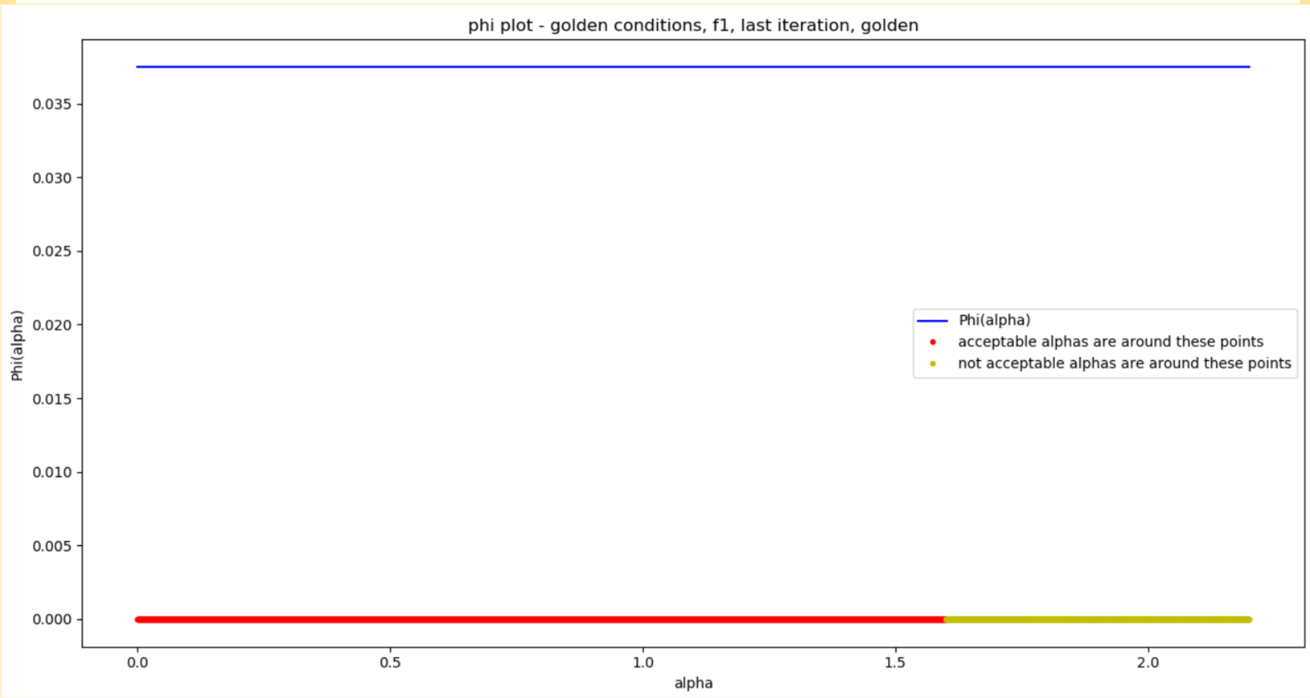


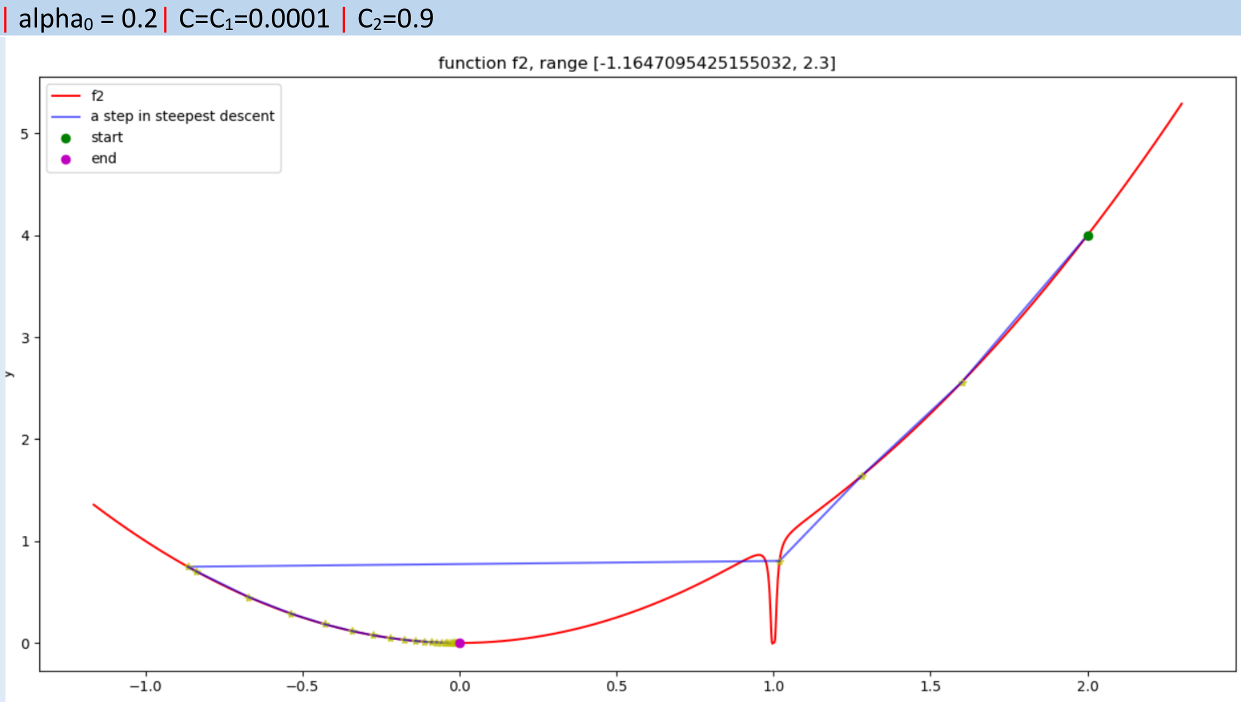
شرط ولف در iteration یک



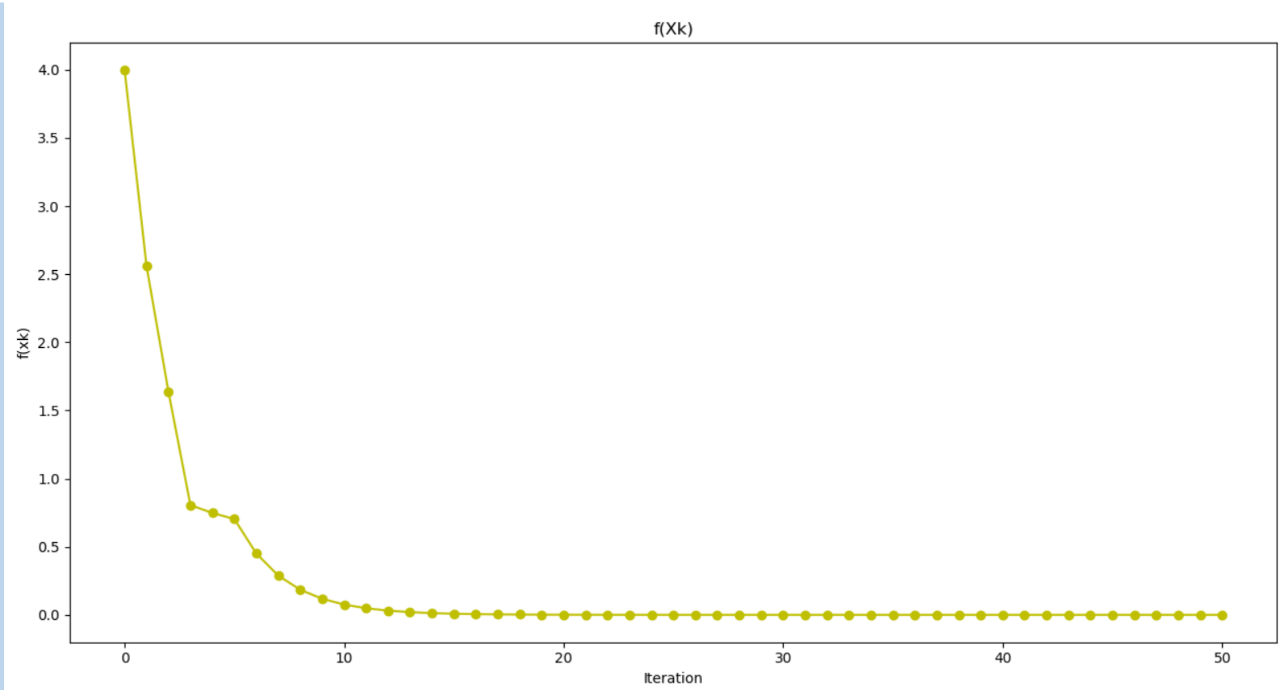
شرط ولف در iteration آخر

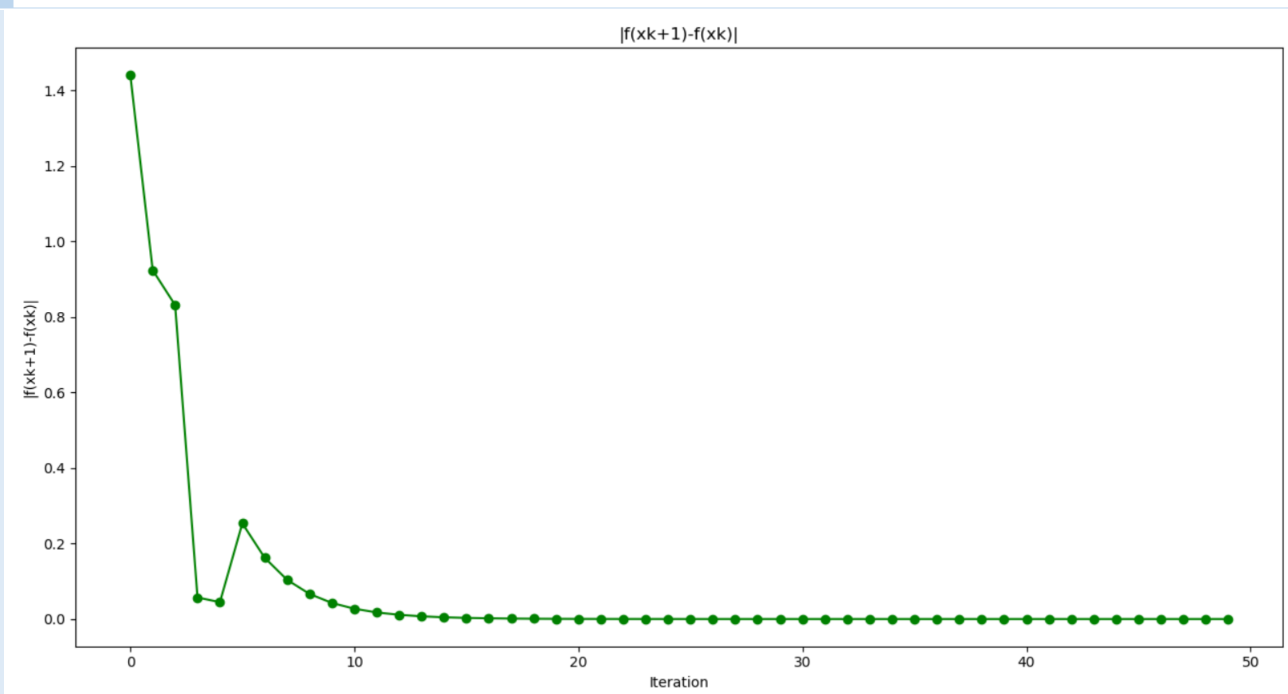


<table>
<tr><td>شرط گلدستن در iteration یک</td><td>
</td></tr>
<tr><td>شرط گلدستن در iteration آخر</td><td>
</td></tr>
</table>

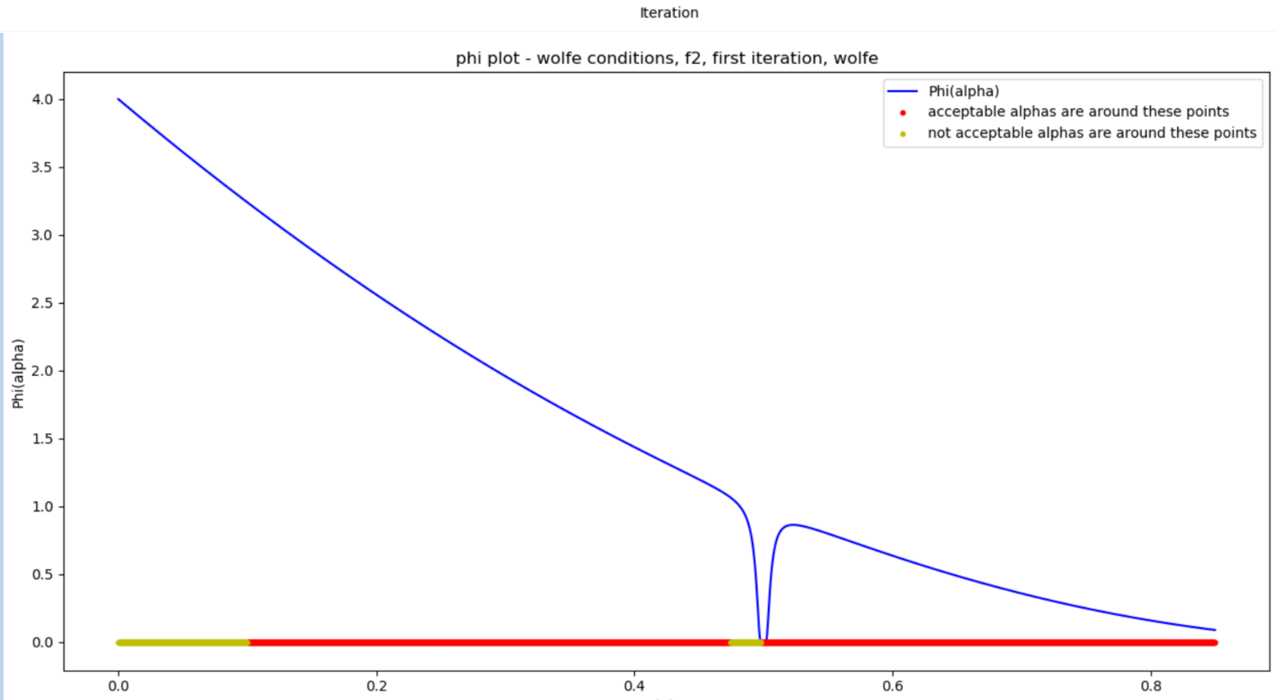
<table>
<tr><td></td><td>آزمایش ۶</td></tr>
<tr><td>مشخصات اجرا</td><td>Function: f2 | Algorithm: Quasi-Newton | Method: backtracking
X0 = [2] | alpha$_0$ = 0.2 | C=C$_1$=0.0001 | C$_2$=0.9</td></tr>
<tr><td>رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.</td><td>
</td></tr>
</table>

میزان کاهش در f

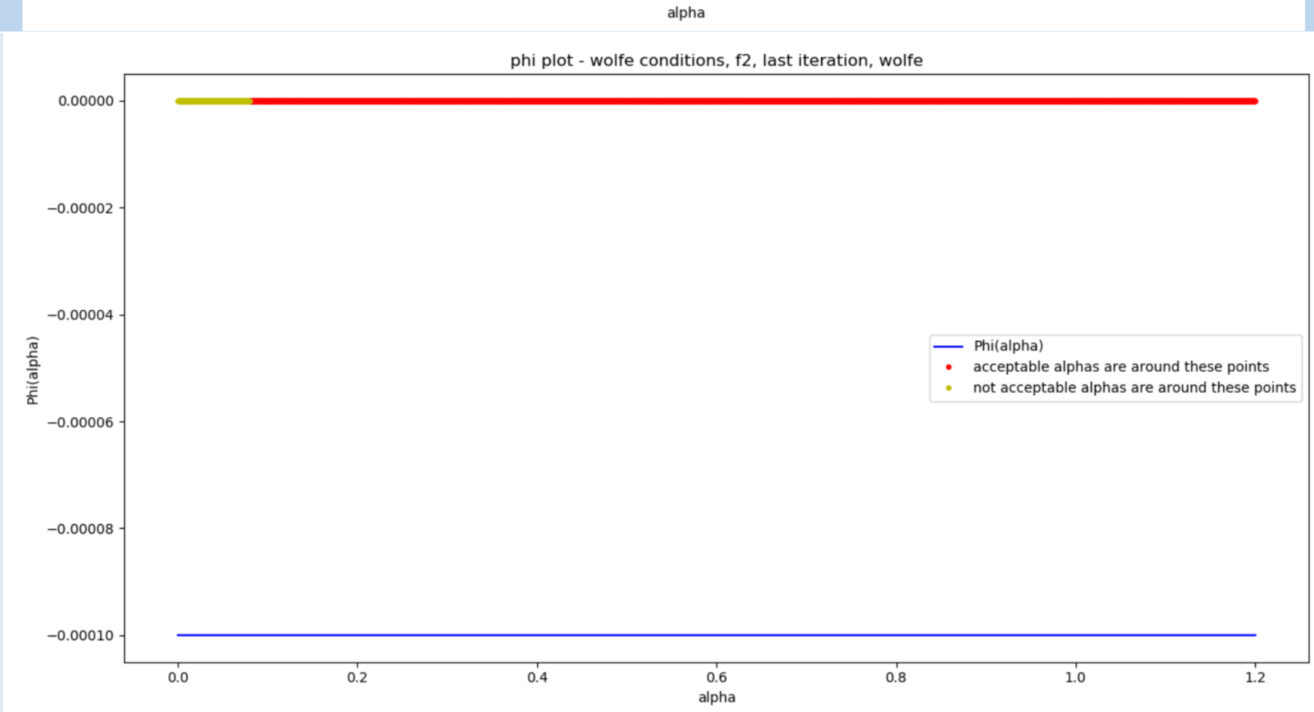


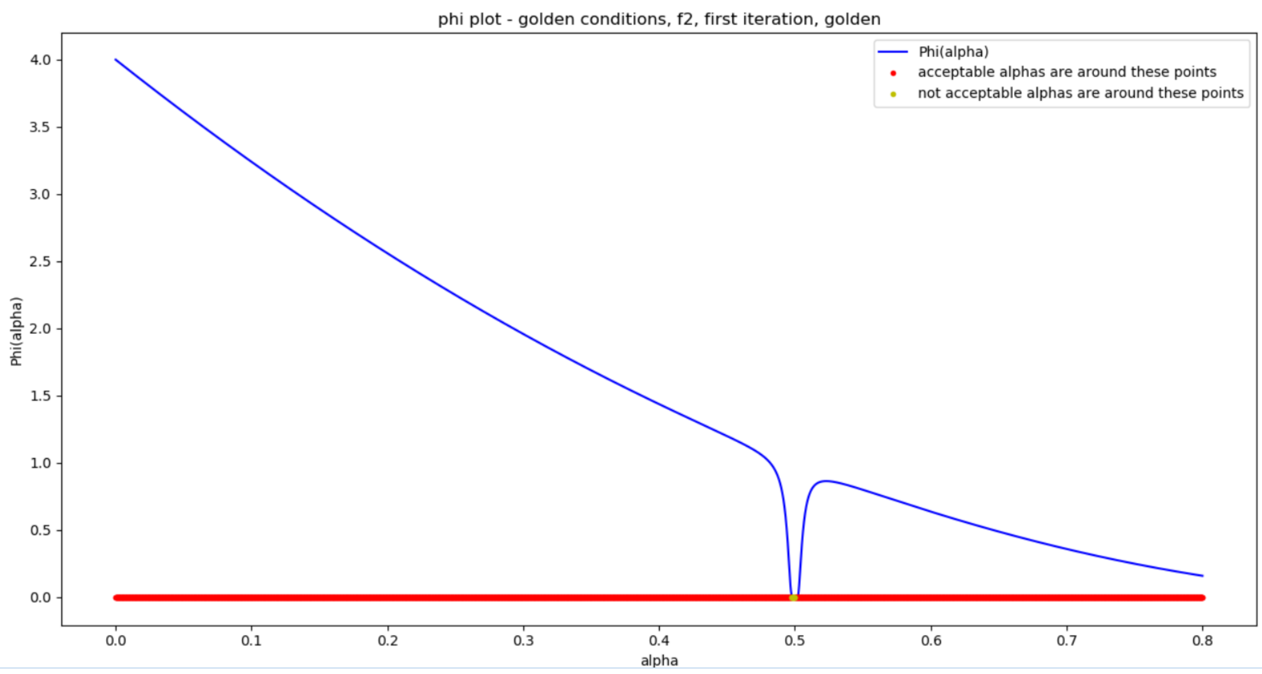
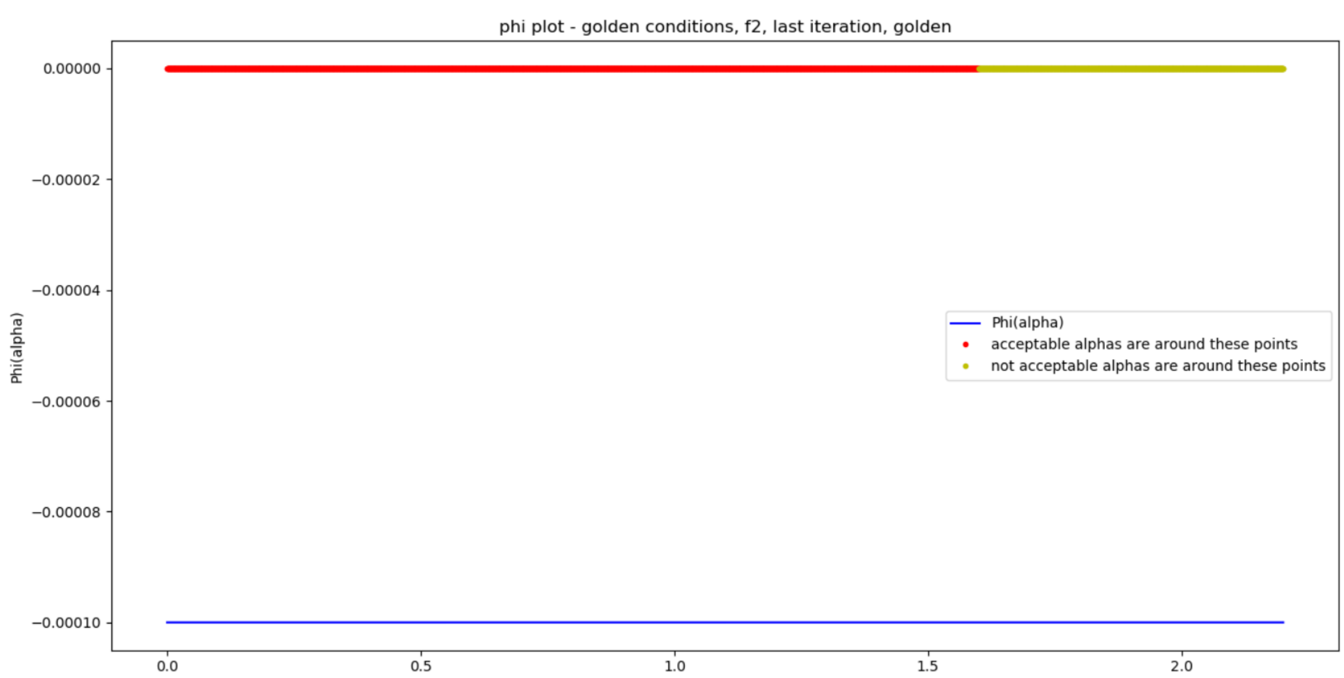


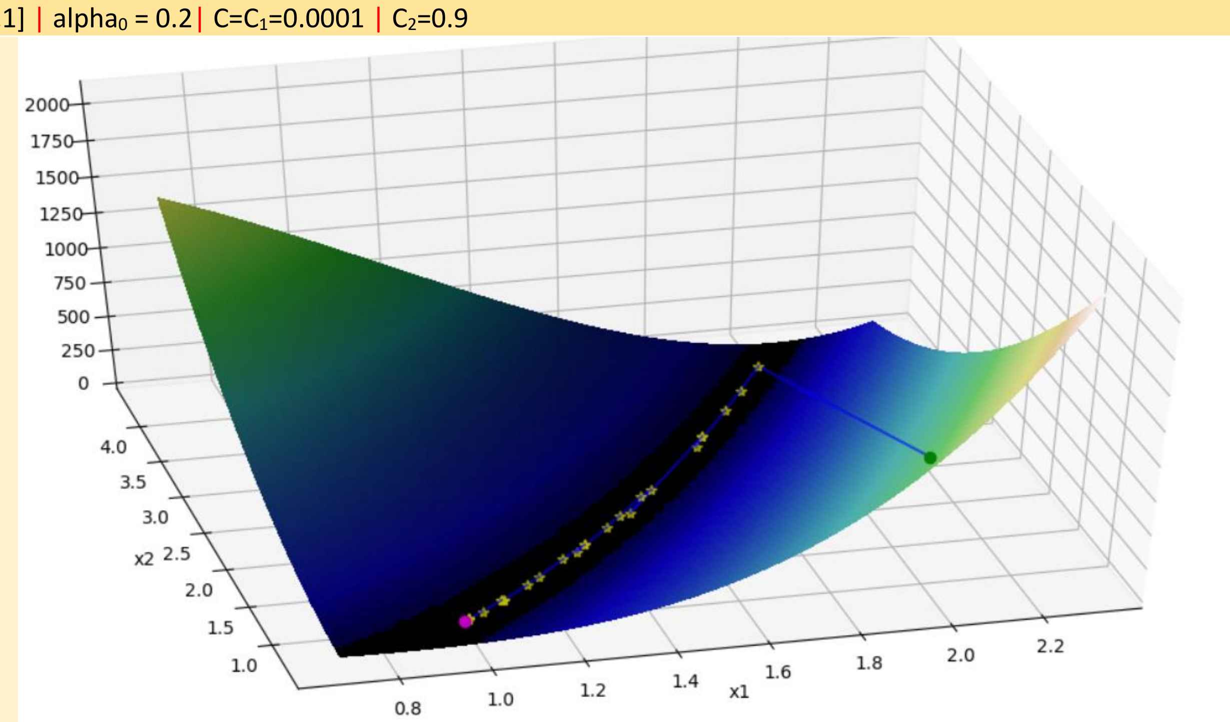
شرط ولف در iteration یک



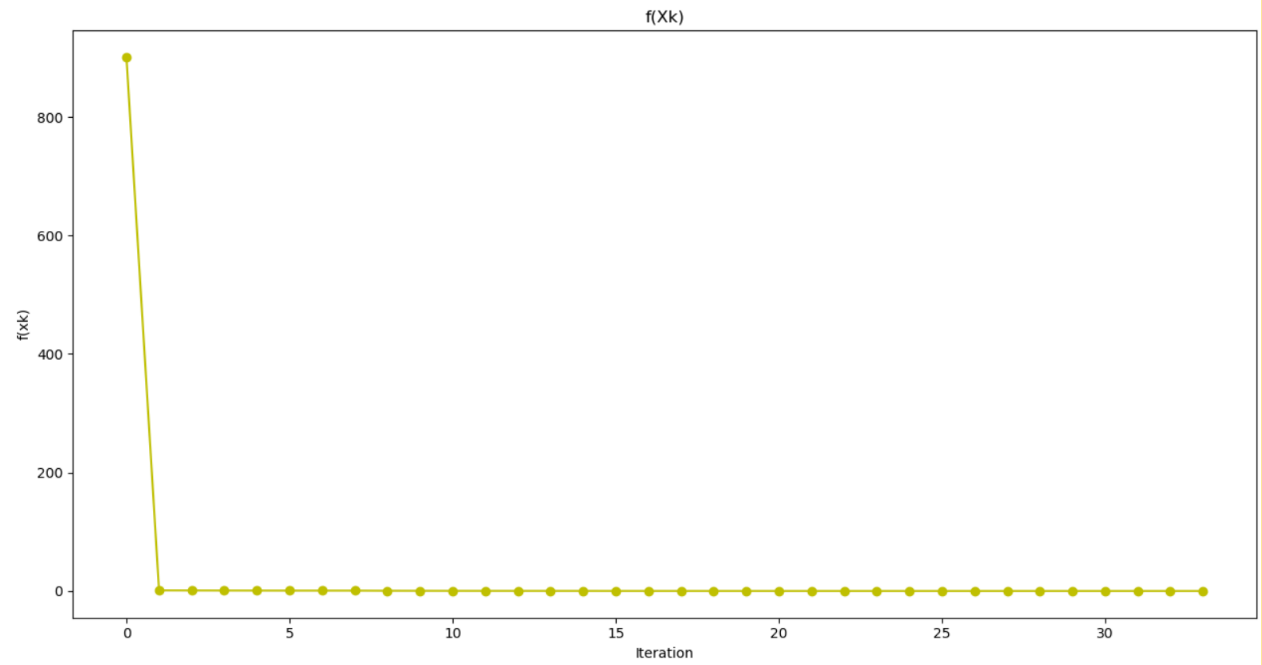
شرط ولف در iteration آخر

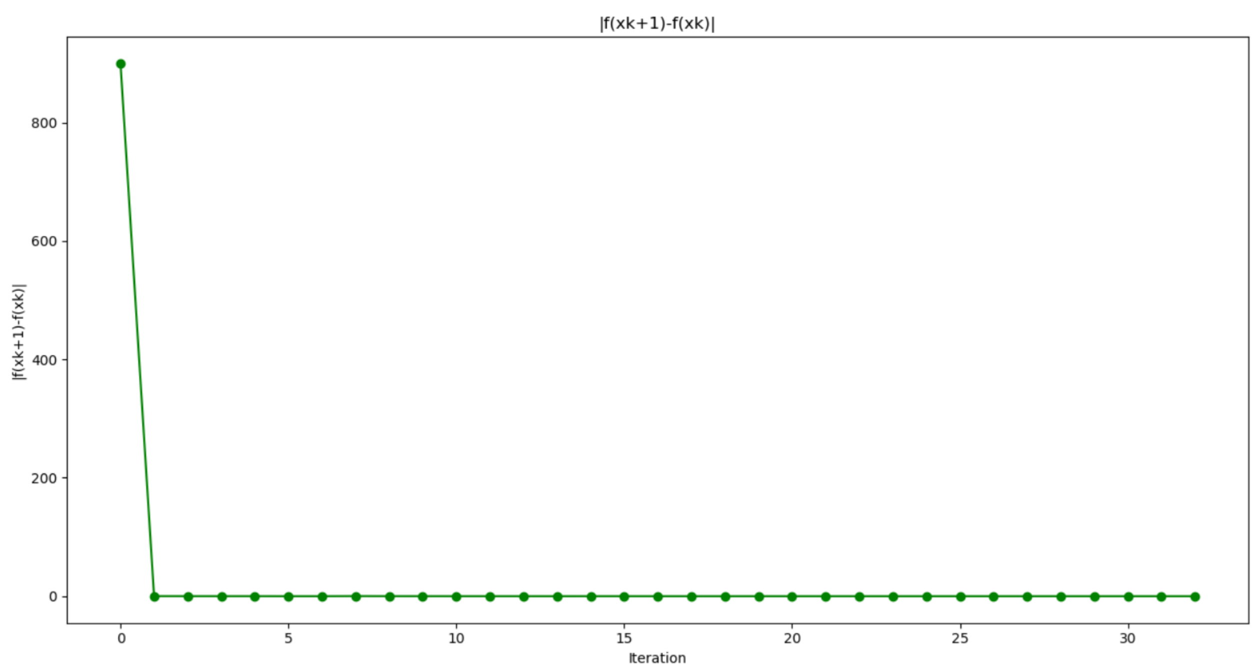


	شرط گلدستن در iteration یک
	شرط گلدستن در iteration آخر

آزمایش ۷	
Function: f1 | Algorithm : Quasi-Newton | Method: Interpolation X0 = [-1,1] | $alpha_0$ = 0.2 | $C=C_1$=0.0001 | C_2=0.9	مشخصات اجرا
	رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.

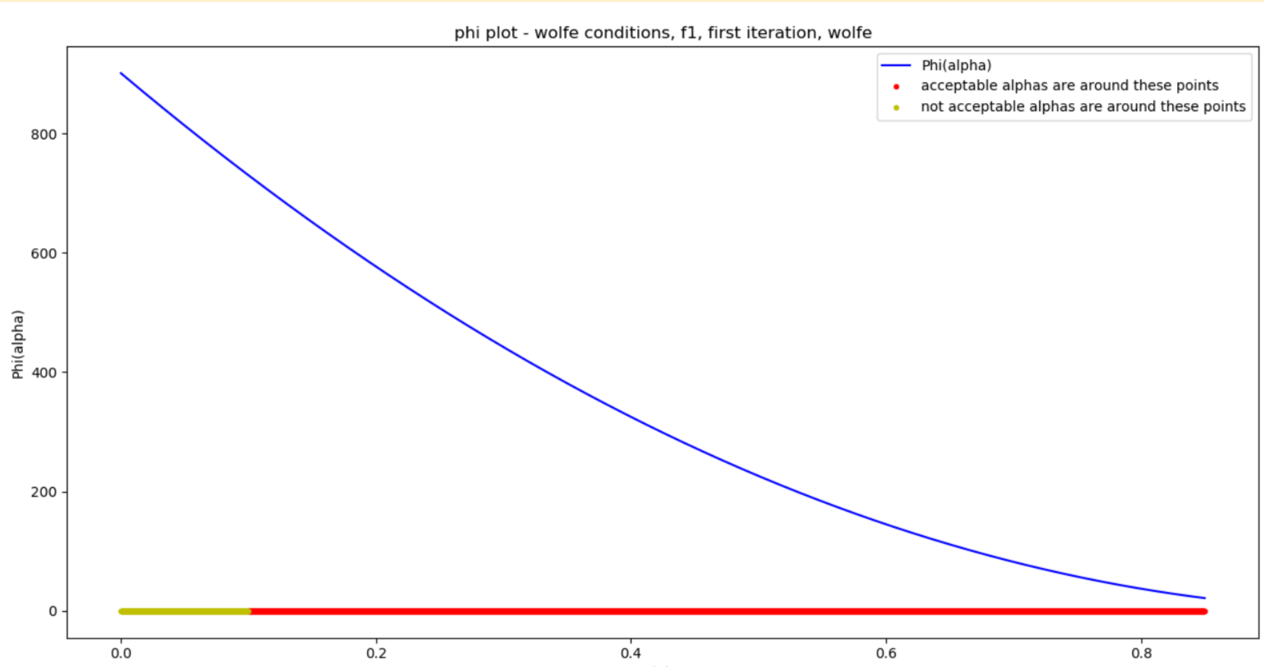
میزان کاهش در f



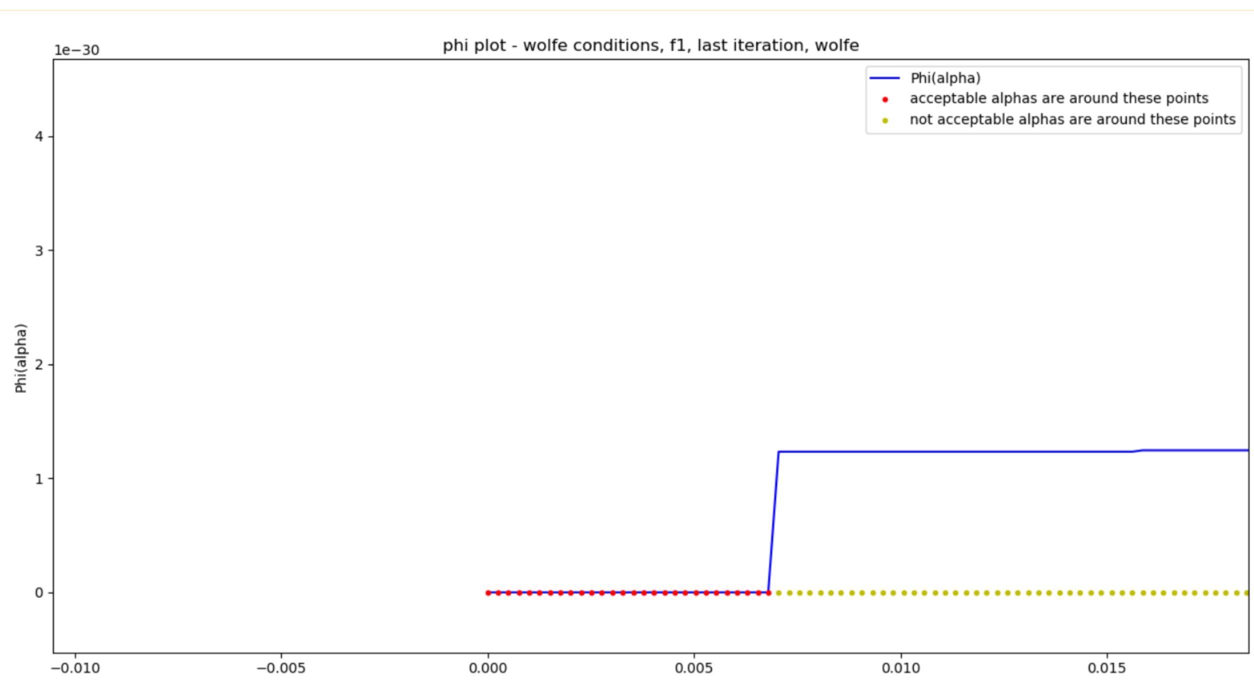


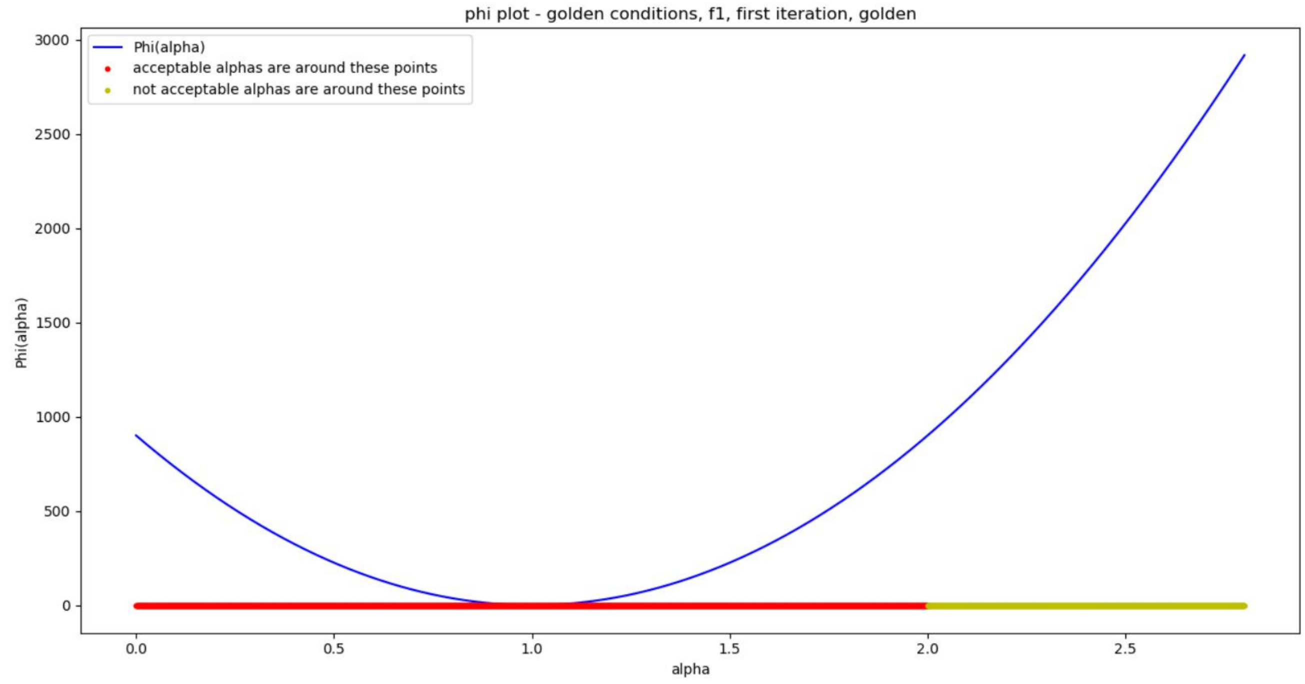
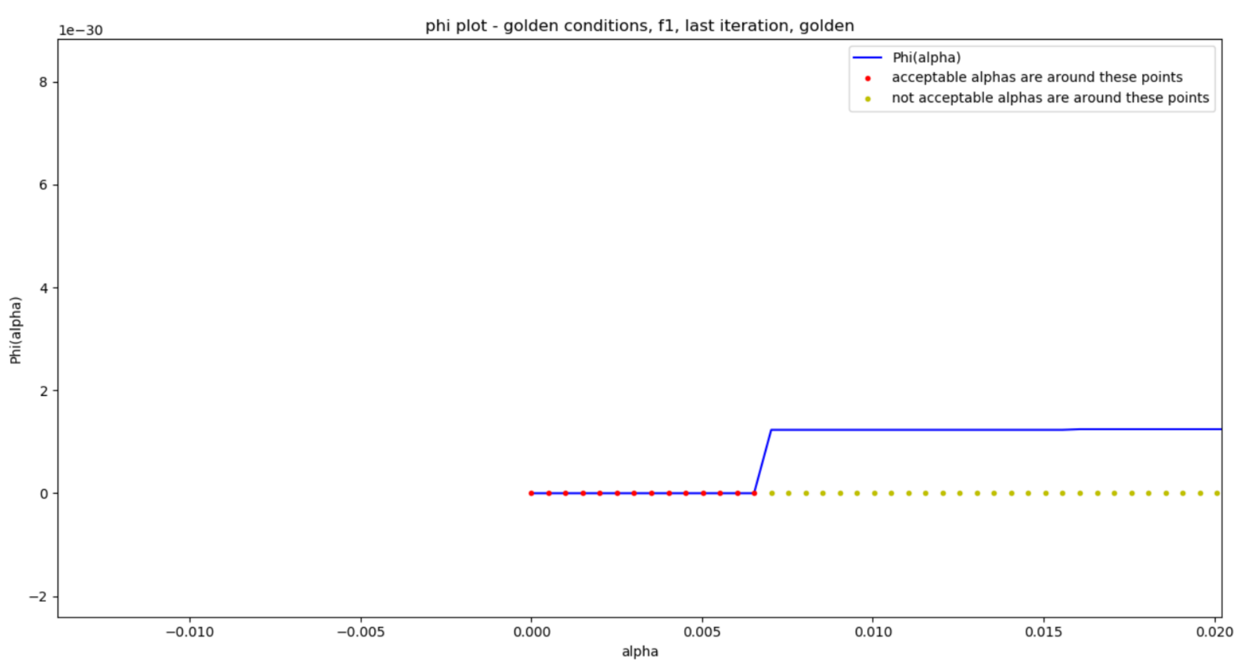
نقاط سبز مساوی y برابر صفر نیستند، مقدارشان بیشتر از صفر است.

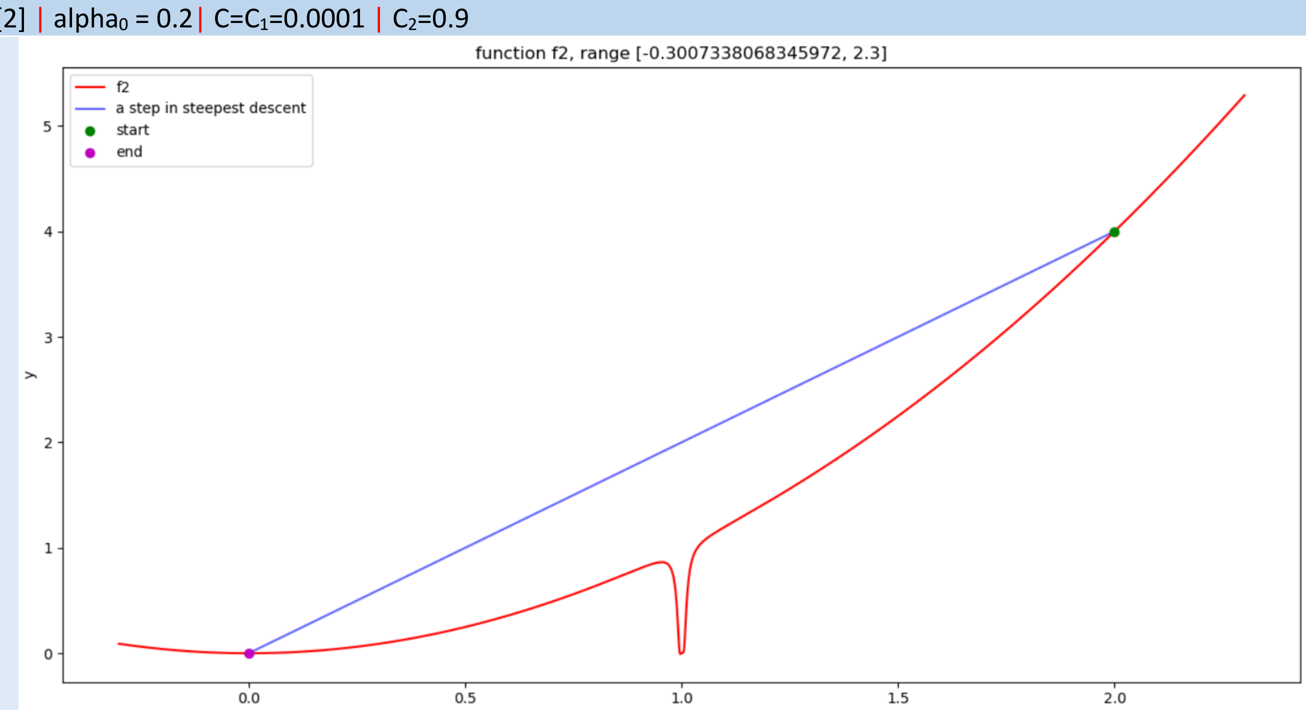
شرط ولف در iteration یک

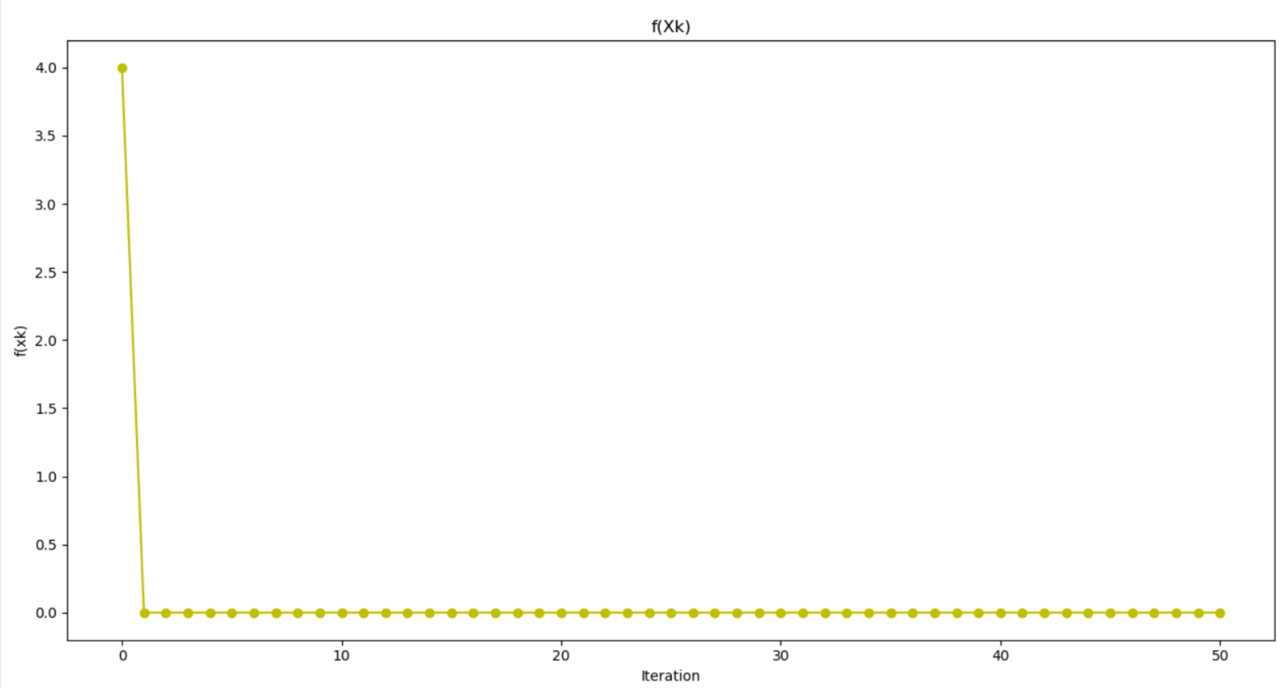
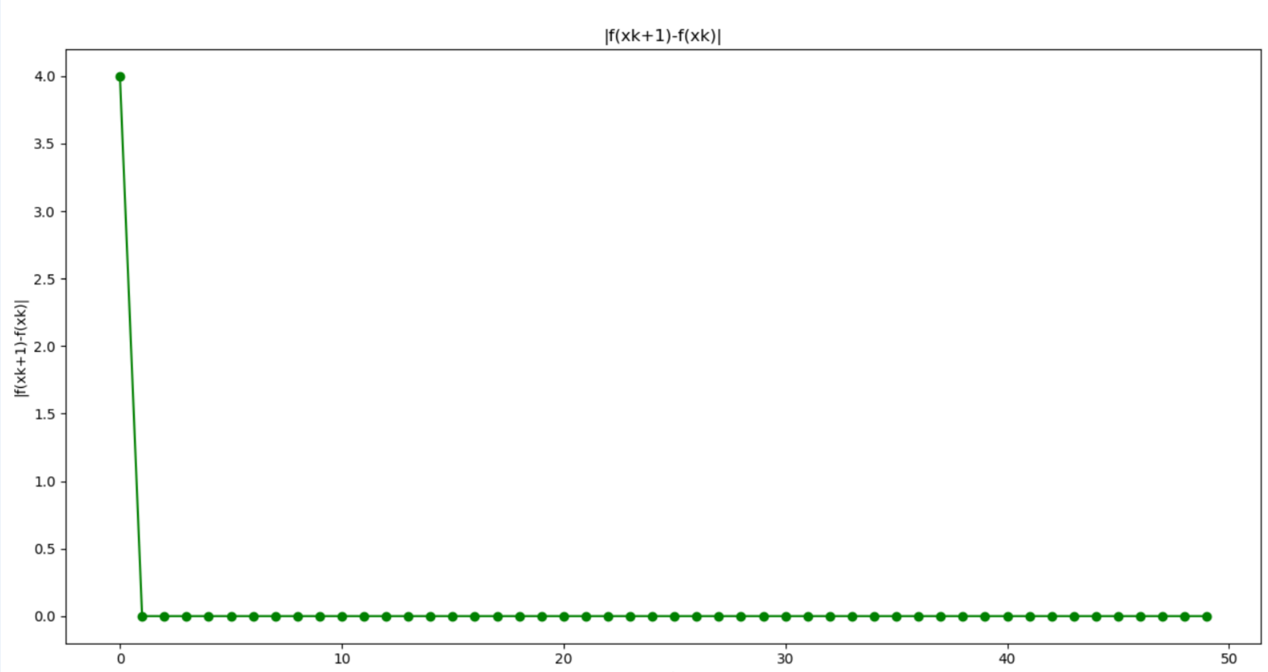
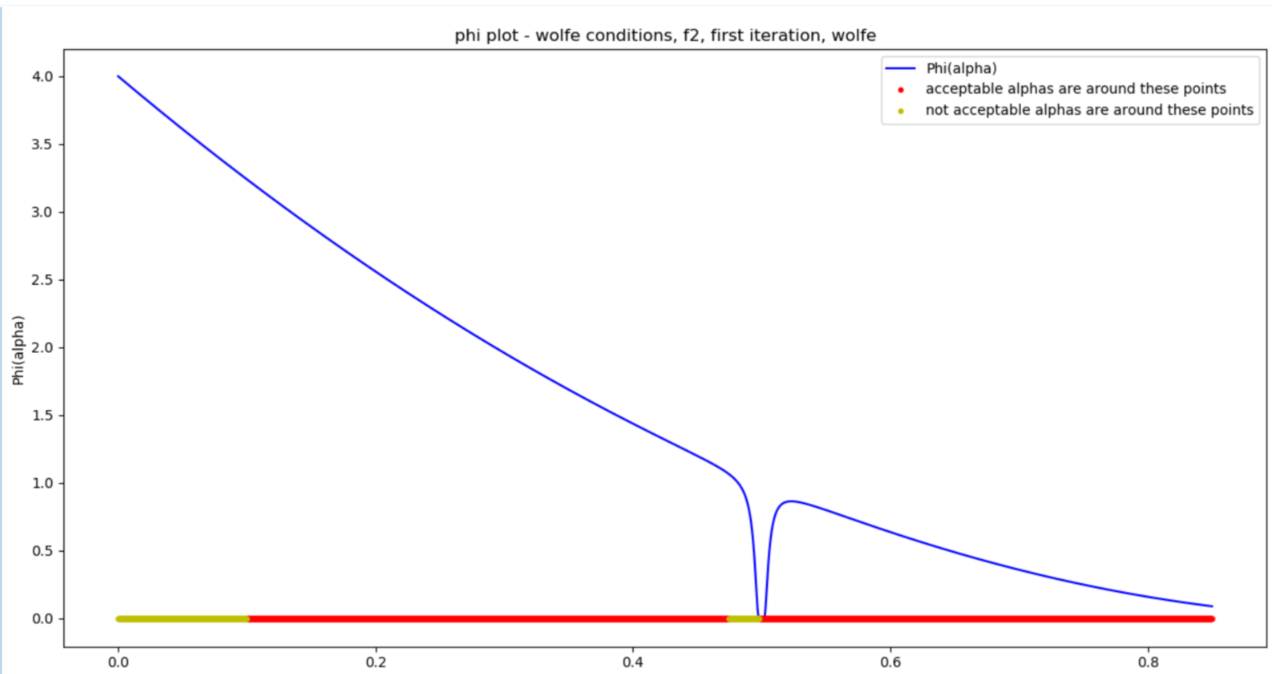
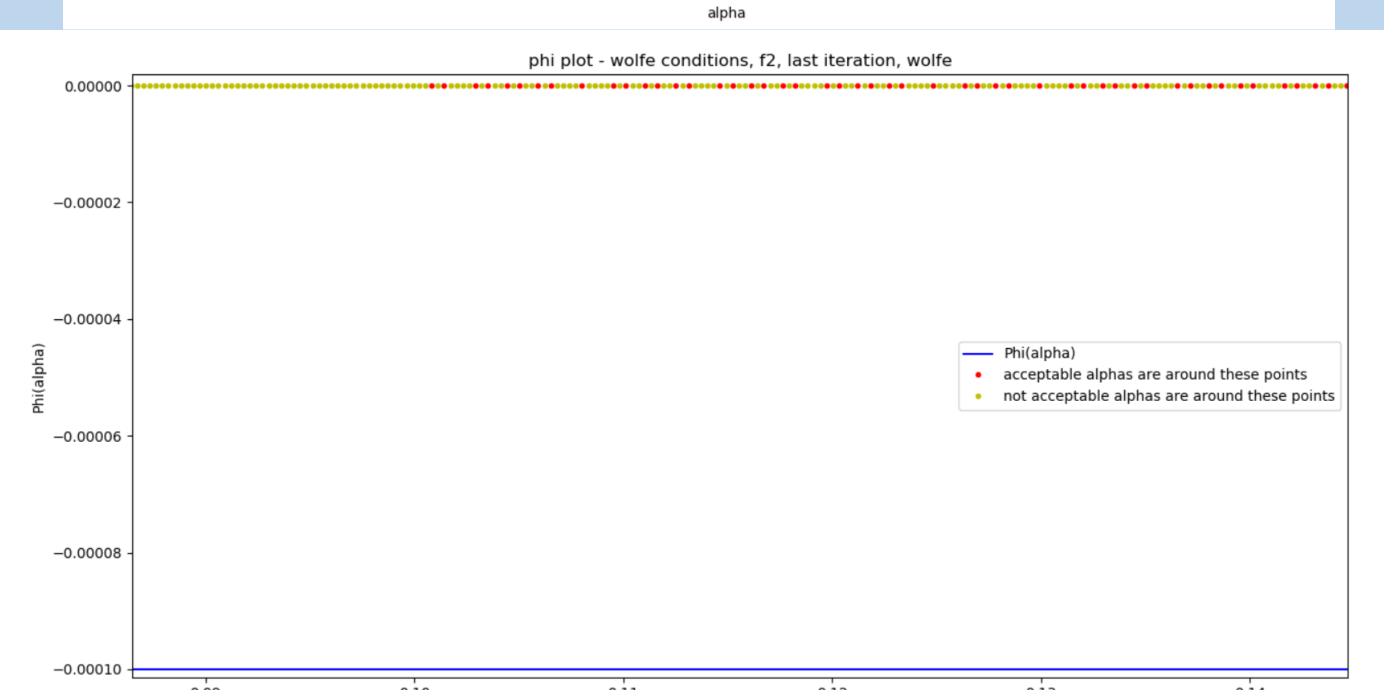


شرط ولف در iteration آخر

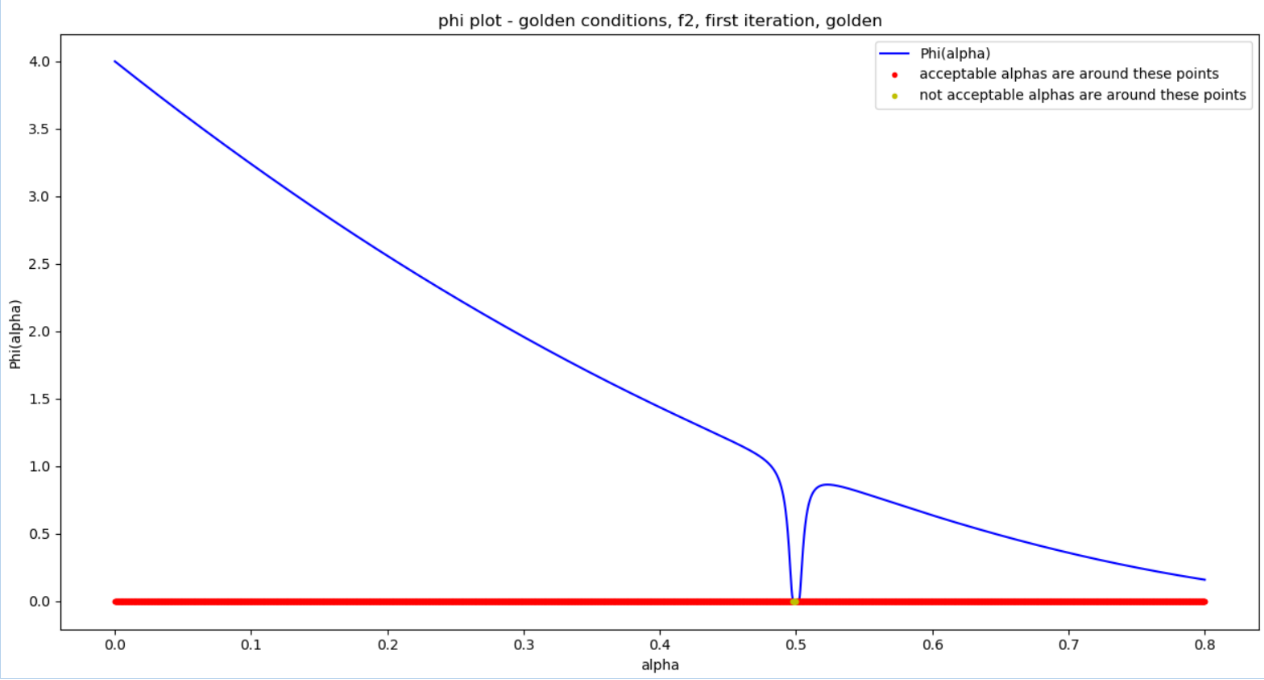


	شرط گلدستن در iteration یک
	شرط گلدستن در iteration آخر

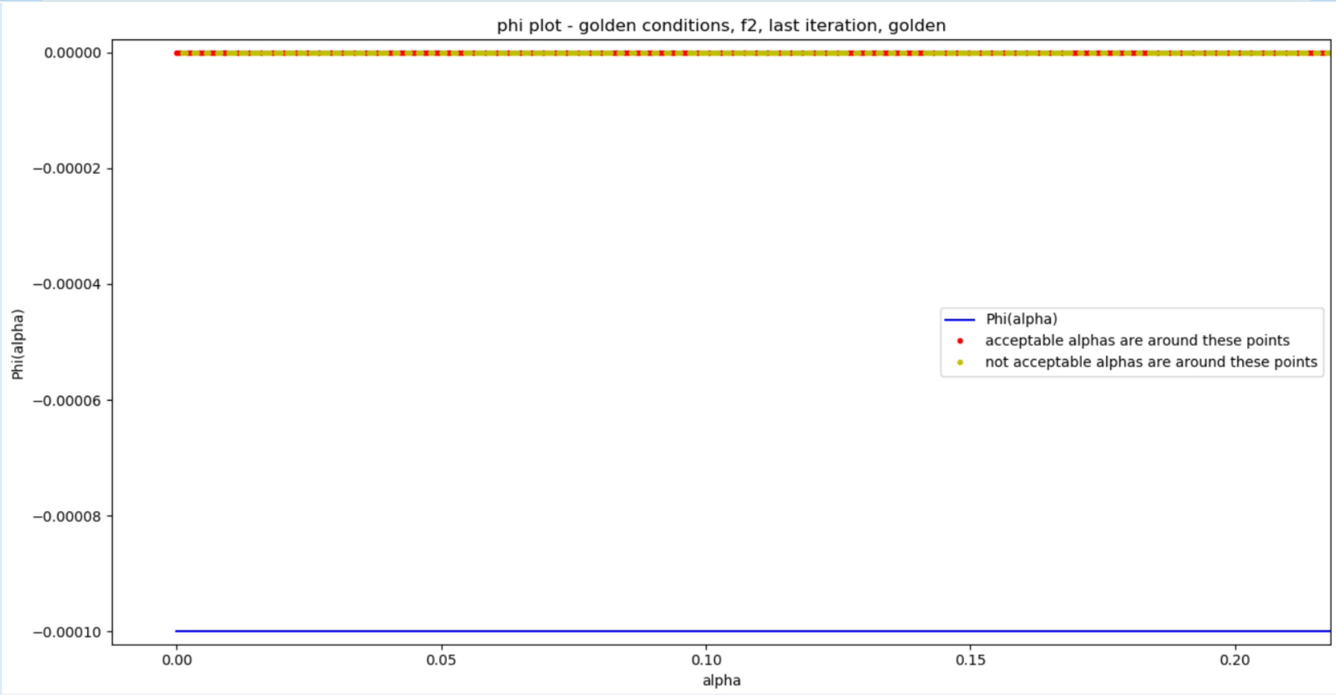
آزمایش ۸	
Function: f2 | Algorithm: Quasi-Newton | Method: Interpolation X0 = [2] | $alpha_0$ = 0.2 | C=C_1=0.0001 | C_2=0.9	مشخصات اجرا
	رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.

	میزان کاهش در f
	
	شرط ولف در iteration یک
	شرط ولف در iteration آخر

شرط گلدستن در iteration یک



شرط گلدستن در iteration آخر



با تنظیمات انجام شده، همانطور که در بالا تنظیمات ذکر شدند، در تمام موارد به همگرایی رسیدیم و موفق شدیم که مقدار تابع‌ها را به طرز چشمگیری کاهش دهیم.

قسمت iii

در این قسمت از سوال خواسته شده است در مورد مقدار $alpha_0$ صحبت کنیم. مقدار اولیه alpha بسیار مهم است، اگر مقدار آلفا صفر کوچک باشد، آلفاهای بعدی که برای پیدا کردن alpha مناسب به دنبالش می‌گردیم به طور متناسبی کوچک خواهد شد، کوچک شدن آلفا از حد مشخصی برای یک مسئله می‌تواند باعث کند شدن پیدا کردن مینیمم شود و منجر می‌شود گام‌ها بیشتری برای رسیدن به مینیمم نیاز داشته باشیم. در صورت زیاد بودن آلفای اولیه، به طور متناسبی آلفاهایی که انتخاب می‌شوند مقدارشان بزرگ خواهد شد، به همین دلیل ممکن است باعث شود از روی مینیمم‌ها پرش رخ دهد و به optimal point نرسد. به همین دلیل مقدار اولیه آلفا باید نه زیاد کوچک باشد و نه زیاد بزرگ باشد.

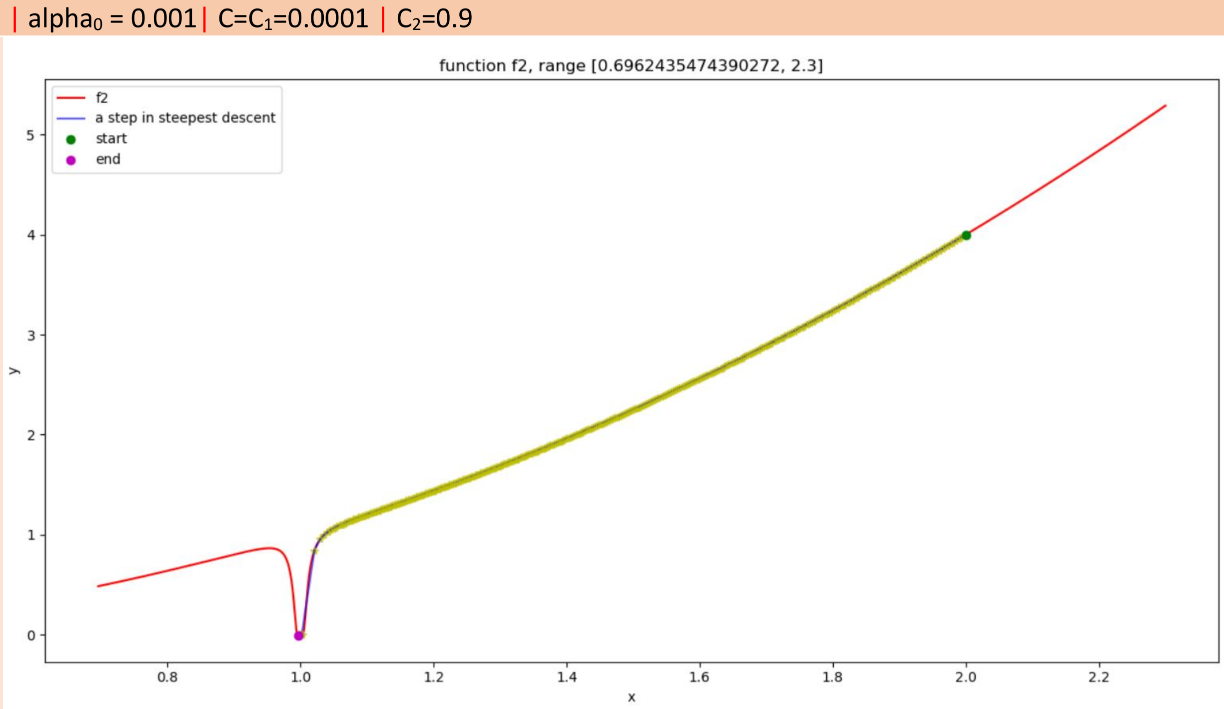
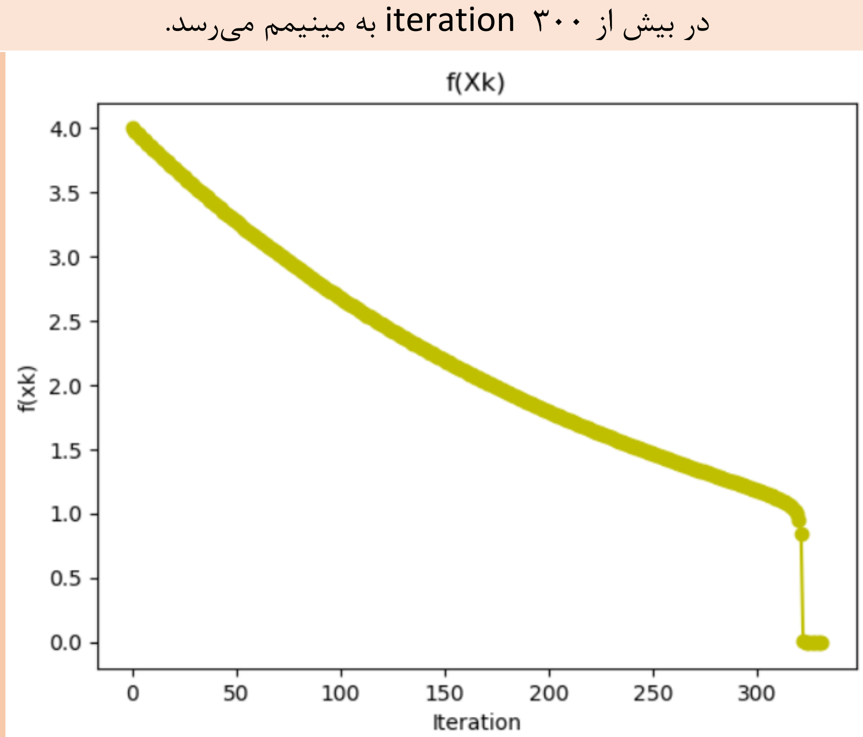
برای الگوریتم‌های مختلف با استفاده از آزمایش و خطا و توضیحاتی که داده شده مقادیر مختلفی در نظر گرفتیم، همچنین با توجه به نقطه‌ی شروع و تغییر آلفا اولیه می‌توان به نتایج متفاوتی دست یافت، در قسمت ج، ۱۷ آزمایش برای نقطه شروع‌های مختلف، تابع‌های مختلف، الگوریتم‌های مختلف و متدهای تعیین آلفا مختلف ارائه شده است که پارامترهای هر آزمایش و نتایج حاصل از آزمایش در یک جدول ارائه شده است، این جدول‌ها دارای عنوان "آزمایش ۱۲" تا "آزمایش ۳۰" هستند، در بالای هر کدام مشخص شده است از چه آلفا اولیه‌ای استفاده شده است. ولی به طور کلی از اعدادی در محدوده‌ی زیر برای آلفاهای اولیه‌ی مختلف استفاده کرده‌ام(برای دیدن مقدار دقیق آلفا اولیه برای هر حالت مختلف به جدول‌های "آزمایش ۱۲" تا "آزمایش ۳۰" مراجعه شود):

	$Alpha_0$ برای تابع f1	$Alpha_0$ برای تابع f2
روش steepest descent با استفاده از backtracking	0.003	0.1
روش steepest descent با استفاده از Interpolation	0.03	0. 1
روش quasi-newton با استفاده از backtracking	0.2	0.2
روش quasi-newton با استفاده از Interpolation	0.4	0.2

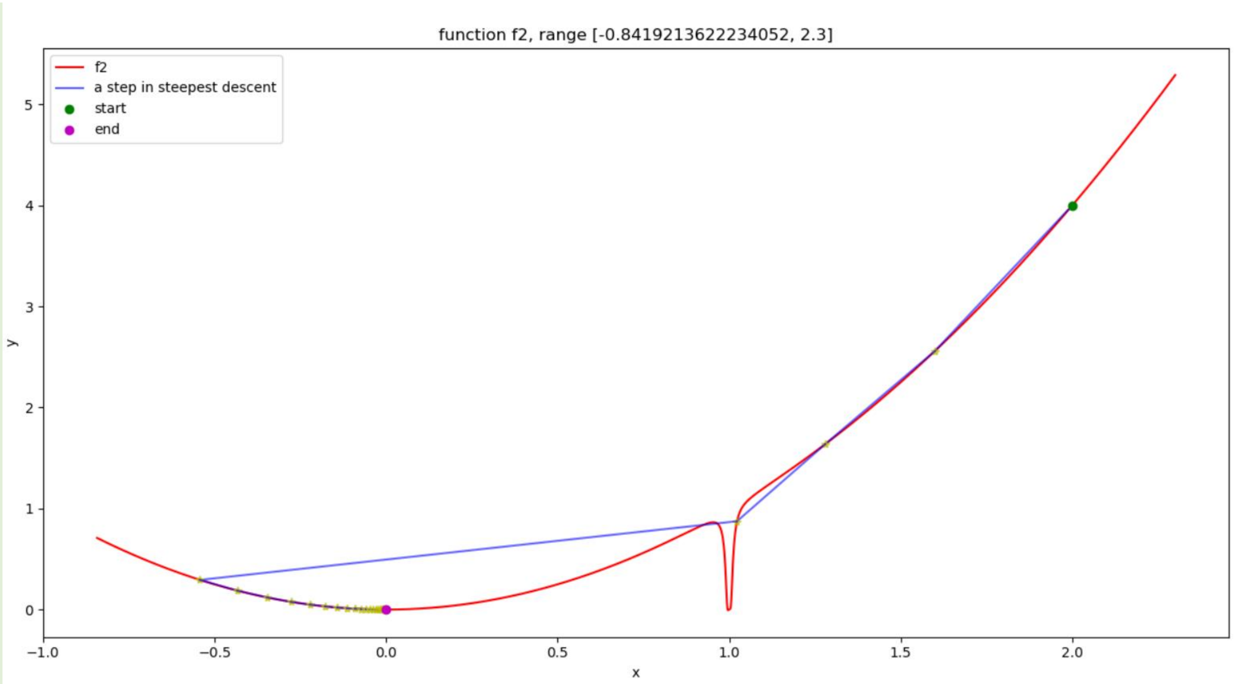
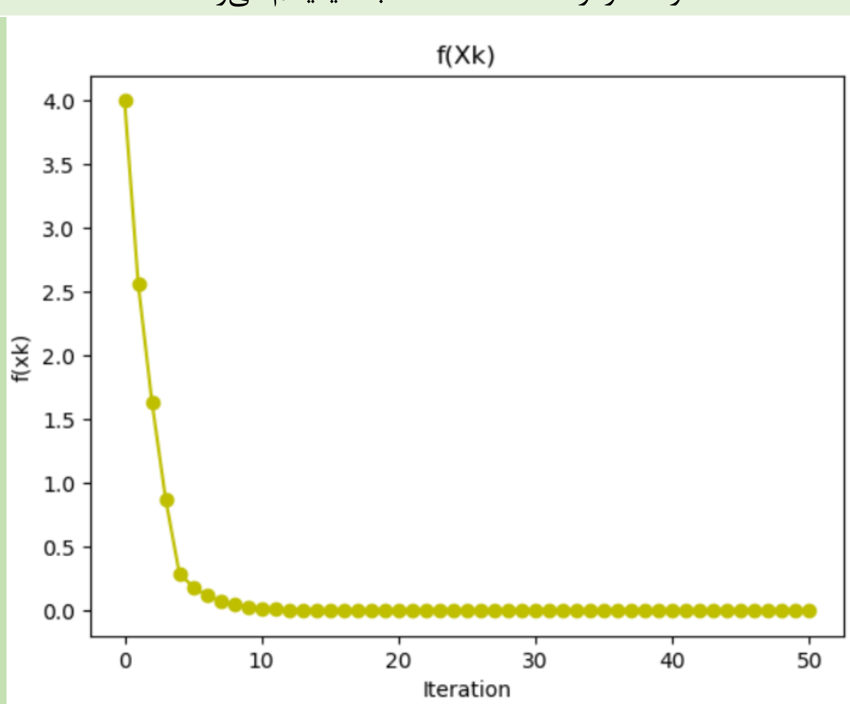
در زیر سه آزمایش مختلف طراحی کرده‌ایم که این موضوع را نشان می‌دهد.

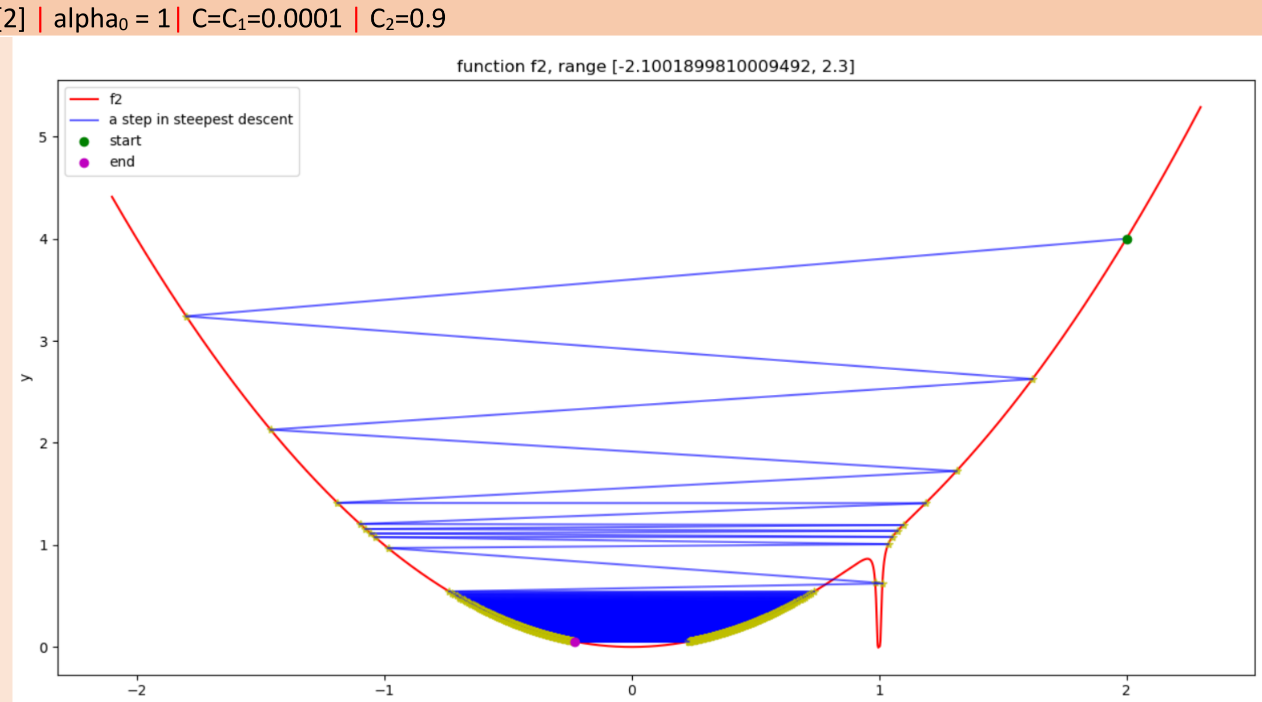
- در آزمایش اول مقدار $Alpha_0$ برابر با ۰٫۰۰۰۱ است.
- در آزمایش دوم مقدار $Alpha_0$ برابر با ۰٫۱ است.
- در آزمایش سوم مقدار $Alpha_0$ برابر با ۱ است.

همان طور که در بالا شرح داده شده است، در آزمایش اول به دلیل کوچکی آلفا صفر، سرعت همگرایی بسیار پایین است، به طوری که ۳۳۰ iteration زمان صرف رسیدن به مینیمم شده است، در حالی که در آزمایش شماره‌ی دو آلفا صفر میزان مناسبی دارد و کمتر از ۵۰ iteration زمان صرف رسیدن به منیمم شده است، در آزمایش سه میزان آلفا صفر بزرگ است و همان طور که در تصویر دیده می‌شود بارها روی مینیمم پرش رخ می‌دهد و در آخر نیز به مینیمم نمی‌رسد.

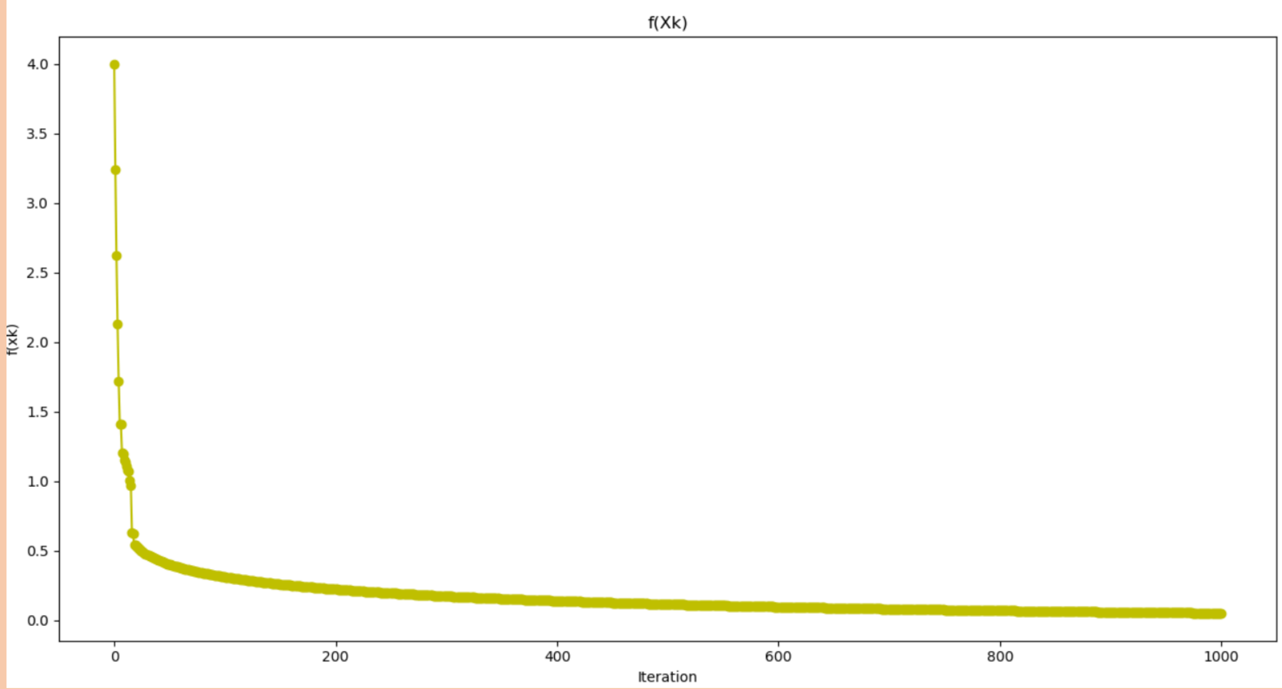
	آزمایش ۹
مشخصات اجرا	Function: f2 | Algorithm: Steepest Descent | Method: Backtracking X0 = [2] | $alpha_0$ = 0.001 | C=C_1=0.0001 | C_2=0.9
رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.	 در بیش از ۳۰۰ iteration به مینیمم می‌رسد.
میزان کاهش در f	

	آزمایش ۱۰
مشخصات اجرا	Function: f2 | Algorithm: Steepest Descent | Method: Backtracking X0 = [2] | $alpha_0$ = 0.1 | C=C_1=0.0001 | C_2=0.9

 در کمتر از ۵۰ iteration به مینیمم می‌رسد.	رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.
	میزان کاهش در f

آزمایش ۱۱	
Function: f2 | Algorithm: Steepest Descent | Method: Backtracking X0 = [2] | $alpha_0$ = 1 | C=C_1=0.0001 | C_2=0.9	مشخصات اجرا
 بارها از روی مینیمم پرش رخ داده است و در ۱۰۰۰ iteration به مینیمم نرسیده است.	رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.

میزان کاهش در f



قسمت iv

در این قسمت از سوال خواسته شده است کاهشی بودن جهت pk را بررسی کنیم. جهتی کاهشی است که کسینونس زاویه‌ی بین آن بردار با بردار گرادیان مقداری منفی شود. از آنجایی که در steepest descent همیشه جهت منفی گرادیان را انتخاب می‌کنیم، جهت همواره کاهشی است. تا اینجای گزارش و در ادامه گزارش نتایج تعداد زیادی آزمایش با استفاده از روش quasi-newton را ارائه دادیم و ارائه خواهیم داد. در تمام آزمایش‌ها با استفاده از quasi-newton جهت همواره کاهشی بود. زیرا ماتریس B را positive definite نگه می‌داریم.

برای positive definite نگه داشتن B_k بدین شکل عمل می‌کنیم: در هر مرحله که B_{k+1} محاسبه می‌شود وضعیت آن را بررسی می‌کنیم، در صورتی که positive definite نباشد یعنی eigen value (هایی) دارد که مقدار آن منفی است. eigen value که از همه کوچک‌تر است را پیدا می‌کنیم و سپس طبق فرمول زیر مقدار B_{k+1} را آپدیت می‌کنیم تا positive definite بشود.

$$\beta_{k+1} = \beta_{k+1} + (-\lambda_{min} + \varepsilon)I$$

قسمت v

در این قسمت از سوال خواسته شده است در مورد سرعت همگرایی دو الگوریتم Quasi-Newton و Steepest Descent بحث کنیم و نمودار تغییرات f در هر iteration را رسم کنیم.

در قسمت ج، به ازای ۳ نقطه آغاز متفاوت برای تابع f1 و دو نقطه آغاز متفاوت برای f2 به ازای روش‌های Quasi-Newton و Steepest-Descent و دو متد مختلف Backtracking و Interpolation اقدام به مینیمم کردن تابع‌های f1 و f2 کردیم. نتایج و پارامترها در جدول‌های "آزمایش ۱۲" تا "آزمایش ۳۰" ارائه شده است. در هر کدام از جدول‌های ارائه شده دو نمودار وجود دارد یکی **$f(x_k)$** و دیگری $|f(\chi_{k+1}) - f(\chi_k)|$ در هر Iteration است.

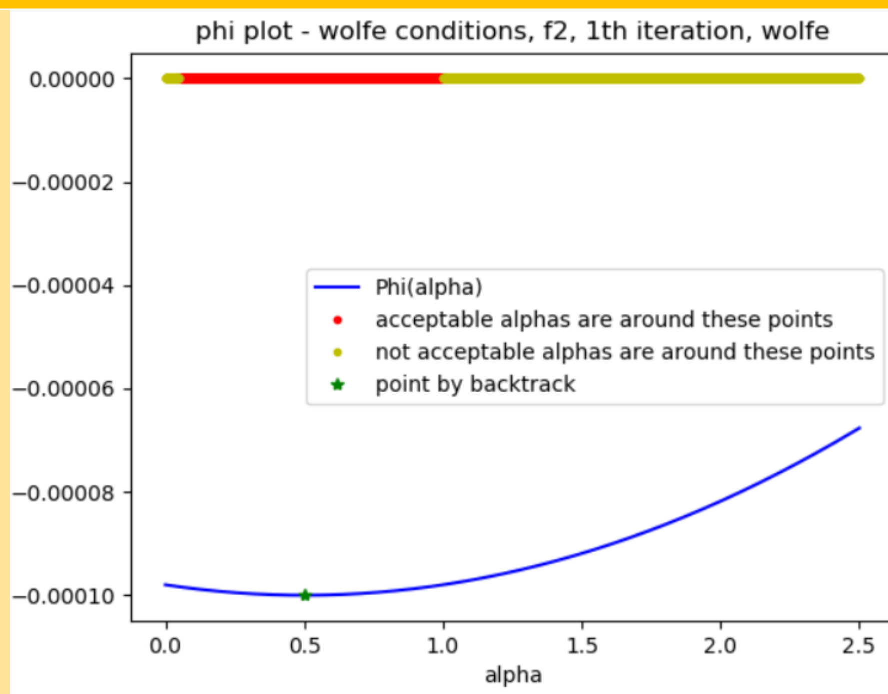
در تمام ۱۷ آزمایش انجام شده در قسمت ج، بر اساس شیب، میزان نزول و تعداد ایتریشن‌ها، سرعت همگرایی روش Quasi-Newton به طرز قابل چشم‌گیری بیشتر بوده‌است. همین طور روش Quasi-Netwon با Interpolation از Quasi-Newton با Backtracking سریع‌تر بوده است.

قسمت vi

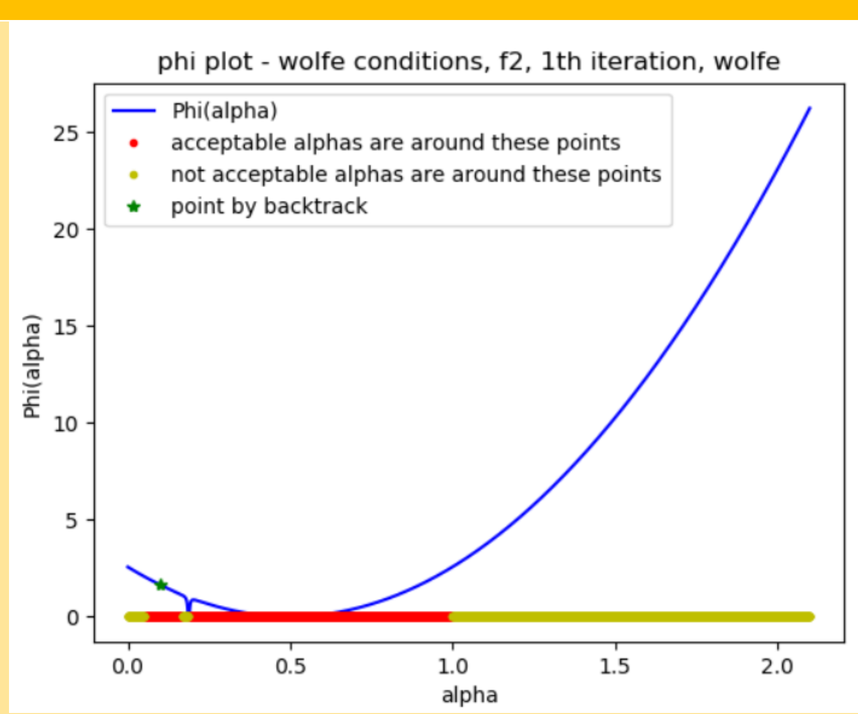
در این قسمت از سوال خواسته شده است فی آلفا رسم شود، و در مورد آلفایی که انتخاب می‌شود و محل قرارگیری‌اش در فی آلفا بحث شود.

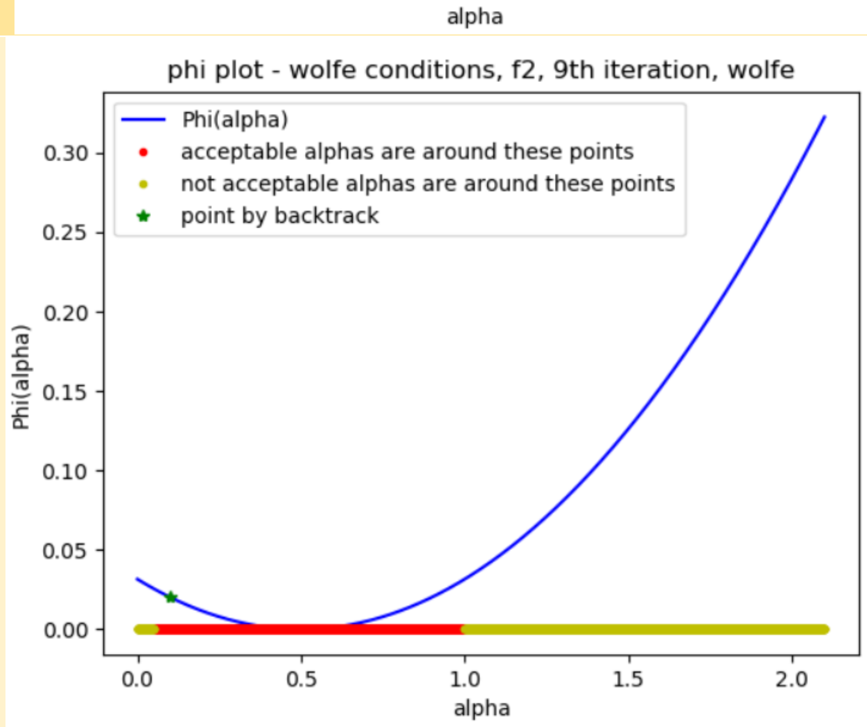
(در این سوال، برای طولانی نشدن گزارش به این چند مورد بسنده شده است، موارد دیگری هم تست شد که نتایج یکسانی به دست آمد.)

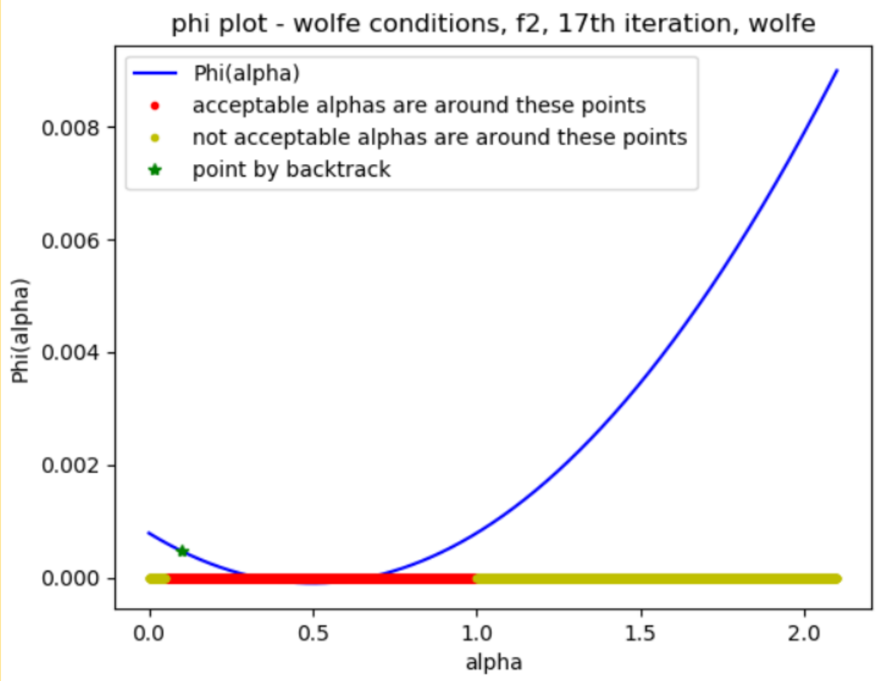
برای تابع f2 به ازای نقطه شروع دو، Phi(a) را که از interpolation استفاده می‌کند را رسم می‌کنیم:

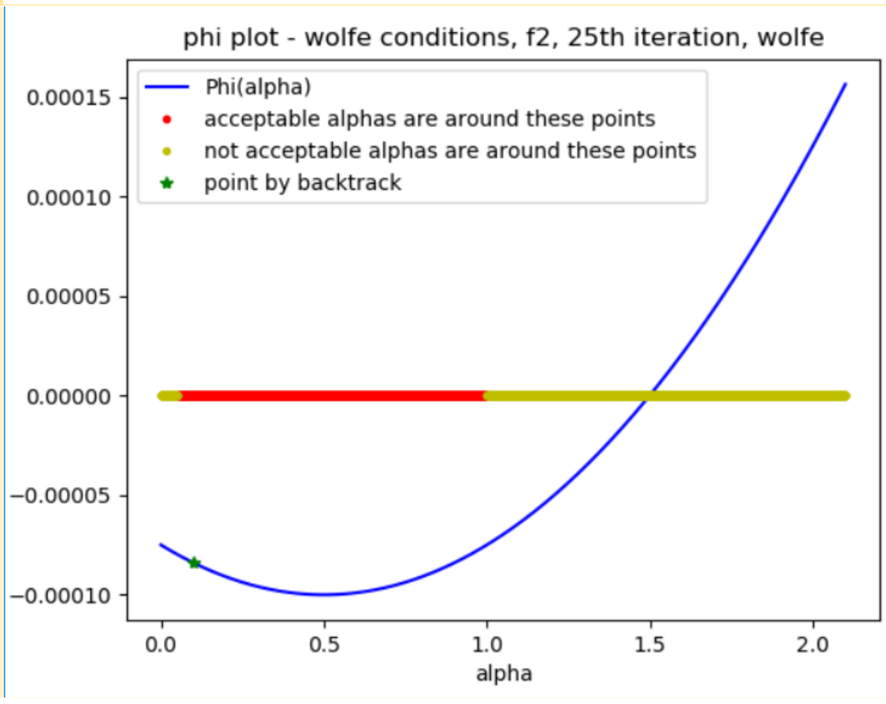


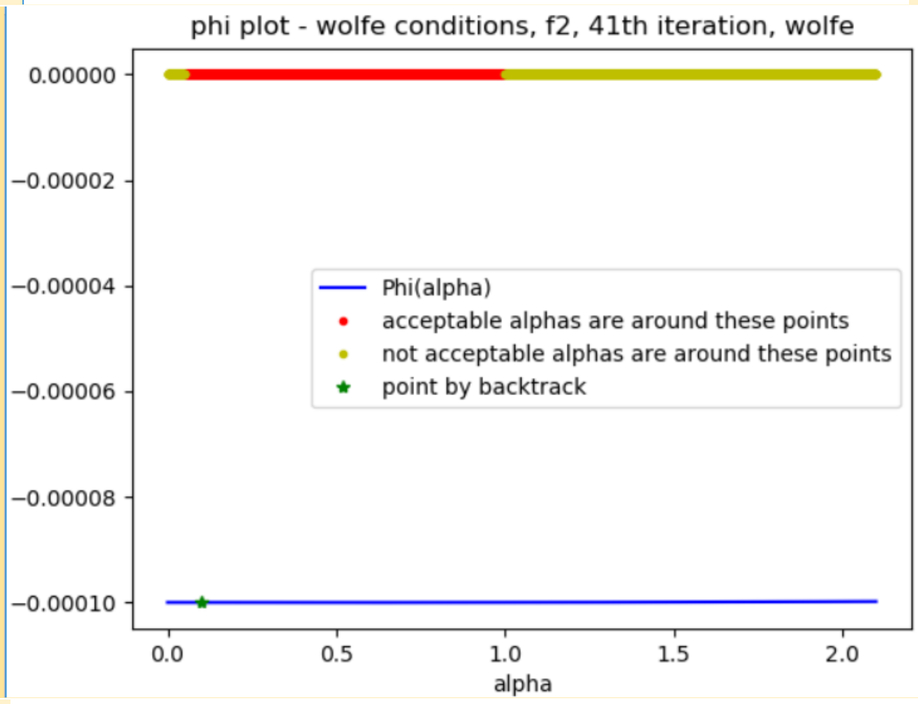
برای تابع f2 به ازای نقطه شروع دو، Phi(a) را که از backtrack استفاده می‌کند را در ایپاک‌های مختلف رسم می‌کنیم:

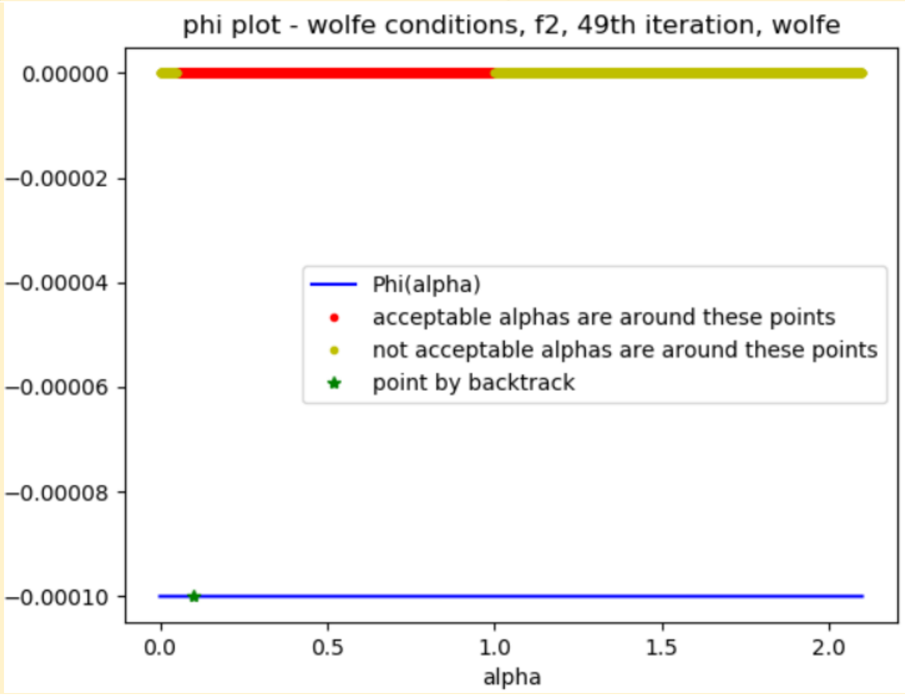





phi plot - wolfe conditions, f2, 17th iteration, wolfe
Phi(alpha)
acceptable alphas are around these points
not acceptable alphas are around these points
point by backtrack
Phi(alpha)
alpha
0.008
0.006
0.004
0.002
0.000
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0


phi plot - wolfe conditions, f2, 25th iteration, wolfe
Phi(alpha)
acceptable alphas are around these points
not acceptable alphas are around these points
point by backtrack
alpha
0.00015
0.00010
0.00005
0.00000
−0.00005
−0.00010
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0


phi plot - wolfe conditions, f2, 41th iteration, wolfe
Phi(alpha)
acceptable alphas are around these points
not acceptable alphas are around these points
point by backtrack
alpha
0.00000
−0.00002
−0.00004
−0.00006
−0.00008
−0.00010
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0


phi plot - wolfe conditions, f2, 49th iteration, wolfe
Phi(alpha)
acceptable alphas are around these points
not acceptable alphas are around these points
point by backtrack
alpha
0.00000
−0.00002
−0.00004
−0.00006
−0.00008
−0.00010
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

در روش Backtrack در نتایجی که گرفته شد، در هیچ کدام از موارد آلفایی که انتخاب می‌شود در مینیمم محلی و سراسری تابع phi(alpha) قرار ندارد. به طور کلی در مورد محل قرارگیری آلفایی که تعیین می‌شود نمی‌توان چیزی گفت، زیرا در این شرط فقط سعی می‌شود که اولین آلفایی که در شرایط صدق می‌کند پیدا شود.

ولی همانطور که مشاهده می‌شود، در روش استفاده از interpolation، در آزمایشی که انجام شده، آلفایی که پیدا می‌شود مینیمم phi(alpha) است. در روش اینترپولیشن ابتدا یک تخمین درجه دو از phi(alpha) زده می‌شود و سپس در صورت نرسیدن به جواب یک تخمین درجه سه زده می‌شود و این کار تا رسیدن به جواب ادامه پیدا می‌کند، در هر تخمین سعی می‌شود مینیمم تابع ای که با ان phi(alpha) را پیدا می‌کنیم پیدا شود.

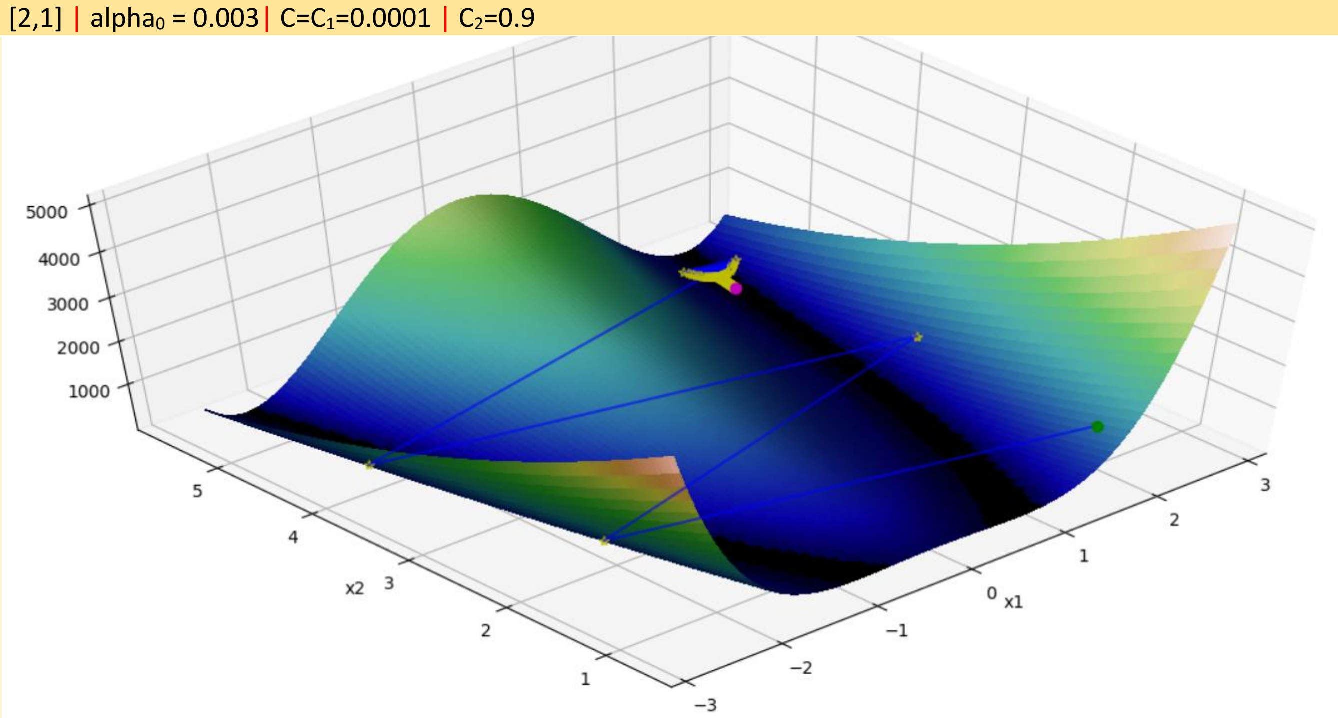
قسمت vii

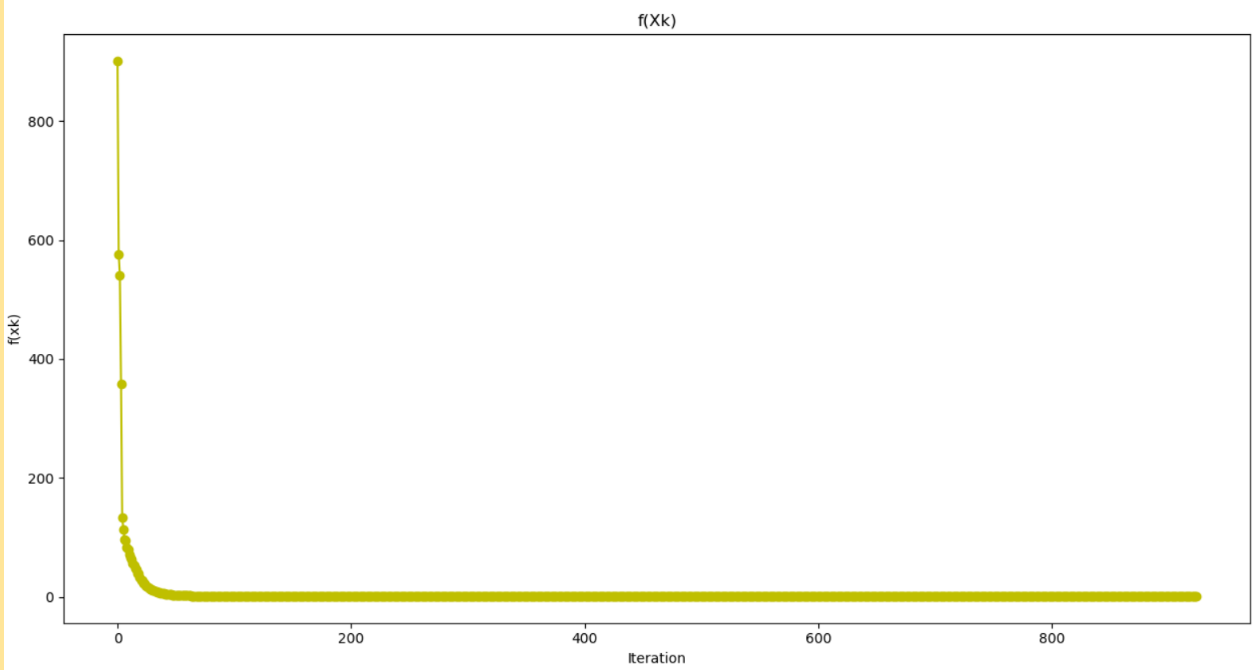
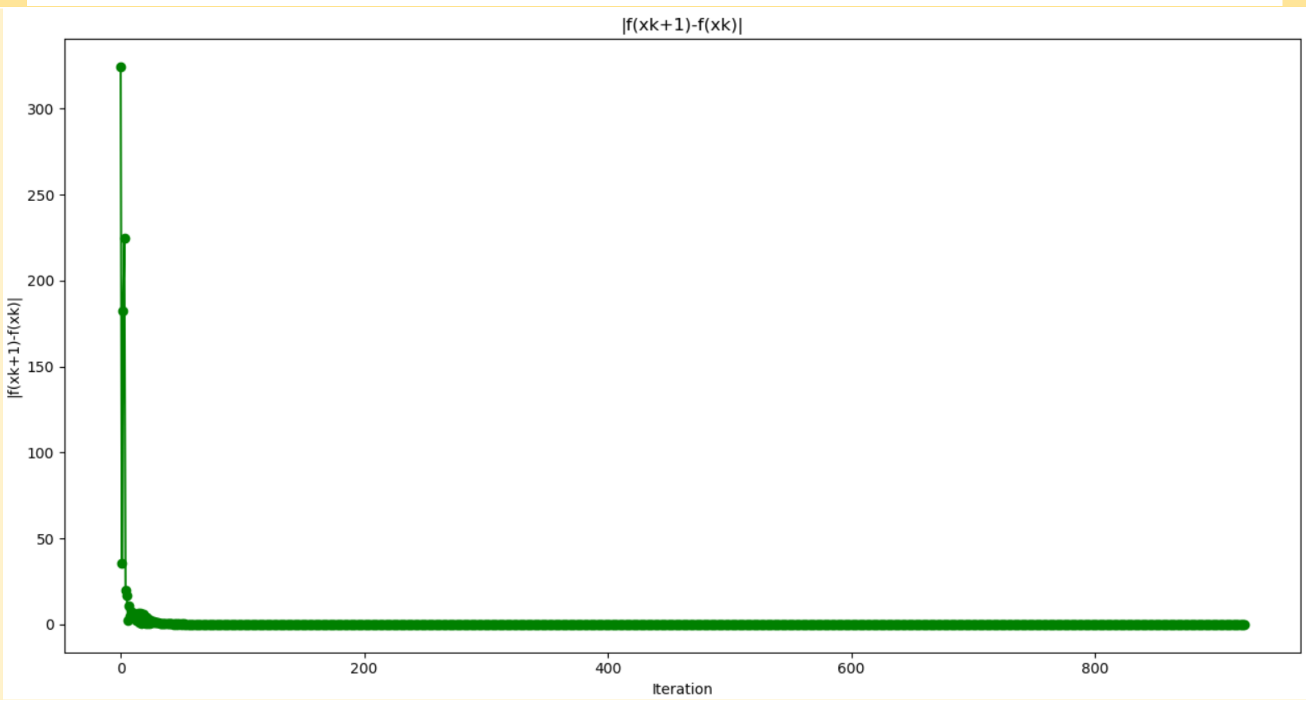
در تمام سوال‌ها و زیر سوال‌ها، تمام تست‌ها و آزمایش‌ها با تمام روش‌ها انجام شده‌اند.

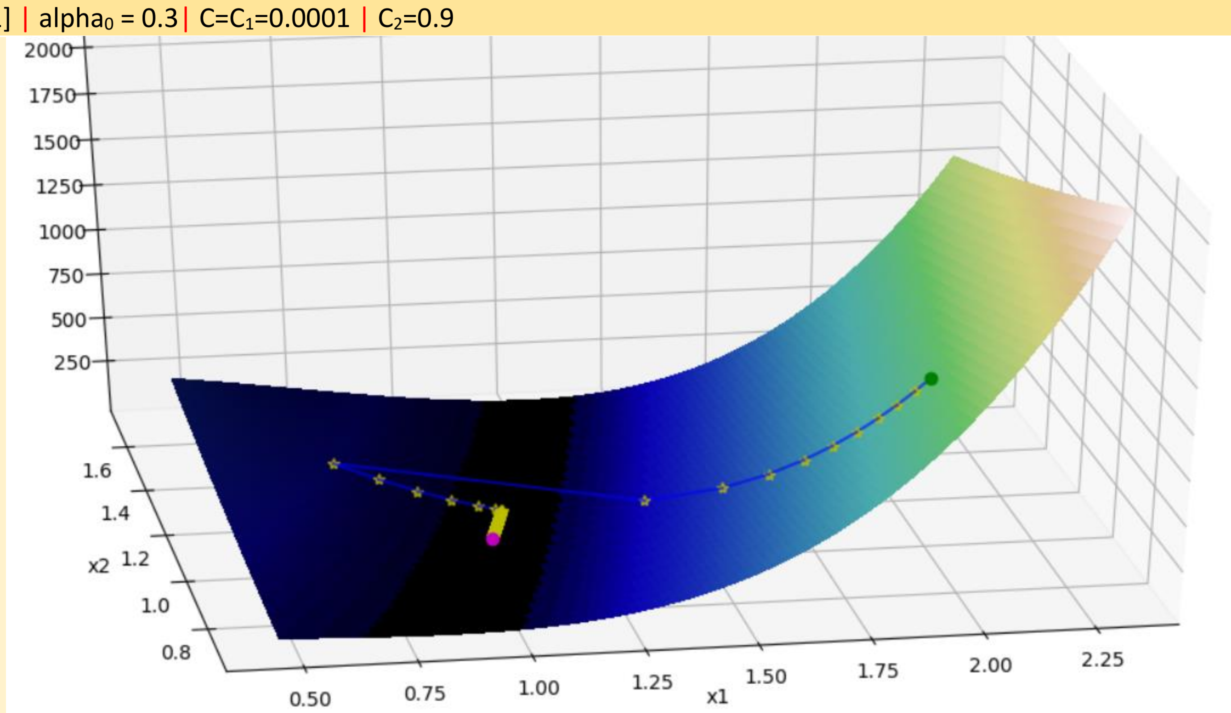
قسمت ج)

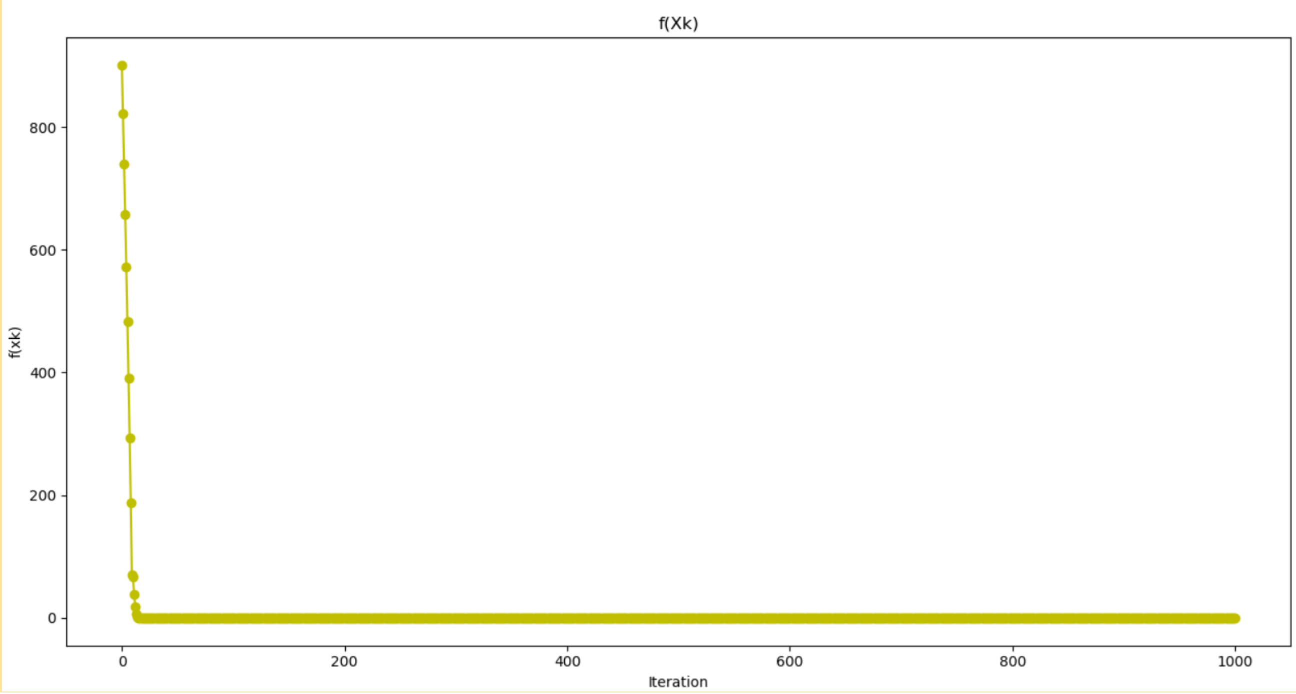
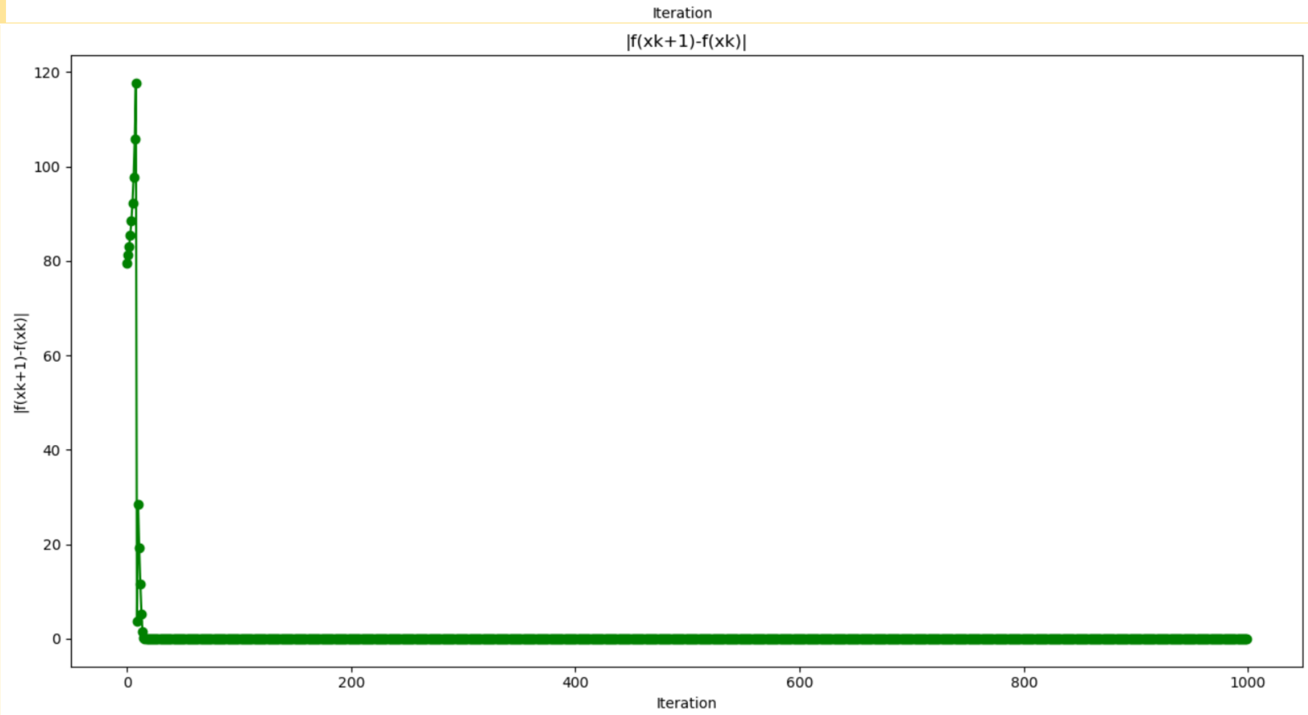
در این قسمت تابع F1 را به ازای نقاط شروع [1,1-] [0,1] [2,1] و تابع F2 را به ازای نقاط شروع [1-] [2] با استفاده از تمام روش‌های ممکن مینیموم می‌کنیم.

- مینیم کردن F1 با نقطه شروع [2,1] با استفاده از دو روش Quasi-Newton و Steepest Descent و دو روش Backtrack و Interpolation:

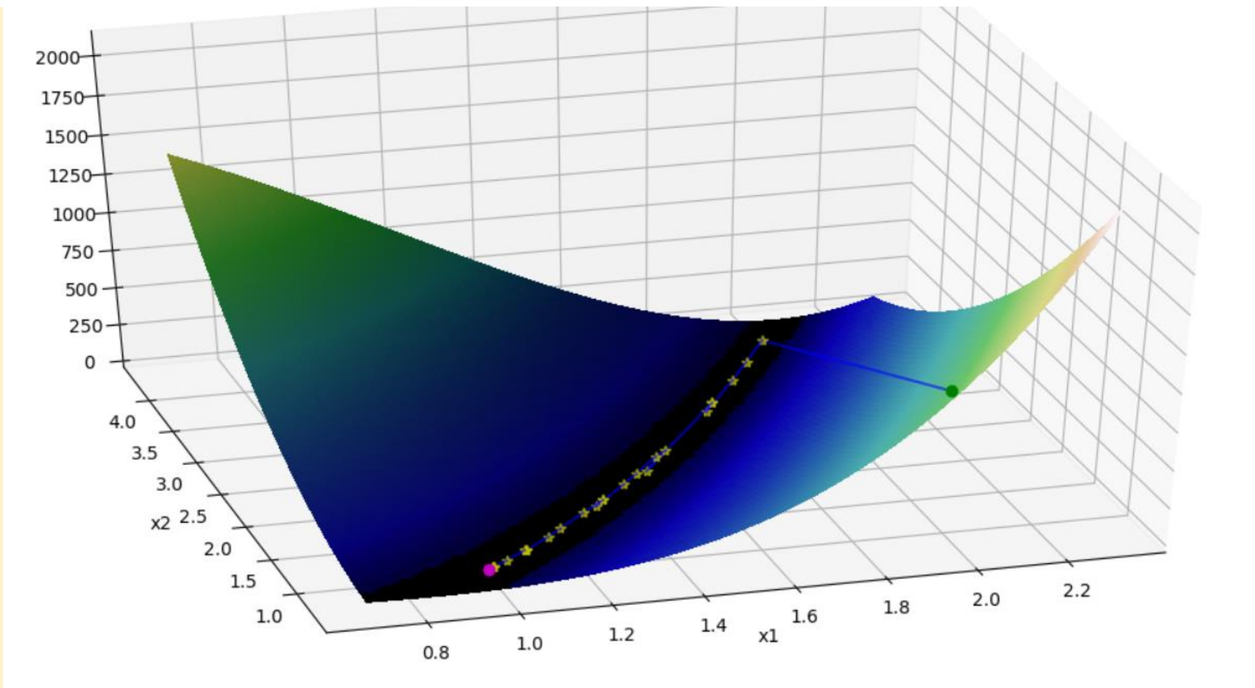
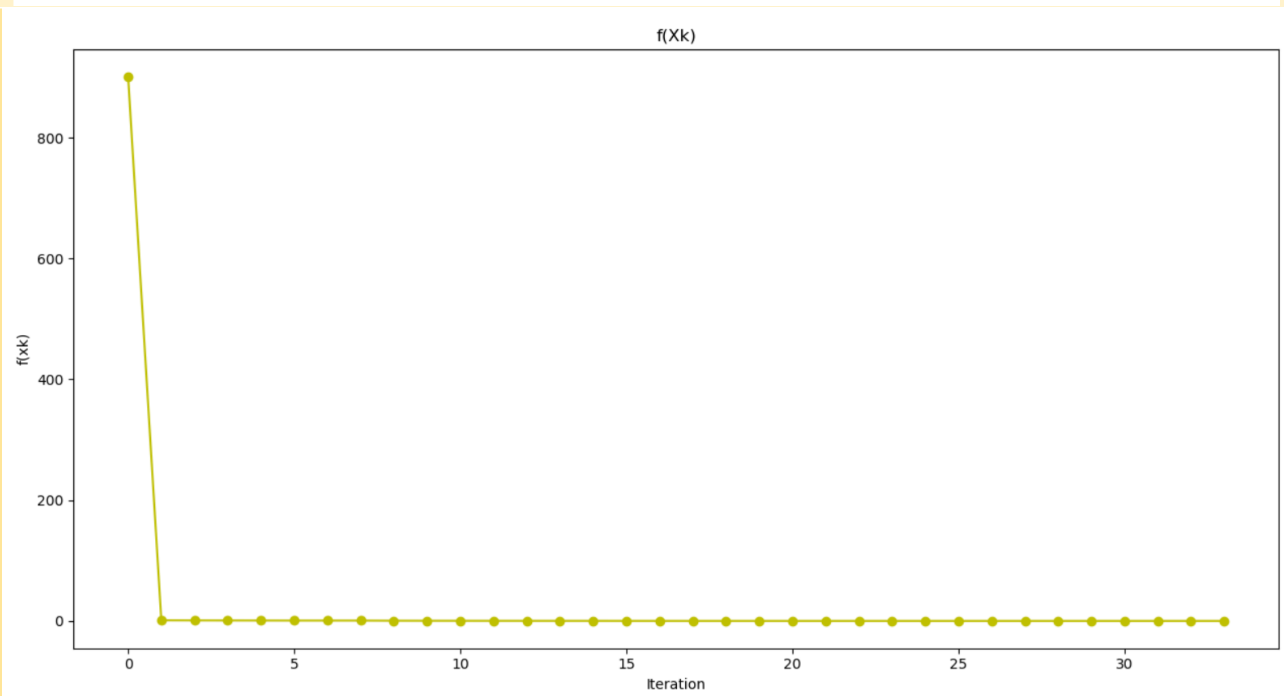
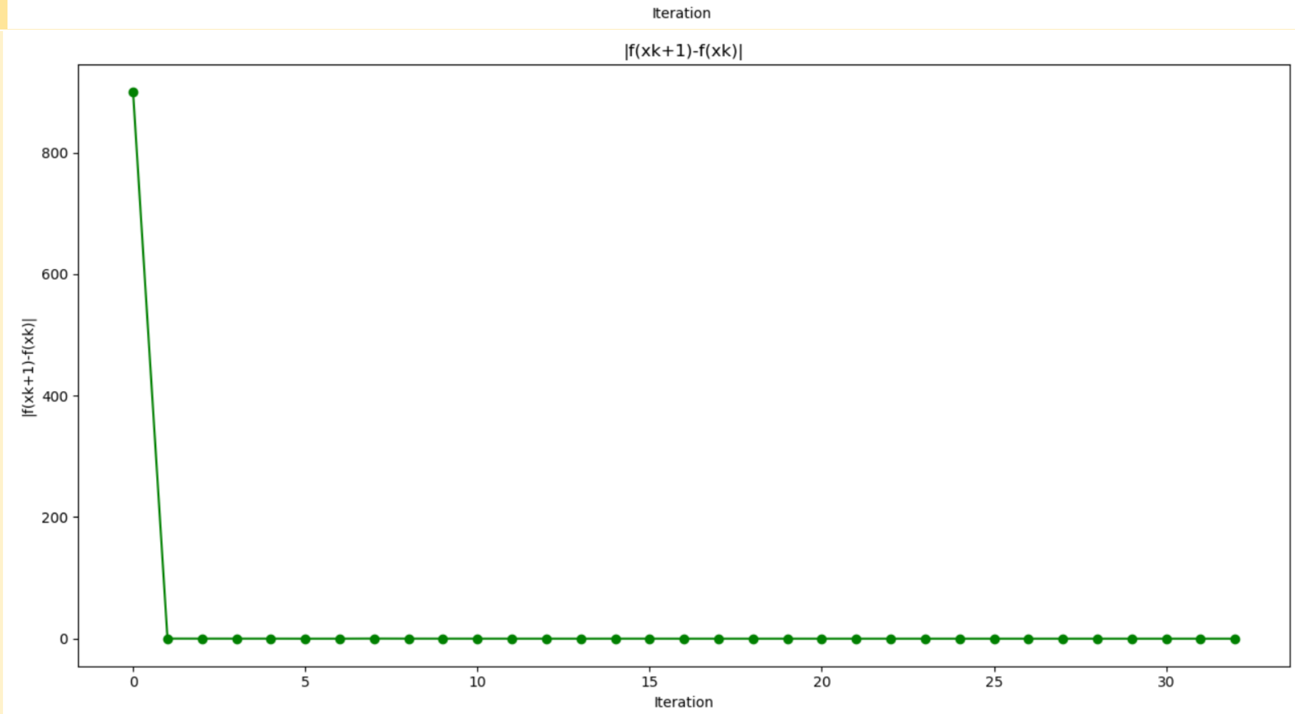
	آزمایش 12
مشخصات اجرا	Function: f1 | Algorithm : Steepest Descent | Method: Backtracking X0 = [2,1] | $alpha_0$ = 0.003 | C=C_1=0.0001 | C_2=0.9
رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.	

	میزان کاهش در f (مقدار f در هر ایتریشن)
	
901, 1.4281864883014233	اولین و آخرین مقدار f

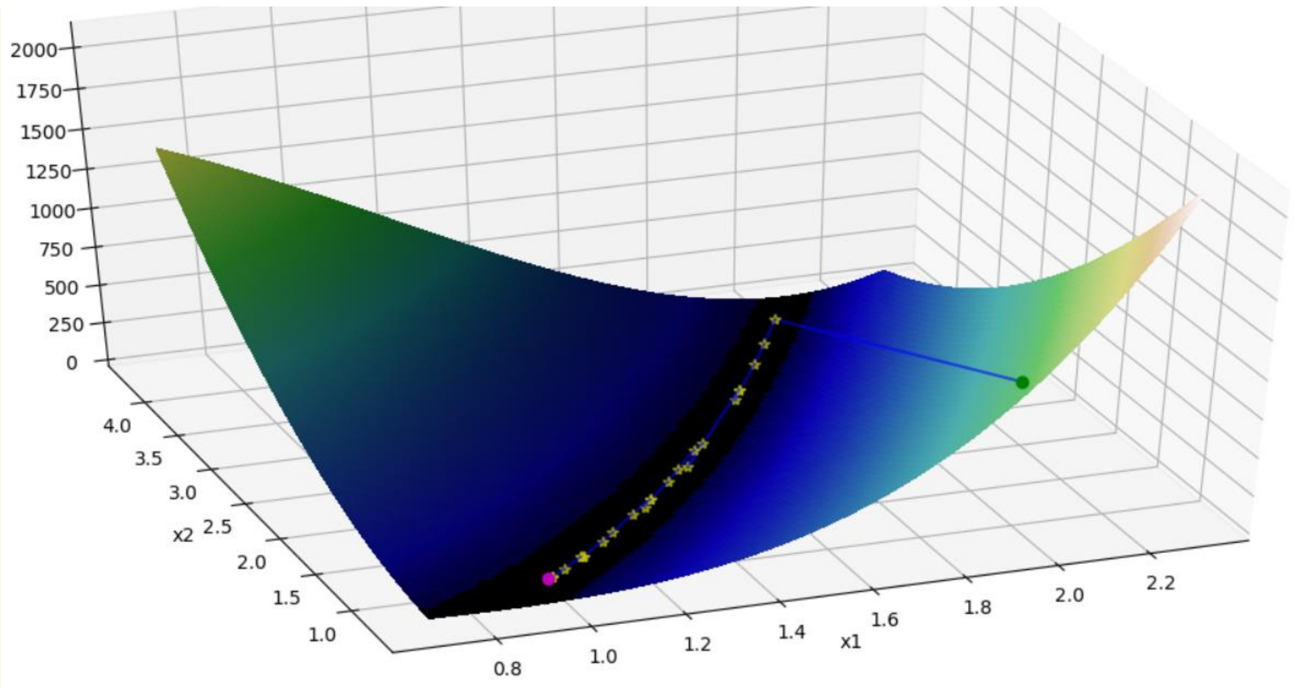
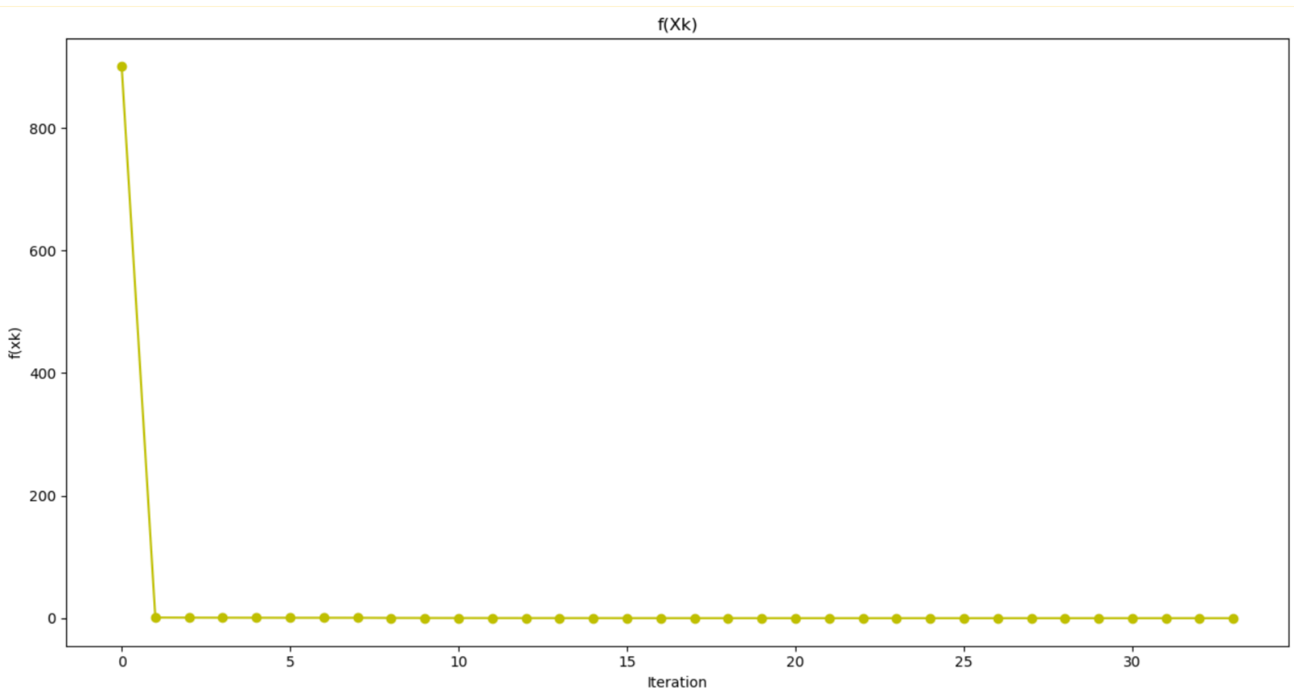
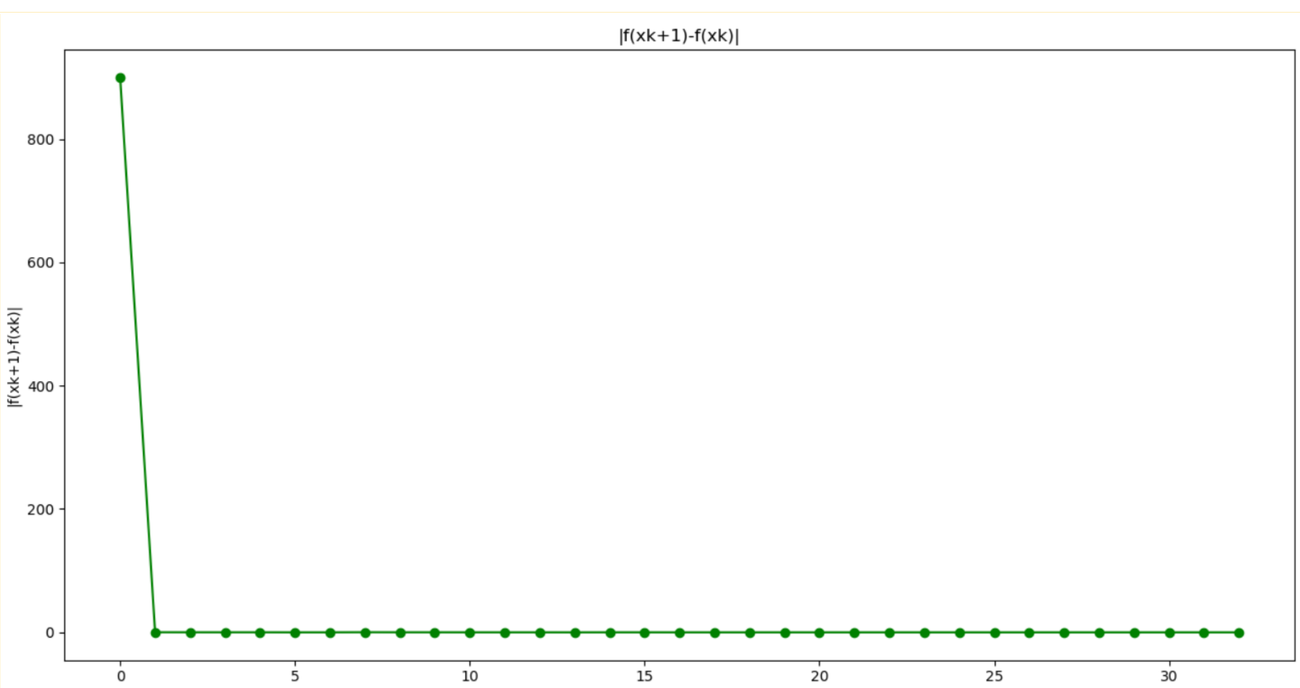
آزمایش 13	
Function: f1 | Algorithm : Steepest Descent | Method: Interpolation X0 = [2,1] | $alpha_0$ = 0.3 | C=C_1=0.0001 | C_2=0.9	مشخصات اجرا
	رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.

میزان کاهش در f (مقدار f در هر ایتریشن)	
	
اولین و آخرین مقدار f	901, 0.0017848574836412646

	آزمایش 14
مشخصات اجرا	Function: f1 | Algorithm : Quasi-Newton | Method: Backtrack X0 = [2,1] | alpha$_0$ = 0.2 | C=C$_1$=0.0001 | C$_2$=0.9

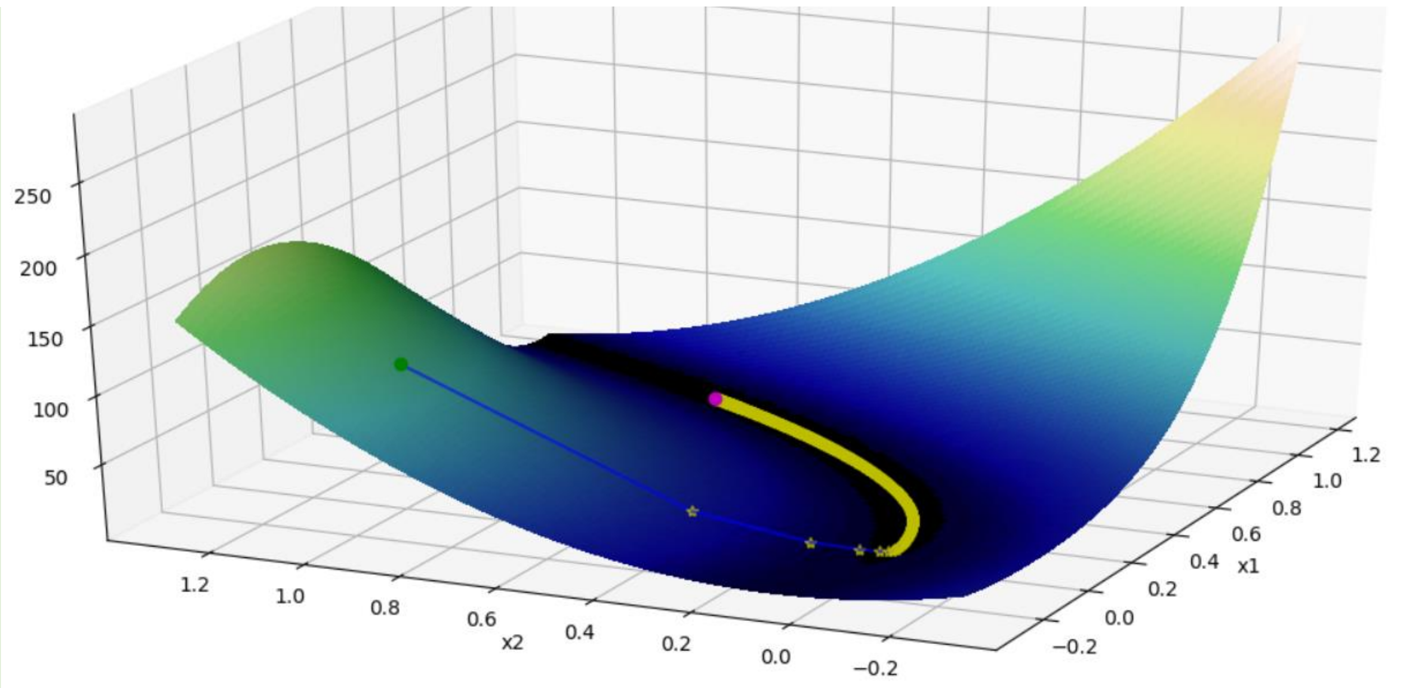
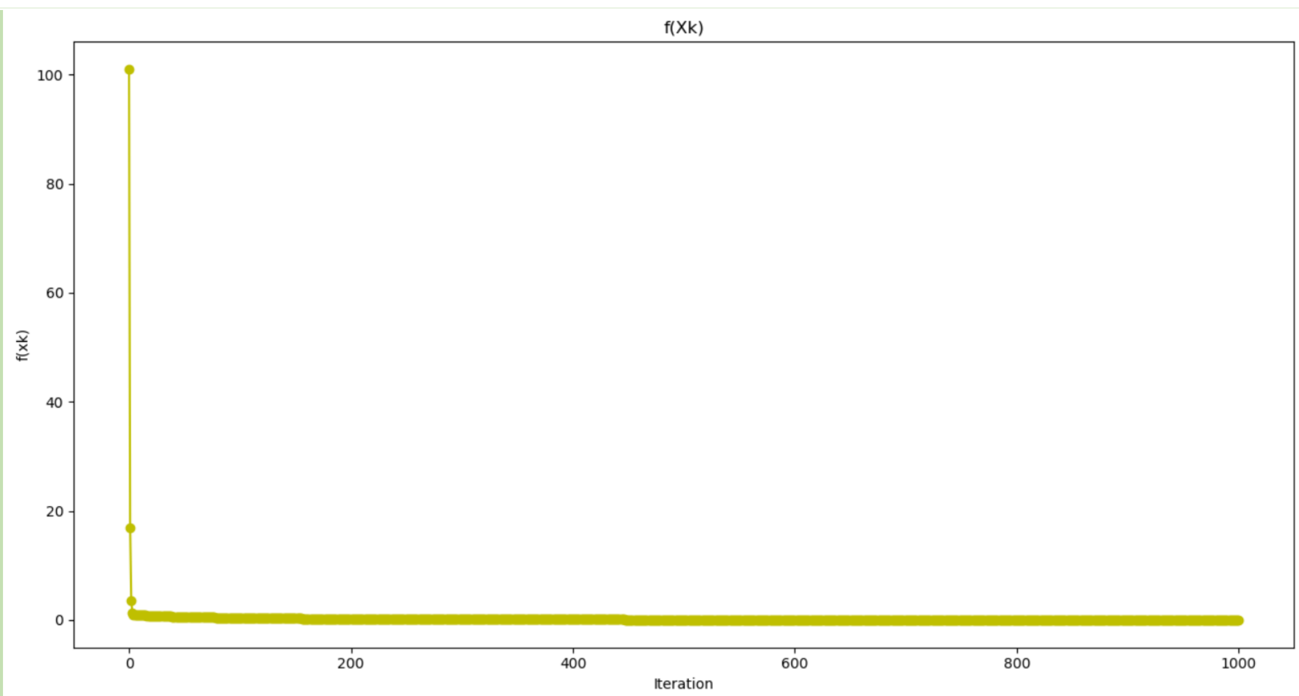
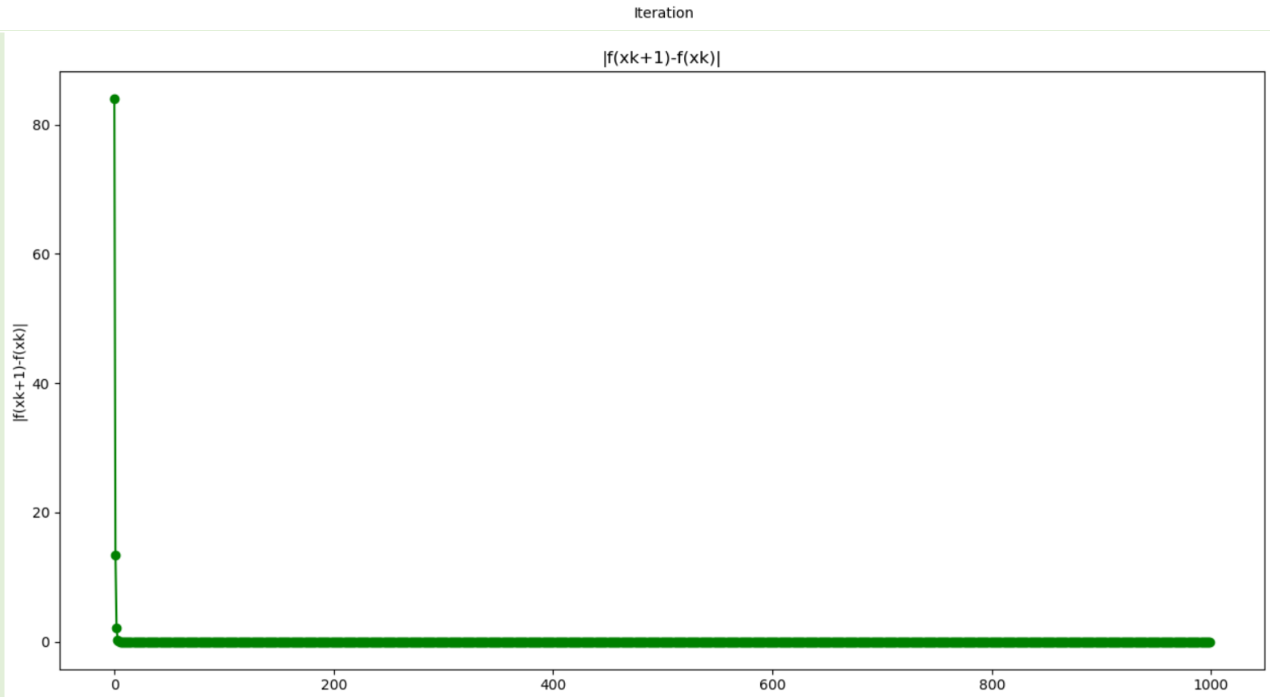
رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.	
میزان کاهش در f (مقدار f در هر ایتریشن)	
	
اولین و آخرین مقدار f	901, 0.0

	آزمایش 15
مشخصات اجرا	Function: f1 | Algorithm : Quasi-Newton | Method: Interpolation X0 = [2,1] | $alpha_0$ = 0.2 | C=C_1=0.0001 | C_2=0.9

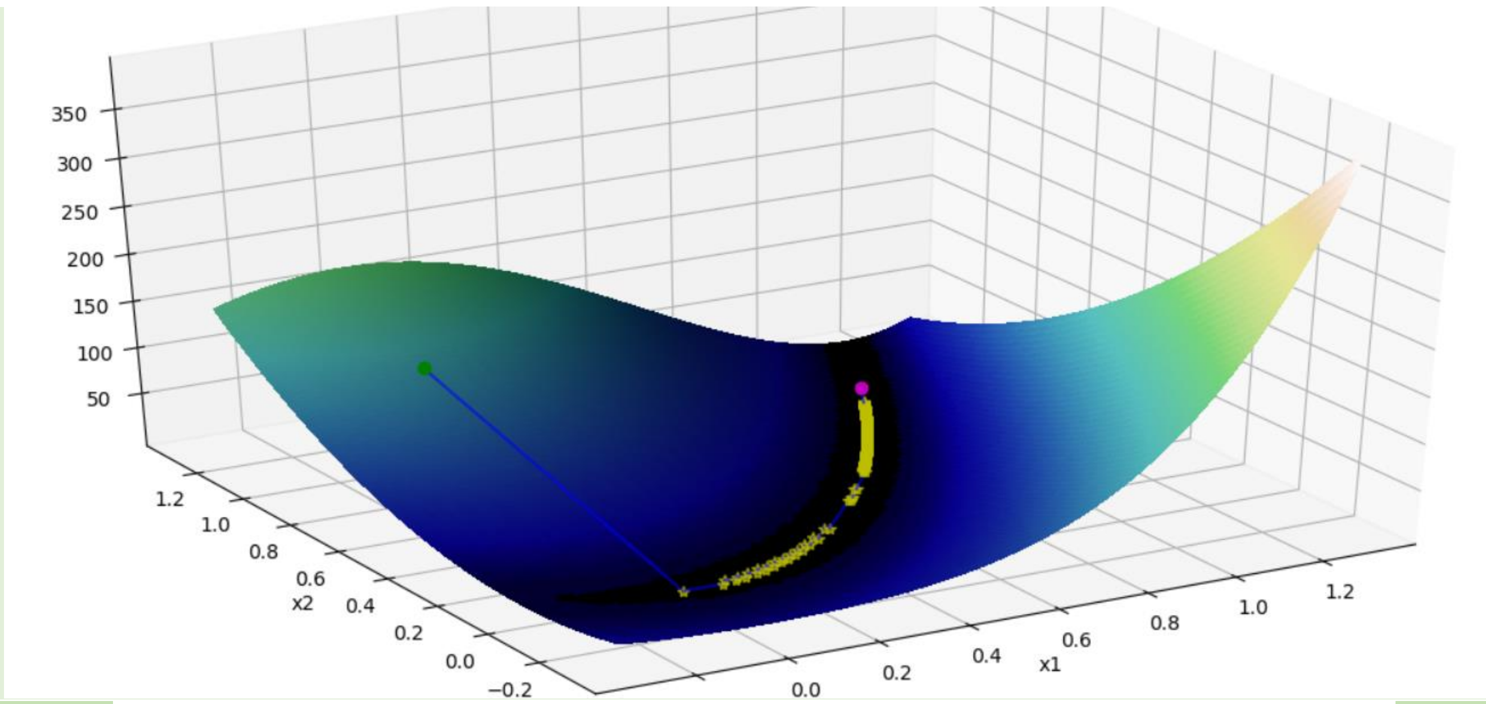
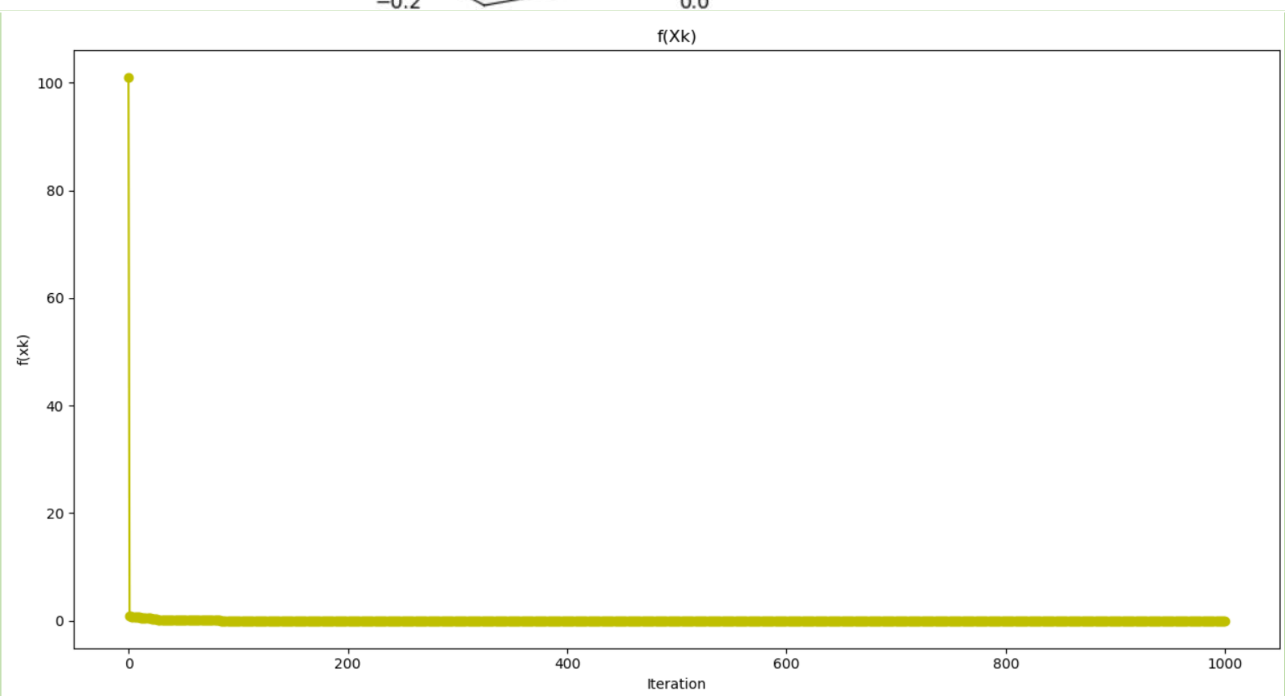
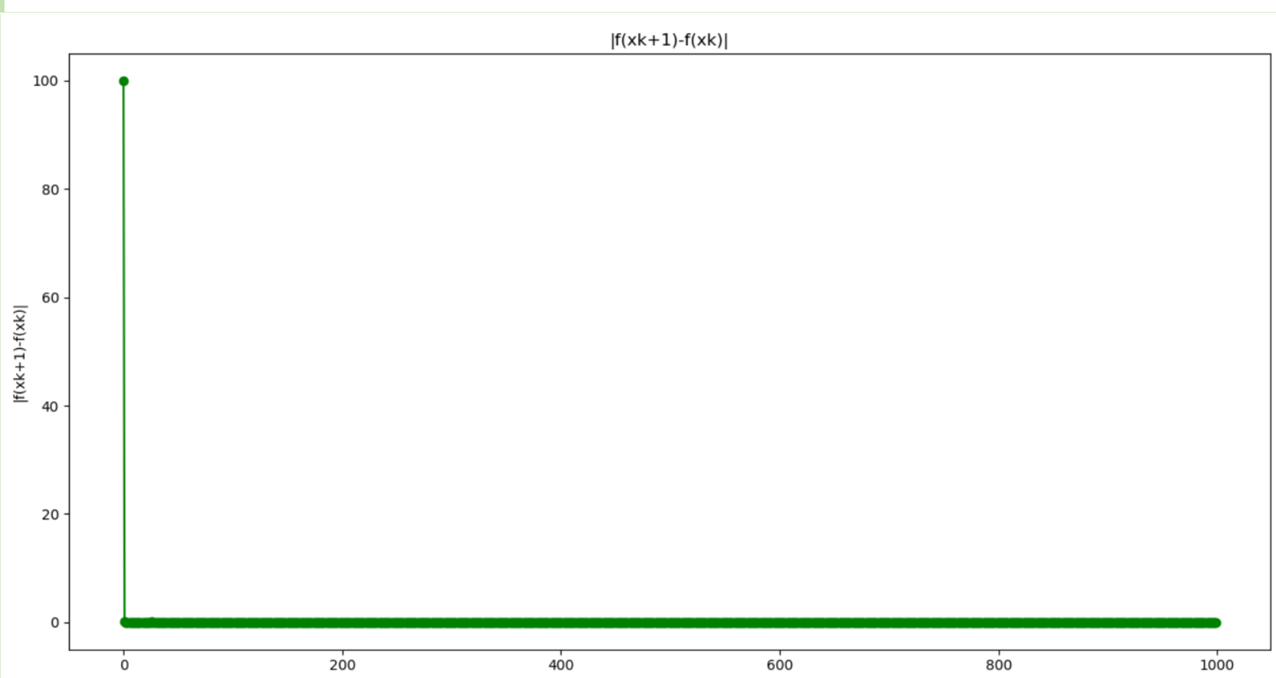
<table>
<tr><td>
</td><td>رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>میزان کاهش در f
(مقدار f در هر ایتریشن)</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>901, 0.0</td><td>اولین و آخرین مقدار f</td></tr>
</table>

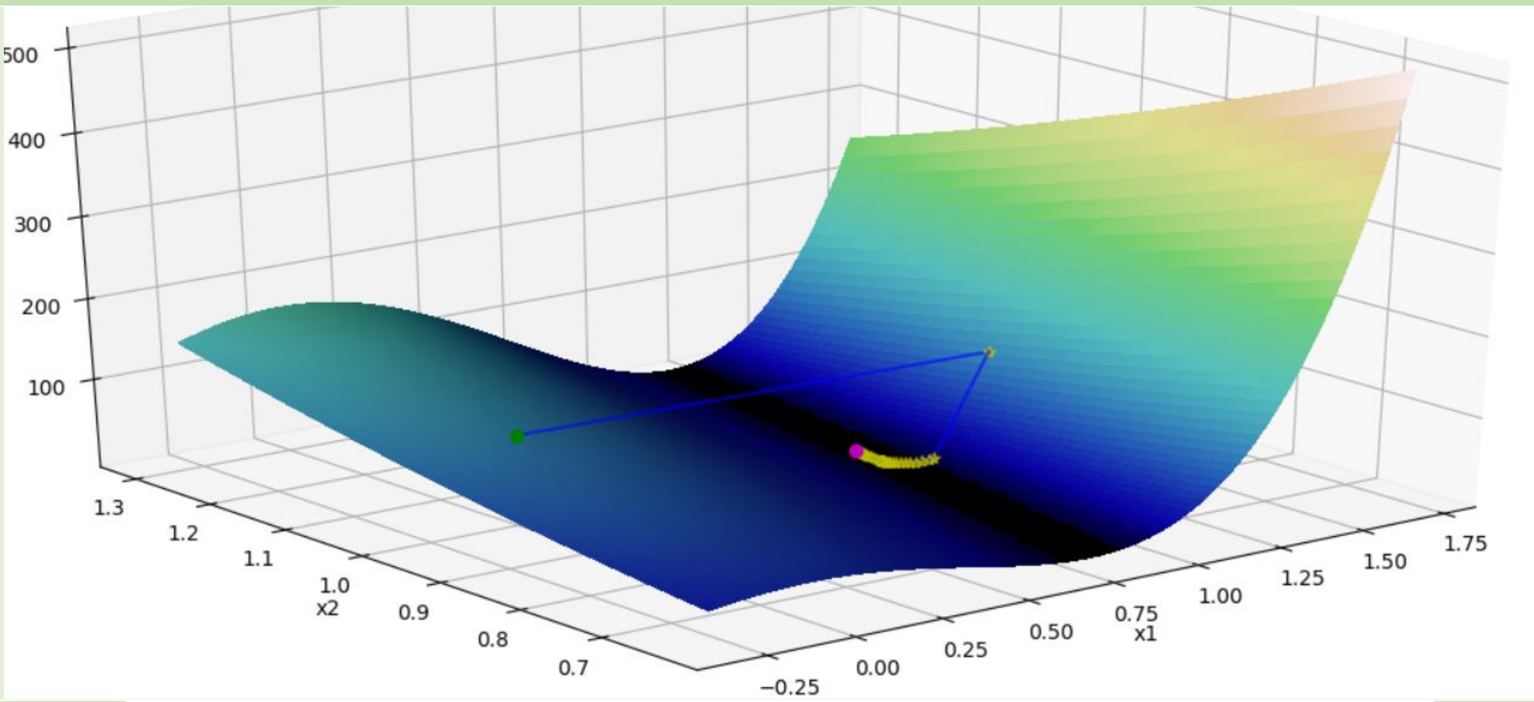
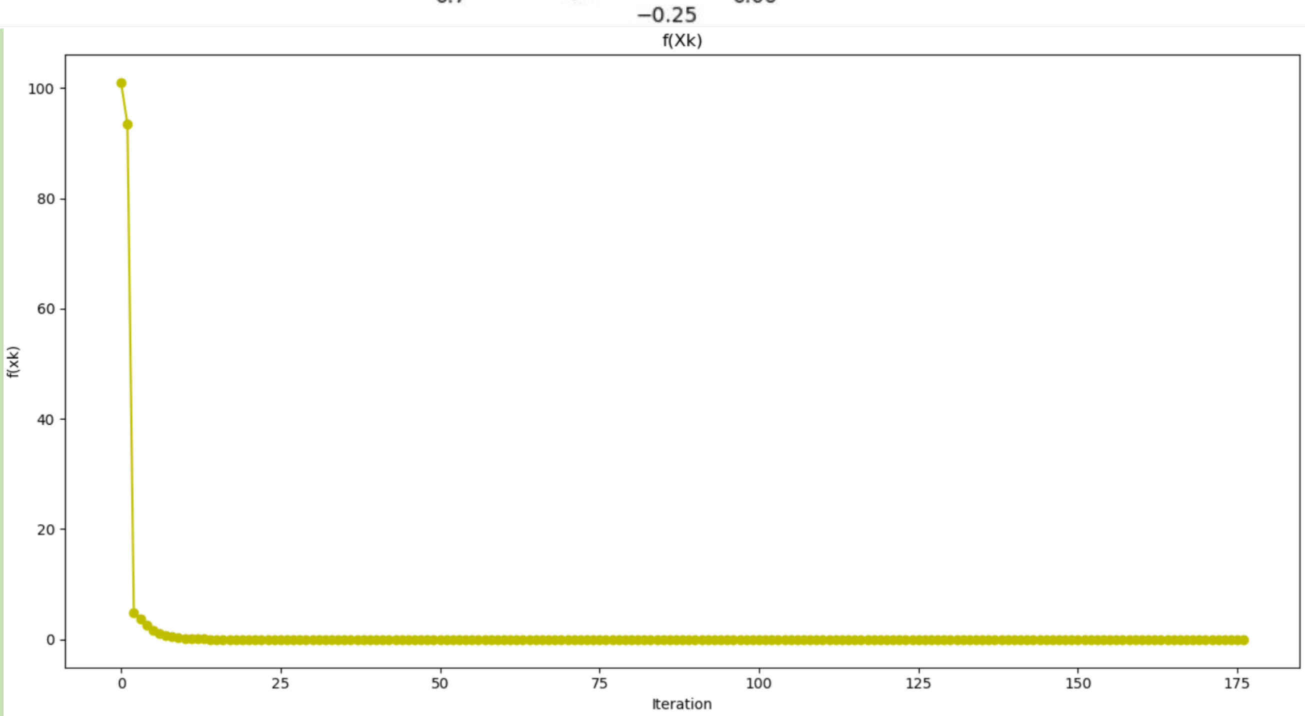
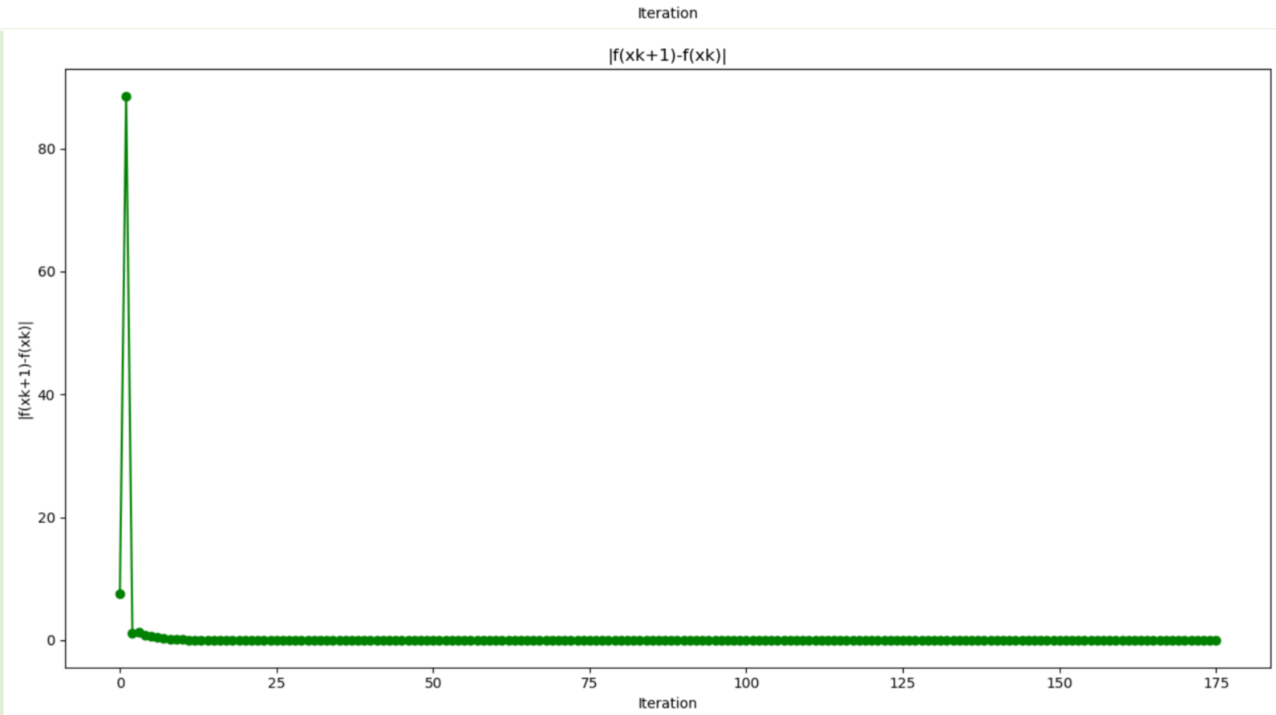
- مینیم کردن F1 با نقطه شروع [0,1] با استفاده از دو روش Quasi-Newton و Steepest Descent و دو روش Backtrack و Interpolation:

<table>
<tr><td>آزمایش 16</td><td></td></tr>
<tr><td>Function: f1 | Algorithm : Steepest Descent | Method: Backtracking
X0 = [0,1] | $alpha_0$ = 0.003| C=C_1=0.0001 | C_2=0.9</td><td>مشخصات اجرا</td></tr>
</table>

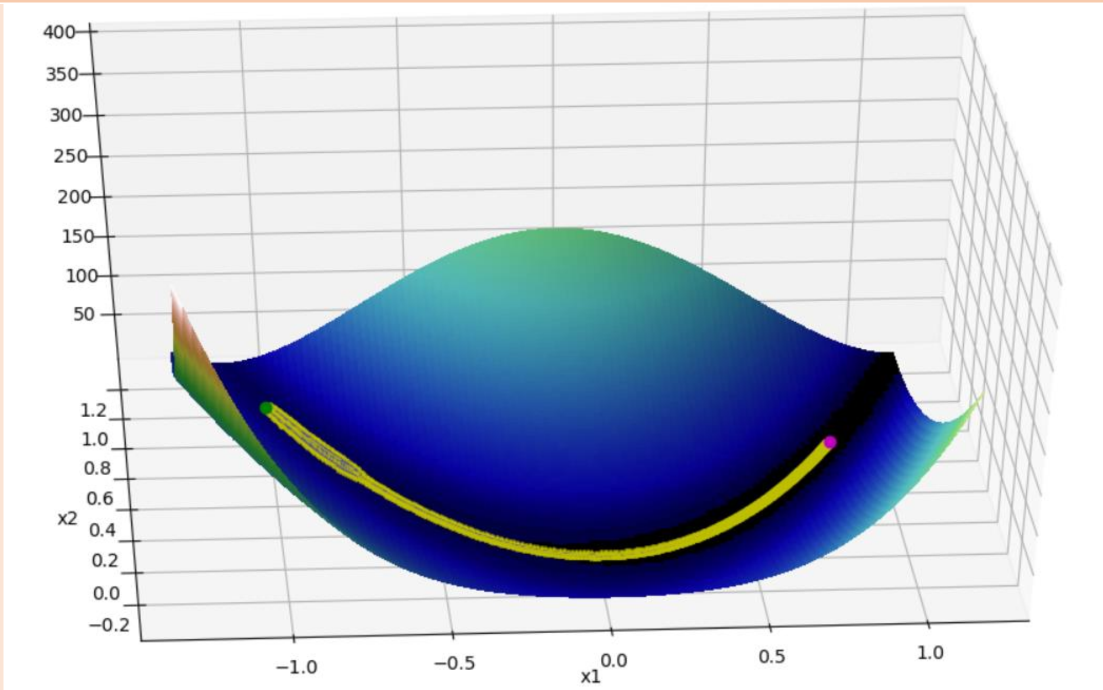
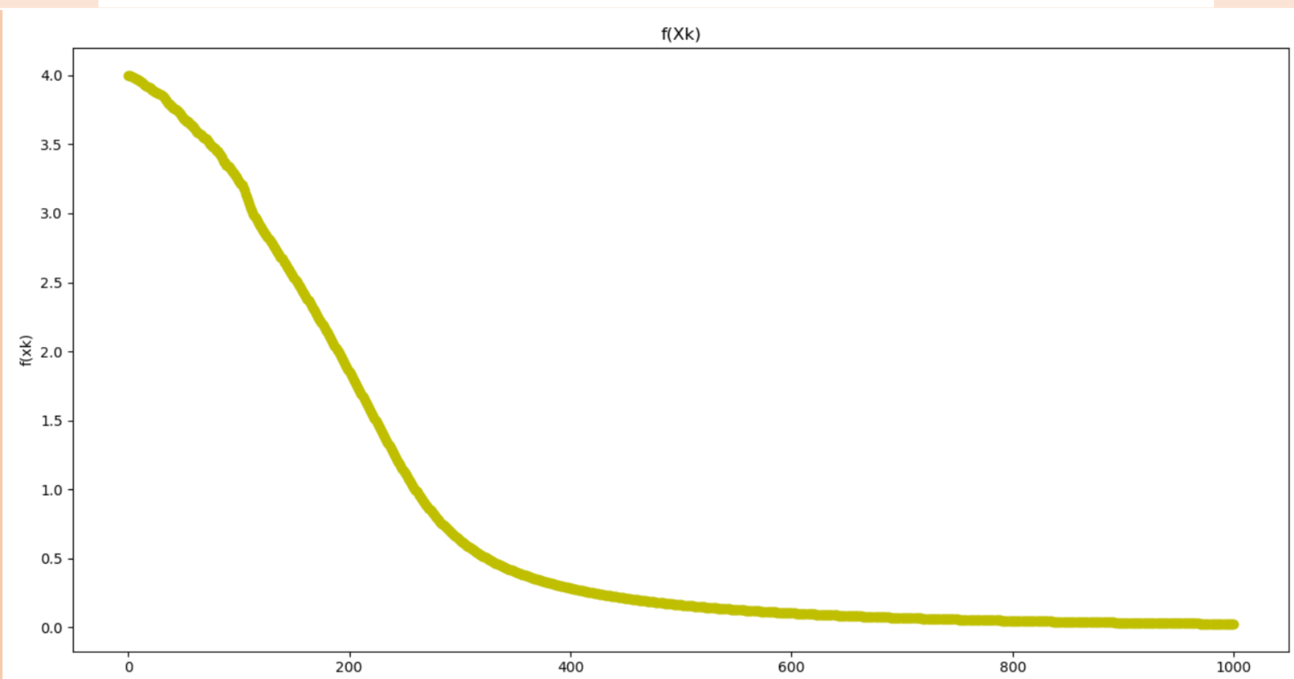
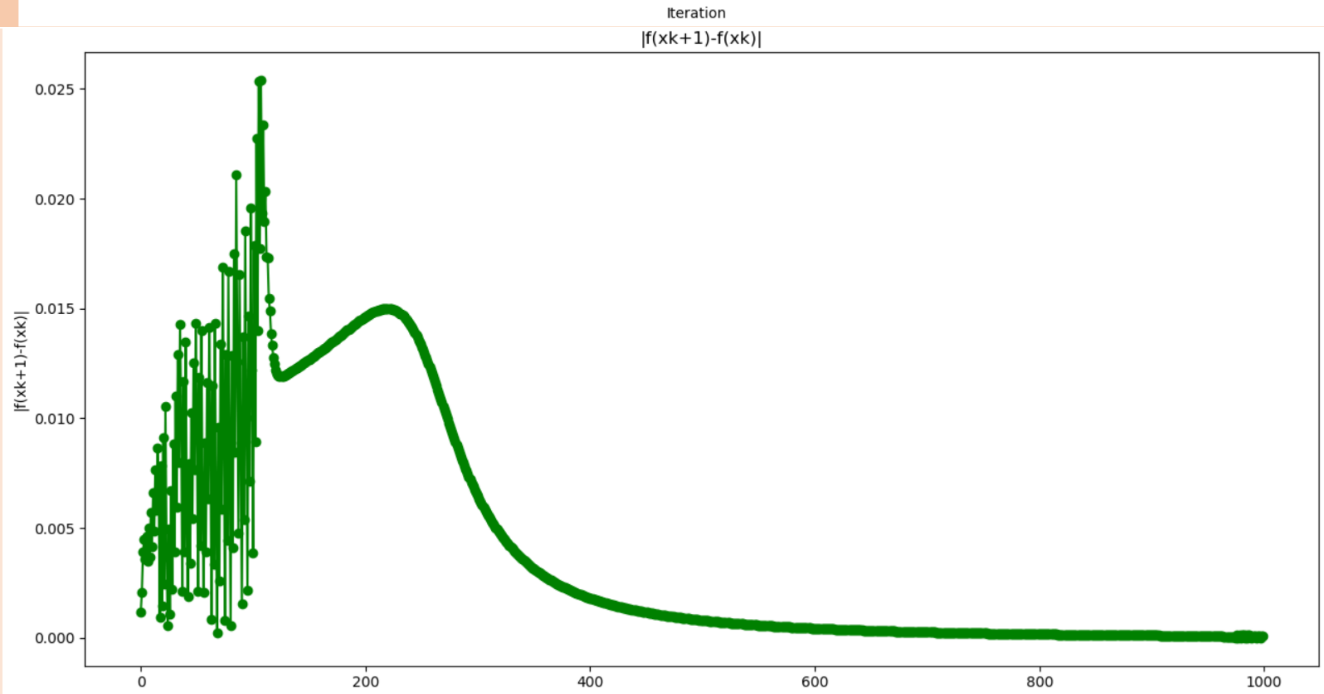
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>میزان کاهش در f
(مقدار f در هر ایتریشن)</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>101, 0.013706921986950478</td>
<td>اولین و آخرین مقدار f</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>آزمایش 17</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Function: f1 | Algorithm : Steepest Descent | Method: Interpolation
X0 = [0,1] | alpha$_0$ = 0.01 | C=C$_1$=0.0001 | C$_2$=0.9</td>
<td>مشخصات اجرا</td>
</tr>
</table>

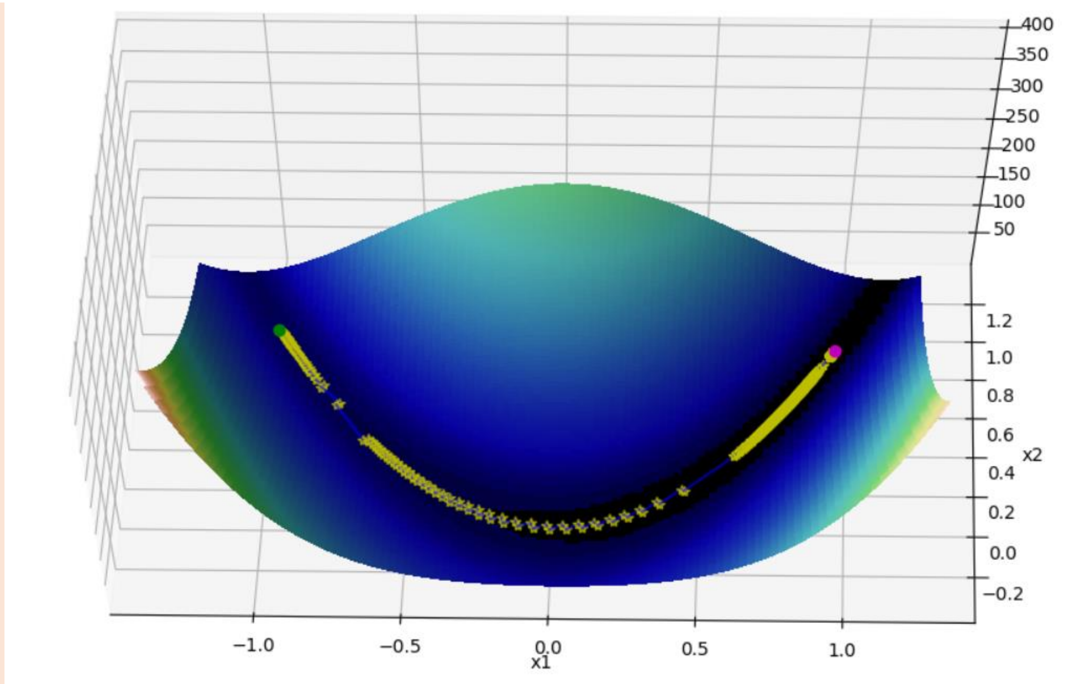
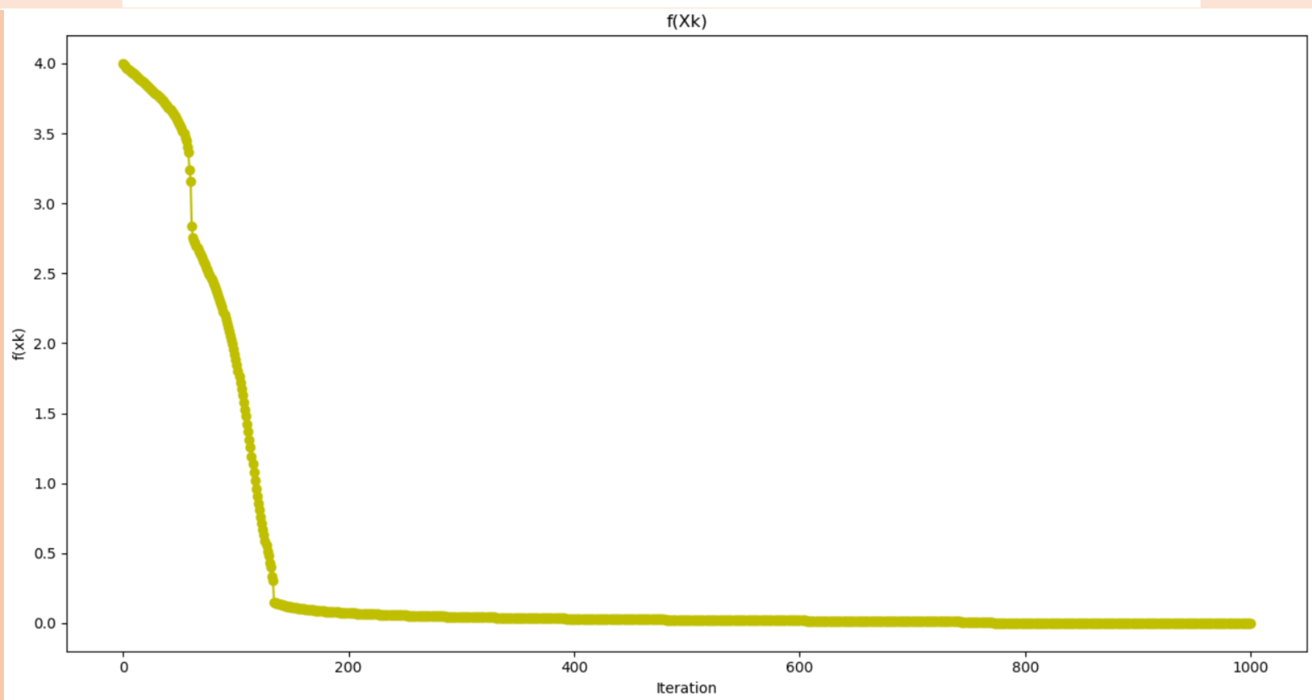
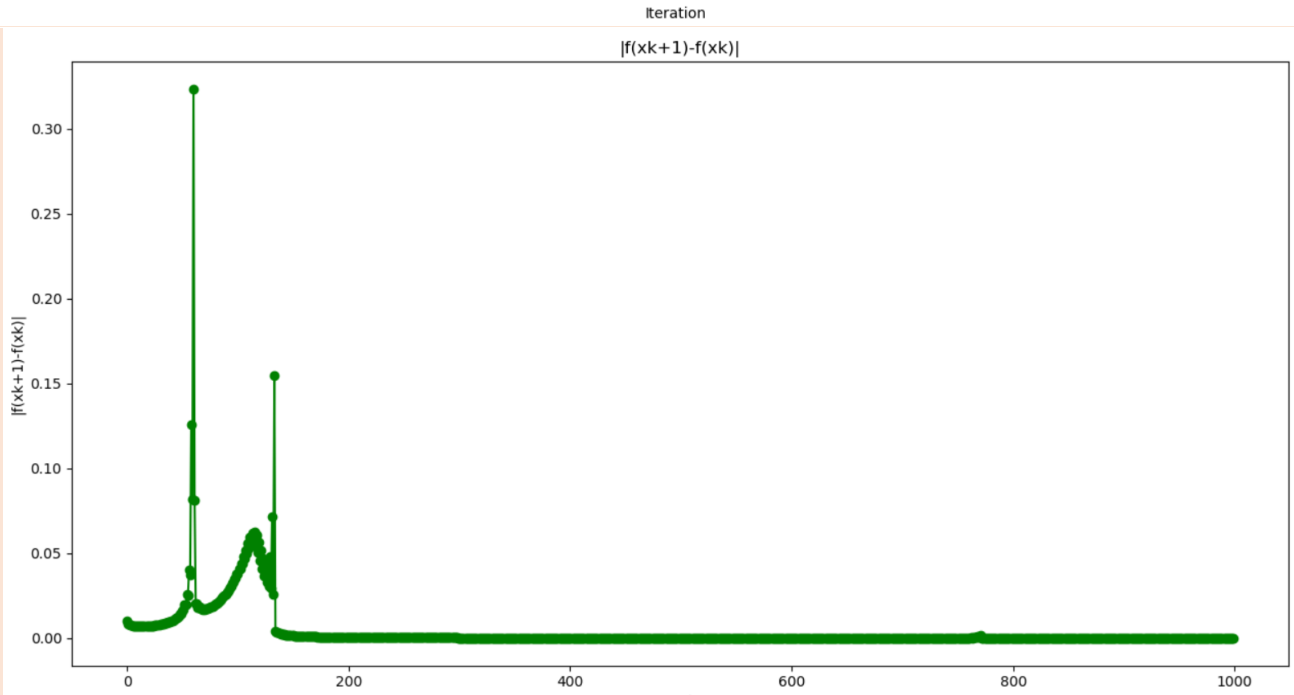
رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.	
میزان کاهش در f (مقدار f در هر ایتریشن)	
	
اولین و آخرین مقدار f	101, 4.966516544349338e-06

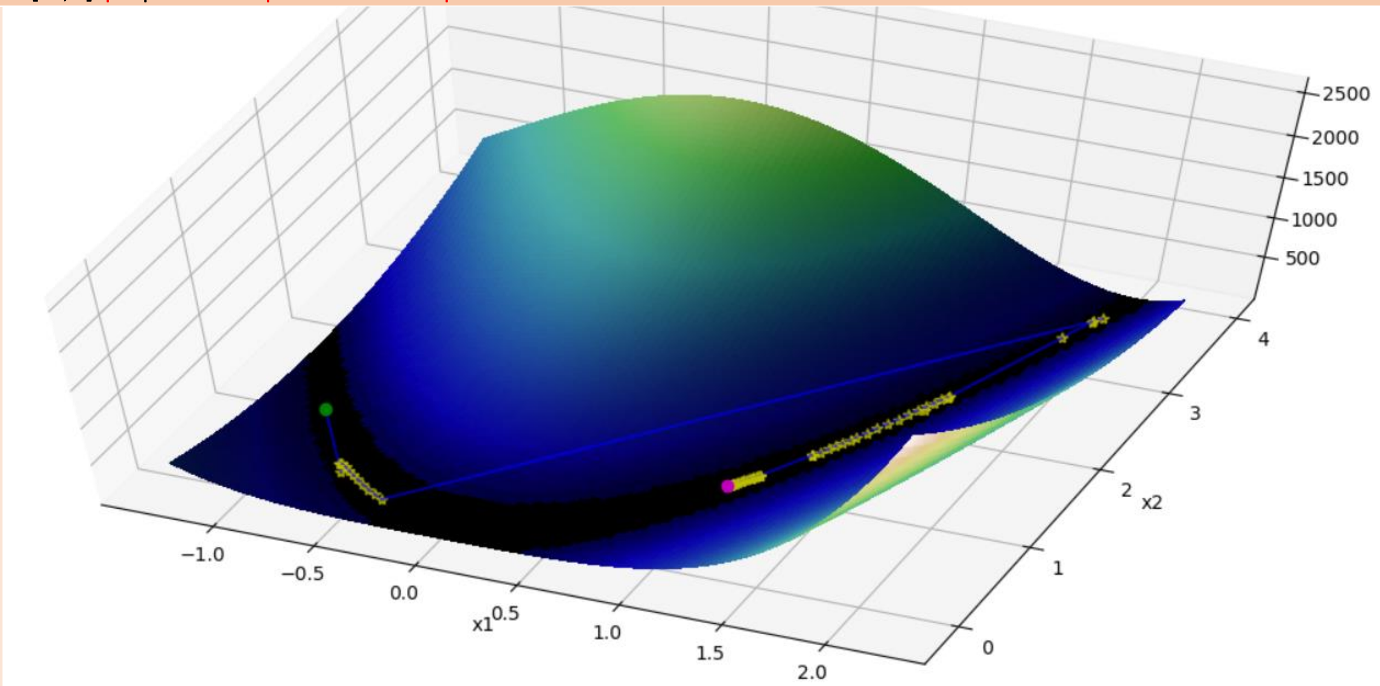
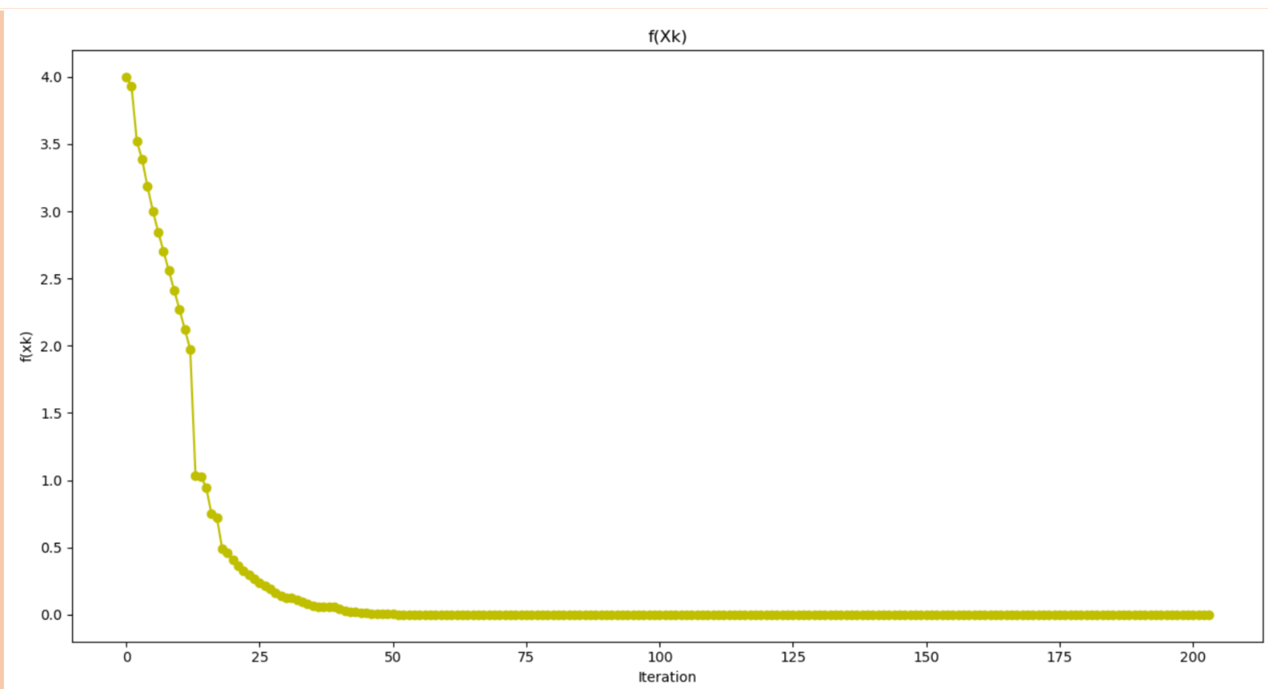
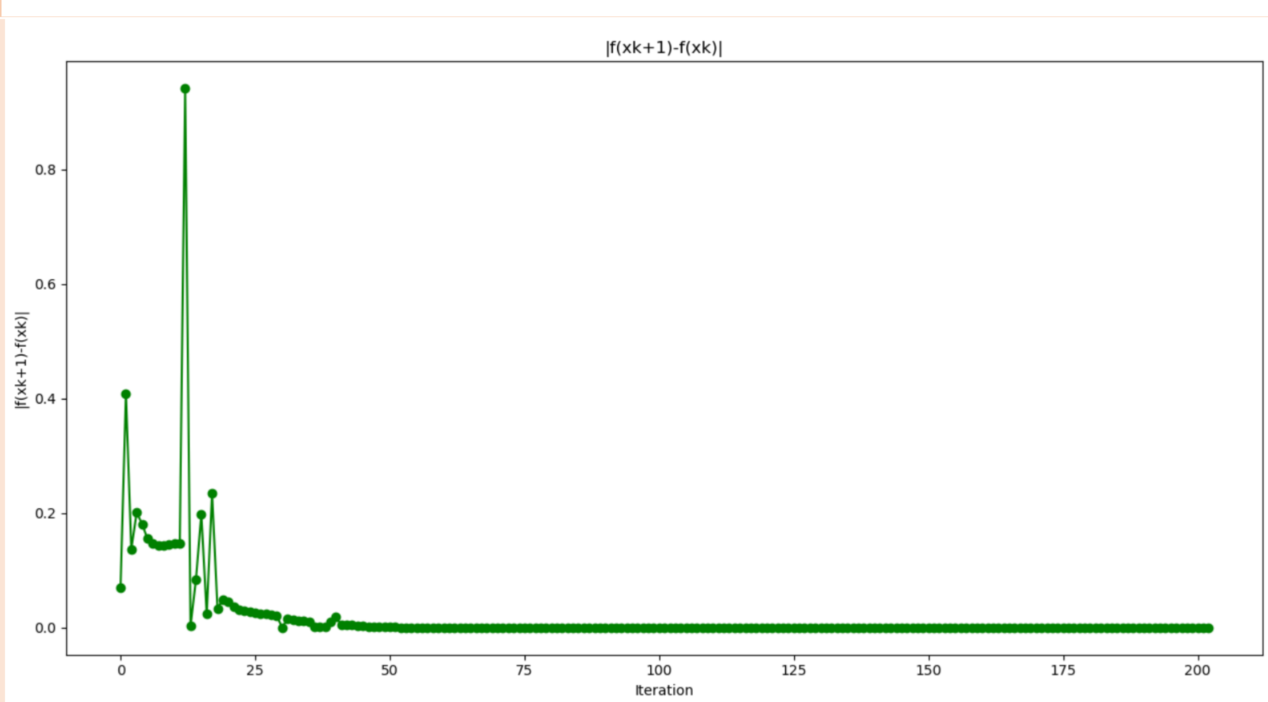
<table>
<tr><td>آزمایش 18</td><td></td></tr>
<tr><td>Function: f1 | Algorithm : Quasi-Newton | Method: Backtrack
X0 = [0,1] | alpha$_0$ = 0.2 | C=C$_1$=0.0001 | C$_2$=0.9</td><td>مشخصات اجرا</td></tr>
<tr><td>
</td><td>رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>میزان کاهش در f (مقدار f در هر ایتریشن)</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>101, 1.1093356479670479e-31</td><td>اولین و آخرین مقدار f</td></tr>
</table>

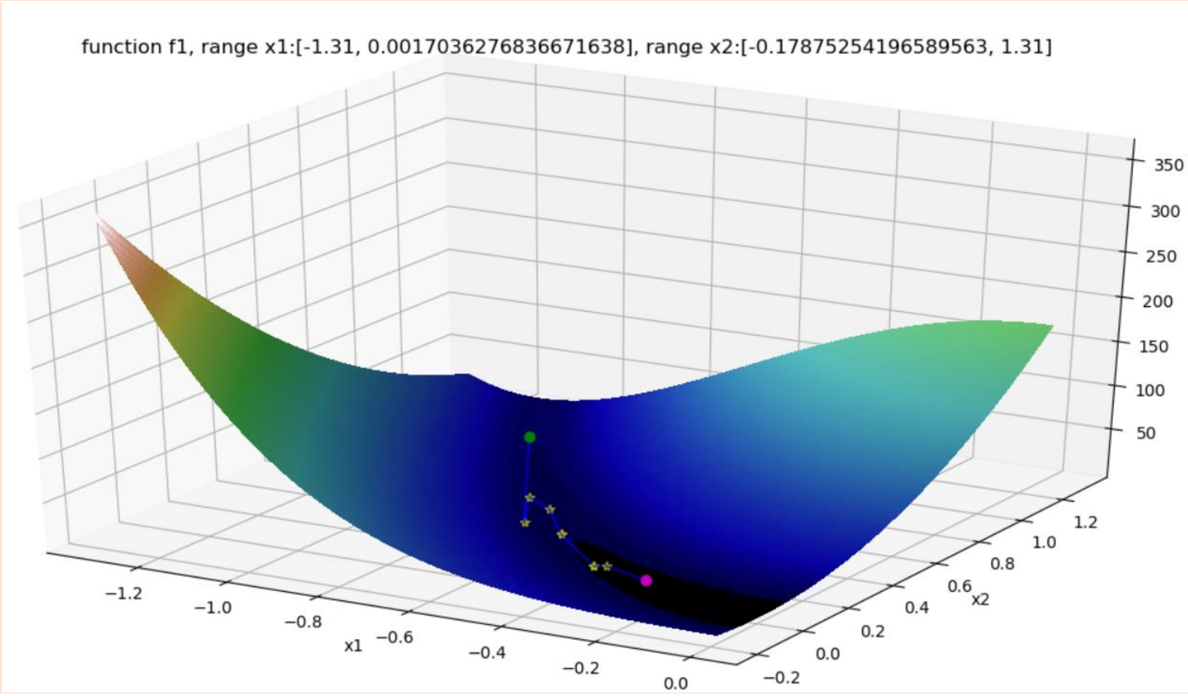
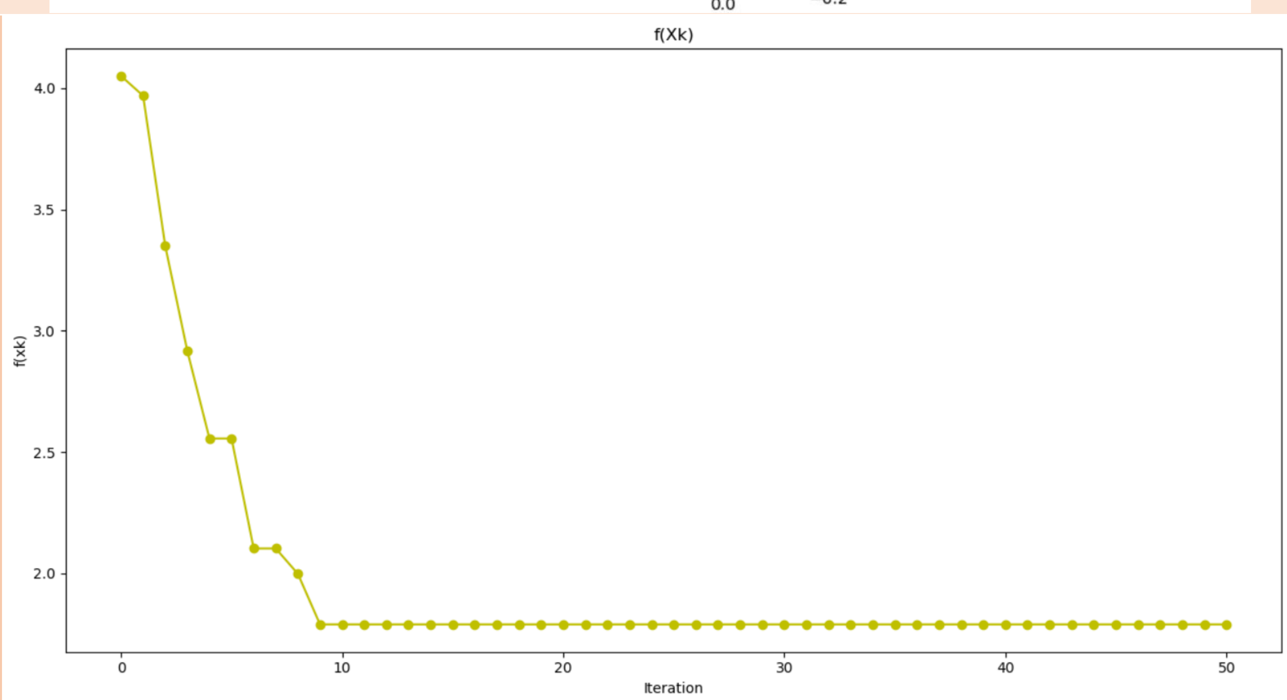
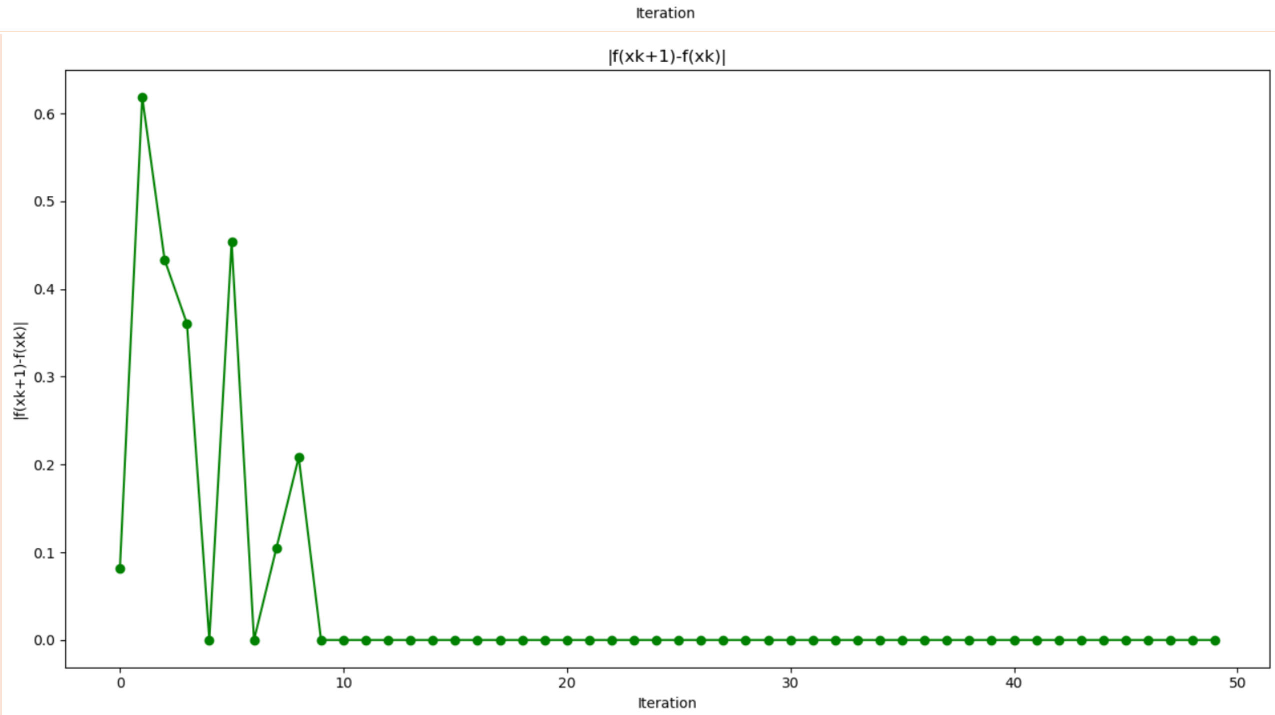
- مینیم کردن F1 با نقطه شروع [-1,1] با استفاده از دو روش Quasi-Newton و Steepest Descent و دو روش Backtrack و Interpolation:

آزمایش 19	
Function: f1 | Algorithm : Steepest Descent | Method: Backtracking X0 = [-1,1] | $alpha_0$ = 0.003 | C=C_1=0.0001 | C_2=0.9	مشخصات اجرا
	رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.
	میزان کاهش در f (مقدار f در هر ایتریشن)
	
4, 0.025782870348288644	اولین و آخرین مقدار f

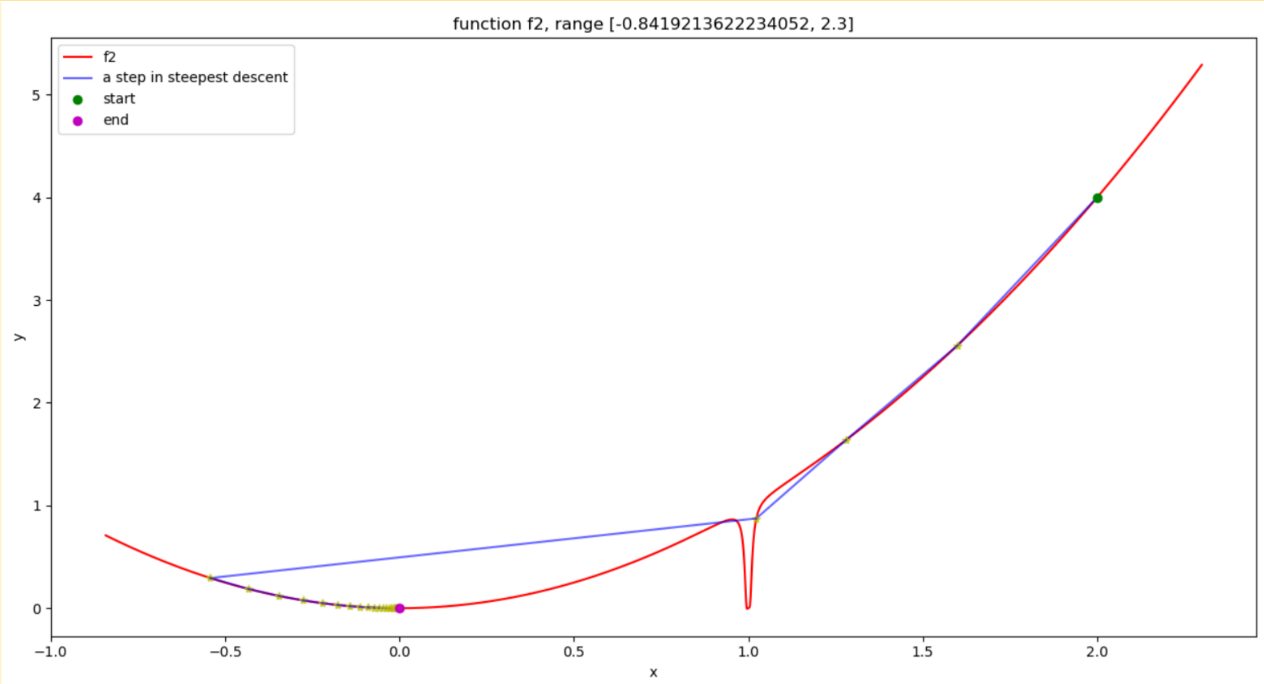
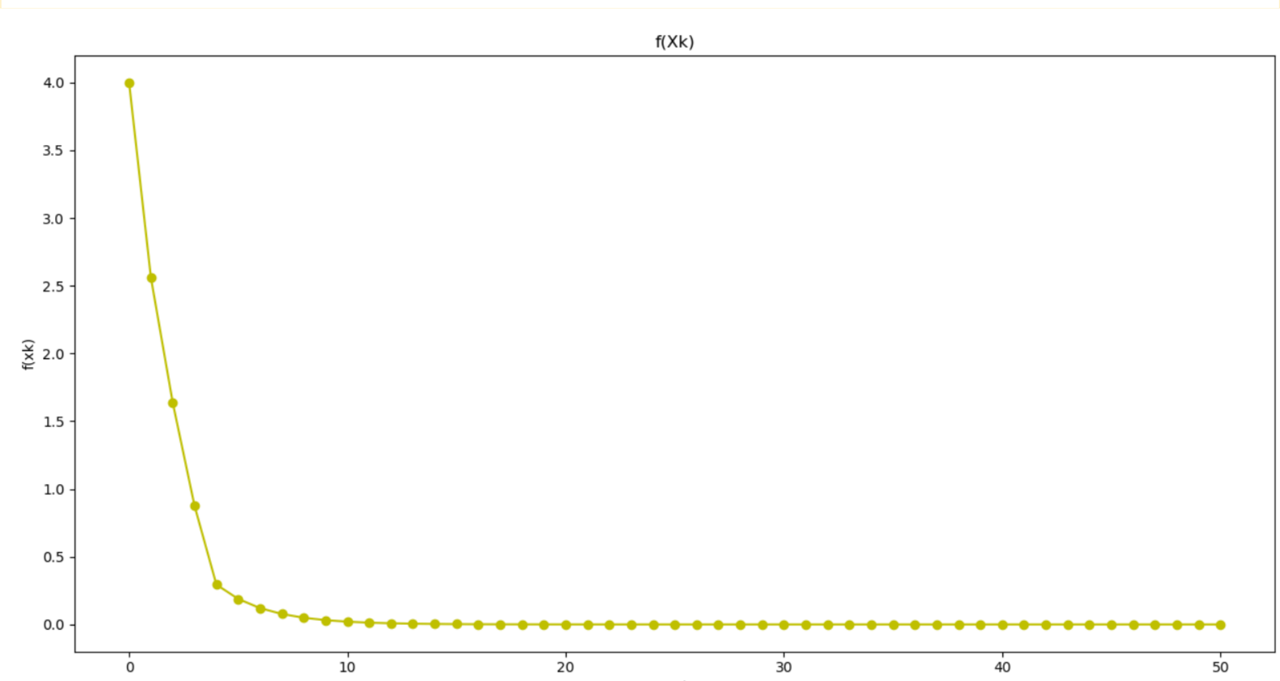
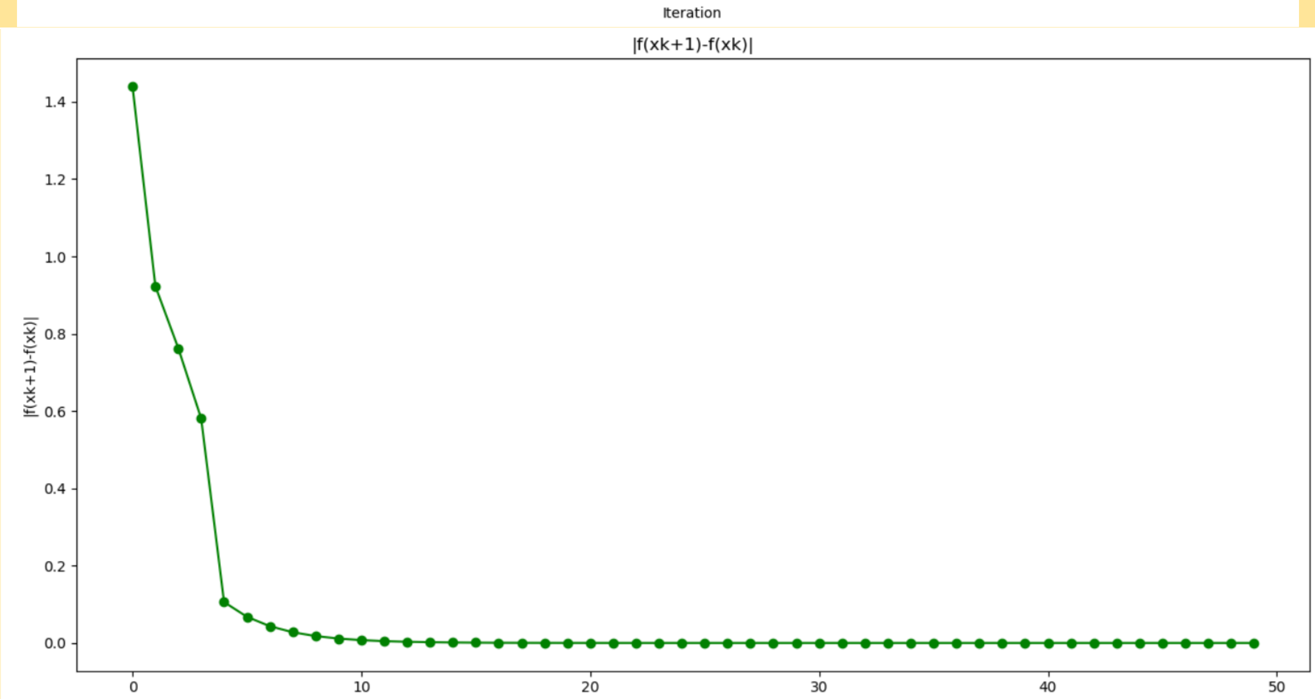
آزمایش 20	
Function: f1 | Algorithm : Steepest Descent | Method: Interpolation X0 = [-1,1] | $alpha_0$ = 0.01 | C=C_1=0.0001 | C_2=0.9	مشخصات اجرا

رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.	
میزان کاهش در f (مقدار f در هر ایتریشن)	
	
اولین و آخرین مقدار f	4, 0.00137100143731675

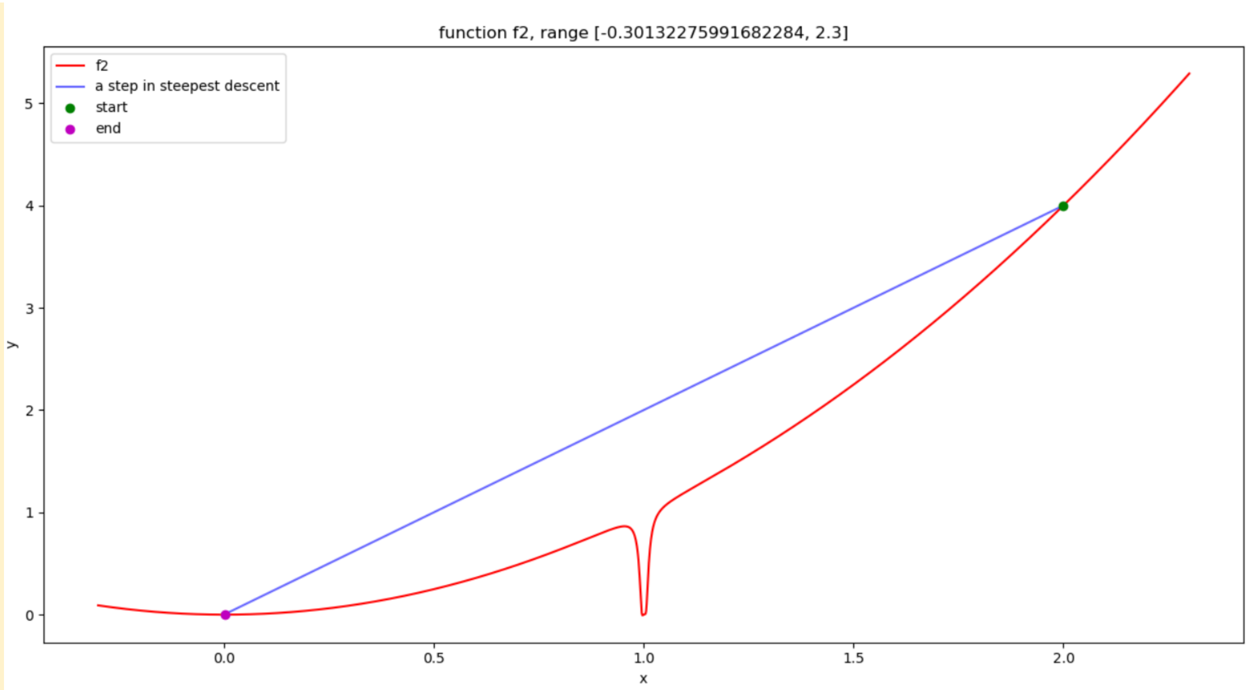
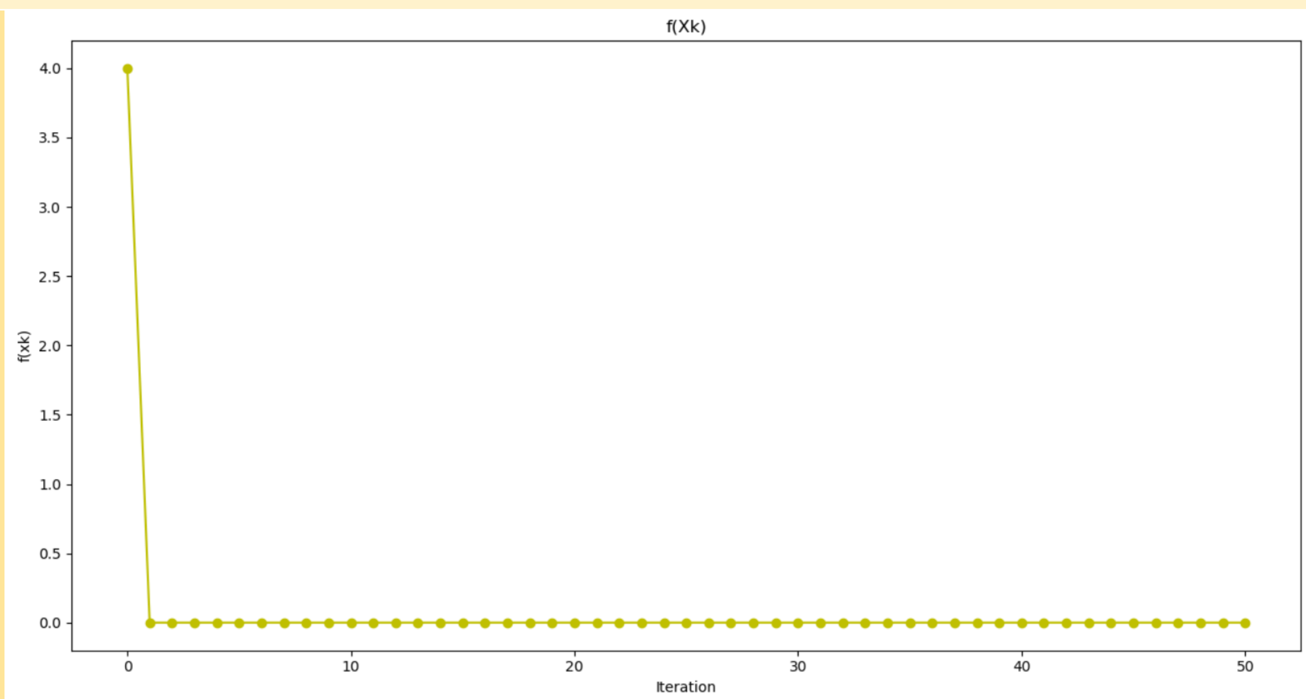
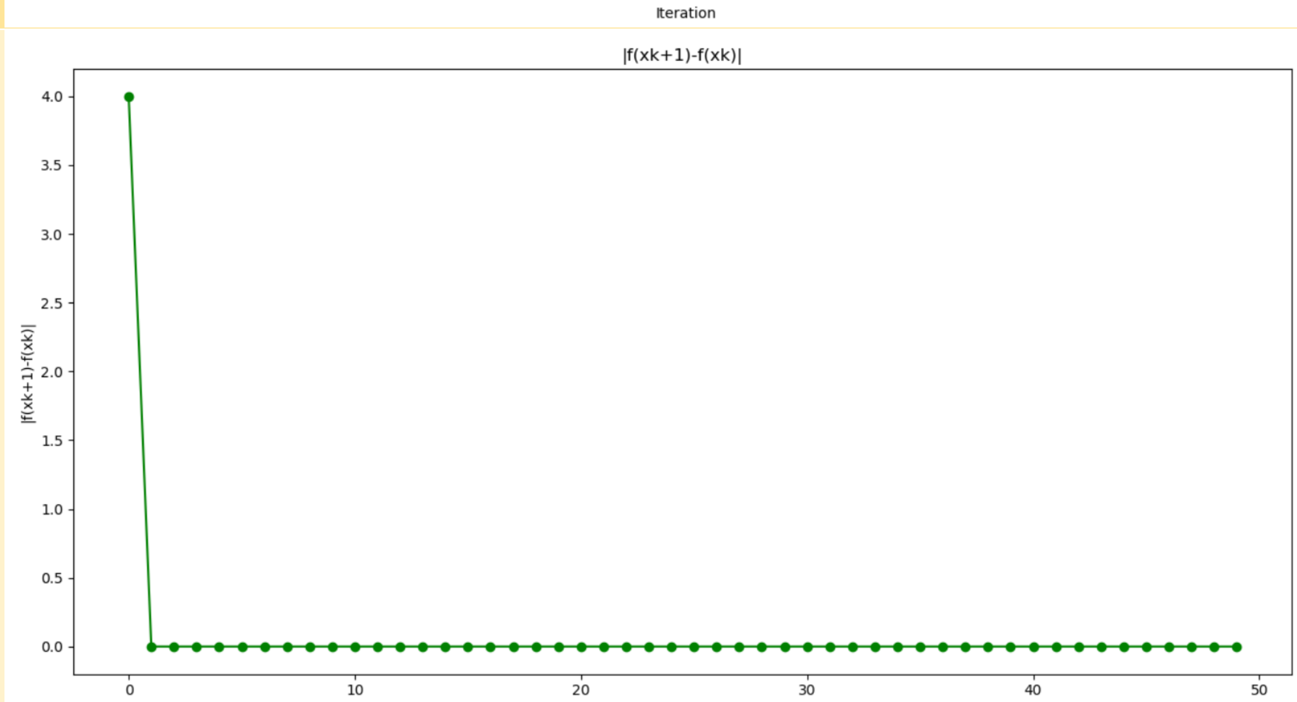
	آزمایش 21
مشخصات اجرا	Function: f1 | Algorithm : Quasi-Newton | Method: Backtrack X0 = [-1,1] | $alpha_0$ = 0.2 | C=C_1=0.0001 | C_2=0.9
رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.	
میزان کاهش در f (مقدار f در هر ایتریشن)	
	
اولین و آخرین مقدار f	4, 4.437342591868191e-31

آزمایش 22	
Function: f1 | Algorithm : Quasi-Newton | Method: Interpolation X0 = [-1,1] | $alpha_0$ = 0.3 | C=C_1=0.0001 | C_2=0.9	**مشخصات اجرا**
	**رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.**
	**میزان کاهش در f (مقدار f در هر ایتریشن)**
	
1.7896876716825059	**آخرین مقدار f**

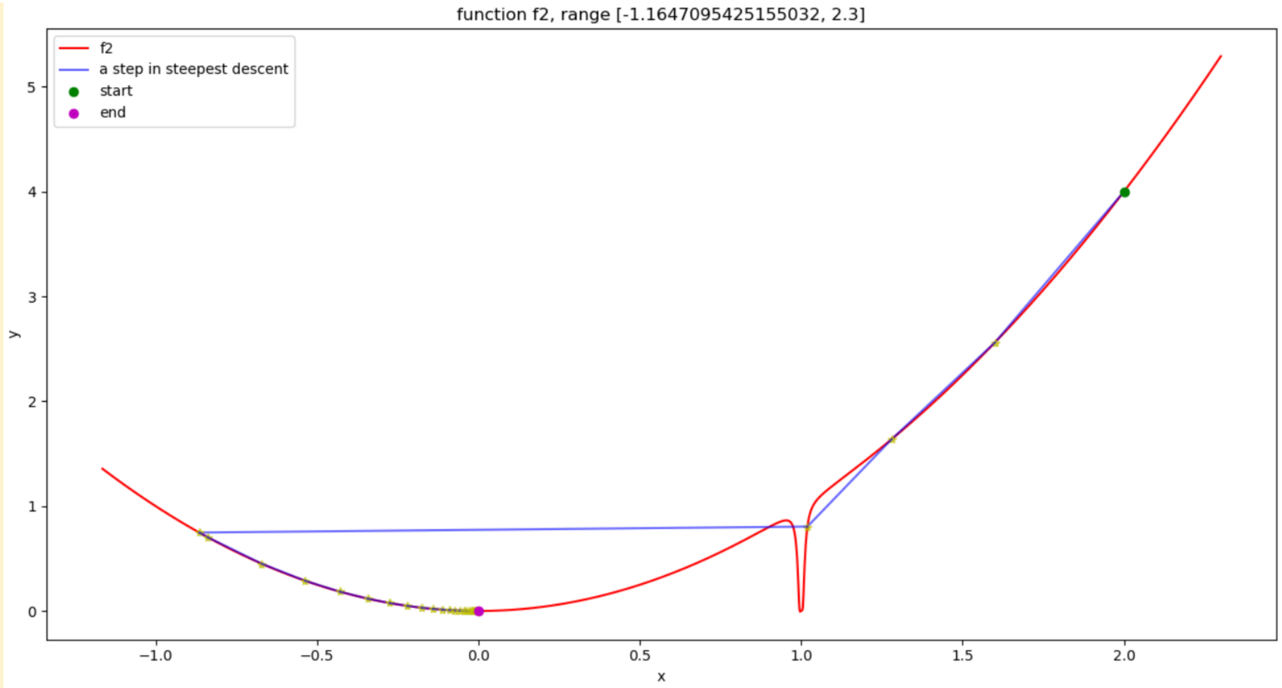
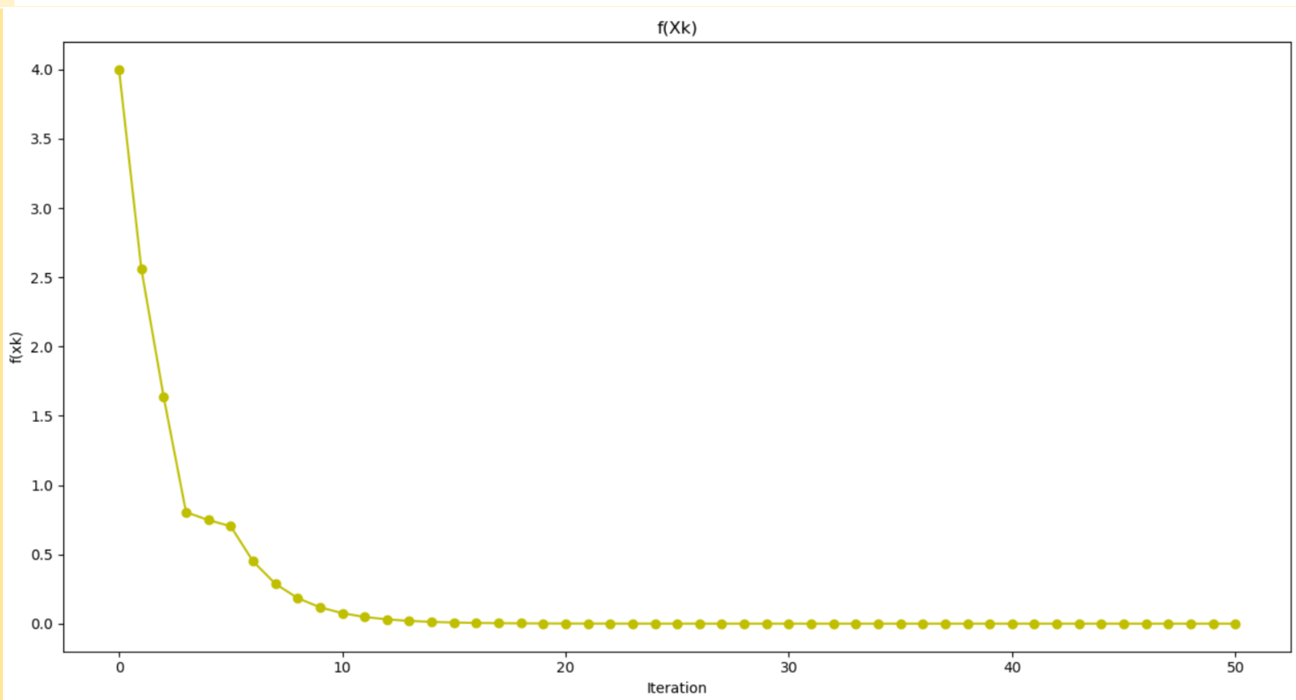
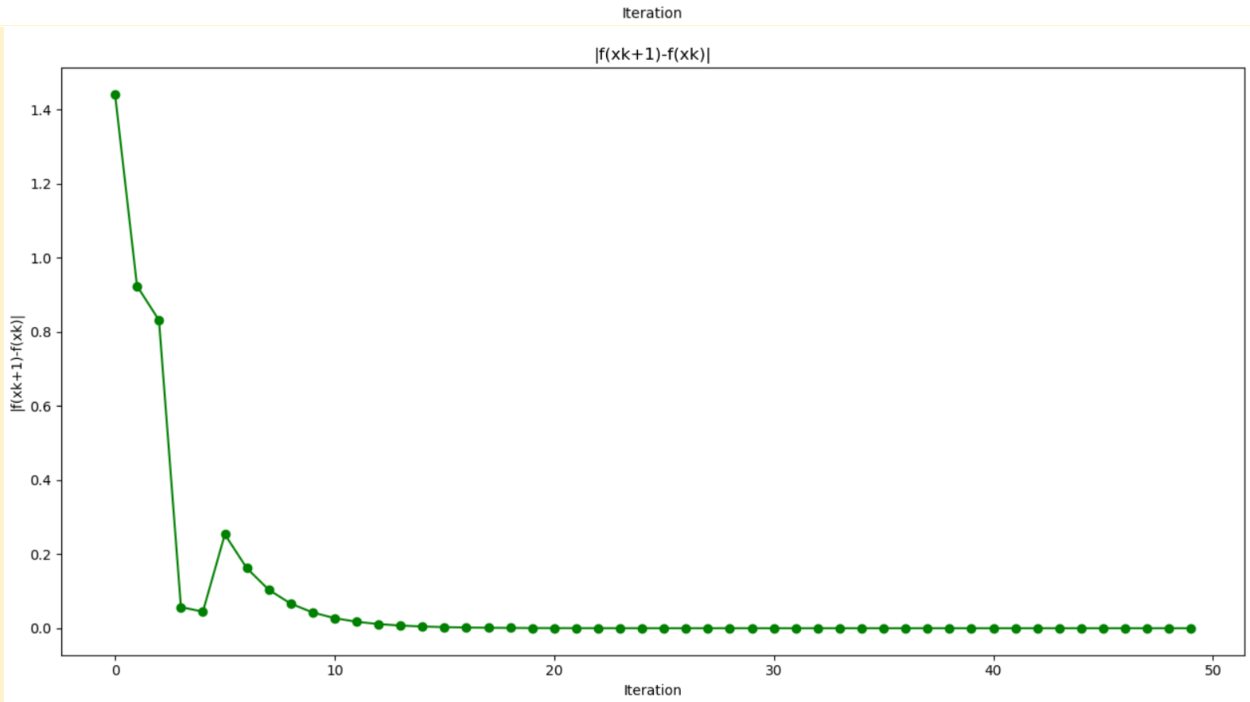
• مینیم کردن F2 با نقطه شروع [2] با استفاده از دو روش Quasi-Newton و Steepest Descent و دو روش Backtrack و Interpolation:

	آزمایش 23
مشخصات اجرا	Function: f2 | Algorithm : Steepest Descent | Method: Backtracking X0 = [2] | $alpha_0$ = 0.1 | $C=C_1=0.0001$ | $C_2=0.9$
رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.	
میزان کاهش در f (مقدار f در هر ایتریشن)	
	
اولین و آخرین مقدار f	3.9999, -0.0001

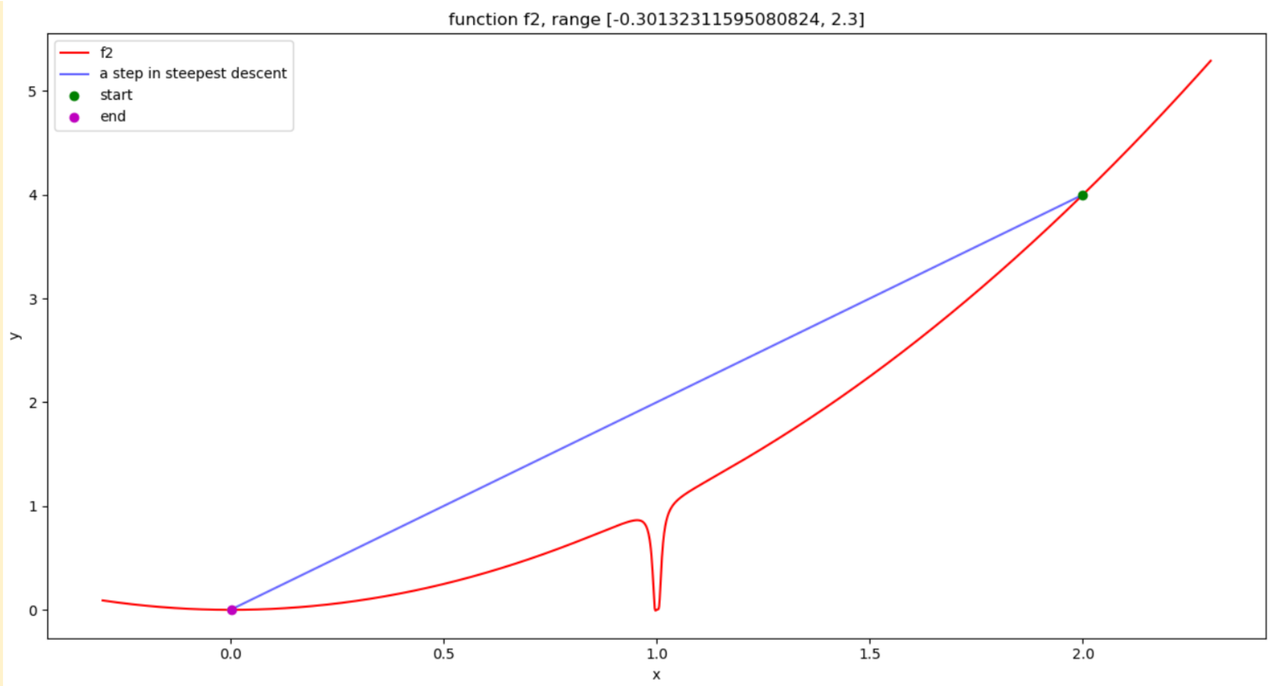
	آزمایش 24
مشخصات اجرا	Function: f2 | Algorithm : Steepest Descent | Method: Interpolation X0 = [2] | $alpha_0$ =0.1 | $C=C_1=0.0001$ | $C_2=0.9$

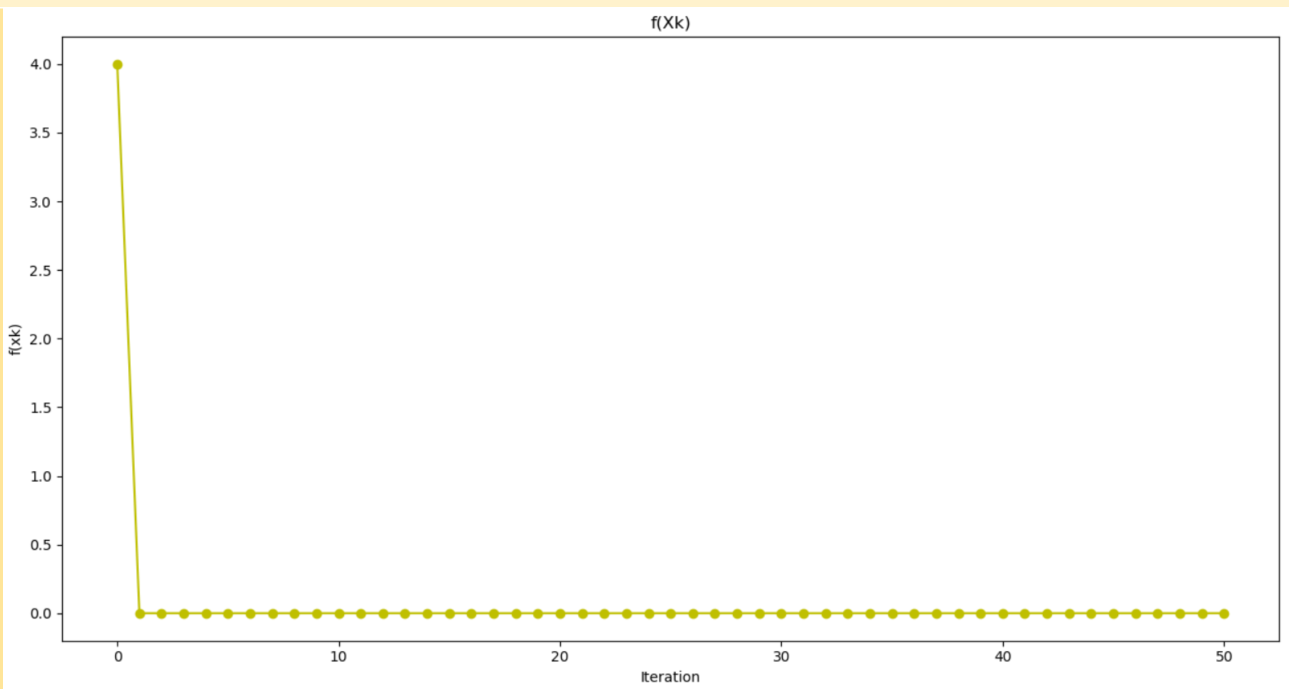
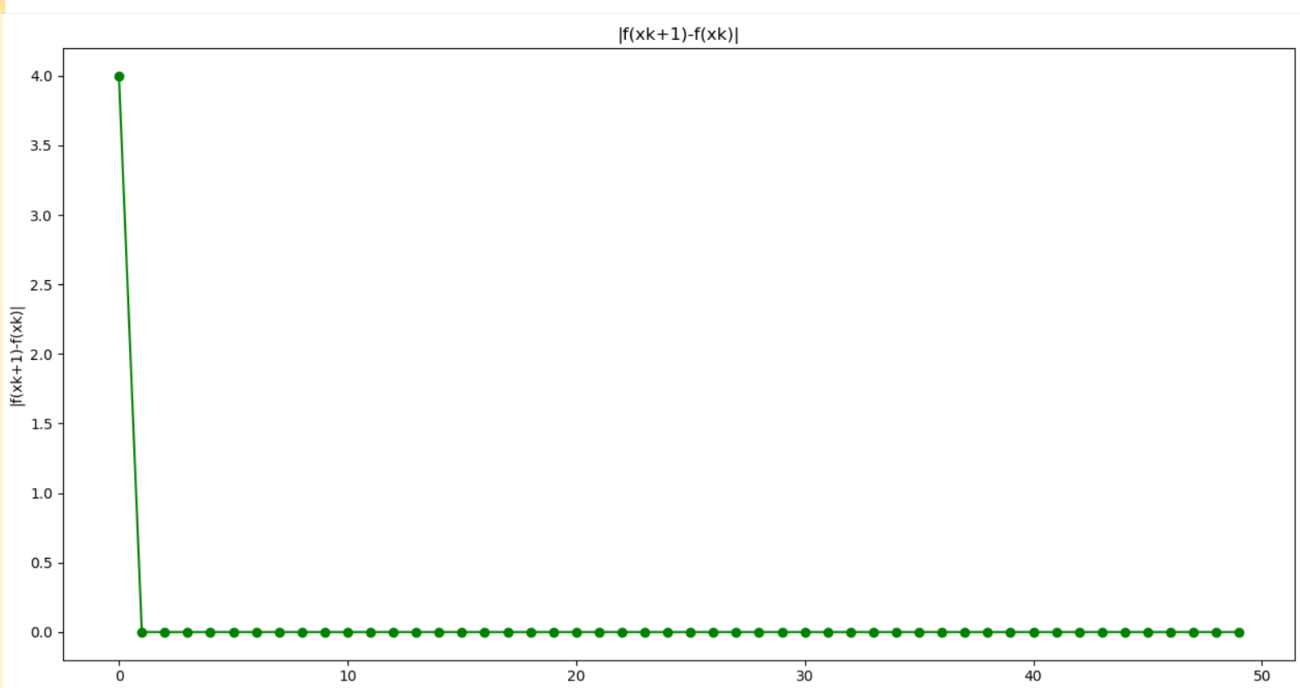
رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.	 چند گام آخر در اطراف مینیمم کنار هم افتاده اند، به خوبی مشخص نیستند.
میزان کاهش در f (مقدار f در هر ایتریشن)	
	
اولین و آخرین مقدار f	3.9999, -0.00010001

	آزمایش 25
مشخصات اجرا	Function: f2 | Algorithm : Quasi-Newton | Method: Backtracking X0 = [2] | alpha$_0$ = 0.2| C=C$_1$=0.0001 | C$_2$=0.9

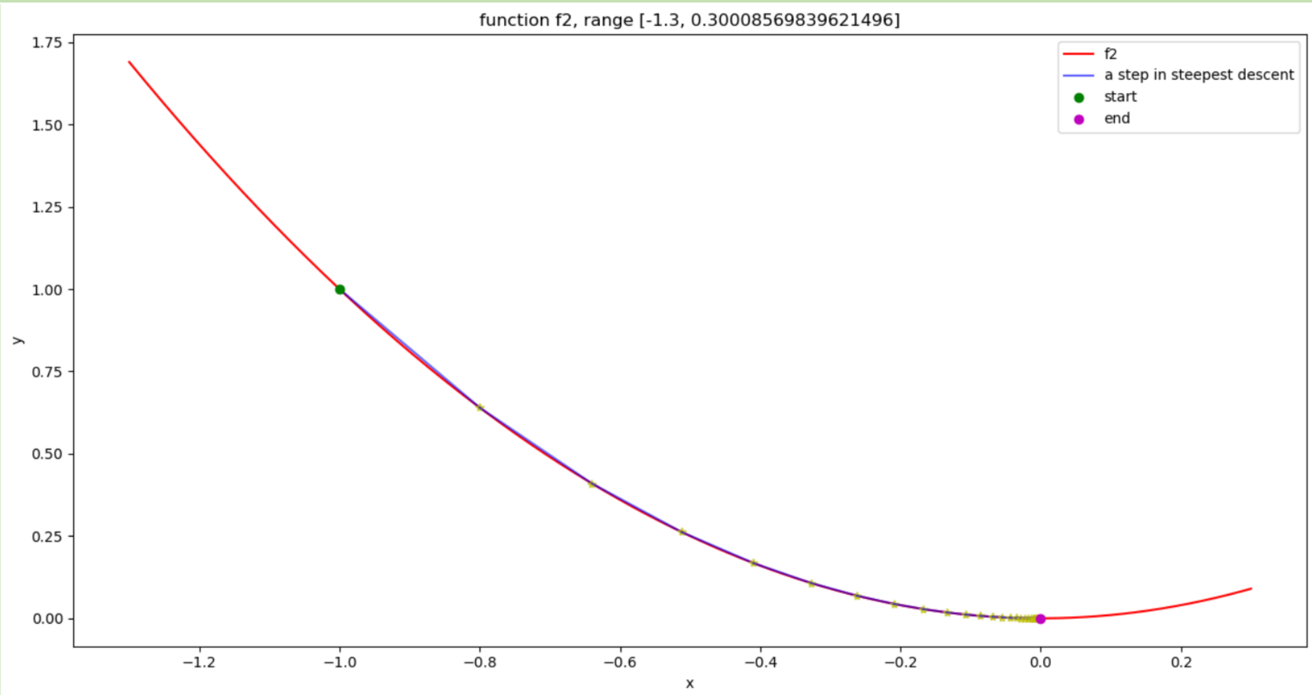
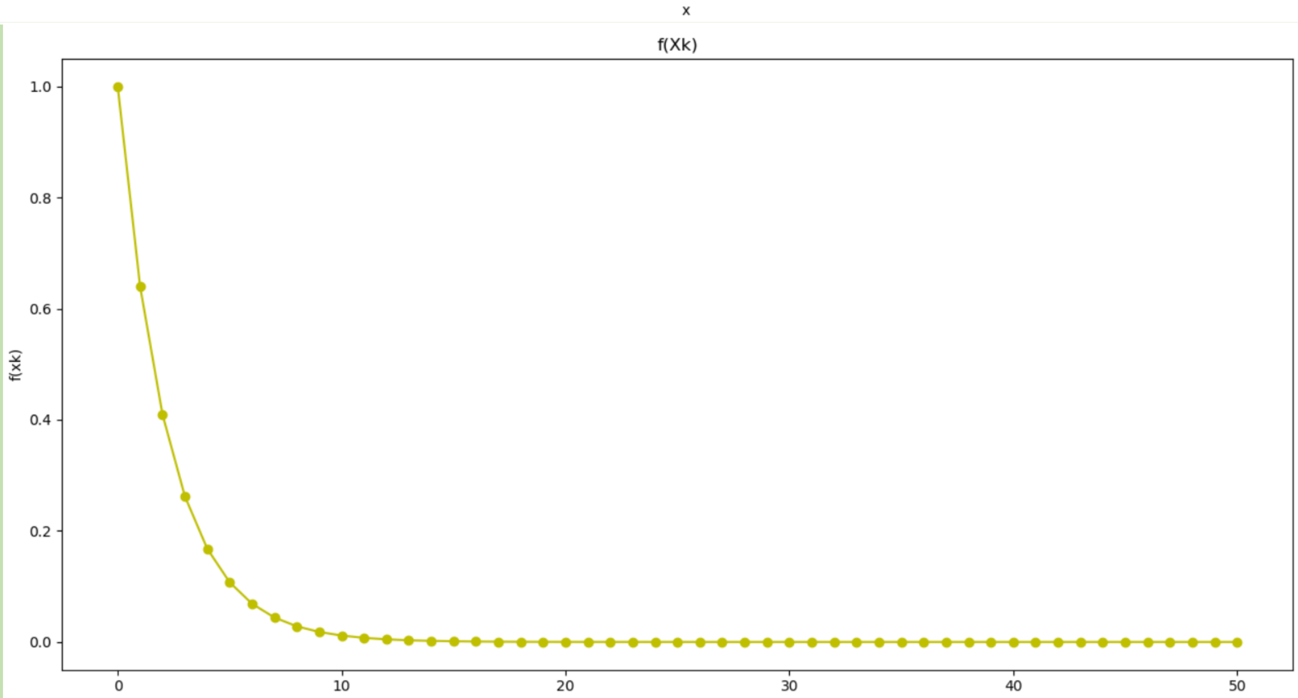
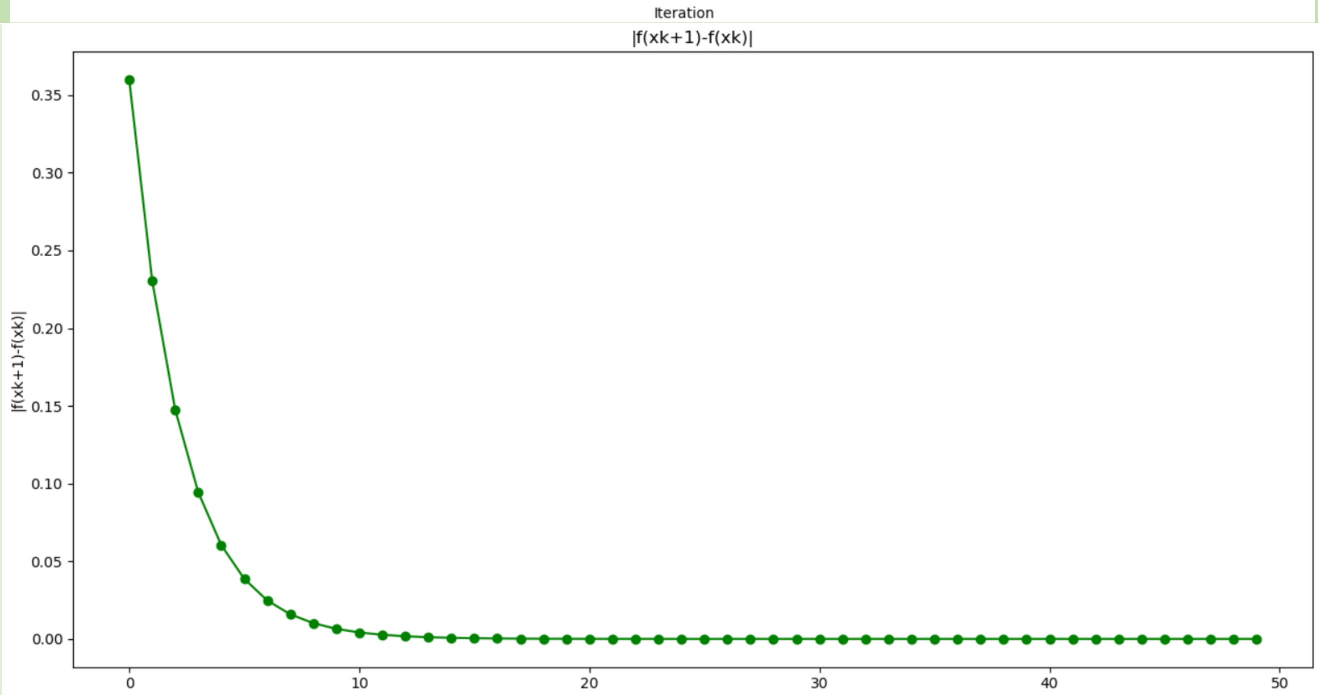
رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.	
میزان کاهش در f (مقدار f در هر ایتریشن)	
	
اولین و آخرین مقدار f	3.9999, -0.0001

	آزمایش 26
مشخصات اجرا	Function: f2 | Algorithm : Quasi-Newton | Method: Interpolation X0 = [2] | $alpha_0$ = 0.2 | C=C_1=0.0001 | C_2=0.9

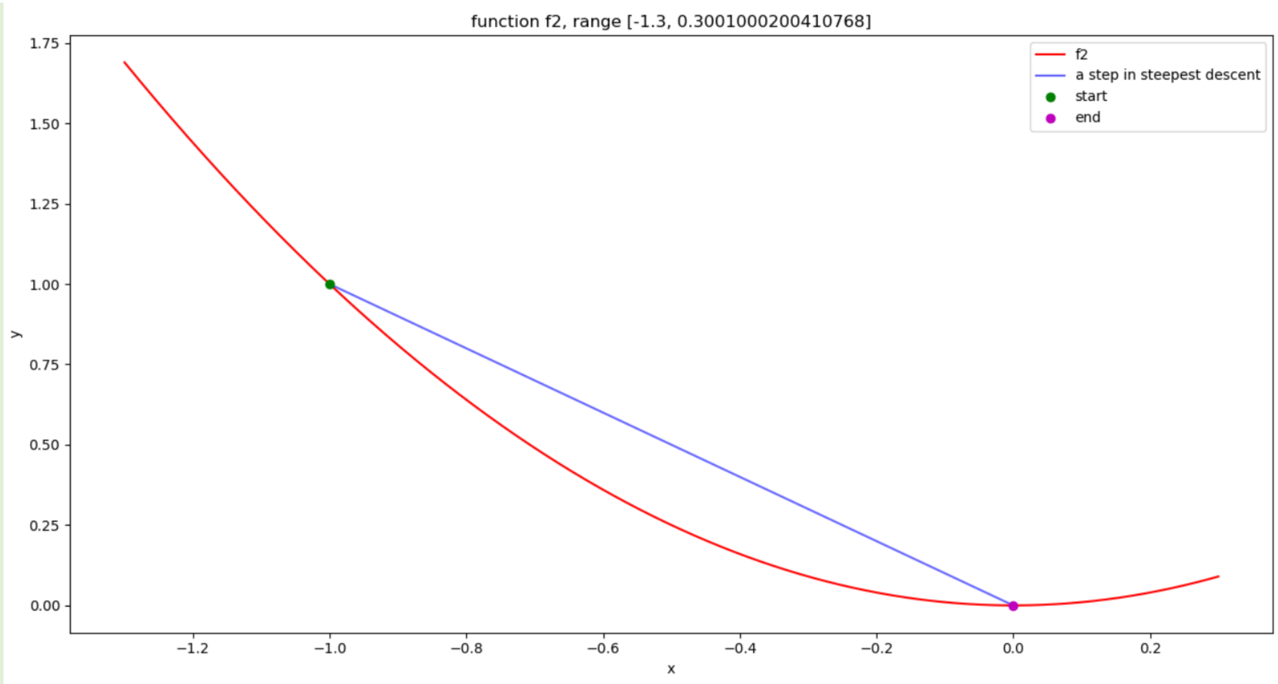
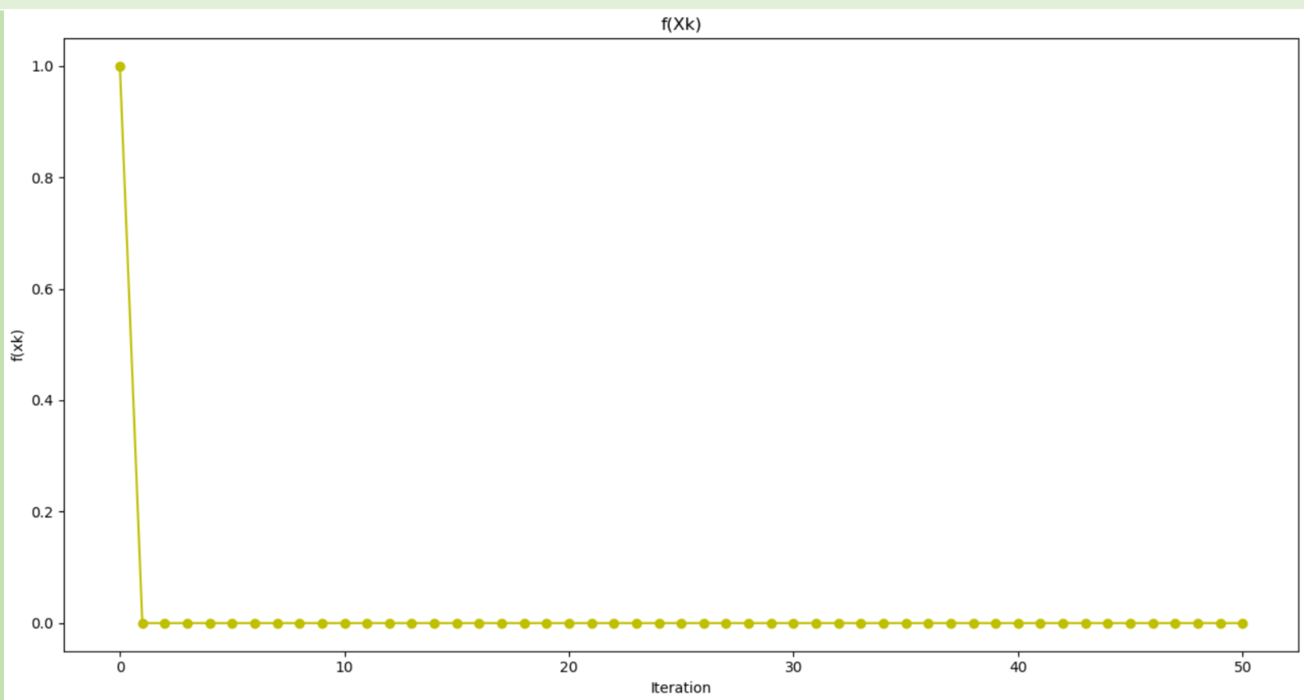
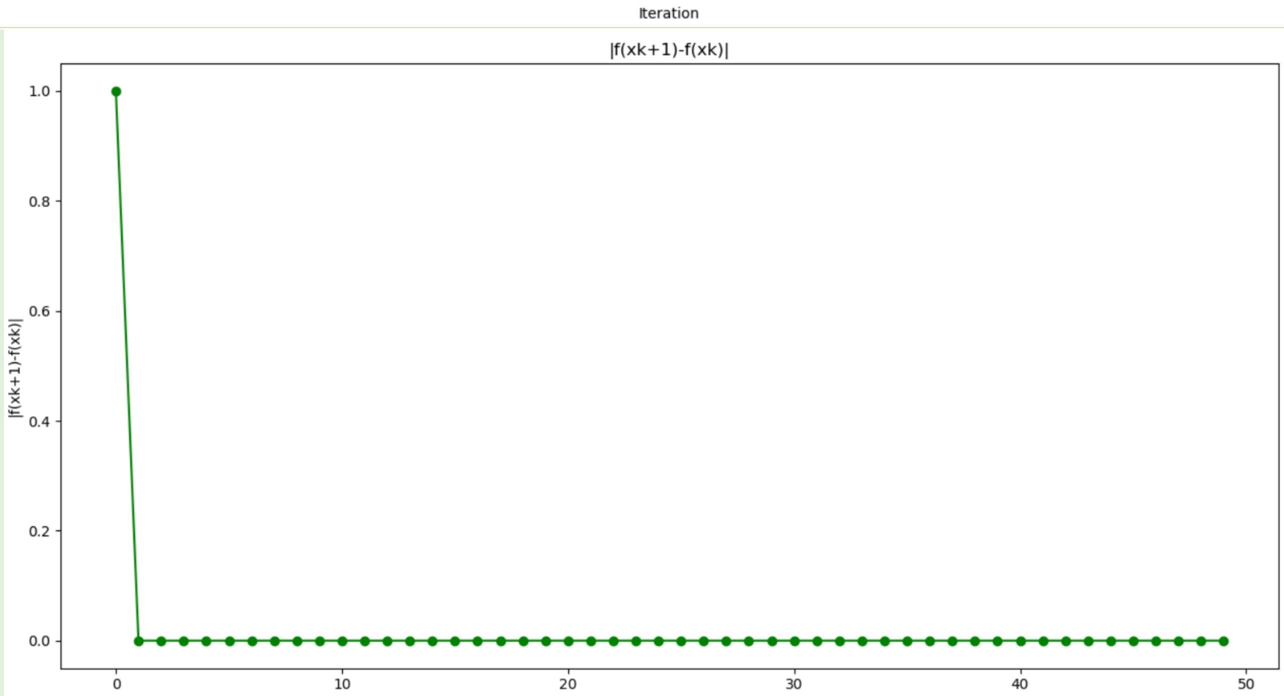
<table>
<tr><td>رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.</td><td>

چند گام آخر در اطراف مینیمم کنار هم افتاده اند، به خوبی مشخص نیستند.</td></tr>
<tr><td>میزان کاهش در f
(مقدار f در هر ایتریشن)</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>اولین و آخرین مقدار f</td><td>3.9999, -0.00010001</td></tr>
</table>

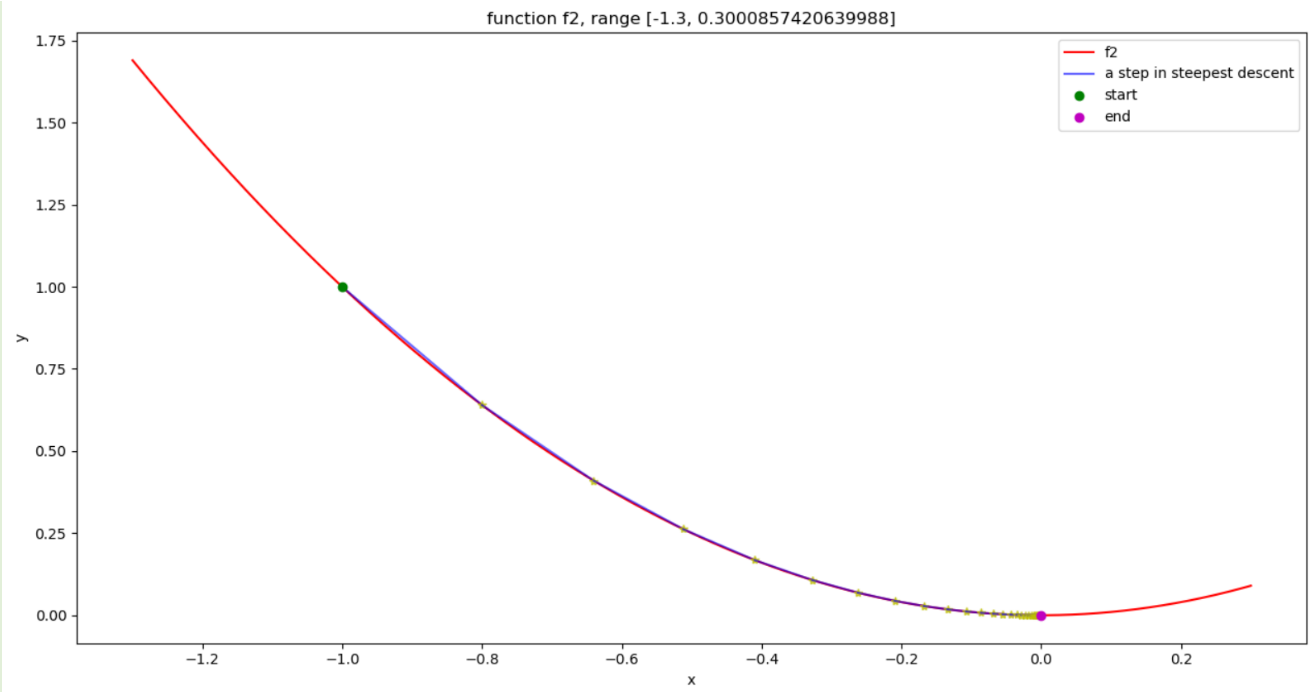
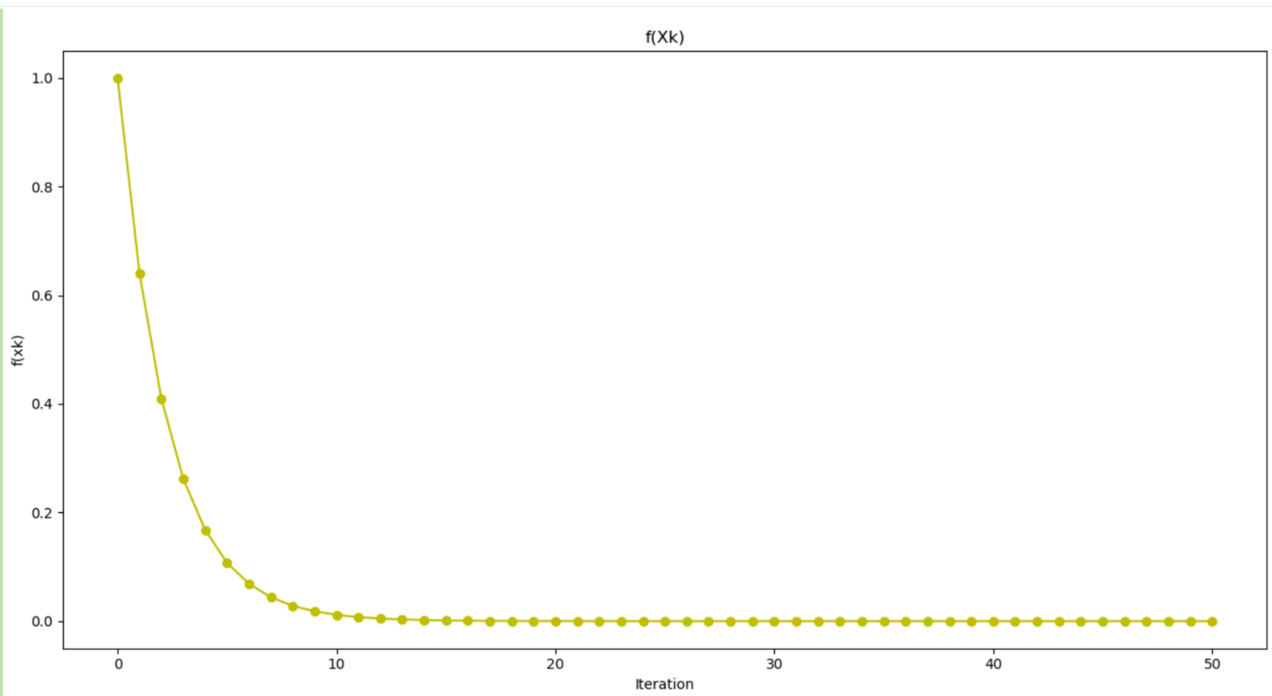
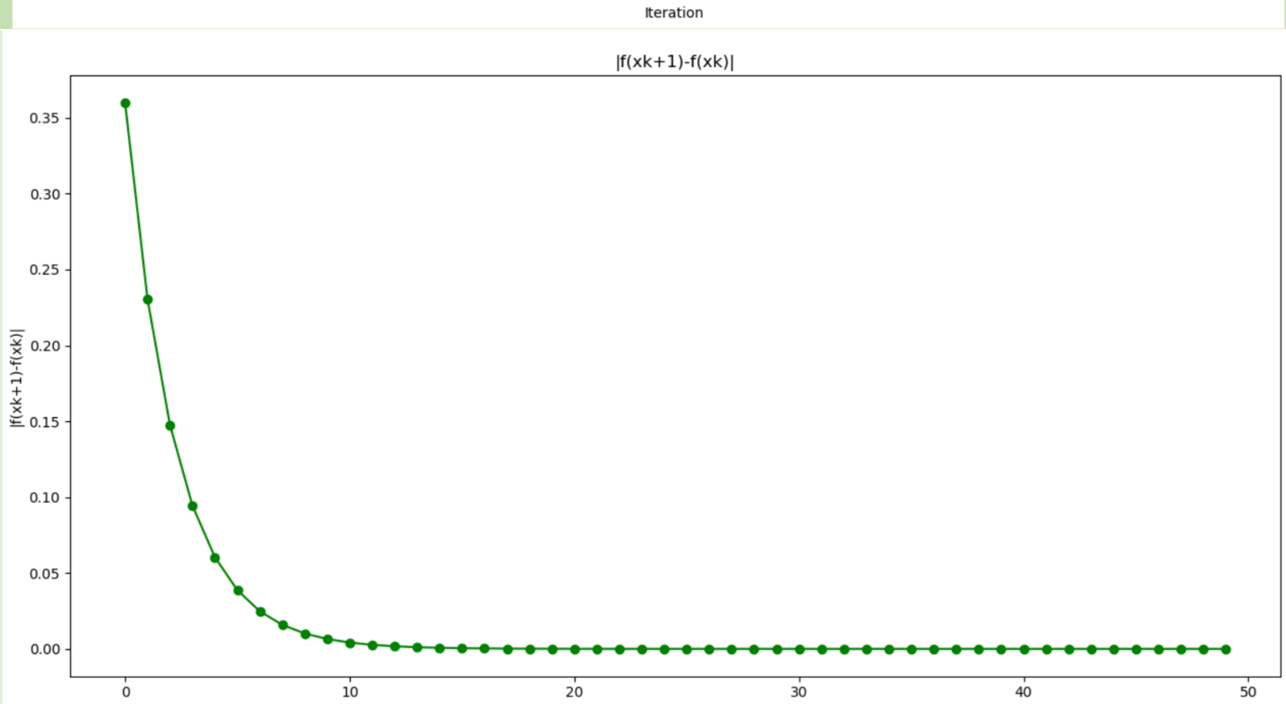
- مینیم کردن F2 با نقطه شروع [-1] با استفاده از دو روش Quasi-Newton و Steepest Descent و دو روش Backtrack و Interpolation:

	آزمایش 27
مشخصات اجرا	Function: f2 | Algorithm : Steepest Descent | Method: Backtracking X0 = [2] | $alpha_0$ = 0.1 | C=C_1=0.0001 | C_2=0.9
رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.	
میزان کاهش در f (مقدار f در هر ایتریشن)	
	
اولین و آخرین مقدار f	0.999975, -0.0001

	آزمایش 28
مشخصات اجرا	Function: f2 | Algorithm : Steepest Descent | Method: Interpolation X0 = [2] | $alpha_0$ =0.1 | C=C_1=0.0001 | C_2=0.9

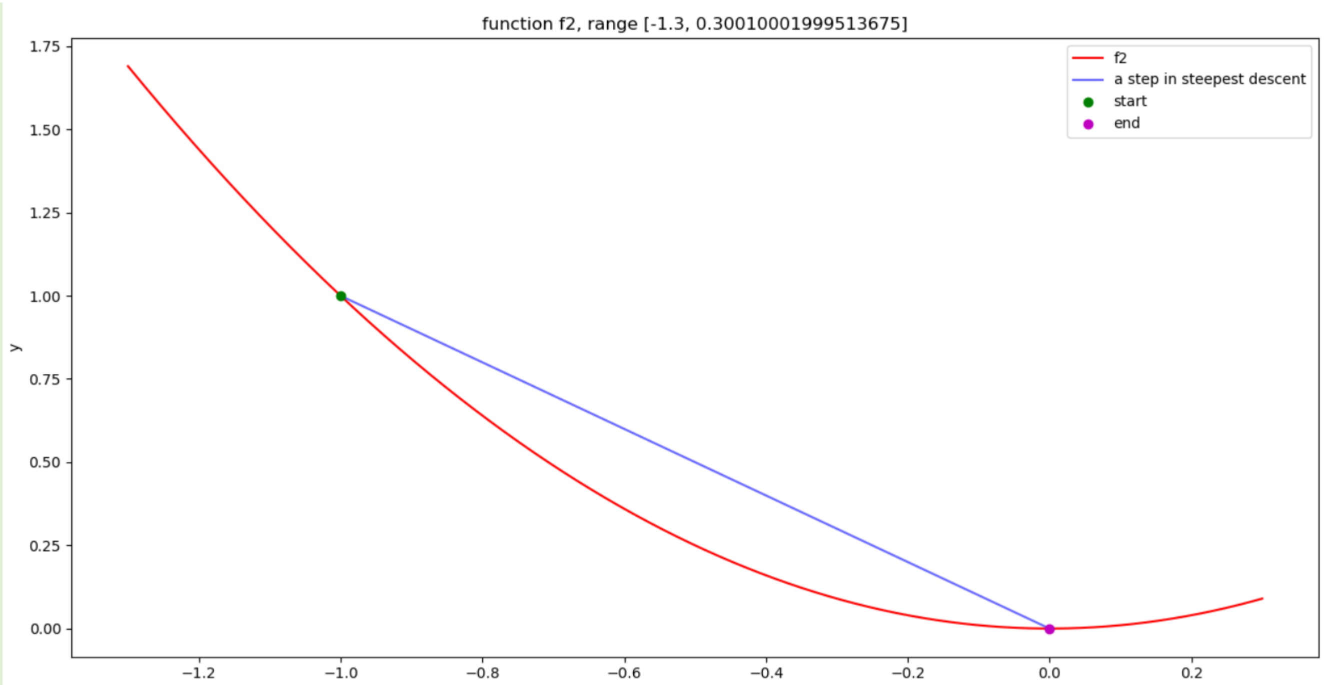
رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.	 چند گام آخر در اطراف مینیمم کنار هم افتاده اند، به خوبی مشخص نیستند.
میزان کاهش در f (مقدار f در هر ایتریشن)	
	
اولین و آخرین مقدار f	0.999975, -0.00010001

	آزمایش 29
مشخصات اجرا	Function: f2 | Algorithm : Quasi-Newton | Method: Backtracking X0 = [2] | alpha$_0$ =0.2 | C=C$_1$=0.0001 | C$_2$=0.9

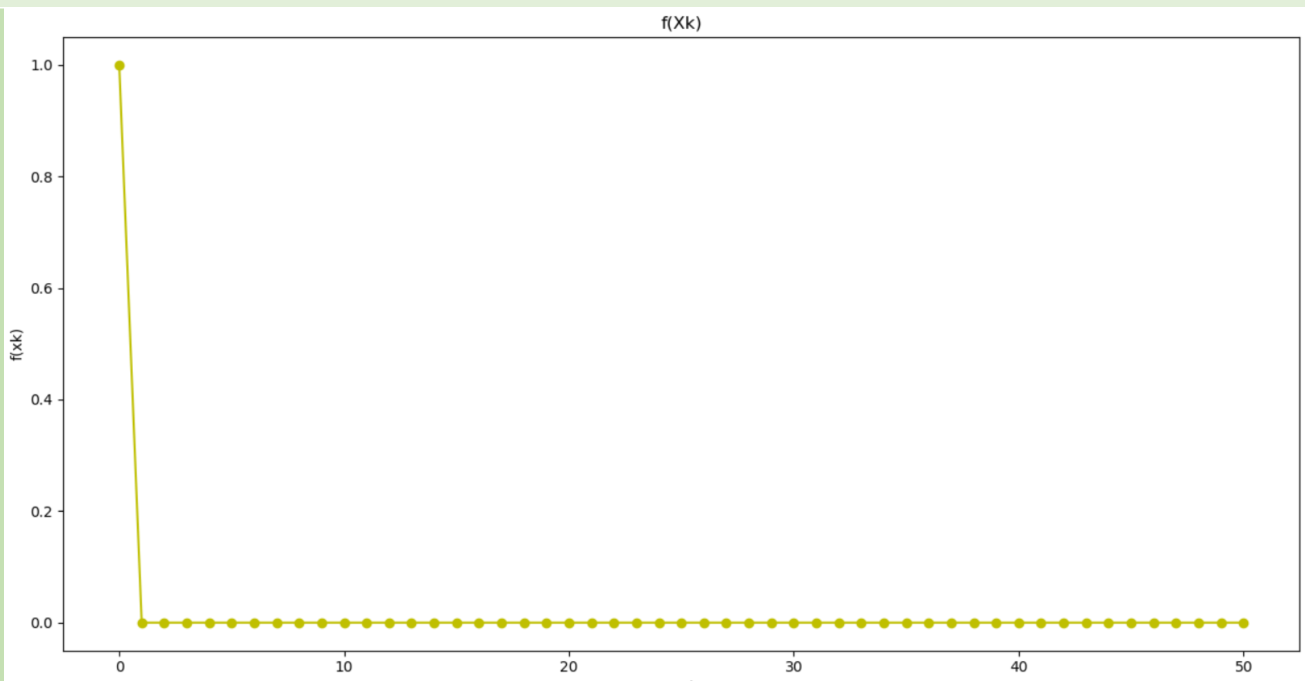
رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.	
میزان کاهش در **f** (مقدار **f** در هر ایتریشن)	
	
اولین و آخرین مقدار **f**	0.999975, -0.0001

	آزمایش 30
مشخصات اجرا	Function: f2 | Algorithm : Quasi-Newton | Method: Interpolation X0 = [2] | alpha$_0$ =0.2 | $C=C_1=0.0001$ | $C_2=0.9$

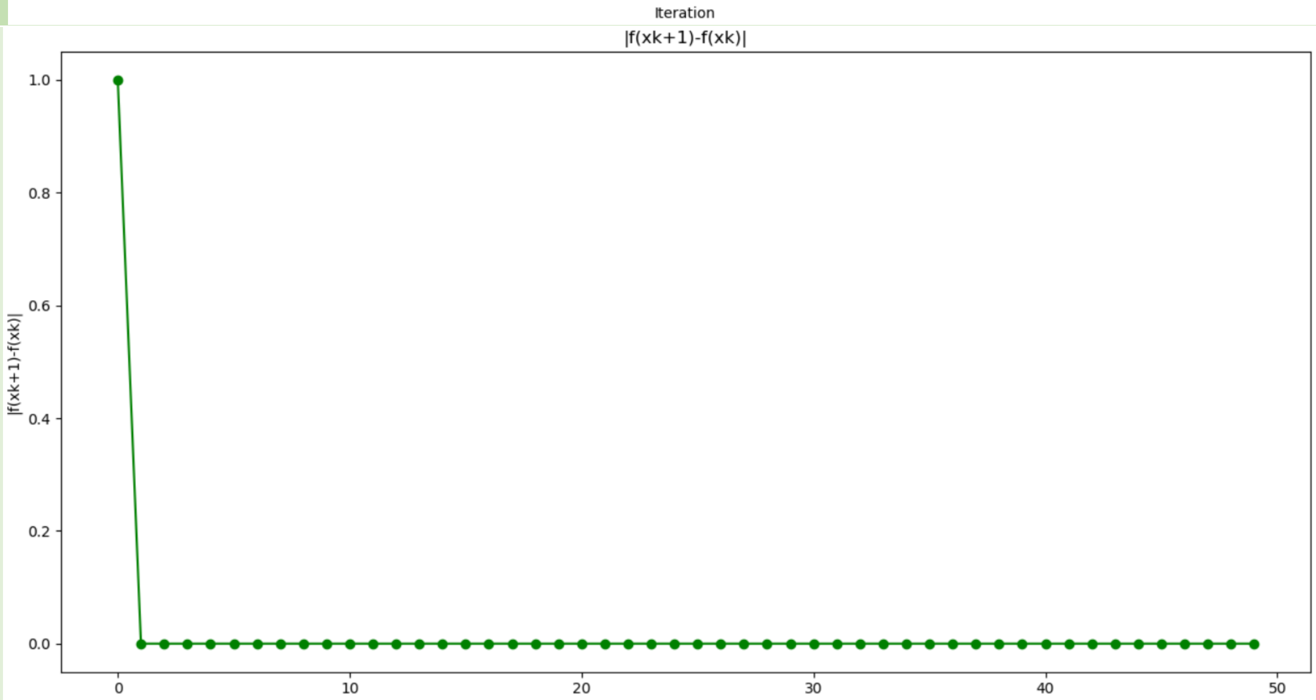
<table>
<tr>
<td>رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.</td>
<td>



چند گام آخر در اطراف مینیمم کنار هم افتاده اند، به خوبی مشخص نیستند.
</td>
</tr>
<tr>
<td>میزان کاهش در f
(مقدار f در هر ایتریشن)</td>
<td>



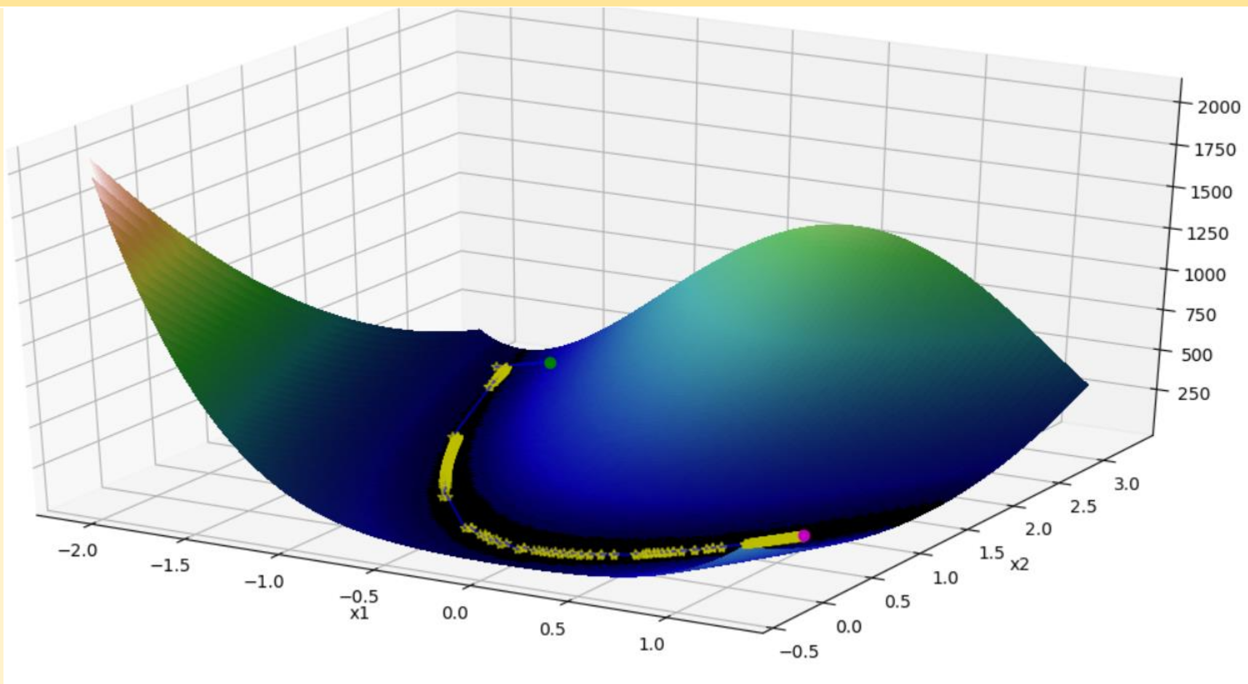
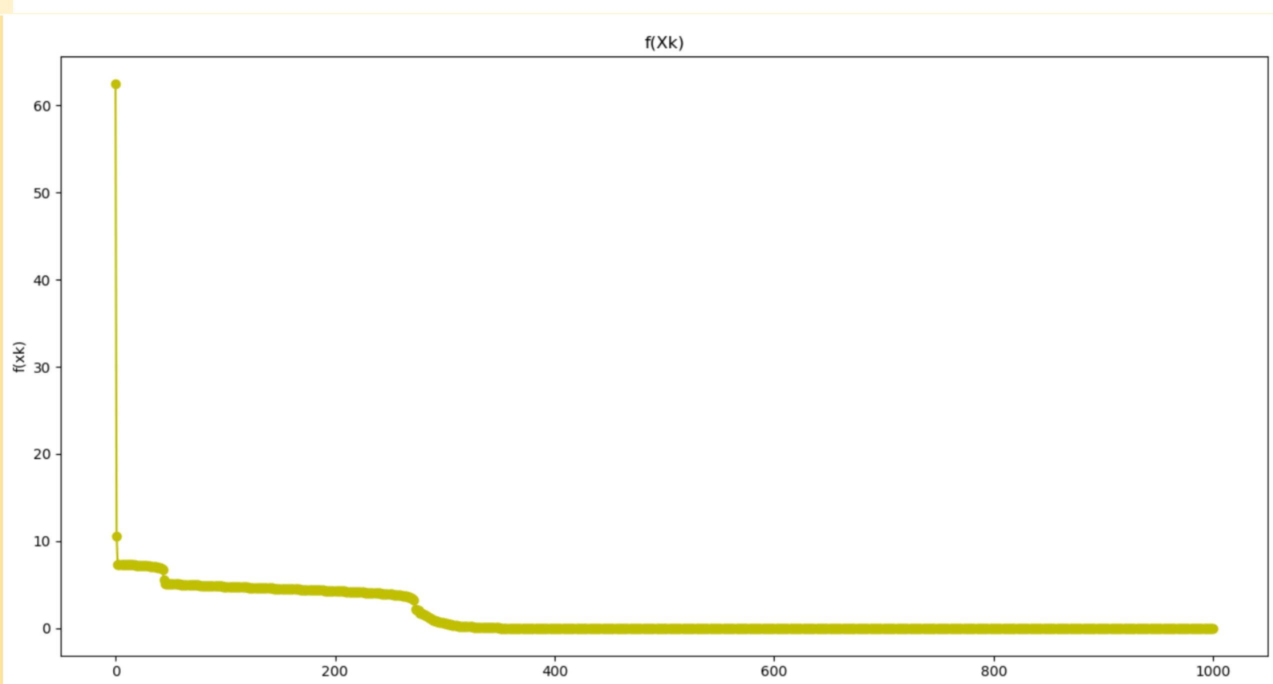
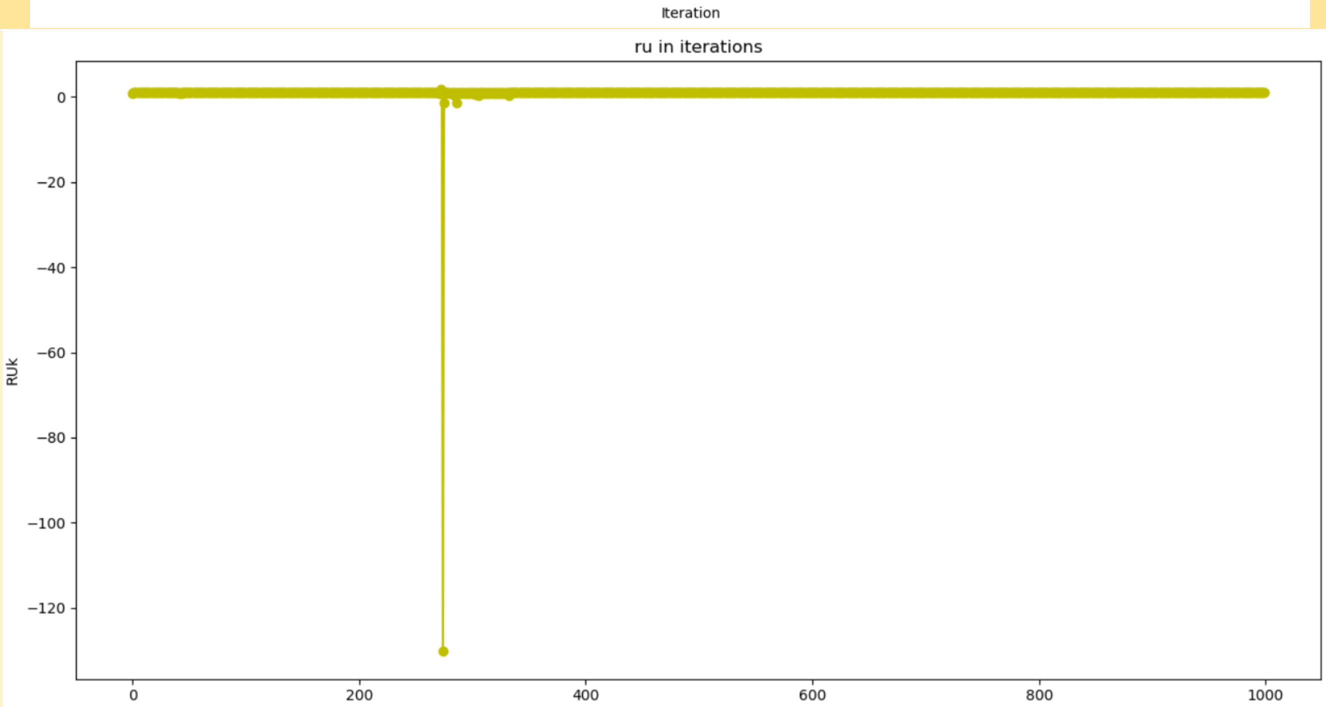
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>

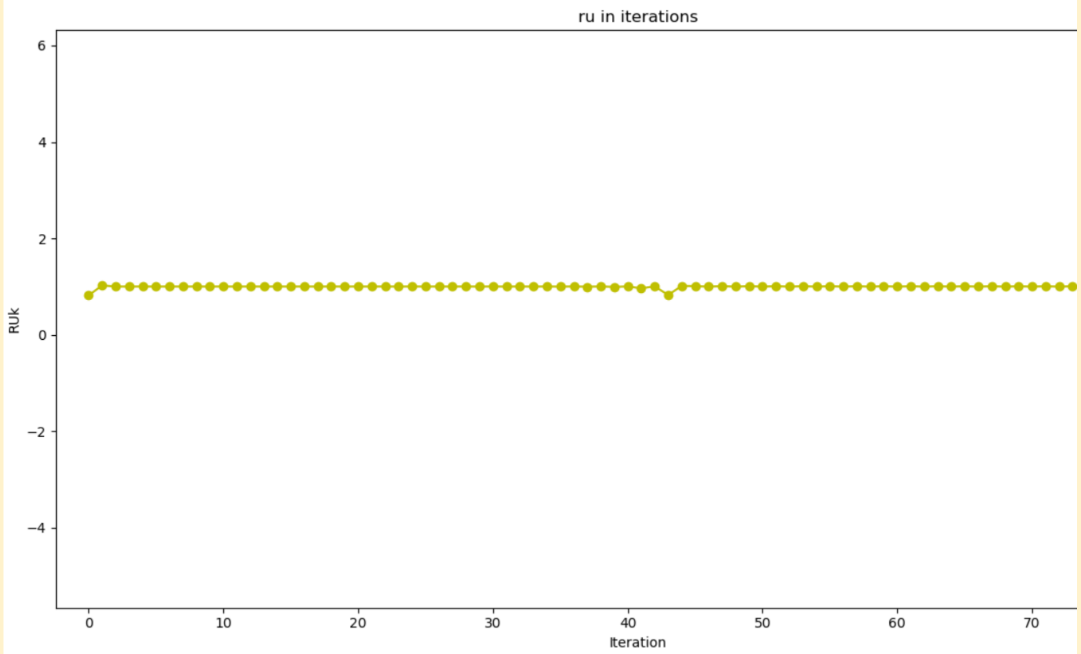


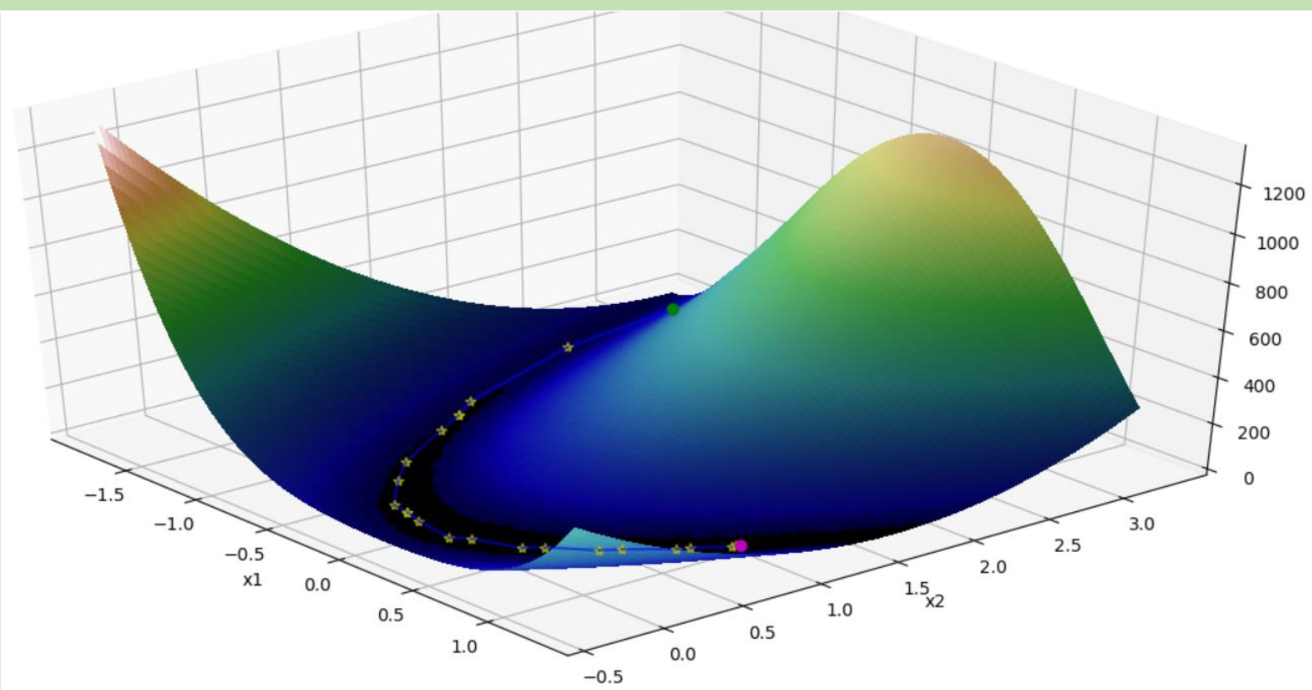
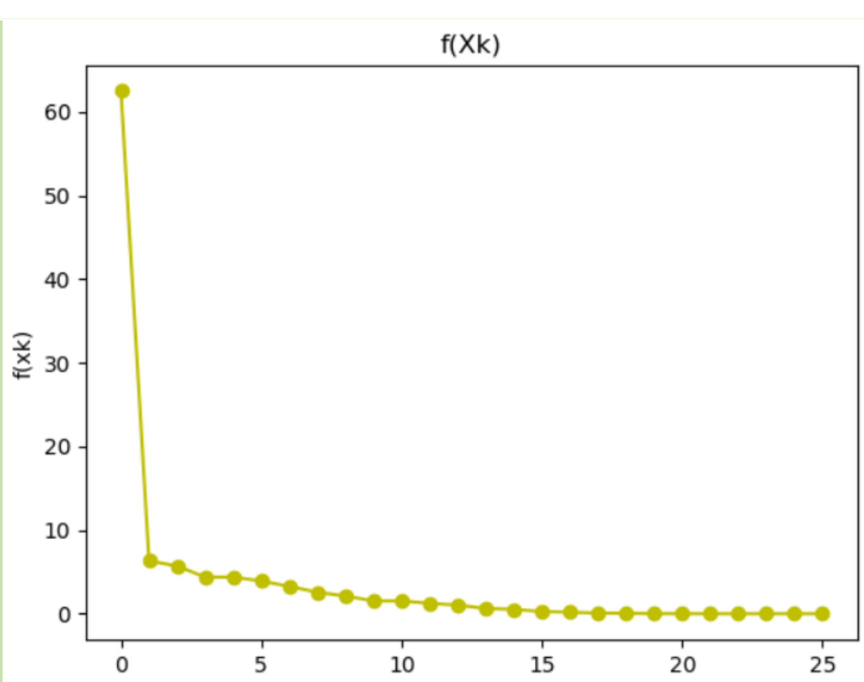
</td>
</tr>
<tr>
<td>اولین و آخرین مقدار f</td>
<td>0.999975, -0.00010001</td>
</tr>
</table>

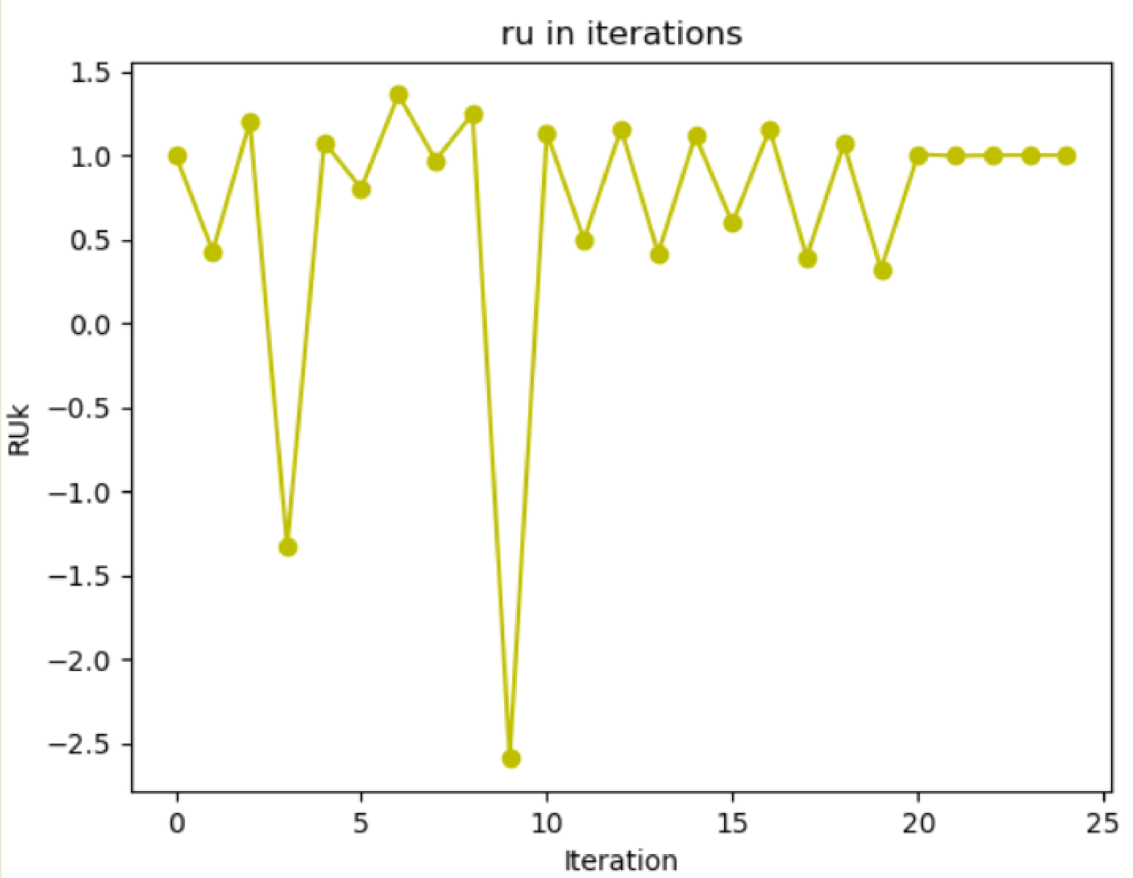
تمرین ۲

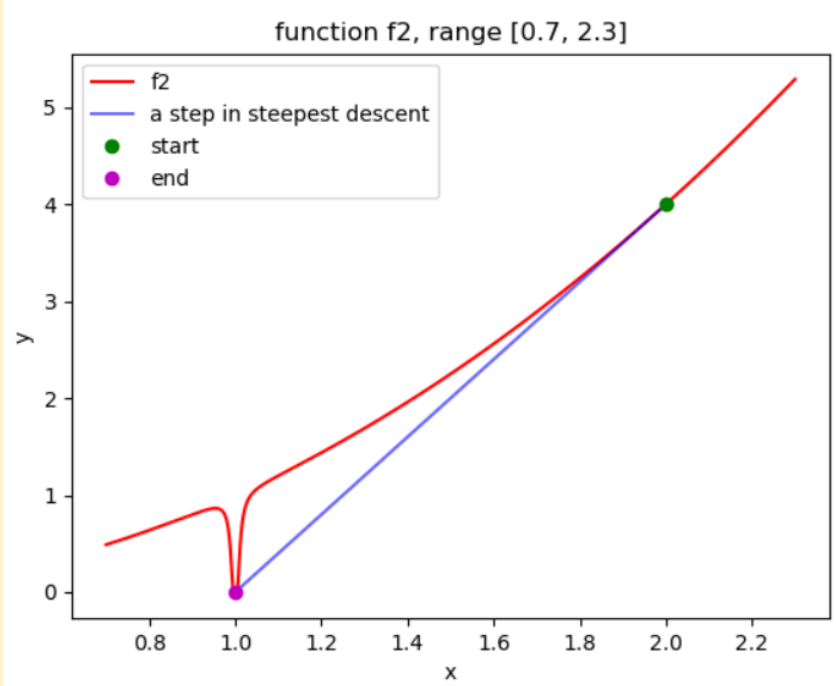
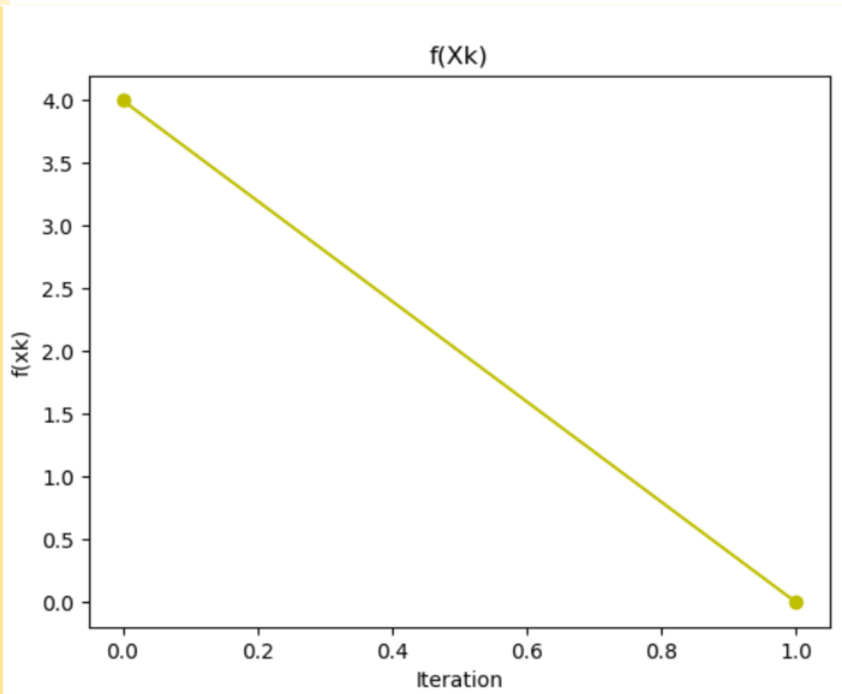
در ابتدا تعدادی اجرا می‌گیریم تا با استفاده از نتایج به دست آمده اقدام به نتیجه‌گیری کنیم.

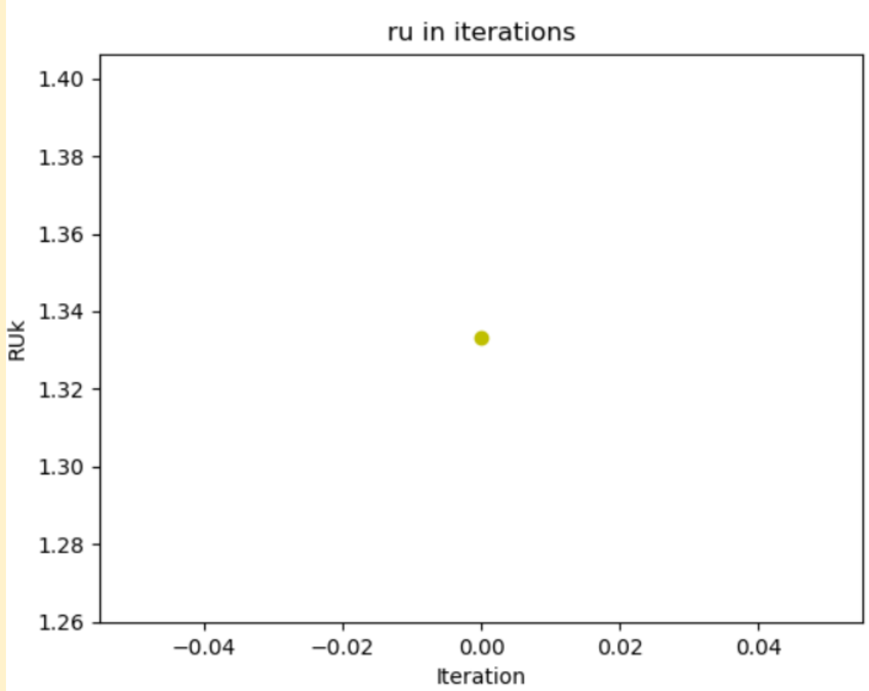
	آزمایش 31
شرایط اجرا	`func=f1, delta_0=1, delta_max=2, x0=[-1.5,3], method='cauchy'`
رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.	
میزان کاهش در f (مقدار f در هر ایتریشن)	
مقدار ρ_k در هر ایتریشن	 نمایی بزرگتر از ابتدای نمودار:

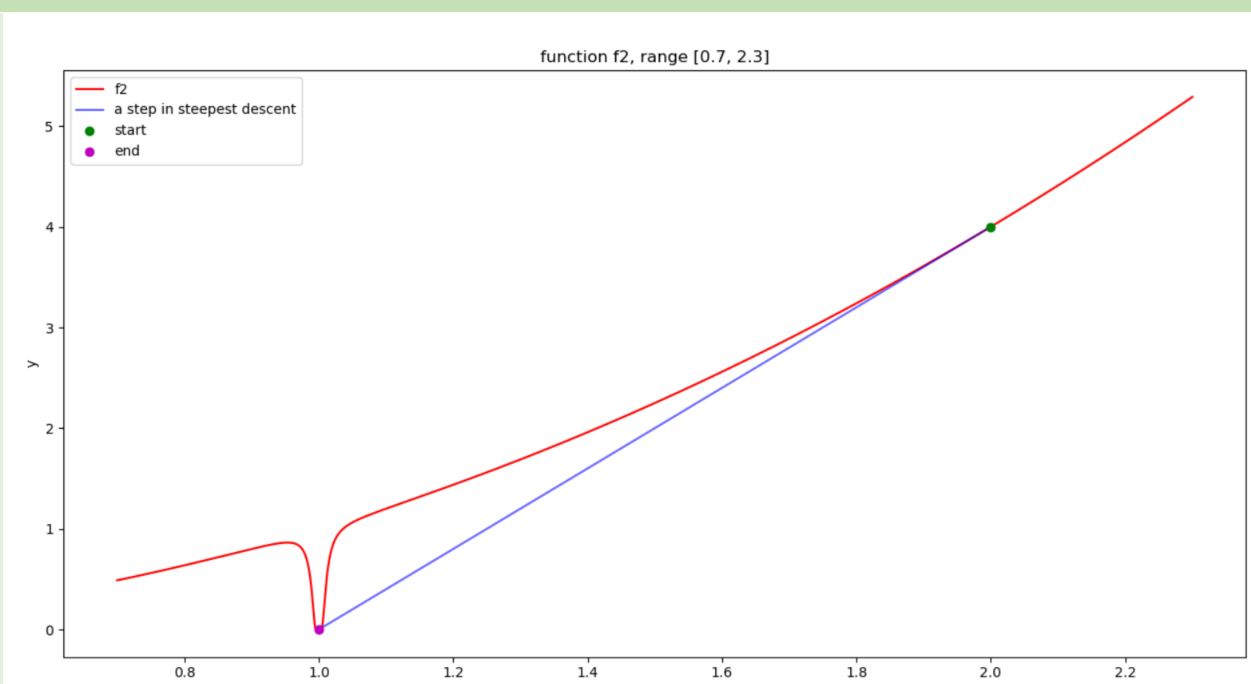
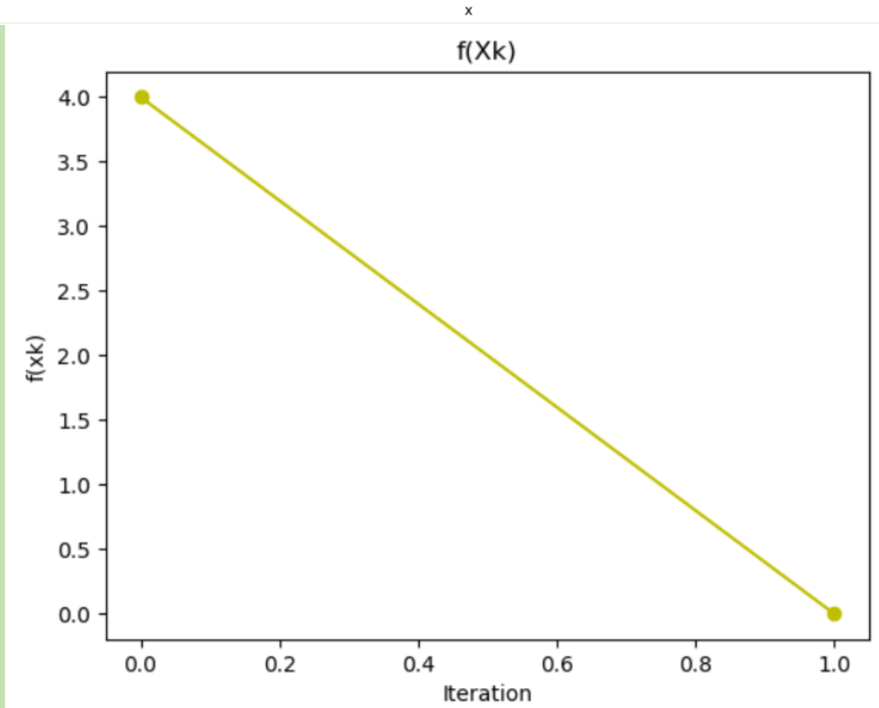
	
مقدار اولیه و نهایی f	62.5, 0.003334467484213198

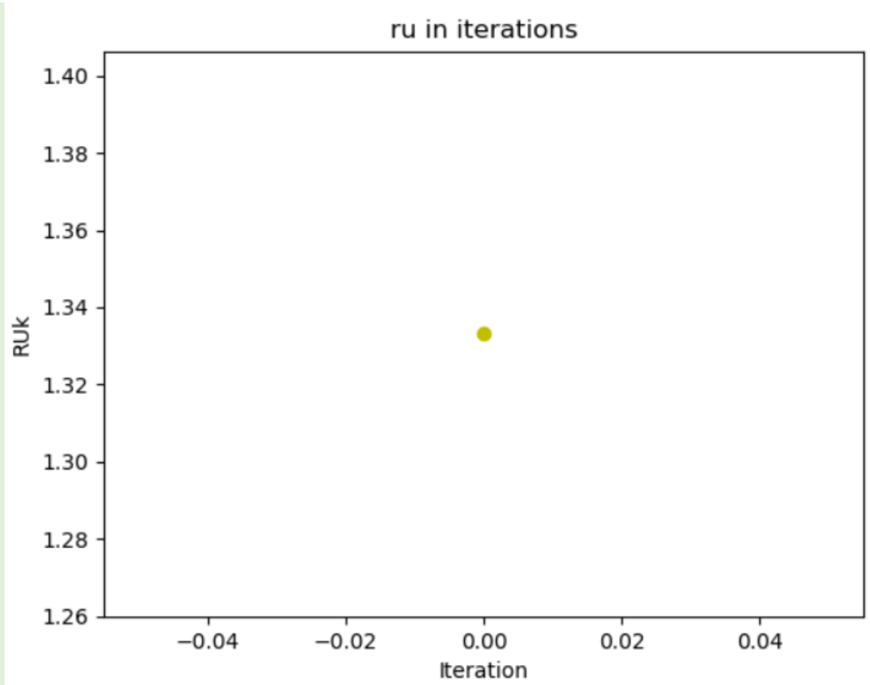
	آزمایش 32
شرایط اجرا	`func=f1, delta_0=1, delta_max= 2, x0=[-1.5,3], method=dogleg`
رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.	
میزان کاهش در f (مقدار f در هر ایتریشن)	
مقدار ρ_k در هر ایتریشن	

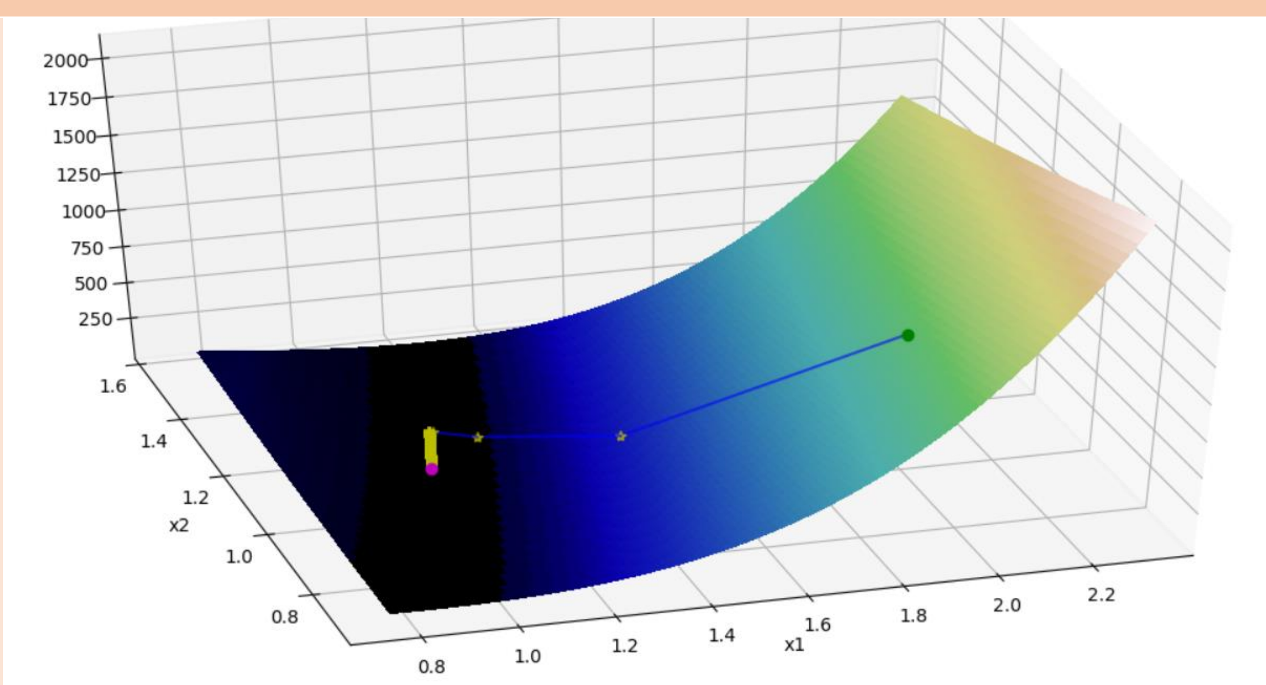
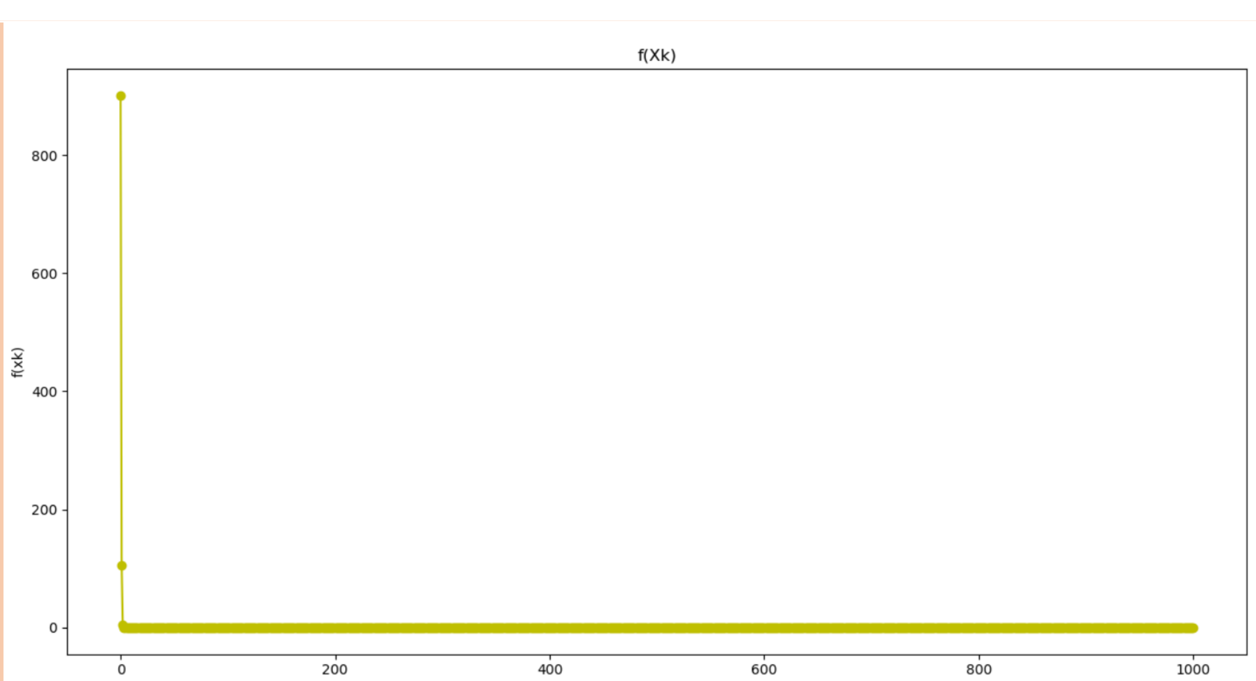
	
62.5, 0.0	مقدار اولیه و نهایی f

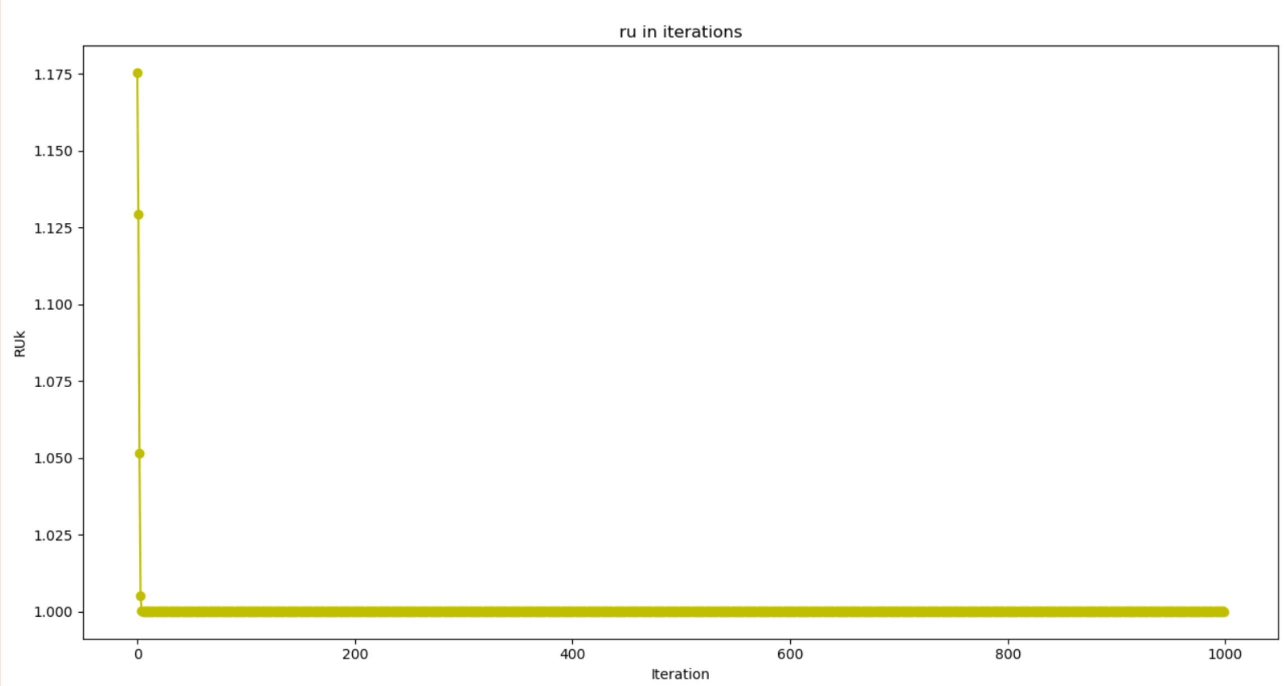
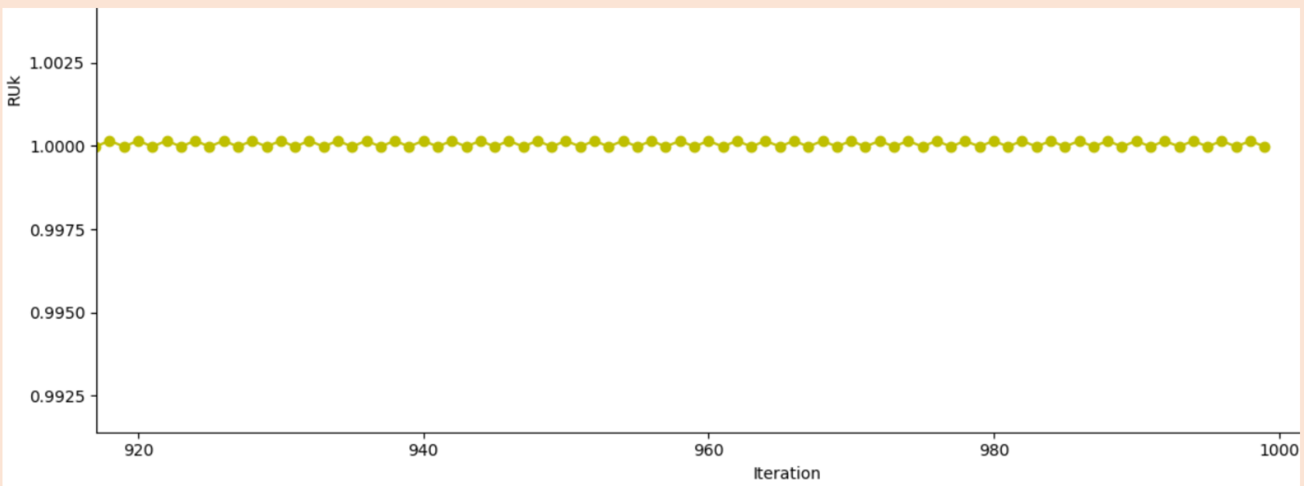
آزمایش 33	
`func=f2, delta_0=1, delta_max= 2, x0=2, method='cauchy'`	شرایط اجرا
	رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.
	میزان کاهش در f (مقدار f در هر ایتریشن)
	مقدار ρ_k در هر ایتریشن

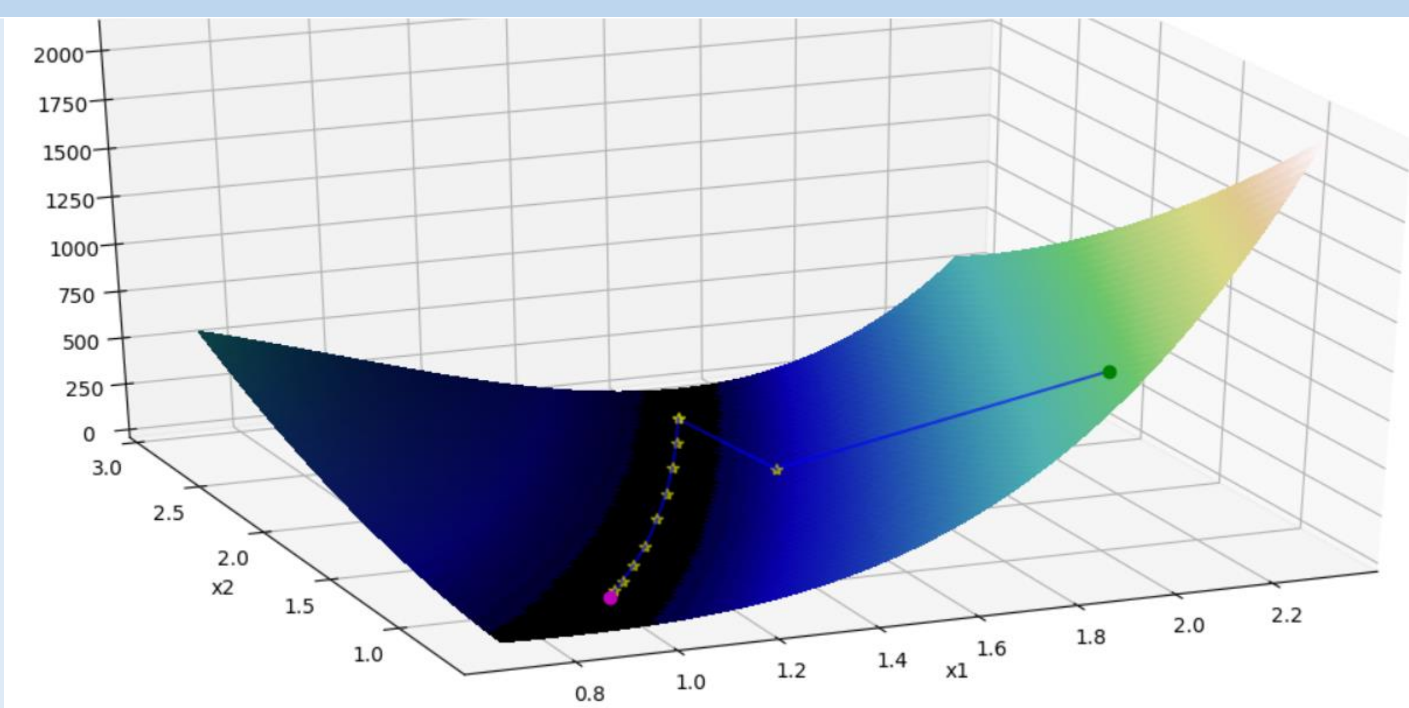
	 در یک ایتریشن به جواب رسیده است به همین دلیل یک نقطه است.
مقدار اولیه و نهایی f	62.5, 0.003334467484213198

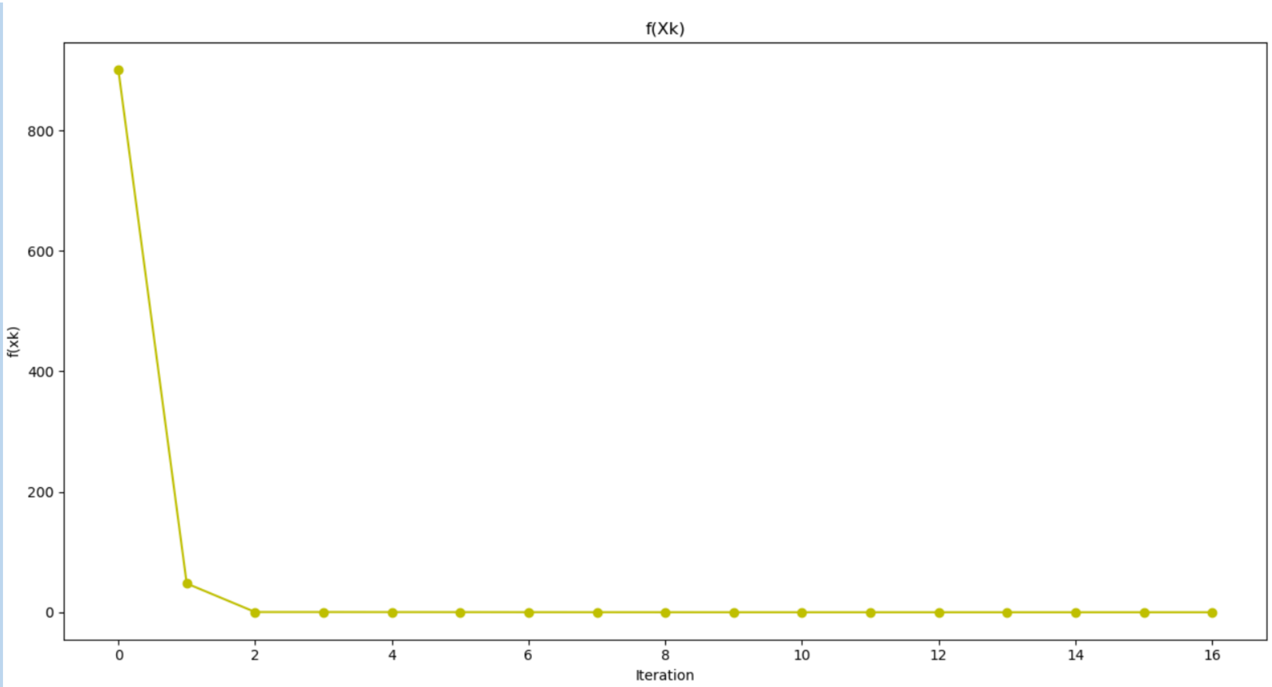
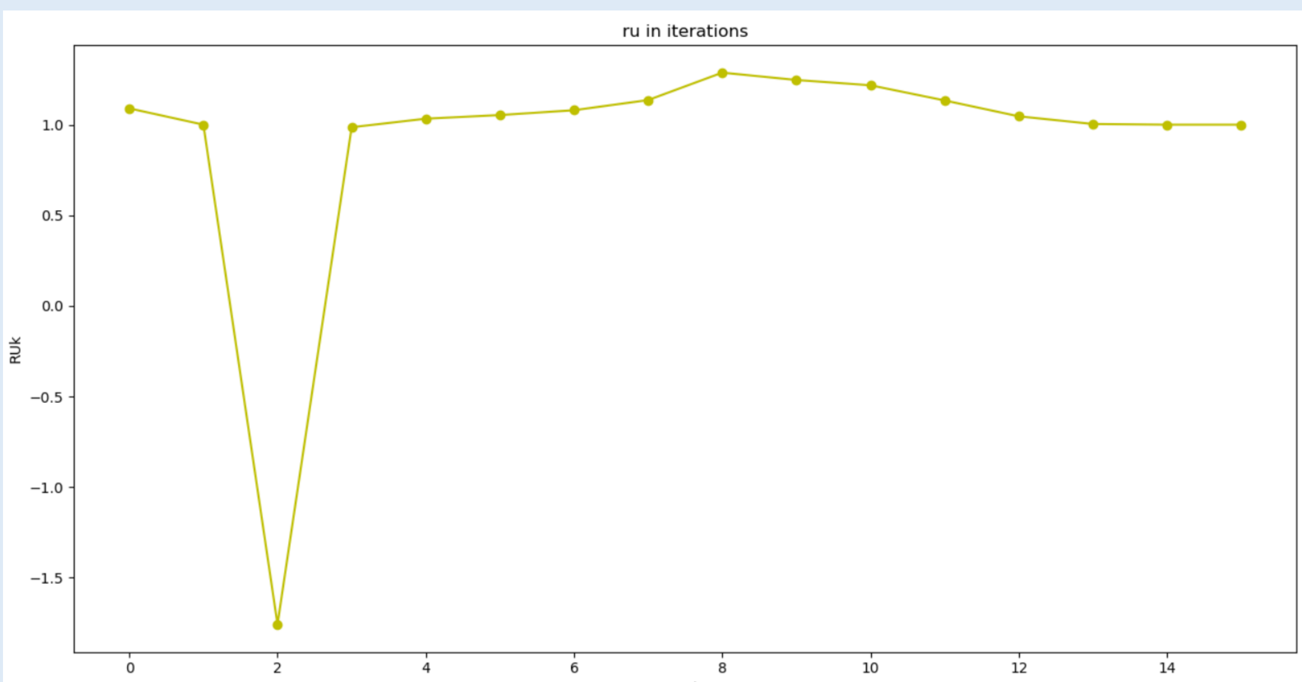
	آزمایش ۳۴
شرایط اجرا	`func=f2, delta_0=1, delta_max= 2, x0=2, method=dogleg`
رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.	
میزان کاهش در f (مقدار f در هر ایتریشن)	
مقدار ρ_k در هر ایتریشن	

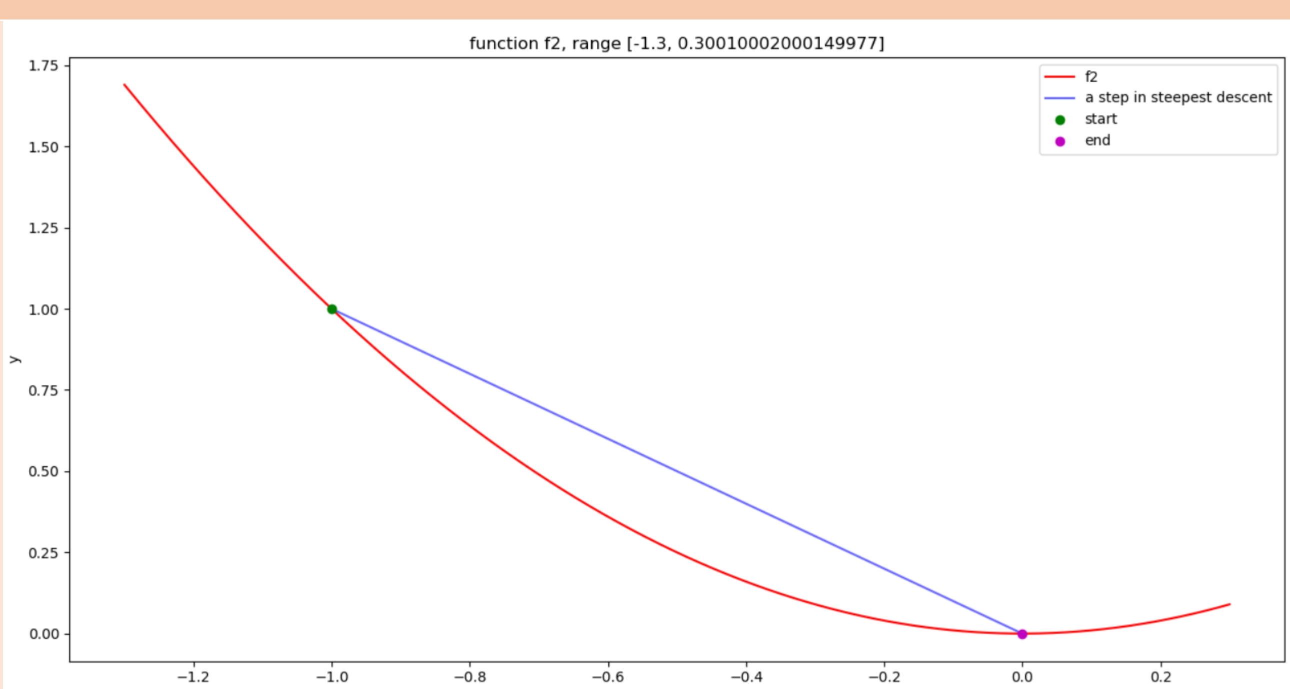
	 در یک ایتریشن به جواب رسیده است به همین دلیل یک نقطه است.
مقدار اولیه و نهایی f	62.5, 0.0

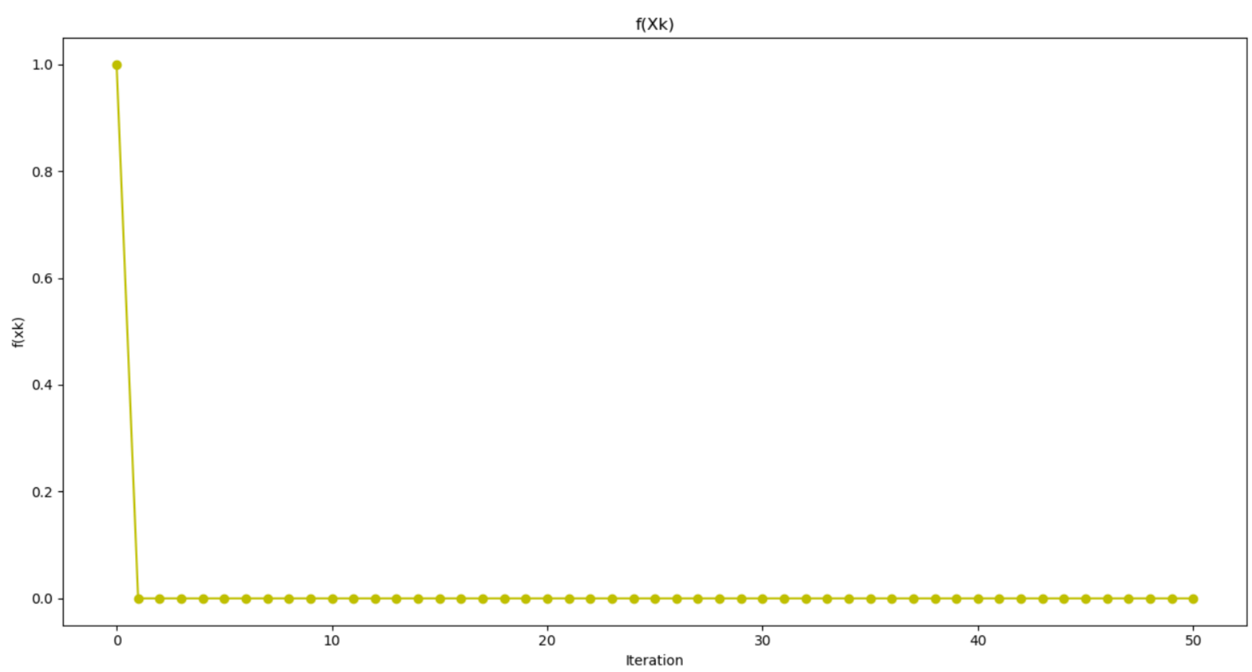
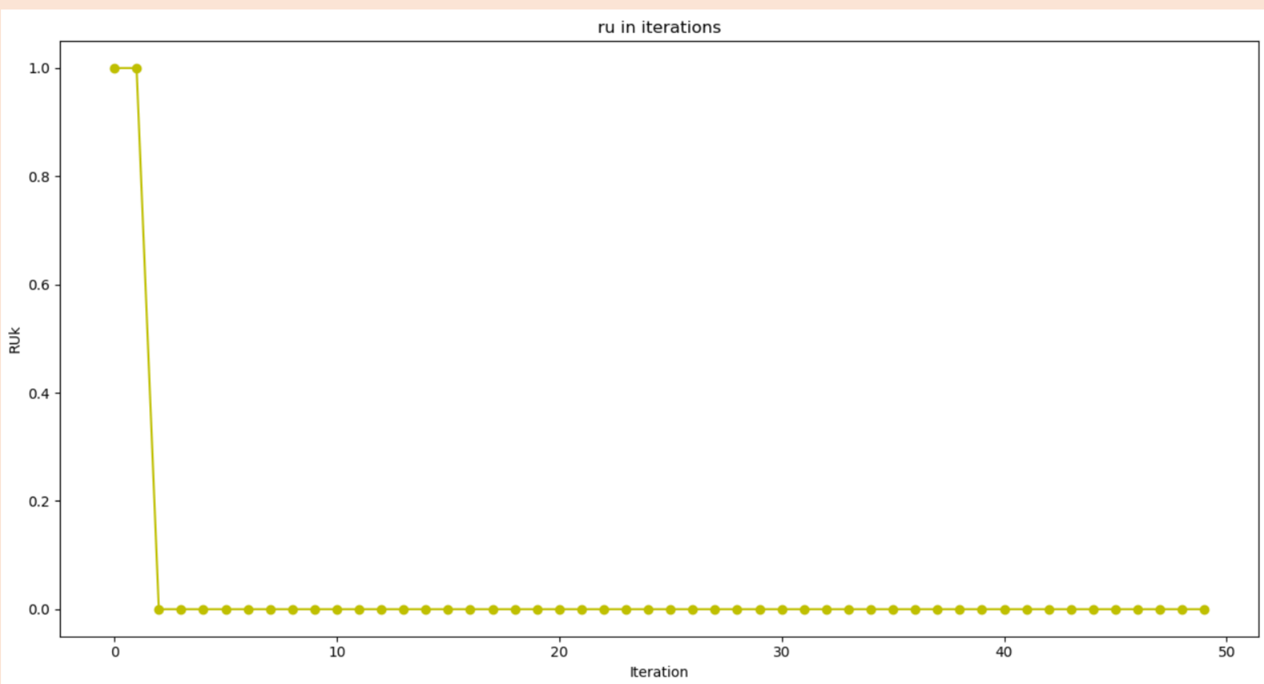
	آزمایش 35
شرایط اجرا	`func=f1, delta_0=1, delta_max=2, x0=[2, 1], method='cauchy'`
رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.	
میزان کاهش در f (مقدار f در هر ایتریشن)	

مقدار ρ_k در هر ایتریشن	 نمایی بزرگتر از ابتدای نمودار: 
مقدار اولیه و نهایی f	62.5, 0.004286957923717725

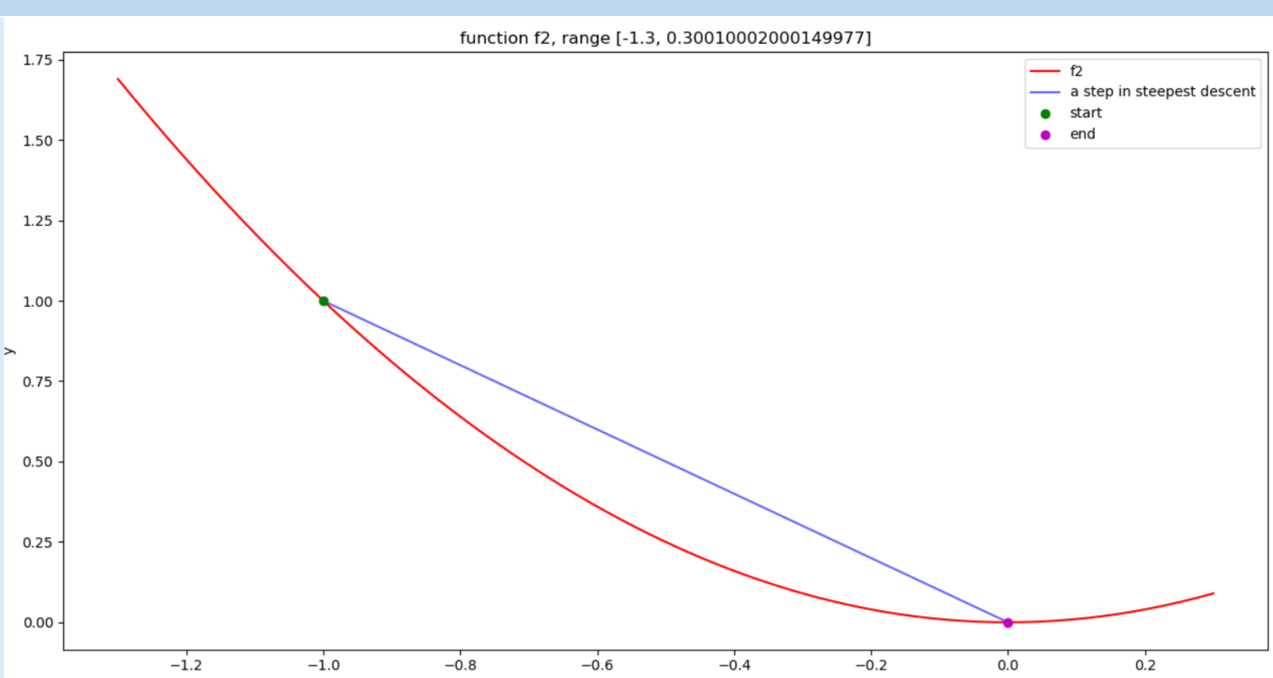
	آزمایش 36
شرایط اجرا	`func=f1, delta_0=1, delta_max= 2, x0=[2, 1], method=dogleg`
رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.	

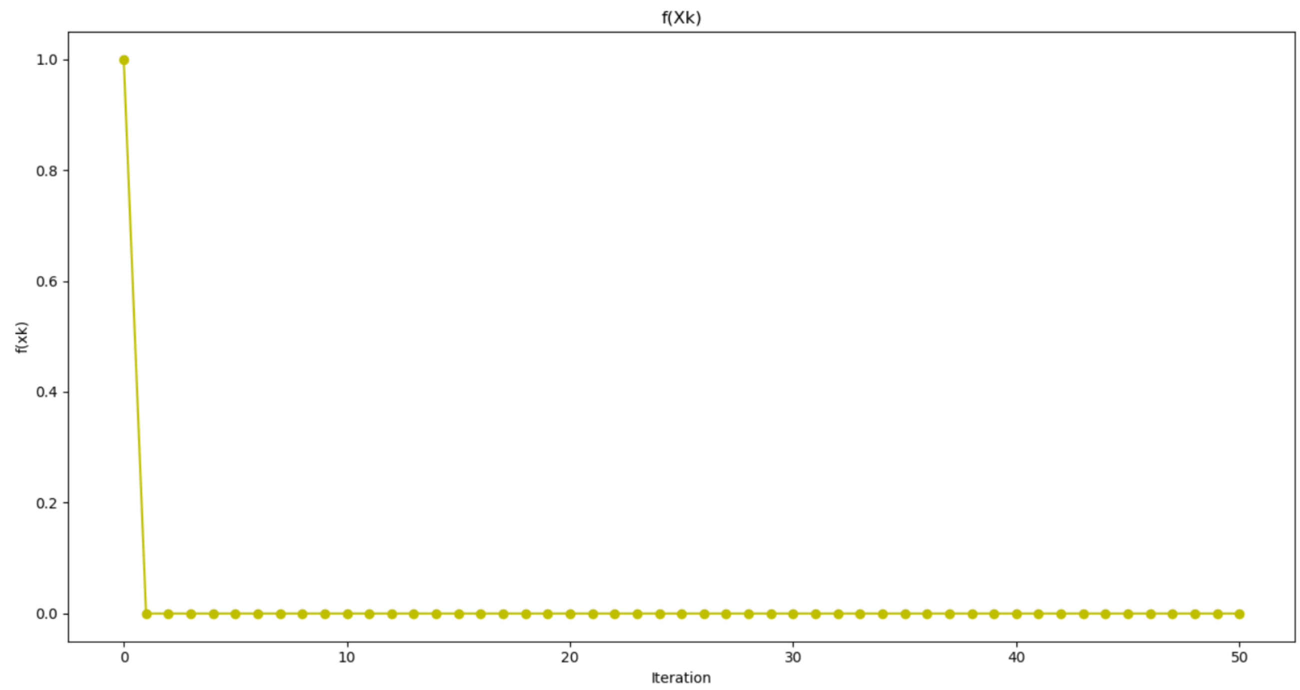
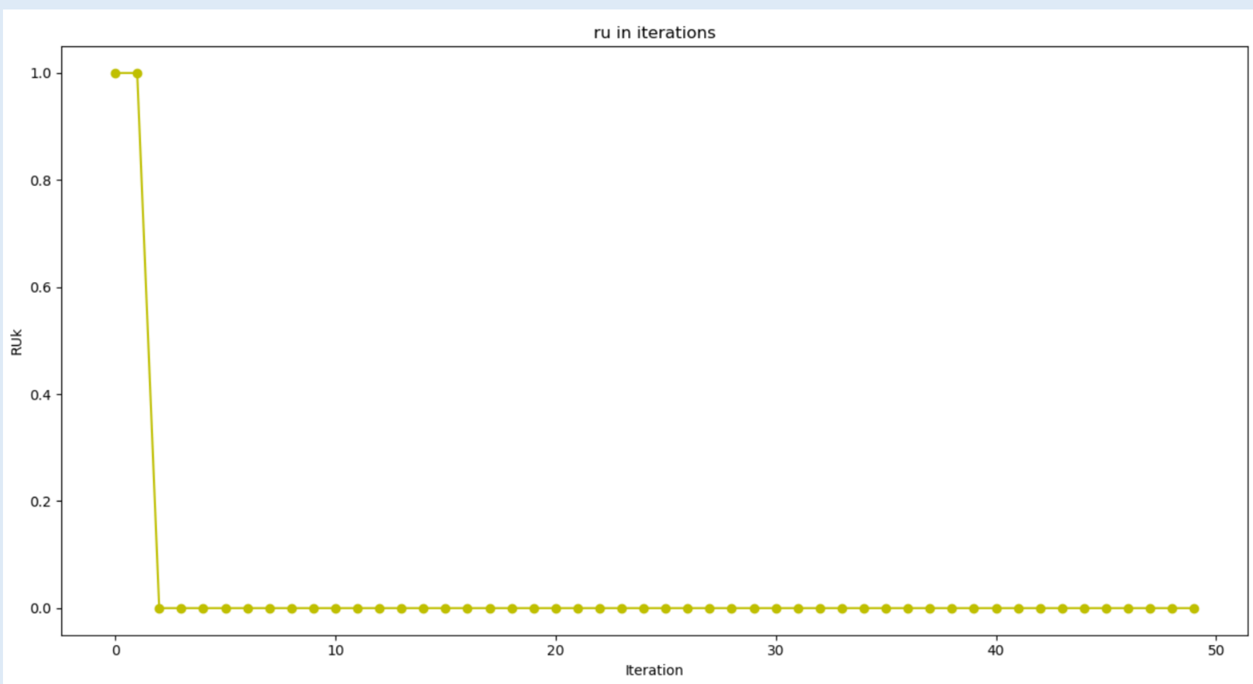
میزان کاهش f در (مقدار f در هر ایتریشن)	
مقدار ρ_k در هر ایتریشن	
مقدار اولیه و نهایی f	62.5, 0.0

	آزمایش 37
شرایط اجرا	`func=f2, delta_0=1, delta_max= 2, x0=-1, method='cauchy'`
رسم تابع، سبز محل شروع، صورتی محل پایان، ستاره‌های زرد رنگ پایان هر گام است.	

<table>
<tr><td>میزان کاهش f در هر (مقدار f در هر ایتریشن)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>مقدار
ρ_k
در هر ایتریشن</td><td>

در یک ایتریشن به جواب رسیده است به همین دلیل یک نقطه است.</td></tr>
<tr><td>مقدار اولیه و نهایی f</td><td>62.5, -0.00010001</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>آزمایش 38</td></tr>
<tr><td>شرایط اجرا</td><td><code>func=f2, delta_0=1, delta_max= 2, x0=-1, method=dogleg</code></td></tr>
<tr><td>رسم تابع،
سبز محل شروع،
صورتی محل پایان،
ستاره‌های زرد رنگ
پایان هر گام است.</td><td>
</td></tr>
</table>

میزان کاهش در f (مقدار f در هر ایتریشن)	
مقدار ρ_k در هر ایتریشن	
مقدار اولیه و نهایی f	62.5, -0.00010001

قسمت آ)

ماتریس B_k باید positive definite باشد، همین طور مشتق پذیر. از آنجایی که هر دو تابع f1 و f2 کانوکس نیستند انتخاب hessian به عنوان B_k مناسب نیست، پس بهتر است از روش‌های جایگزین مانند بعضی از کارهایی که در قسمت‌های قبل کردیم استفاده کنیم. همین طور استفاده از hessian بار محاسباتی زیادی‌تر دارد.

در آزمایش‌های ۳۱ تا ۳۸، اقدام به مینیمم کردن تابع f1 و f2 کردیم و شرایط و نقاط آغاز متفاوتی را در نظر گرفتیم، در تمام آن‌ها از hessian به عنوان B استفاده کردیم، در تمام آن‌ها به مینیمم یا به فاصله‌ای بسیار کوچک از مینیمم رسیدیم. شرایط آزمایش و نتایج حاصل از آزمایش در جدول‌های "آزمایش ۳۱" تا "آزمایش ۳۸" موجود است.

قسمت ب)

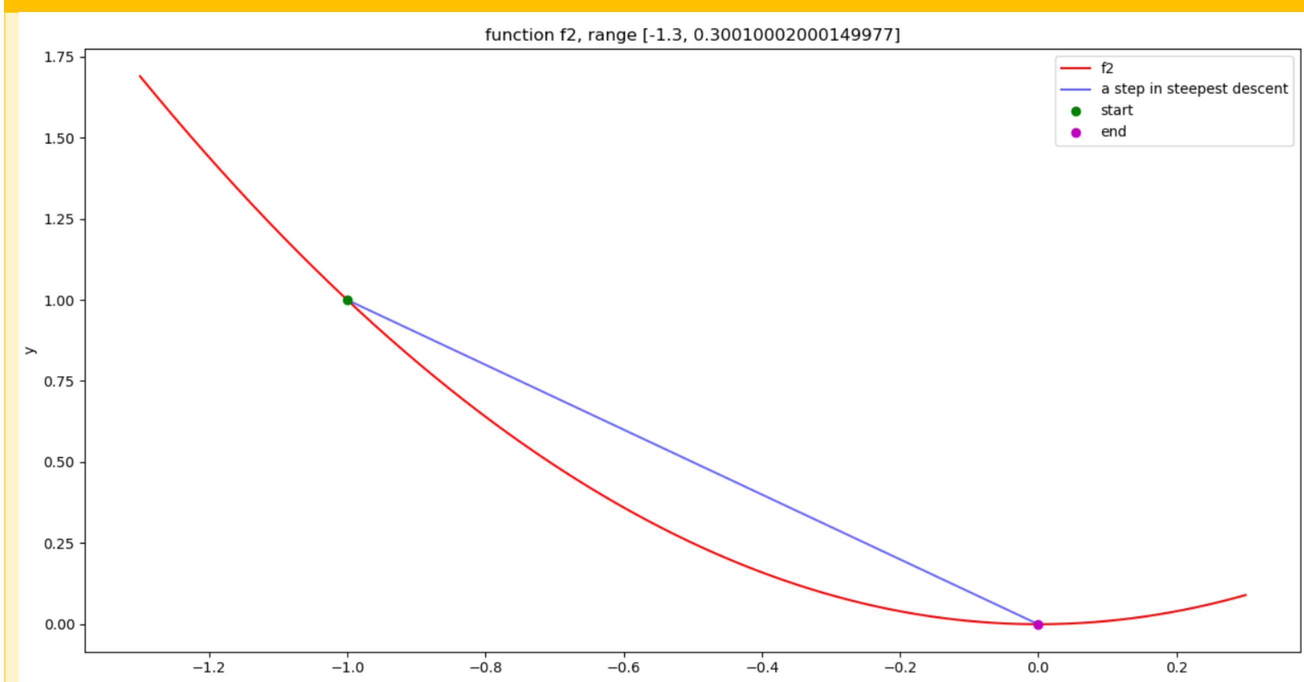
در آزمایش‌های ۳۱ تا ۳۸، اقدام به مینیمم کردم تابع f1 و f2 کرده‌ایم. این کار را توسط الگوریتم‌های کوشی و داگلگ به ازای ورودی‌های مختلف انجام داده‌ایم. شرایط آزمایش و نتایج در جدول‌های "آزمایش ۳۱" تا "آزمایش ۳۸" موجود است. در آن جدول‌ها ρ_K رسم شده است.

قسمت ج)

در آزمایش‌های ۳۱ تا ۳۸، اقدام به مینیمم کردم تابع f1 و f2 کرده‌ایم. این کار را توسط **الگوریتم‌های کوشی و داگلگ** به ازای ورودی‌های مختلف انجام داده‌ایم. شرایط آزمایش و نتایج در جدول‌های "آزمایش ۳۱" تا "آزمایش ۳۸" موجود است.

قسمت د)

در آزمایش‌های ۳۷ و ۳۳ تابع f2 را با استفاده از کوشی مینیمایز می‌کنیم، یک بار نقطه آغاز را برابر با ۲ در نظر گرفته‌ایم و بار دیگر نقطه آغاز را برابر ۱- گرفته‌ایم. در جدول‌های "آزمایش ۳۳" و "آزمایش ۳۷" پارامترهای مساله و نتایج قابل مشاهده است. به هر دو مینیمم دست می‌یابیم. در زیر دو تصویر از دو جدولی که به آن اشاره شده بر داشته شده است. تابع f2 در نقطه ۰ تعریف شده است، ولی تابع در نقطه 1 تعریف نشده است، ولی چون از hessian به عنوان b استفاده کرده‌ایم در حالی که f2 کانوکس نیست و در بعضی موارد در کد که تقسیم بر صفر رخ داده‌است با استفاده از تکنیک‌های عددی بعضی از آن‌ها را که رفعشان مشکلی در منطق برنامه ایجاد نمی‌کرده را بر طرف کرده‌ایم باعث شده است به منیمم در نقطه ۱ هم برسیم. در حالی که در حالت عادی باید به نقطه‌ای بسیار نزدیک به ۱ باید می رسیدیم.

تصویر برداشته شده از جدول "آزمایش ۳۷"	
تصویر برداشته شده از جدول "آزمایش ۳۳"