

1. نشان دهید که در روش گرادینان مزدوج، برای سیستم $Ax = b$ ، شروع از x_0 معادل شروع از $y_0 = 0$ برای سیستم $Ay = r_0$ است که در آن $r_0 = b - Ax_0$.

2. N جفت نقطه x_1, x_2, \dots, x_N و y_1, y_2, \dots, y_N در R^n داده شده است که فاصله ی اقلیدسی میان هر جفت $d_1, \dots, d_N > 0$ است. هدف پیدا کردن $d(x, y)$ به شکل زیر است که فاصله های داده شده را تقریب بزند $d(x_i, y_i) \approx d_i$:

$$d(x, y) = \left((x - y)^T P (x - y) \right)^{1/2}$$

که در آن $P \in S^n_+$. به این منظور P را به گونه ای انتخاب می کنیم که تابع هدف زیر را کمینه کند:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (d_i - d(x_i, y_i))^2.$$

برای محاسبه ی P یک مسئله ی بهینه سازی محدب یا شبه محدب ارائه دهید (در صورت نیاز می توانید تقریب بزنید).

3. سوال 7.3 از کتاب Convex Optimization, Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe

4. مسئله ی تقریب زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^m \phi(r_i). \\ \text{S.T.} \quad & r = Ax - b. \end{aligned}$$

الف) دوگان این مسئله را بیابید (برحسب conjugate تابع penalty).

ب) اگر تابع $\phi(x)$ linear deadzone با پهنای $w = 1$ باشد، دوگان مسئله ی بالا را بیابید.

5. دوگان مسئله ی بهینه سازی زیر را بیابید:

$$\begin{aligned} \min \quad & 0.5 \|y - y_0\|_2 + \sum_{i=1}^m \|x_i\|_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_i = C_i y + d_i. \end{aligned}$$

پارامترهای مسئله (که مشخص هستند) عبارت اند از: $y_0 \in R^n$, $C_i \in R^{n_i \times n}$, $d_i \in R^{n_i}$.

6. هدف کمینه نمودن تابع محدب و مشتق پذیر $f(x)$ با داشتن قید $Ax = b$ است. اگر مقدار کمینه ی تابع

$p(x) = f(x) + a \|Ax - b\|_2^2$ را با x^* نشان دهیم، چگونه می توان یک نقطه ی dual feasible برای مسئله ی مقید مطرح شده با استفاده از x^* یافت؟ حد پایین مربوط به نقطه ی dual feasible به دست آمده را بیابید.

7. (امتیازی) هدف پیدا کردن چند جمله ای از درجه ی k به شکل $p(a) = c_0 + c_1a + c_2a^2 + \dots + c_ka^k$ است که

$$p(A) = c_0I + c_1A + c_2A^2 + \dots + c_kA^k$$

تقریبی برای معکوس ماتریس معکوس پذیر $A \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ است. به صورت کلی، وقتی از $x^* = p(A)b$ برای تقریب پاسخ سیستم خطی $Ax = b$ استفاده می شود، از نرم $\|A(p(A)b) - b\|_2$ برای محاسبه ی خطا استفاده می شود. در این سوال، برای ارزیابی چند جمله ای ارائه شده یعنی $p(A)$ بدترین حالت خطا (worst case residual) را به ازای $A \in \mathcal{A}$ و b های عضو unit ball در نظر می گیریم:

$$R^{wc} = \sup_{A \in \mathcal{A}, \|b\|_2 \leq 1} \|A(p(A)b) - b\|_2.$$

که در آن $\mathcal{A} = \{A \in S_n \mid \sigma(A) \subseteq \Omega\}$ که $\sigma(A)$ مجموعه ی مقادیر ویژه ی A و $\Omega \subset \mathbb{R}$ اجتماع چند بازه است که شامل صفر نمی شود.

ضرایب c_0^*, \dots, c_k^* که R^{wc} را کمینه می کنند به دست آورید (پاسخ شما می تواند حاوی supremum یک چند جمله ای در یک بازه باشد).

- در صورتی که سوالی در رابطه با تمرینات دارید با ایمیل ammarg1375@gmail.com در ارتباط باشید و عنوان ایمیل را CVX_OPT_2019 قرار دهید.
- فایل را با نام [Student_Number].pdf بارگذاری کنید.
- شما در مجموع می توانید ۱۰ روز تاخیر داشته باشید (برای کل تمرینات جمع تاخیرهای شما نباید از ۱۰ روز بیشتر شود) و در صورت تاخیر بیش از ۱۰ روز کسر ۵ درصد نمره از نمره کل تمرینات به ازای هر روز تاخیر کم می گردد. بنابراین سعی کنید از این ۱۰ روز به نحو بهینه ای استفاده نمایید.