دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

تمرین سری چهار-تشریحی

درس بهینه‌سازی

فرهاد دلیرانی

۹۶۱۳۱۱۲۵

dalirani@aut.ac.ir

dalirani.1373@gmail.com

فهرست

ابزارهای استفاده شده

زبان برنامه نویسی: -

محیط توسعه: -

سیستم عامل: -

1

$$\min \; f(x)$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b$$

newton method $\Longrightarrow \begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{nt} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x) \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\min \; f(x) + (Ax-b)^T Q (Ax-b)$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b$$

$$y(x) = f(x) + (Ax-b)^T Q (Ax-b) = f(x) + x^T A^T Q A x - x^T A^T Q b - b^T Q A x + b^T Q b$$

$$\rightarrow \nabla y(x) = \nabla f(x) + 2A^T Q (Ax-b)$$

$$\rightarrow \nabla^2 y(x) = \nabla^2 f(x) + 2A^T Q A$$

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 y(x) & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{nt} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla y(x) \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) + 2A^T Q A & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{nt} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x) - 2A^T Q (Ax-b) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (\nabla^2 f(x) + 2A^T Q A)\Delta x_{nt} + A^T \omega = -\nabla f(x) - 2A^T Q (Ax-b) \\ A \Delta x_{nt} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 f(x) \Delta x_{nt} + \cancelto{0}{2A^T Q A \Delta x_{nt}} + A^T \omega = -\nabla f(x) - 2A^T Q (Ax-b) \\ A \Delta x_{nt} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 f(x)\,\Delta x_{nt} + A^T \omega = -\nabla f(x) - 2A^T Q(Ax-b) \\ A\Delta x_{nt} = \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 f(x)\,\Delta x_{nt} + A^T\big(\underbrace{\omega + 2Q(Ax-b)}_{\omega'}\big) = -\nabla f(x) \\ A\Delta x_{nt} = \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 f(x)\,\Delta x_{nt} + A^T \omega' = -\nabla f(x) \\ A\Delta x_{nt} = \phi \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) & A^T \\ A & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{nt} \\ \omega' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x) \\ \phi \end{bmatrix}$$

همان طور که دیده می شود با اضافه شدن آن عبارت Quadratic
تغییری در گام نیوتون ایجاد نشده

تمرین ۲

مشتق گیری

2

$$0 = t\nabla f_0(x^*(t)) + \nabla\phi(x^*(t)) + A^T\hat{\nu} \xrightarrow{dt}$$

$$0 = \nabla f_0(x^*(t)) + t\,\nabla^2 f_0(x^*(t))\frac{dx^*(t)}{dt} + \nabla^2\phi(x^*(t))\frac{dx^*(t)}{dt}$$

$$\rightarrow 0 = \nabla f_0(x^*(t)) + \left(t\nabla^2 f_0(x^*(t)) + \nabla^2\phi(x^*(t))\right)\frac{dx^*(t)}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dx^*(t)}{dt} = -\left(t\nabla^2 f_0(x^*(t)) + \nabla^2\phi(x^*(t))\right)^{-1}\nabla f_0(x^*(t))$$

$$\frac{d f_0(x^*(t))}{dt} = \nabla f_0(x^*(t))^T\frac{dx^*(t)}{dt}$$

$$= -\nabla f_0(x^*(t))^T\underbrace{\left(t\nabla^2 f_0(x^*(t)) + \nabla^2\phi(x^*(t))\right)^{-1}}_{\text{positive definite}}\nabla f_0(x^*(t))$$

$= -($ مقداری مثبت $) \rightarrow \frac{d f_0(x^*(t))}{dt} < 0$

در نتیجه با زیاد شدن t مقدار $f_0(x^*(t))$ کاهش می یابد.