Inventiones math. 13, 1–89 (1971)

Critères de platitude et de projectivité

Techniques de «platification» d'un module

MICHEL RAYNAUD (Orsay) et LAURENT GRUSON (Lille)

Première partie: Platitude en géométrie algébrique

Soient A un anneau commutatif, B une A-algèbre commutative de présentation finie, M un B-module de présentation finie. On s'intéresse à la platitude de M en tant que A-module. C'est là un problème classique de géométrie algébrique relative qui a été étudié en détails par Grothendieck (EGA IV 11, 12 ...). Nous proposons ici une méthode d'approche différente qui nous semble mieux adaptée à la géométrie relative: on prouve que M est A-plat si et seulement si, localement pour la topologie étale sur $\operatorname{Spec}(A)$ et $\operatorname{Spec}(B)$, le A-module M possède une suite de composition finie, dont les quotients successifs sont les A-modules sous-jacents à des modules libres de type fini sur des A-algèbres lisses B_i, à fibres géométriquement intègres. Ce théorème de structure permet dans une large mesure de ramener l'étude locale des A-modules plats à celle des modules libres sur des A-algèbres lisses.

Il se trouve que les résultats précédents ont tendance à s'étendre au cas où M est seulement supposé de type fini sur B. La raison en est que si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B tel que le $B_{\mathfrak{q}}$-module de type fini $M_{\mathfrak{q}}$ soit A-plat, alors $M_{\mathfrak{q}}$ est nécessairement un $B_{\mathfrak{q}}$-module de présentation finie. Lorsque A n'est pas «trop méchant», M est même alors A-plat et de présentation finie sur B au-dessus d'un voisinage ouvert de $\mathfrak{q}$ dans $\operatorname{Spec}(B)$. Ainsi, on obtient que si A est intègre, toute A-algèbre plate de type fini est de présentation finie.

Au § 3 nous caractérisons les A-modules M, de présentation finie sur B, qui sont des A-modules projectifs (ou encore qui sont localement libres sur $\operatorname{Spec}(A)$). Par exemple, si B est une A-algèbre lisse à fibres géométriquement intègres de dimension constante, B est un A-module libre.

Dans les deux derniers paragraphes, nous donnons des méthodes pour rendre A-plat un B-module M. Ainsi au § 4, on cherche à rendre le B-module M A-plat par changement d'anneaux $A \to A'$. Celà nous amène à étudier le foncteur de «platification universelle» et permet de simplifier et de généraliser les résultats techniques de EGA IV 11 sur la descente de la platitude. Enfin au § 5, on cherche à rendre M A-plat en faisant un éclatement sur Spec(A) et en remplaçant M par son transformé strict par cet éclatement. Les applications que l'on donne ici de ce dernier résultat sont négligeables, mais dans un article ultérieur, nous montrerons comment les techniques précédentes s'étendent à la géométrie formelle et fournissent un procédé systématique pour ramener la géométrie rigide de Tate, Kiehl... à la géométrie algébrique.

Un effort particulier a été fait pour se débarrasser des hypothèses noethériennes et des méthodes noethériennes; en particulier les techniques de passage à la limite, sans être totalement supprimées sont moins fréquentes que dans EGA IV. Il nous semble que c'est là un effort nécessaire pour une meilleure compréhension des problèmes de géométrie algébrique relative bien que la rédaction en soit quelque peu alourdie.

§ 0. Quelques notations et conventions

Dans la première partie, tous les anneaux et algèbres que l'on considère sont commutatifs.

Soit S un schéma. Si s est un point de S, on note $k(s)$ le corps résiduel en s. Un schéma pointé (S, s) est un couple formé d'un schéma S et d'un point s de S.

Un voisinage étale élémentaire du schéma pointé (S, s) est un schéma pointé (S', s'), où S' est un S-schéma étale et s' est un point de S' au-dessus de s, à extension résiduelle triviale $(k(s) \simeq k(s'))$.

Tous les faisceaux de modules sur un schéma que l'on considèrera sont quasi-cohérents.

Soit X un S-schéma, s un point de S. La fibre de X au-dessus de s, c'est à dire le schéma $X \times_S \operatorname{Spec}(k(s))$, sera aussi noté $X \otimes_S k(s)$.

Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ des $\mathcal{O}_X$-modules, $u\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un morphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire. On dit que u est S-universellement injectif si u reste injectif après tout changement de base $S' \to S$. Lorsque $\mathcal{N}$ est S-plat, cette condition équivaut à demander que $\mathcal{N}/\mathcal{M}$ est S-plat.

Supposons $X \to S$ localement de type fini et soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module de type fini, x un point de X, s son image dans S. On note $\dim_x(\mathcal{M}/S)$ la dimension en x du module $\mathcal{M} \otimes_S k(s)$. La borne supérieure des nombres $\dim_x(\mathcal{M}/S)$, lorsque x parcourt les points de X se note $\dim(\mathcal{M}/S)$ (dimension relative de $\mathcal{M}$ au-dessus de S). Lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$, on écrit aussi $\dim_x(X/S)$ et $\dim(X/S)$.

§ 1. Dévissage relatif d'un module

1.1. Une application du «Main theorem» de Zariski

Théorème (1.1.1). *Soit $f\colon (X, x) \to (S, s)$ un morphisme de schémas pointés. On suppose X localement de type fini sur S; on pose $n = \dim_x(X/S)$; alors il existe un diagramme commutatif de schémas pointés*

$$\begin{tikzcd}
(Y, y) \arrow[r] \arrow[d] & (T, t) \arrow[r] & (S', s') \arrow[d] \\
(X, x) \arrow[rr] & & (S, s)
\end{tikzcd}$$

vérifiant les conditions suivantes:

a) *Y, T et S' sont affines, $(Y, y) \to (X, x)$ et $(S', s') \to (S, s)$ sont des voisinages étales élémentaires;*

b) *$T \to S'$ est lisse à fibres géométriquement intègres de dimension n;*

c) *$Y \to T$ est fini et y est le seul point de Y au-dessus de t.*

Démonstration. La question étant locale sur (S, s) et sur (X, x), on peut supposer que S est affine d'anneau A, que X est affine d'anneau B et que toutes les composantes irréductibles de $f^{-1}(s)$ contiennent x (de sorte que $\dim(f^{-1}(s)) = n$). Procédons en plusieurs pas:

1) Choisissons une spécialisation fermée ξ de x dans $f^{-1}(s)$; on a $\dim(B_\xi \otimes k(s)) = n$ et $\dim(B_x \otimes k(s)) = r \leq n$. On peut trouver une suite $(b_1, \dots, b_n)$ d'éléments de B telle que l'image de $(b_1, \dots, b_n)$ (resp. $(b_1, \dots, b_r)$) dans l'anneau local noethérien $B_\xi \otimes k(s)$ (resp. $B_x \otimes k(s)$) soit un système de paramètres. Soient Z le S-schéma $S[T_1, \dots, T_n]$, $g\colon X \to Z$ le S-morhisme défini par la suite $(b_1, \dots, b_n)$, $z = g(x)$; alors g est quasi-fini en x puisque, par construction, il est quasi-fini en la spécialisation ξ de x (EGA IV 13.1.3),

et l'adhérence de z dans $Z \otimes k(s)$, qui s'identifie au sous-schéma fermé défini par l'annulation des fonctions $T_1, \ldots, T_r$, est géométriquement intègre.

2) Soit $(\tilde{Z}, \tilde{z})$ un hensélisé de (Z, z); notons $\tilde{X}$ le schéma $X \times_Z \tilde{Z}$, $\tilde{x}$ l'unique point de $\tilde{X}$ de projections respectives x et $\tilde{z}$, $\tilde{Y}$ le spectre de $O_{\tilde{X}, \tilde{x}}$; comme $(\tilde{X}, \tilde{x}) \to (\tilde{Z}, \tilde{z})$ est quasi-fini en $\tilde{x}$ et comme $(\tilde{Z}, \tilde{z})$ est hensélien, il résulte du Main theorem que $\tilde{Y}$ est fini sur $\tilde{Z}$ et est un sous-schéma ouvert et fermé de $\tilde{X}$, défini par un idempotent $\tilde{e}$ de $\Gamma(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$ (EGA IV 18.5.11).

3) Comme $(\tilde{Z}, \tilde{z})$ est limite projective filtrante de voisinages étales élémentaires affines de (Z, z), on peut trouver un voisinage étale élémentaire affine (Z_1, z_1) de (Z, z) et un idempotent e_1 de $\Gamma(X_1, O_{X_1})$ (on a posé $X_1 = X \times_Z Z_1$) tels que $\tilde{e}$ soit l'image de e_1 dans $\Gamma(X, O_X)$. Notons x_1 l'image de $\tilde{x}$ dans X_1 et Y_1 le sous-schéma ouvert et fermé de X_1 défini par e_1; le diagramme de schémas pointés

$$\begin{array}{ccc} (Y_1, x_1) & \to & (Z_1, z_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, x) & \to & (S, s) \end{array}$$

est commutatif, $(Y_1, x_1) \to (X, x)$ est un voisinage étale élémentaire affine, $Z_1 \to Z$ est étale, donc $Z_1 \to S$ est lisse et les composantes irréductibles de ses fibres sont toutes de dimension n. En outre, quitte à remplacer (Z_1, z_1) par un de ses voisinages étales élémentaires affines et (Y_1, x_1) par son image réciproque sur ce voisinage, on peut supposer que

$Y_1 \to Z_1$ est fini (car, à la limite, $\tilde{Y} \to \tilde{Z}$ est fini)

x_1 est le seul point de Y_1 au-dessus de z_1 (car $\tilde{x}$ est le seul point de $\tilde{Y}$ au-dessus de $\tilde{z}$)

$Z_1 \otimes k(s)$ est connexe.

Montrons que $Z_1 \otimes k(s)$ est même géométriquement intègre. Comme l'adhérence de z dans $Z \otimes k(s)$ est géométriquement intègre, cela résulte du lemme suivant:

Lemme (1.1.2). *Soient k un corps, Z un k-schéma de type fini et géométriquement normal, z un point de Z d'adhérence géométriquement irréductible, (T, t) un voisinage étale élémentaire connexe de (Z, z); alors T est géométriquement irréductible.*

Démonstration. Soient k' une extension finie de k, Z' et T' les images réciproques sur $\mathrm{Spec}(k')$ de Z et T; par hypothèse $k(z)$ est une extension primaire de k, donc la fibre de t dans T', qui est isomorphe à $\mathrm{Spec}(k' \otimes k(z))$, contient un seul point t'. D'autre part, comme Z est géométriquement normal, Z' est normal, donc T', qui est étale sur Z', est normal, donc les composantes connexes de T' sont irréductibles. Soit T'' une composante connexe de T'. Comme $T' \to T$ est fini et plat, $T'' \to T$ est fini et plat, donc surjectif puisque T est connexe. Donc T'' contient t' i.e. $T'' = T'$.

4) Notons le lemme suivant:

Lemme (1.1.3). *Soient (S, s) un schéma pointé, T un S-schéma lisse tel que $T \otimes k(s)$ soit géométriquement intègre de dimension n. Il existe un voisinage étale élémentaire (S', s') de (S, s) et un ouvert U' de $T' = T \times_S S'$ tels que U' contienne $T' \otimes k(s')$ et tel que les fibres du morphisme $U' \to S'$ soient géométriquement intègres de dimension n.*

Démonstration. Soient $(\tilde{S}, \tilde{s})$ un hensélisé strict de (S, s) et $\tilde{T} = T \times_S \tilde{S}$. Comme $\tilde{T}$ est lisse sur $\tilde{S}$ et $\tilde{T} \otimes k(\tilde{s})$ non vide, le morphisme $\tilde{T} \to \tilde{S}$ possède une section $\tilde{\sigma}$ (EGA IV 17.16.3). Considérons $(\tilde{S}, \tilde{s})$ comme limite projective filtrante de schémas finis et étales sur l'hensélisé de S en s. Par passage à la limite, on trouve qu'il existe un voisinage étale élémentaire (S', s') de (S, s) et un morphisme fini étale surjectif $S_1 \to S'$, ayant un seul point s_1 au-dessus de s, tel que $T_1 = T \times_S S_1$ possède une section σ_1 au-dessus de S_1. Posons $T' = T \times_S S'$. La réunion des composantes connexes des fibres de $T_1 \to S_1$ qui rencontrent $\sigma_1(S_1)$ est un ouvert U_1 de T_1 (EGA IV 15.6.5). Comme $T_1 \otimes k(s_1)$ est connexe par hypothèse, U_1 contient $T_1 \otimes k(s_1)$. Le morphisme lisse $U_1 \to S_1$ admet une section et ses fibres sont connexes, elles sont donc géométriquement intègres (1.1.2) et quitte à restreindre S', on peut supposer qu'elles sont de dimension n.

Notons $p\colon T_1 \to T'$ la projection canonique. Alors p est fini, donc fermé et par suite $p(T_1 - U_1)$ est fermé dans T' et d'autre part ne rencontre pas $T \otimes k(s')$. Alors $U' = T' - p(T_1 - U_1)$ est un ouvert de T', contenant $T \otimes k(s')$ et tel que $p^{-1}(U')$ soit contenu dans U_1. A fortiori, les fibres de $U' \to S'$ sont géométriquement intègres de dimension n.

On peut appliquer (1.1.3) au schéma pointé (S, s) et au S-schéma lisse Z_1 introduit dans 3); on peut donc trouver un voisinage étale élémentaire affine (S', s') de (S, s) et un ouvert U' de $Z_1' = Z_1 \times_S S'$ tels que U' contienne $Z_1' \otimes k(s')$ et que les fibres de $U' \to S'$ soient géométriquement intègres de dimension n. Soit t l'unique point de U' de projections respectives z_1 et s' et soit T un voisinage ouvert affine de t dans U'. Comme $T \to S'$ est ouvert, on peut, quitte à rapetisser T et S', supposer $T \to S'$ surjectif. Notons Y le schéma $Y_1 \times_{Z_1} T$ et y l'unique point de Y de projections respectives x_1 et t. Il est clair que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(Y, y) \arrow[r] \arrow[d] & (T, t) \arrow[r] & (S', s') \arrow[d] \\
(X, x) \arrow[rr] & & (S, s)
\end{tikzcd}$$

vérifie les conditions a), b) et c) de l'énoncé, cqfd.

Remarque (1.1.4). Dans l'énoncé (1.1.1), on peut choisir le schéma lisse T de façon que la fibre $T \otimes k(s)$ soit isomorphe à un ouvert de l'espace affine sur $k(s)$, de dimension n. Pour le voir, on utilise les couples henséliens ([17] IX p. 120).

Corollaire (1.1.5). *Soient (S, s) un schéma pointé, X un S-schéma de type fini. Il existe un voisinage étale élémentaire affine (S', s') de (S, s) et un $(X \times_S S')$ schéma Y vérifiant les conditions suivantes:*

a) *Y est affine, étale sur X;*

b) *Il existe une partition finie (Y_i), $i \in I$, de Y en sous-schémas ouverts et fermés et, pour tout i, une factorisation $Y_i \to T_i \to S'$, telle que Y_i soit fini sur T_i et que T_i soit affine, lisse sur S', à fibres géométriquement intègres, de dimension constante n_i.*

c) *Pour tout point x de $X \otimes k(s)$, il existe $i \in I$ et un point y de Y_i, au-dessus de x, tel que $n_i = \dim_x(X \otimes k(s))$.*

Démonstration. Pour tout point x de $X \otimes k(s)$, posons $n(x) = \dim_x(X/S)$ et construisons un diagramme commutatif de schémas pointés

$$\begin{tikzcd}(Y_x, y_x) \arrow[r] \arrow[d] & (T_x, t_x) \arrow[r] & (S'_x, s'_x) \arrow[d] \\ (X, x) \arrow[rr] & & (S, s)\end{tikzcd}$$

satisfaisant aux conditions énoncées dans 1.1.1 (avec $n = n(x)$). Comme $Y_x \to X$ est étale, son image est un voisinage ouvert V_x de x dans X. Mais $X \otimes k(s)$ est noethérien et la fonction $x \mapsto n(x)$ est semi-continue supérieurement sur $X \otimes k(s)$. Il en résulte facilement qu'il existe une famille finie $(x_i)_{i \in I}$ de points de $X \otimes k(s)$ vérifiant la condition suivante: pour tout point x de $X \otimes k(s)$, il existe $i \in I$ tel que $x \in V_{x_i}$ et $n(x) = n(x_i)$. Soit (S', s') le produit fibré au-dessus de (S, s) de la famille (S'_{x_i}, s'_{x_i}); c'est un voisinage étale élémentaire de (S, s). Pour tout i, notons (T_i, t_i) (resp. (Y_i, y_i)) le produit fibré de (T_{x_i}, t_{x_i}) (resp. (Y_{x_i}, y_{x_i})) et de (S', s') au-dessus de (S'_{x_i}, s'_{x_i}). Alors le schéma Y, somme disjointe de la famille (Y_i) répond à la question.

1.2. *Notion de dévissage relatif*

Définition (1.2.1). Soient $f: X \to S$ un morphisme de présentation finie, de schémas affines, s un point de S, $\mathscr{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module de type fini, n un entier $\geqq 0$.

Un S-dévissage (ou dévissage relatif à S), en dimension n, du $\mathcal{O}_X$-module $\mathscr{M}$ au-dessus de s, consiste en les données suivantes:

a) Un sous-schéma fermé de présentation finie X' de X, majorant le sous-schéma fermé défini par l'annulateur de $\mathscr{M}$ dans $\mathcal{O}_X$ et tel que

$\dim(X'\otimes k(s))\leqq n$. Le module $\mathscr{M}$ est alors l'image directe sur X d'un $\mathcal{O}_{X'}$-module de type fini que nous nous permettrons de noter encore $\mathscr{M}$.

b) Une factorisation $X'\to T\to S$ de la restriction de f à X', telle que $X'\to T$ soit *fini* et $T\to S$ soit affine, *lisse*, à fibres géométriquement intègres de dimension n. On note τ le point générique de $T\otimes k(s)$.

c) Un homomorphisme α d'un $\mathcal{O}_T$-module *libre* de type fini $\mathscr{L}$ dans le $\mathcal{O}_T$-module $\mathscr{N}$ image directe sur T du $\mathcal{O}_{X'}$-module $\mathscr{M}$, tel que $\alpha\otimes k(\tau)$ soit *bijectif*.

On peut faire les remarques suivantes:

(1.2.1.1) La condition a) implique $n\geqq\dim(\mathscr{M}\otimes k(s))$. Réciproquement si cette condition est réalisée, il existe toujours un sous-schéma fermé X' de X vérifiant a). En effet, soit $\mathscr{I}$ l'annulateur de $\mathscr{M}$ dans $\mathcal{O}_X$; il existe un idéal de type fini $\mathscr{I}'$ de $\mathcal{O}_X$, contenu dans $\mathscr{I}$ et ayant même image que $\mathscr{I}$ dans l'anneau noethérien des sections globales de $X\otimes k(s)$ et il suffit de prendre $X'=V(\mathscr{I}')$.

(1.2.1.2) Le morphisme $X'\to T$ est fini et de présentation finie; donc $\mathscr{N}$ est de type fini, et même de présentation finie si $\mathscr{M}$ est de présentation finie. En particulier, $\mathscr{N}\otimes k(\tau)$ est libre de rang fini r sur $k(\tau)$. Toute suite de r éléments de $\Gamma(T,\mathscr{N})$, dont l'image dans $\mathscr{N}\otimes k(\tau)$ est une base sur le corps $k(\tau)$ définit alors un morphisme α: $\mathcal{O}_T^r\to\mathscr{N}$ qui satisfait à la condition c). On a $\mathscr{L}=0$ si et seulement si $\dim(\mathscr{M}\otimes k(s))<n$.

(1.2.1.3) Posons $\mathscr{P}=\operatorname{coker}(\alpha)$; alors $\mathscr{P}$ est de type fini sur T (et même de présentation finie si $\mathscr{M}$ est de présentation finie sur X). De plus, comme $\alpha\otimes k(\tau)$ est surjectif, α_τ est surjectif (lemme de Nakayama) et par suite $\dim(\mathscr{P}\otimes k(s))<n$.

(1.2.1.4) Notons $(X'\to T, \mathscr{L}\xrightarrow{\alpha}\mathscr{N}\to\mathscr{P})=D$ le dévissage relatif décrit ci-dessus.

(1.2.1.5) Soit x un point de $X\otimes k(s)$. Si $x\in X'$ et est le *seul point* de X' au-dessus de son image t dans T, on dit que D est un S-dévissage en dimension n de $\mathscr{M}$ *au point* x.

Définition (1.2.2). Soient X, S, $\mathscr{M}$, s comme dans 1.2.1.

Soient r un entier $\geqq 0$ et $n_1>n_2>\cdots>n_r\geqq 0$ une suite strictement décroissante de r entiers $\geqq 0$.

Un S-dévissage de $\mathscr{M}$ au-dessus de s, en dimensions $n_1,\ldots,n_r$ est défini par réccurrence sur r à l'aide des données suivantes.

a) Un S-dévissage $D_1=(X_1\to T_1, \mathscr{L}_1\xrightarrow{\alpha_1}\mathscr{N}_1\to\mathscr{P}_1)$, en dimension n_1, de $\mathscr{M}$ au-dessus de s.

b) Un S-dévissage D de $\mathscr{P}_1$ au-dessus de s, en dimensions $n_2,\ldots,n_r$.

Soit de plus x un point de $X\otimes k(s)$. Le dévissage ci-dessus est un S-dévissage de *$\mathcal{M}$ au point x* si D_1 est un dévissage de $\mathcal{M}$ au point x (1.2.1.5) et si D est un dévissage de $\mathscr{P}_1$ au point t_1, image de x dans T_1.

On peut préciser la terminologie comme suit:

(1.2.2.0) Posons $T_0=X$ et $\mathscr{P}_0=\mathcal{M}$. Alors, le dévissage précédent équivaut à la donnée, pour $i=1,\dots,r$ d'un S-dévissage

$$D_i=(X_i\to T_i,\ \mathscr{L}_i\xrightarrow{\alpha_i}\mathscr{N}_i\to\mathscr{P}_i)$$

en dimension n_i, du module $\mathscr{P}_{i-1}$ sur T_{i-1}.

Soit t_0 le point de T_0 correspondant au point x de X. Alors, le dévissage précédent est un dévissage de $\mathcal{M}$ en x, si pour $i=1,\dots,r$, le point t_{i-1} est un point du sous-schéma fermé X_i de T_{i-1} et est le seul point de X_i au-dessus de son image t_i dans T_i.

(1.2.2.1) L'entier r est la longueur du dévissage.

(1.2.2.2) Soient n et n' des entiers tels que $n\geqq n_1$ et $\dim(\mathscr{P}_{n_r}\otimes k(s)) < n'\leqq n_r$. On dit alors que l'on a un dévissage de $\mathcal{M}$ en dimensions comprises entre n et n'.

(1.2.2.3) Si $\mathscr{P}_{n_r}=0$, on dit que l'on a un *dévissage total* de $\mathcal{M}$. Si n est comme dans (1.2.2.2), on dit aussi que l'on a un dévissage de $\mathcal{M}$ en dimensions $\leqq n$.

Proposition (1.2.3). *Soient $f\colon (X,x)\to(S,s)$ un morphisme localement de présentation finie de schémas pointés, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module de type fini tel que $\mathcal{M}_x\neq 0$; posons $n=\dim_x(\mathcal{M}\otimes k(s))$ et $r=\operatorname{coprof}_{\mathcal{O}_{X,x}\otimes k(s)}(\mathcal{M}_x\otimes k(s))$* (EGA 0_{IV} 16.4.9). *Alors, il existe un diagramme commutatif de schémas pointés:*

$$\begin{array}{ccc}(X',x') & \rightarrow & (S',s')\\ \downarrow & & \downarrow\\ (X,x) & \rightarrow & (S,s)\end{array}$$

dont les colonnes sont des voisinages étales élémentaires affines et tel que l'image réciproque $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ sur X' admette un S'-dévissage total, au point x', en dimensions comprises entre n et $n-r$.

Démonstration. La question est locale sur S et sur X; on peut donc supposer S et X affines. Il existe alors un sous-schéma fermé Y de X, de présentation finie sur S, défini par un idéal contenu dans l'annulateur de $\mathcal{M}$, et tel que $\dim_x(Y/S)=n$ (cf. 1.2.1.1). Par ailleurs, il résulte de la forme locale des morphismes étales (EGA IV 18.4.6) que si (Y',x') est un voisinage étale élémentaire de (Y,x), il existe un ouvert (V',x') de (Y',x') qui est la restriction au-dessus de Y d'un voisinage étale élémentaire

(X', x') de (X, x). On déduit aisément de là, que pour établir (1.2.3), on peut remplacer X par Y, donc supposer que $\dim_x(X/S) = n$.

Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} (X_1, x_1) & \to & (T, t) & \to & (S_1, s_1) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ (X, x) & & \longrightarrow & & (S, s) \end{array}$$

vérifiant les conditions a), b), c) de 1.1.1. Pour établir (1.2.3), il est loisible de remplacer (S, s) par (S_1, s_1), (X, x) par (X_1, x_1) et $\mathscr{M}$ par son image réciproque sur X_1. Désormais on suppose $X = X_1$.

Soit $\mathscr{N}$ l'image directe de $\mathscr{M}$ sur T. Comme x est le seul point de X au-dessus de son image t dans T, $\mathscr{N}_t$ est le $\mathscr{O}_{T,t}$-module sous-jacent au $\mathscr{O}_{X,x}$-module $\mathscr{M}_x$ et par suite $r = \operatorname{coprof}_{\mathscr{O}_{T,t} \otimes k(s)}(\mathscr{N}_t \otimes k(s))$ (EGA 0_{IV} 16.4.11).

Raisonnons par récurrence sur r. Si $r = 0$, le $(\mathscr{O}_{T,t} \otimes k(s))$-module $\mathscr{N}_t \otimes k(s)$ est libre (EGA 0_{IV} 17.3.4); il existe donc un homomorphisme α d'un $\mathscr{O}_T$-module libre de type fini $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{N}$ tel que $\alpha_t \otimes k(s)$ soit bijectif; posons $\mathscr{P} = \operatorname{coker}(\alpha)$. Alors $\mathscr{P}_t = 0$ (lemme de Nakayama), donc il existe un voisinage ouvert affine U de t tel que $\mathscr{P}|U = 0$. Comme $T \to S$ est ouvert, il existe un voisinage ouvert affine S' de s dans S, contenu dans l'image de U. Quitte à remplacer S par S', T par l'image réciproque T' de S' dans U et X par l'image réciproque de T' dans X, on peut supposer que $\mathscr{P} = 0$. Alors $(X \to T, \mathscr{L} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{N} \to 0)$ est un S-dévissage de longueur 1, en dimension n du module $\mathscr{M}$ au point x.

Supposons $r > 0$. Il existe un S-dévissage $(X \to T, \mathscr{L} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{N} \to \mathscr{P})$ en dimension n du $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{M}$ au point x (1.2.1.2). Soit τ le point générique de $T \otimes k(s)$. Comme $T \otimes k(s)$ est intègre et $\alpha_\tau \otimes k(s)$ injectif, $\alpha_t \otimes k(s)$ est injectif. D'autre part, comme $r > 0$, $\alpha_t \otimes k(s)$ n'est pas bijectif. Il résulte alors de EGA 0_{IV} 16.4.4 et de la suite exacte des Ext que l'on a

$$\operatorname{prof}_{\mathscr{O}_{T,t} \otimes k(s)}(\mathscr{N}_t \otimes k(s)) = \operatorname{prof}_{\mathscr{O}_{T,t} \otimes k(s)}(\mathscr{P}_t \otimes k(s)).$$

Par ailleurs, on a $\dim(\mathscr{P} \otimes k(s)) < n$ (1.2.1.3), donc

$$\operatorname{coprof}_{\mathscr{O}_{T,t} \otimes k(s)}(\mathscr{P}_t \otimes k(s)) < r.$$

Appliquons alors l'hypothèse de récurrence: il existe un diagramme commutatif de schémas pointés

$$\begin{array}{ccc} (T', t') & \to & (S', s') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (T, t) & \to & (S, s) \end{array}$$

dont les colonnes sont des voisinages étales élémentaires affines, tel que l'image réciproque $\mathscr{P}'$ de $\mathscr{P}$ sur T' admette un S'-dévissage total en dimensions comprises entre $n-1$ et $n-r$. Soit $(X' \to T', \mathscr{L}' \xrightarrow{\alpha'} \mathscr{N}' \to \mathscr{P}')$ l'image réciproque du dévissage $(X \to T, \mathscr{L} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{N} \to \mathscr{P})$ de $\mathscr{M}$ par le morphisme étale $T' \to T$. Soit x' l'unique point de X' de projections x et t'. Alors x' est l'unique point de X' au-dessus de t' et il est clair que l'image réciproque $\mathscr{M}'$ de $\mathscr{M}$ sur X' admet un dévissage relatif total au point x', en dimensions comprises entre n et $n-r$.

Remarque (1.2.3.1). Il est immédiat que les bornes n et $n-r$ introduites dans (1.2.3) sont les meilleures possibles.

Corollaire (1.2.4). *Soient (S, s) un schéma pointé, X un S-schéma de présentation finie, $\mathscr{M}$ un O_X-module de type fini, $n = \dim(\mathscr{M} \otimes k(s)$ et $r = \operatorname{coprof}_{X \otimes k(s)}(\mathscr{M} \otimes k(s)))$. Alors il existe un voisinage étale élémentaire (S', s') de (S, s) un $(X \times_S S')$-schéma Y, affine, étale sur X et dont l'image dans X contient $\operatorname{Supp}(\mathscr{M}) \cap (X \otimes k(s))$ et une partition finie (Y_i) de Y en sous-schémas ouverts et fermés, tels que, pour tout i, l'image réciproque $\mathscr{M}_i$ de $\mathscr{M}$ sur Y_i admette un S'-dévissage de longueur $\leqq r+1$, en dimensions $\leqq n$, au-dessus de s'.*

La démonstration est identique à celle de 1.1.6 compte tenu de 1.2.3.

Terminons par quelques résultats élémentaires sur les dévissages relatifs.

Notons d'abord que si l'on a un dévissage relatif de $\mathscr{M}$ au-dessus de S et si $(S', s') \to (S, s)$ est un morphisme de schémas pointés, on définit de façon naturelle, un S'-dévissage au-dessus de s' de l'image réciproque $\mathscr{M}'$ de $\mathscr{M}$ sur $X' = X \times_S S'$; ce dévissage sera appelé le dévissage relatif image réciproque du dévissage initial par le morphisme $(S', s') \to (S, s)$. Cette remarque nous permet de formuler le résultat de passage à la limite ci-aprés qui nous sera utile pour les réductions au cas noethérien:

Proposition (1.2.5). *Soient S_0 un schéma affine, S un S_0-schéma limite projective filtrante de S_0-schémas affines S_i, X_0 un S_0-schéma de présentation finie, $\mathscr{M}_0$ un $\mathscr{O}_{X_0}$-module de type fini. Pour tout i posons $X_i = X_0 \times_{S_0} S_i$, $\mathscr{M}_i = \mathscr{M} \times_{S_0} S_i$ et soit $X = X_0 \times_{S_0} S$ et $\mathscr{M} = \mathscr{M}_0 \times_{S_0} S$. Soient x un point de X, s son image dans S, x_i son image dans X_i et s_i l'image de s dans S_i. Enfin soit*

$$\begin{array}{ccc} (X', x') & \to & (S', s') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, x) & \to & (S, s) \end{array} \qquad (*)$$

un diagramme commutatif de schémas pointés dont les colonnes sont des voisinages étales élémentaires affines et D' un S'-dévissage au point x', de l'image réciproque $\mathscr{M}'$ de $\mathscr{M}$ sur X'.

Alors, il existe un indice i, un diagramme commutatif de schémas pointés

$$\begin{array}{ccc} (X'_i, x'_i) & \to & (S'_i, s'_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X_i, x_i) & \to & (S_i, s_i) \end{array} \qquad (*)_i$$

dont les colonnes sont des voisinages étales élémentaires affines et un S'_i-dévissage D'_i au point x'_i de l'image réciproque $\mathcal{M}'_i$ de $\mathcal{M}_i$ sur X'_i, tels que le diagramme $(*)$ et le dévissage D' soient isomorphes à l'image réciproque du diagramme $(*)_i$ et du dévissage D'_i par le morphisme $(S, s) \to (S_i, s_i)$.

La démonstration est immédiate à partir des résultats de EGA IV 8 et 9 (en particulier EGA IV 9.7.7).

§ 2. Un critère de platitude

Soient $f\colon (X, x) \to (S, s)$ un morphisme localement de présentation finie de schémas pointés, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module de présentation finie. D'après 1.2.3, on peut trouver un diagramme commutatif de schémas pointés

$$\begin{array}{ccc} (X', x') & \to & (S', s') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, x) & \to & (S, s) \end{array}$$

dont les colonnes sont des voisinages étales élémentaires affines, et un S'-dévissage au point x', en dimension $n = \dim_x(\mathcal{M}/S)$, du $\mathcal{O}_{X'}$-module $\mathcal{M}'$ image réciproque de $\mathcal{M}$ sur X'; notons ce dévissage $(Y \to T,\ \mathcal{L} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \to \mathcal{P})$. Soit t l'image de x' dans T et τ le point générique de $T \otimes k(s')$. Ces données étant fixées, nous sommes en mesure d'énoncer un critère de S-platitude de $\mathcal{M}$ en x.

Théorème (2.1). *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$\mathcal{M}_x$ est $\mathcal{O}_{S,s}$-plat;*

(i′) *$\mathcal{N}_t$ est $\mathcal{O}_{S',s'}$-plat;*

(ii) *α_τ est bijectif et $\mathcal{P}_t$ est $\mathcal{O}_{S',s'}$-plat;*

(ii′) *α_t est injectif et $\mathcal{P}_t$ est $\mathcal{O}_{S',s'}$-plat;*

(ii″) *il existe un voisinage ouvert U' de s' dans S', tel que α soit S'-universellement injectif* (§ 0) *au-dessus de U' et $\mathcal{P}_t$ est $\mathcal{O}_{S',s'}$-plat;*

(iii) $\operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_{S,s}}(\mathcal{M}_x, k(s)) = 0$.

Remarques (2.1.1). a) Ce résultat sera étendu, dans une certaine mesure, au cas où $\mathcal{M}$ est seulement supposé de type fini sur X (3.4).

b) Les conditions i) et iii) sont indépendantes du choix du dévissage relatif de $\mathcal{M}$.

Prouvons d'abord un lemme:

Lemme (2.2). *Soient $(T, t) \to (S, s)$ un morphisme lisse, de schémas pointés, tel que $T \otimes k(s)$ soit intègre de point générique τ, α un homomorphisme d'un $\mathcal{O}_T$-module libre $\mathcal{L}$ dans un $\mathcal{O}_T$-module de type fini $\mathcal{N}$, tel que $\alpha \otimes k(s)$ soit bijectif au point τ. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *α_τ est bijectif:*

(ii) *α_t est S-universellement injectif.*

Démonstration. Comme $\alpha \otimes k(s)$ est surjectif en τ, α_τ est surjectif, donc (ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons (i) vérifié et considérons le diagramme commutatif de $\mathcal{O}_{T,t}$-modules

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_t & \xrightarrow{\alpha_t} & \mathcal{M}_t \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{L}_\tau & \xrightarrow{\alpha_\tau} & \mathcal{M}_\tau . \end{array}$$

La seconde ligne est bijective; pour prouver (ii), il suffit de prouver que la première colonne est S-universellement injective; comme $\mathcal{L}$ est libre, il suffit d'établir que le morphisme $\mathcal{O}_{T,t} \to \mathcal{O}_{T,\tau}$ est S-universellement injectif. Pour delà, on peut supposer S-local de point fermé s. Considérons (S, s) comme limite projective filtrante de schémas locaux noethériens pointés $(S_i, s_i)_{i \in I}$. On peut supposer T affine, auquel cas T provient d'un S_i-schéma lisse T_i pour i assez grand (EGA IV 17.7.8). Posons $T_j = T_i \otimes_{S_i} S_j$ pour $j \geqq i$ et soient t_j et τ_j les images de t et τ dans T_j. Alors le morphisme $O_{T,t} \to O_{T,\tau}$ est la limite inductive des morphismes $O_{T_j,t_j} \to O_{T_j,\tau_j}$. Il nous suffit donc de considérer le cas où S est noethérien.

Soit F la partie multiplicative de $O_{T,t}$ formée des éléments non diviseur de zéro dans $O_{T,t} \otimes k(s)$. Comme $O_{T,t} \otimes k(s)$ est intègre, l'anneau $O_{T,t}[F^{-1}]$ n'est autre que $O_{T,\tau}$. D'autre part, si $a \in F$, il résulte de EGA 0_{III} 10.2.4 que la multiplication par a dans $O_{T,t}$ est injective et a un conoyau S-plat. Par passage à la limite inductive, on en déduit que l'on a une suite exacte

$$0 \to O_{T,t} \to O_{T,\tau} \to H \to 0$$

où H est S-plat, d'où le fait que $O_{T,t} \to O_{T,\tau}$ soit S-universellement injectif.

Démonstration de 2.1. Comme $(X', x') \to (X, x)$ et $(S', s') \to (S, s)$ sont étales on a les équivalences

$$\mathcal{M}_x \ \mathcal{O}_{S,s}\text{-plat} \Leftrightarrow \mathcal{M}'_{x'} \ \mathcal{O}_{S',s'}\text{-plat}.$$

Par ailleurs, comme $Y \to T$ est fini et que x' est le seul point de Y au-dessus de t, $\mathcal{N}_{T,t}$ et $\mathcal{M}'_{x'}$ sont isomorphes comme S-modules, d'où (i) $\Leftrightarrow$ (i').

Comme T est plat sur S', l'implication (ii') $\Rightarrow$ (i') résulte de la suite exacte $0 \to \mathscr{L}_t \to \mathscr{N}_t \to \mathscr{P}_t \to 0$.

On a (ii) $\Leftrightarrow$ (ii') d'après 2.2.

Pour établir (i') $\Rightarrow$ (ii), considérons le $\mathcal{O}_T$-module $\mathscr{R} = \operatorname{Ker}(\alpha)$. Comme $\mathscr{P}_\tau = 0$, on a une suite exacte de $O_{T,\tau}$-modules

$$0 \to \mathscr{R}_\tau \to \mathscr{L}_\tau \xrightarrow{\alpha_\tau} \mathscr{N}_\tau \to 0.$$

Comme $\mathscr{M}$ est de présentation finie sur X, $\mathscr{N}$ est de présentation finie sur T (1.2.1.2), donc $\mathscr{R}_\tau$ est de type fini sur $\mathcal{O}_{T,\tau}$. Si $\mathscr{N}_t$ est S'-plat, la suite précédente reste exacte après tensorisation par $k(s)$

$$0 \to \mathscr{R}_\tau \otimes k(s) \to \mathscr{L}_\tau \otimes k(s) \xrightarrow{\alpha_\tau \otimes k(s)} \mathscr{N}_\tau \otimes k(s) \to 0.$$

Mais $\alpha_\tau \otimes k(s)$ est bijectif, donc $\mathscr{R}_\tau \otimes k(s) = 0$ et par suite $\mathscr{R}_\tau = 0$ (lemme de Nakayama). D'après 2.2, α_t est alors S'-universellement injectif. Comme $\mathscr{N}_t$ est S'-plat on conclut que $\mathscr{P}_t$ est aussi S'-plat donc (i') $\Rightarrow$ (ii).

L'implication (ii'') $\Rightarrow$ (ii) est claire; prouvons (ii) $\Rightarrow$ (ii''). Comme $\mathscr{N}$ est de présentation finie sur T et $\mathscr{L}$ de type fini sur T, l'ensemble V des points de T où α est bijectif est ouvert; il contient τ d'après (ii). Par ailleurs, un morphisme lisse et ouvert, donc l'image U' de V est un ouvert de S' contenant s'. Comme les fibres de $T \to S'$ sont intègres, on déduit de 2.2 que α est S'universellement injectif au-dessus de U'.

L'implication (i) $\Rightarrow$ (iii) est triviale; prouvons (iii) $\Rightarrow$ (i) par récurrence sur $n = \dim_x(\mathscr{M}/S)$. Si $n < 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $n \geqq 0$. L'hypothèse entraîne $\operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_{S,s}}(\mathscr{M}'_{x'}, k(s)) = \operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_{S,s}}(\mathscr{N}_t, k(s)) = 0$, d'où par localisation $\operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_{S,s}}(\mathscr{N}_\tau, k(s))$. Comme dans la démonstration de (i') $\Rightarrow$ (ii), on en déduit que $\mathscr{R}_\tau = 0$. Appliquant le lemme 2.2, on en déduit une suite exacte

$$0 \to \mathscr{L}_t \xrightarrow{\alpha_t} \mathscr{N}_t \to \mathscr{P}_t \to 0.$$

La suite exacte des tores montre alors que $\operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_{S,s}}(\mathscr{P}_t, k(s)) = 0$; donc $\mathscr{P}_t$ est S-plat d'après l'hypothèse de récurrence; mais alors $\mathscr{N}_t$ est S-plat comme extension de deux modules plats. C.Q.F.D.

Supposons maintenant donné un S'-dévissage de longueur r du $O_{X'}$-module M' au point x', noté $(Y_i \to T_i,\ \mathscr{L}_i \xrightarrow{\alpha_i} \mathscr{N}_i \to \mathscr{P}_i)$ $1 \leqq i \leqq r$ et soient τ_i le point générique de $T_i \otimes k(s')$ et t_i le point de T_i déduit de proche en proche à partir de x'. Par récurrence sur r, on déduit immédiatement de 2.1 le critère de platitude suivant:

Corollaire (2.3). *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$\mathscr{M}$ est S-plat en x;*

(ii) *α_i est bijectif en τ_i pour tout i et $\mathscr{P}_r$ est S'-plat en t_r;*

(iii) *$\mathscr{N}_i$ est libre sur un voisinage de τ_i pour tout i et $\mathscr{P}_r$ est S'-plat en t_r;*

(iv) *α_i est injectif pour tout i et $\mathscr{P}_r$ est S'-plat en t_r;*

(v) *il existe un voisinage ouvert U' de s' dans S', tel que α_i soit S'-universellement injectif au-dessus de U' pour tout i et $\mathscr{P}_r$ est S'-plat en t_r.*

Conjuguant le corollaire 2.3 avec 1.2.3, on obtient le résultat suivant:

Corollaire (2.4). *Soient $f: (X, x) \to (S, s)$ un morphisme localement de présentation finie de schémas pointés, $\mathscr{M}$ und $\mathcal{O}_X$-module de présentation finie S-plat au point x, $n = \dim_x(\mathscr{M}/S)$ et $r = \operatorname{coprof}_{\mathcal{O}_{X,x}\otimes k(s)}(\mathscr{M}_x \otimes k(s))$. Alors, il existe un diagramme commutatif de schémas pointés*

$$\begin{array}{ccc} (X', x') & \longrightarrow & (S', s') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, x) & \longrightarrow & (S, s) \end{array}$$

dont les colonnes sont des voisinages étales élémentaires affines et un S'-dévissage total au point x' $(Y_i \to T_i, \mathscr{L}_i \xrightarrow{\alpha_i} \mathscr{N}_i \to \mathscr{P}_i)_{1 \leq i \leq r}$ de l'image réciproque $\mathscr{M}'$ de $\mathscr{M}$ sur X', en dimensions comprises entre n et $n-r$, tel que α_i soit injectif pour tout i.

Ceci étant, posons

$$A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S), \qquad M' = \Gamma(X', \mathscr{M}'), \qquad M'_{(i)} = \operatorname{Ker} M' \to \Gamma(T_i, \mathscr{P}_i).$$

On définit ainsi une filtration croissante sur le A-module M' telle que $M'_{(i)}/M'_{(i-1)} \simeq \Gamma(T_i, \mathscr{L}_i)$. On a donc prouvé le résultat suivant:

Corollaire (2.5). *Soient B une A-algèbre de présentation finie, $\mathfrak{q}$ un idéal premier de B au-dessus d'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A et M un B-module de présentation finie plat sur A en $\mathfrak{q}$. Alors il existe un voisinage élémentaire étale $(A', \mathfrak{p}')$ de $(A, \mathfrak{p})$ et un voisinage étale élémentaire $(B', \mathfrak{q}')$ de $(B, \mathfrak{q})$ au-dessus de $(A', \mathfrak{p}')$, tel que le A'-module $M' = M \otimes_B B'$, possède une suite de composition finie dont les quotients successifs sont les A'-modules sous-jacents à des modules libres de type fini sur des A'-algèbres lisses, à fibres géométriquement intègres.*

Corollaire (2.6) (cf. EGA IV 11.3.1). *Soient S un schéma, X un S-schéma localement de présentation finie, $\mathscr{M}$ und $\mathcal{O}_X$-module de présentation finie; l'ensemble des points x de X tels que $\mathscr{M}$ soit S-plat en x est ouvert.*

Celà résulte de 2.4 compte tenu du fait que l'image de X' dans X est ouverte.

Corollaire (2.7) (cf. EGA IV 11.2.6). *Sous les hypothèses générales de passage à la limite projective décrites dans 1.2.5, si $\mathscr{M}_0$ est de présentation finie sur X_0 et si $\mathscr{M}$ est S-plat en x, alors $\mathscr{M}_i$ est S_i-plat en x_i pour i assez grand.*

En effet, quitte à remplacer (X_0, x_0) et (S_0, s_0) par des voisinages étales, on peut supposer que $\mathscr{M}_0$ possède un S_0-dévissage total en x_0 (1.2.3). Il suffit alors de remarquer que le critère de platitude (2.3 iii)) passe à la limite projective (EGA IV 8.5.5).

Remarque (2.8). Dans ce paragraphe, nous avons utilisé les propriétés pour un morphisme lisse de passer à la limite projective et d'être ouvert. Dans EGA IV, la démonstration de ces propriétés utilise le passage à la limite projective de la platitude. Mais on peut facilement en obtenir des démonstrations directes en les prouvant séparément pour les morphismes étales ([17] V th. 3) et pour les algèbres de polynômes. On peut donc éviter tout cercle vicieux dans la démonstration des deux corollaires ci-dessus.

Indiquons, pour terminer, un résultat voisin de 2.3.

Corollaire (2.9). *Soient $f: (X, x) \to (S, s)$ un morphisme de présentation finie de schémas pointés, $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_X$-module de présentation finie, Z l'ensemble fermé des points de X où $\mathscr{M}$ n'est pas S-plat, m un entier inférieur à $n = \dim_x(\mathscr{M}/S)$. Supposons donnés un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} (X', x') & \longrightarrow & (S', s') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, x) & \longrightarrow & (S, s) \end{array}$$

dont les colonnes sont des voisinages étales élémentaires affines et un S'-dévissage au point x' $(Y_i \to T_i,\ \mathscr{L}_i \xrightarrow{\alpha_i} \mathscr{N}_i \to \mathscr{P}_i)$ de l'image réciproque $\mathscr{M}'$ de $\mathscr{M}$ sur X', en dimensions comprises entre n et m. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $\dim_x(Z/S) < m$;

(ii) *α_i est bijectif au point générique τ_i de $T_i \otimes k(s)$ pour tout i;*

(iii) *α_i est injectif en t_i pour tout i;*

(iv) *il existe un voisinage de s' dans S' au-dessus duquel α_i est S'-universellement injectif pour tout i.*

Démonstration. Soit Z' l'image réciproque de Z dans X' et Z_1 l'image de Z' dans T_1. Alors Z_1 est l'ensemble des points de T_1 où $\mathscr{N}_1$ n'est pas S'-plat et comme Y_1 est fini sur T_1 et que x' et le seul point de Y_1 au-dessus de t_1, on a $\dim_x(Z/S) = \dim_{x'}(Z'/S') = \dim_{t_1}(Z_1/S')$.

Raisonnons alors par récurrence sur n, le cas $n < 0$ étant trivial. D'après 2.1 (appliqué au point τ_1) et 2.2, chacune des conditions (i) à (iv) implique $\tau_1 \notin Z_1$. De plus, quitte à restreindre S' elles entraînent que α_1 est S-universellement injectif, auquel cas Z_1 est l'ensemble des points de T_1 où $\mathscr{P}_1$ n'est pas S'-plat. Comme $\dim_{t_1}(\mathscr{P}_1/S') < n$, l'hypothèse de récurrence entraîne que les quatre conditions sont équivalentes.

§ 3. Platitude et projectivité

3.1. Lemmes sur les modules projectifs de type dénombrable

On a rassemblé ici quelques résultats auxiliaires concernant les modules projectifs; certains d'entre eux seront étudiés en détail dans la seconde partie de cet article.

On désigne par A un anneau commutatif; pour tout A-module M, on note M^* le dual de M, c'est à dire le A-module $\mathrm{Hom}_A(M, A)$.

(3.1.1) Tout A-module plat est limite inductive filtrante de A-modules libres de type fini.

(3.1.2) Soit $u: M \to N$ une application A-linéaire universellement injective. Si N est projectif de type dénombrable et si M est de type dénombrable, alors M est projectif.

(3.1.3). Soit (L_i, u_{ji}) un système inductif filtrant de A-modules libres de type fini, indexé par un ensemble dénombrable I. Posons $P = \varinjlim L_i$. Alors, pour que P soit projectif, il faut et il suffit que le système projectif (L_i^*) vérifie la condition de Mittag-Leffler (EGA 0_{III} 13.1.2).

(3.1.4). Soient B une A-algèbre commutative fidèlement plate, P un A-module de présentation dénombrable. Pour que P soit un A-module projectif, il faut et il suffit que $B \otimes_A P$ soit un B-module projectif.

(3.1.5). Supposons A noethérien; soient I un ensemble et P un sous-module de type dénombrable de A^I. Si l'inclusion de P dans A^I est universellement injective, P est projectif.

(3.1.6). Supposons A local de corps résiduel k et soit u une application A-linéaire d'un A-module projectif P dans un A-module plat M. Pour que u soit universellement injective, il faut et il suffit que $u \otimes_A k$ soit injectif.

Démonstration. Les assertions 3.1.1 et 3.1.2 sont dues à Daniel Lazard ([13] I.1.2 et I.3.2).

Prouvons 3.1.3. La condition est suffisante: en effet, si elle est vérifiée, pour tout A-module M, le système projectif $(\mathrm{Hom}_A(L_i, M))$ vérifie aussi la condition de Mittag-Leffler (car $\mathrm{Hom}_A(L_i, M) \simeq L_i^* \otimes_A M$); compte tenu de l'isomorphisme fonctoriel $\mathrm{Hom}_A(P, M) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{Hom}_A(L_i, M)$, on déduit de cette remarque, de l'hypothèse de dénombrabilité de I et de EGA 0_{III} 13.2.2 que le foncteur $\mathrm{Hom}_A(P, \cdot)$ est exact donc P est projectif. La condition est nécessaire: pour le voir on peut supposer P libre (quitte à remplacer P par $P \oplus Q$ où Q est un module projectif de type dénombrable, compte tenu de 3.1.1). Soit $(e_s)_{s \in S}$ une base de P. Pour toute partie finie T de S notons P_T le sous-module de P engendré par $(e_s)_{s \in T}$. Si i est un élément de I, il existe une partie finie T de S telle que P_T contienne l'image de L_i dans P. Comme $P = \varinjlim L_i$, et comme T est fini, il existe un indice $j \geqq i$ tel que l'inclusion de P_T dans P se factorise par L_j. On a les inclusions

$$\operatorname{Im}(P^* \to L_i^*) \subset \operatorname{Im}(L_j^* \to L_i^*) \subset \operatorname{Im}(P_T^* \to L_i^*) = \operatorname{Im}(P^* \to L_i^*)$$

puisque P_T est un sous-module direct de P. Pour tout $k \geqq j$ on a donc $\operatorname{Im}(L_k^* \to L_i^*) = \operatorname{Im}(L_j^* \to L_i^*)$, autrement dit, le système projectif (L_i^*) vérifie la condition de Mittag-Leffler.

Prouvons 3.1.4. Comme P est un A-module plat de présentation dénombrable il est limite inductive d'une suite (L_n) de modules libres (cf. [13] I 3.2); appliquant 3.1.3 on est donc ramené à voir que la condition de Mittag-Leffler pour les systèmes projectifs de A-modules se descend par fidèle platitude; c'est immédiat.

L'assertion 3.1.5 résulte de [8] 2.4. (Voir aussi 2ème partie.)

Prouvons 3.1.6. Quitte à remplacer u par $u \oplus 1_Q$ où Q est un module projectif convenable, on peut supposer P libre; quitte à remplacer P par ses divers facteurs directs libres de type fini, on peut supposer P de type fini; compte tenu de 3.1.1 on peut supposer M libre de type fini; on est alors ramené à voir que u est inversible à gauche si et seulement si $u \otimes_A k$ est injectif, ce qui est bien clair.

3.2. Lemmes sur l'assassin relatif

Définition (3.2.1). Soient S un schéma, s un point de S, $\mathscr{M}$ un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent. On dit que s est associé à $\mathscr{M}$, s'il existe un élément f de $\mathscr{M}_s$ dont l'annulateur I dans $\mathcal{O}_{S,s}$ a pour racine l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{S,s}$. On appelle assassin de $\mathscr{M}$ dans S et on note $\operatorname{Ass}_S(\mathscr{M})$, ou simplement $\operatorname{Ass}(\mathscr{M})$, l'ensemble des points de S associés à M.

Définition (3.2.2). Soient S un schéma, X un S-schéma, $\mathscr{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent. On appelle assassin de $\mathscr{M}$ dans X relativement à S et l'on note $\operatorname{Ass}_{X/S}(\mathscr{M})$ (ou simplement $\operatorname{Ass}(\mathscr{M}/S)$) l'ensemble

$$\bigcup_{s \in S} \operatorname{Ass}_{X \otimes k(s)}(\mathscr{M} \otimes k(s)).$$

Pour les propriétés usuelles de l'assassin, on renvoie à II 1. Notons ici quelques propriétés élémentaires de l'assassin relatif:

(3.2.3). Soient

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & S' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & S \end{array}$$

un diagramme cartésien de schémas, dont les lignes sont des morphismes localement de type fini, $\mathscr{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module de type fini, $\mathscr{M}'$ son image réciproque sur X', x' un point de X', de projections respectives x, s, s' dans X, S, S'. Alors pour que $x' \in \operatorname{Ass}(\mathscr{M}'/S')$, il faut et il suffit que $x \in \operatorname{Ass}(\mathscr{M}/S)$ et que x' soit un point maximal de $\operatorname{Spec}(k(x) \otimes_{k(s)} k(s'))$ (EGA IV 4.2).

(3.2.4). Soient S un schéma, X un S-schéma localement de type fini, Y un X-schéma plat et localement de type fini, $\mathscr{M}$ un O_X-module de type fini, $\mathscr{N}$ son image réciproque sur Y, y un point de Y de projection x dans X. Pour que $y \in \operatorname{Ass}(\mathscr{N}/S)$, il faut et il suffit que $x \in \operatorname{Ass}(\mathscr{M}/S)$ et $y \in \operatorname{Ass}(Y/X)$ (EGA IV 3.3.1).

(3.2.5). Soient $f\colon (X,x) \to (S,s)$ un morphisme localement de présentation finie de schémas pointés, $\mathscr{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module de présentation finie et S-plat, $A = \mathcal{O}_{S,s}$, $B = O_{X,x}$, Σ la partie multiplicative de B formée des éléments non diviseur de zéro dans $\mathscr{M}_x \otimes k(s)$.

(i) Alors $B[\Sigma^{-1}]$ est un anneau semi-local dont le spectre est formé des générisations de $\operatorname{Ass}_{B \otimes k(s)}(\mathscr{M}_x \otimes k(s))$ dans $\operatorname{Spec}(B)$.

(ii) Tout élément de Σ définit une homothétie A-universellement injective dans $\mathscr{M}_x$.

(iii) Le morphisme de localisation $\mathscr{M}_x \to \mathscr{M}_x[\Sigma^{-1}]$ est A-universellement injectif.

Démonstration. Soit $\mathfrak{p}_{i,\, i \in I}$, la famille finie des idéaux premiers de B qui sont associés à $\mathscr{M}_x \otimes k(s)$. Alors $\Sigma = B - \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{p}_i\right)$, d'où la première assertion. Pour établir (ii) et (iii), on se ramène par passage à la limite inductive au cas où A est noethérien (2.7). Soit alors $a \in \Sigma$. D'après EGA 0_{III} 10.2.4, la multiplication par a dans $\mathscr{M}_x$ est injective et son conoyau est A-plat, donc la multiplication par a est A-universellement injective. Comme le morphisme de localisation $\mathscr{M}_x \to \mathscr{M}_x[\Sigma^{-1}]$ est la limite inductive filtrante des homothèties $\mathscr{M}_x \to \mathscr{M}_x$ définies par les éléments de Σ, l'assertion (iii) résulte de (ii).

Corollaire (3.2.6). *Soient A un anneau, B une A-algèbre de présentation finie, M un B-module de présentation finie et A-plat, B' une B-algèbre plate telle que l'image de* $\operatorname{Spec}(B')$ *dans* $\operatorname{Spec}(B)$ *contienne* $\operatorname{Ass}_{B/A}(M)$. *Alors le morphisme canonique $M \to M' = M \otimes_B B'$ est universellement A-injectif.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de B le morphisme $M_{\mathfrak{q}} \to M'_{\mathfrak{q}}$ est A-universellement injectif. Soit $\mathfrak{p}$ l'image réciproque de $\mathfrak{q}$ dans A. On peut supposer A local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$. Soit Σ la partie multiplicative de $B_{\mathfrak{q}}$ formée des homothèties A-universellement injectives de $M_{\mathfrak{q}}$ et considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M_{\mathfrak{q}} & \longrightarrow & M'_{\mathfrak{q}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_{\mathfrak{q}}[\Sigma^{-1}] & \longrightarrow & M'_{\mathfrak{q}}[\Sigma^{-1}]. \end{array}$$

D'après 3.2.5 (iii), la première colonne est A-universellement injective; d'après 3.2.5 (i) et l'hypothèse faite sur le morphisme $B \to B'$, $B'_{\mathfrak{q}}[\Sigma^{-1}]$ est fidèlement plat sur $B_q[\Sigma^{-1}]$ et par suite la deuxième ligne est A-universellement A-injective; par suite la première ligne est aussi A-universellement injective.

Remarque (3.2.7). Nous laissons au lecteur le soin de déduire de 3.2.5 et 3.2.6 les résultats de EGA IV 11.10.10 et 12.1.1.5.

3.3. Modules S-plats et S-purs

Proposition (3.3.1). *Soient A un anneau commutatif, B une A-algèbre lisse, à fibres géométriquement intègres. Alors B est un A-module projectif.*

Démonstration. Par passage à la limite inductive, on se ramène au cas où A est noethérien (EGA IV 9.7.7). Comme B est une A-algèbre de présentation finie, B est un A-module de présentation dénombrable. Par descente fidèlement plate de la projectivité (3.1.4), on se ramène au cas où la A-algèbre B admet une augmentation ε de noyau I (il suffit par exemple de faire le changement d'anneaux $A \to B$ et de prendre l'augmentation codiagonale). Comme B est lisse sur A, I/I^2 est un A-module projectif de type fini et le gradué associé à la filtration I-adique de B est isomorphe à l'algèbre symétrique du A-module I/I^2 (EGA 0_{IV} 19.5.4). Utilisant encore une fois 3.1.4, on se ramène, en prenant un recouvrement fini affine de Spec(A), au cas où I/I^2 est libre de rang n. Alors, le complété $\hat{B}$ de B, pour la topologie I-adique, est A-isomorphe à une A-algèbre de séries formelles en n indéterminées. Vu 3.1.5, pour prouver que B est un A-module projectif, il suffit de démontrer que le morphisme canonique $B \to \hat{B}$ est A-universellement injectif. Or $\hat{B}$ est plat sur B; il suffit donc de montrer que l'image de Spec($\hat{B}$) dans Spec(B) contient $\mathrm{Ass}_{B/A}(B)$ (3.2.6). Mais celà résulte du fait que $\hat{B}$ est fidèlement plat sur A et du fait que par hypothèse les fibres de la A-algèbre B sont intègres.

Proposition (3.3.2). *Soient f: $(X, x) \to (S, s)$ un morphisme localement de présentation finie, de schémas pointés, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module de présentation finie et S-plat en x. Alors, il existe un diagramme commutatif de schémas pointés*

$$\begin{array}{ccc} (X', x') & \longrightarrow & (S', s') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, x) & \longrightarrow & (S, s) \end{array}$$

dont les colonnes sont des voisinages étales élémentaires affines, tel que $\Gamma(X', \mathcal{M} \times_X X')$ *soit un* $\Gamma(S', \mathcal{O}_{S'})$ *module projectif.*

Celà résulte de 2.5 et 3.3.1.

Définition (3.3.3). Soient S un schéma, X un S-schéma localement de type fini, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module de type fini.

(i) Soit s un point de S; notons $(\tilde{S}, \tilde{s})$ un hensélisé de (S, s), $\tilde{X} = X \times_S \tilde{S}$, $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times_S \tilde{S}$. On dit que $\mathcal{M}$ est *pur* le long de $X \otimes k(s)$ si $\mathrm{Ass}_{\tilde{X}/\tilde{S}}(\tilde{\mathcal{M}})$ est contenu dans le générisé de $X \otimes k(\tilde{s})$ (autrement dit si pour tout point $\tilde{x}$ de $\mathrm{Ass}(\tilde{\mathcal{M}}/\tilde{S})$, l'adhérence de $\tilde{x}$ dans $\tilde{X}$ rencontre $X \otimes k(\tilde{s})$).

(ii) On dit que $\mathcal{M}$ est S-pur (ou est pur relativement à S), si $\mathcal{M}$ est pur le long de $X \otimes k(s)$ pour tout point s de S.

Exemples (3.3.4). (i) Si X est propre sur S, tout faisceau $\mathcal{M}$ de type fini sur X est S-pur.

(ii) Supposons X de type fini et séparé sur S à fibres finies; alors X est S-pur (i.e. $\mathcal{O}_X$ est S-pur) si et seulement si X est fini sur S.

(iii) Supposons X plat sur S à fibres géométriquement irréductibles, sans composantes immergées; alors X est S-pur.

La notion de pureté va nous permettre de caractériser les modules projectifs parmi les modules plats; en effet, on a le résultat suivant:

Théorème (3.3.5). *Soient A un anneau, B une A-algèbre de présentation finie, M un B-module de présentation finie, plat sur A. Alors M est un A-module projectif si et seulement si M est A-pur (i.e. si le module $\tilde{M}$ sur* Spec(B) *est pur relativement à* Spec(A)).

Nécéssité de la condition. Supposons que M est un A-module projectif et montrons que M est A-pur. On peut supposer A local hensélien, d'idéal maximal $\mathfrak{p}$. Soit Σ la partie multiplicative de B formée des éléments non diviseur de zéro dans $M \otimes_A k(\mathfrak{p})$. Alors, il résulte de 3.1.6 que le morphisme de localisation $M \to M[\Sigma^{-1}]$ est universellement A-injectif: a fortiori, tout élément de $\mathrm{Ass}_{B/A}(M)$ est une générisation de $\mathrm{Ass}(M \otimes_A k(\mathfrak{p}))$ et M est pur le long de $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$.

Avant d'aborder la suffisance de la condition de pureté, nous allons donner une caractérisation des modules S-purs.

Soient (S, s) un schéma pointé, X un S-schéma de présentation finie, $\mathcal{M}$ und $\mathcal{O}_X$-module de présentation finie, S-plat, Z l'ensemple fini $\mathrm{Ass}(\mathcal{M} \otimes k(s))$. On déduit de 3.3.2 que l'on peut trouver un voisinage étale élémentaire affine (S', s') de (S, s) et un morphisme étale $Y' \to X' = X \times_S S'$ vérifiant les conditions suivantes:

a) Y' est affine et l'image de Y' dans X' contient $Z' = \mathrm{Ass}(\mathcal{M} \otimes k(s'))$;

b) $\Gamma(Y', \mathcal{M} \times_X Y)$ est un $\Gamma(S', \mathcal{O}_{S'})$-module projectif.

Ces données étant fixées, on a le résultat suivant:

Proposition (3.3.6). *Pour que $\mathcal{M}$ soit pur le long de $X \otimes k(s)$, il faut et il suffit que l'image de Y' dans X' contienne* $\mathrm{Ass}_{X'/S'}(\mathcal{M} \times_X X')$ *au-dessus de* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S',s'})$.

Démonstration. On peut remplacer S par S', puis supposer S-local de point fermé s.

Supposons $\mathcal{M}$ pur le long de $X \otimes k(s)$. Comme l'image de Y' dans X est un ouvert, pour établir que cet ouvert contient $\mathrm{Ass}(\mathcal{M}/S)$, il suffit de montrer que tout point x de $\mathrm{Ass}(\mathcal{M}/S)$ est une générisation de Z. Par hypothèse, l'adhérence $\bar{x}$ de x dans X rencontre $X \otimes k(s)$. Soit donc t un point de $X \otimes k(s)$ qui est une spécialisation de x. Notons Σ la partie multiplicative de $\mathcal{O}_{X,t}$ formée des homothéties universellement injectives de $\mathcal{M}_t$. D'après 3.2.5, $\mathcal{O}_{X,t}[\Sigma^{-1}]$ est un anneau semi-local dont les idéaux maximaux sont des points de Z et le morphisme

$$\mathcal{M}_t \to \mathcal{M}_t[\Sigma^{-1}]$$

est universellement injectif. Il en résulte bien que les points associés aux fibres de $\mathcal{M}_t$ au-dessus de S, en particulier x, sont des générisations de Z.

Inversement, supposons que l'image de Y' dans X contienne $\mathrm{Ass}(\mathcal{M}/S)$ et montrons que $\mathcal{M}$ est S-pur le long de $X \otimes k(s)$. On peut supposer (S, s) hensélien (3.2.3). Soit alors $x \in \mathrm{Ass}(\mathcal{M}/S)$. Par hypothèse il existe un point y' de Y' au-dessus de x. Comme Y' est étale sur X, $y' \in \mathrm{Ass}(\mathcal{M} \times_X Y'/S)$. D'après la partie déjà démonstrée de 3.3.5, $\mathcal{M} \times_X Y'$ est S-pur, donc l'adhérence de y' dans Y' rencontre $Y' \otimes k(s)$; a fortiori, l'adhérence de x dans X rencontre $X \otimes k(s)$. C.Q.F.D.

Corollaire (3.3.7). *Soient $(T, t) \to (S, s)$ un morphisme de schémas pointés, X un S-schéma de présentation finie, $\mathcal{M}$ un O_X-module de présentation finie et S-plat. Si $\mathcal{M}$ est pur le long de $X \otimes k(s)$, $\mathcal{M} \times_S T$ est pur le long de $X \otimes k(t)$; la réciproque est vraie si T est S-plat.*

Celà résulte immédiatement de 3.3.6 et 3.2.3.

Corollaire (3.3.8). *Gardons les notations de* 3.3.6 *et supposons que $\mathcal{M}$ est pur le long de $X \otimes k(s)$. Alors, il existe un ouvert V' de S', contenant s', tel que* $\mathrm{Ass}_{X'/S'}(\mathcal{M} \times_X X')$ *soit contenu dans l'image de Y'. Si V est l'ouvert de S image de V', alors $\mathcal{M}|X \times_S U$ est U-pur. En particulier, l'ensemble des points $s \in S$ tels que $\mathcal{M}$ soit pur le long de $X \otimes k(s)$ est un ouvert.*

En effet, l'existence de l'ouvert V' résulte de 3.3.6 et du lemme ci-dessous; $\mathcal{M} \times_S V'$ est alors V'-pur d'après 3.3.6, donc $\mathcal{M} \times_S V$ est V-pur (3.3.7).

Lemme (3.3.9). *Soient $X \to S$ un morphisme de présentation finie, $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_X$-module de présentation finie, U un ouvert de X de type fini sur S. Alors, l'ensemble des points s de S tels que* $\mathrm{Ass}(\mathscr{M} \otimes k(s))$ *soit contenu dans U est une partie localement constructible de S.*

En effet par passage à la limite on se ramène au cas où S est noethérien auquel cas la propriété résulte immédiatement de EGA IV 9.8.3.

Corollaire (3.3.10). *Sous les hypothèses de passage à la limite de* 1.2.5, *supposons $\mathscr{M}_0$ de présentation finie sur X_0 et S_0-plat. Alors si $\mathscr{M}$ est pur le long de $X \otimes k(s)$ (resp. est S-pur), il existe un indice i tel que $\mathscr{M}_i$ soit pur le long de $X_i \otimes k(s_i)$ (resp. soit S_i-pur).*

Démonstration. La seconde assertion résulte de la première compte tenu de la dernière assertion de 3.3.8. Pour établir la première assertion, on choisit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X_0 & \longleftarrow & X'_0 & \longleftarrow & Y'_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ S_0 & \longleftarrow & S'_0 & & \end{array}$$

tel que (S'_0, s'_0) soit un voisinage étale élémentaire affine de (S_0, s_0), $X'_0 = X_0 \times_{S_0} S'_0$, Y'_0 est affine et étale sur X'_0, l'image de Y'_0 dans X'_0 contient $\mathrm{Ass}(\mathscr{M}_0 \otimes k(s'_0))$ et l'image réciproque de $\mathscr{M}_0$ sur Y'_0 a des sections globales qui forment un module projectif sur $\Gamma(S'_0)$ (cf. 3.3.6). Le fait que la propriété de pureté le long de $X \otimes k(s)$ passe à la limite résulte alors de 3.3.6, 3.3.9 et EGA IV 8.3.11.

Fin de la démonstration de 3.3.5. Supposons que le A-module plat M soit pur et montrons que M est alors un A-module projectif. Comme M est de présentation finie sur B, M est un A-module de présentation dénombrale; l'assertion à démontrer est donc de nature locale pour la topologie étale sur $\mathrm{Spec}(A)$ (3.1.4) et (3.3.7). Compte tenu de 3.3.8, on peut alors supposer qu'il existe une B-algèbre étale B', telle que $M \otimes_B B' = M'$ soit un A-module projectif et tel que l'image de $\mathrm{Spec}(B')$ dans $\mathrm{Spec}(B)$ contienne $\mathrm{Ass}_{B/A}(M)$. Mais alors le morphisme $M \to M'$ est universellement A-injectif (3.2.6) et par suite M est un A-module projectif (3.1.2). Ceci achève la démonstration de 3.3.5.

Corollaire (3.3.11). *Sous les hypothèses de* 3.3.5, *supposons que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, on ait* $\dim_{B \otimes k(\mathfrak{p})}(M \otimes k(\mathfrak{p})) \geqq 1$. *Alors si M est un A-module A-plat et A-pur, M est un A-module libre.*

En effet, par passage à la limite (3.3.10), on peut supposer A noethérien. Quitte à considérer les composantes connexes de $\mathrm{Spec}(A)$, on peut supposer $\mathrm{Spec}(A)$ connexe. Vu l'hypothèse faite sur les fibres de M, le A-module projectif M n'est pas de type fini, il est donc libre [6].

Corollaire (3.3.12). *Sous les hypothèses de* 3.3.5, *si* M *est* A*-plat et* A*-pur, il existe un recouvrement fini de* $\mathrm{Spec}(A)$, *par des ouverts affines d'anneaux* A_i *tel que* $M \otimes_A A_i$ *soit libre sur* A_i.

Corollaire (3.3.13). *Soient* $(X, x) \to (S, s)$ *un morphisme de présentation finie,* $\mathcal{M}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-module de présentation finie,* S*-plat en* x. *Supposons* (S, s) *local hensélien, alors il existe un voisinage ouvert affine* U *de* x *dans* X, *tel que* $\Gamma(U, \mathcal{M})$ *soit un* $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$*-module libre.*

On peut supposer X, affine, $\mathcal{M}$, S-plat et $\mathrm{Ass}(\mathcal{M} \otimes k(s))$ formé de générisations de x. Comme (S, s) est hensélien, il existe un voisinage étale affine de (X, x) soit X' tel que $\Gamma(X', \mathcal{M} \times_X X')$ soit un $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$-module projectif (3.3.2). Soit U un ouvert affine de X, contennant x et contenu dans l'image de X'; notons U' son image réciproque dans X'. Comme $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \times_X X'$ est S-pur, $\mathrm{Ass}(\mathcal{M}'/S)$ est formé de générisations de $\mathrm{Ass}(\mathcal{M}' \otimes k(s))$ et par suite $\mathrm{Ass}((\mathcal{M}|U)/S)$ est formé de générisations de $\mathrm{Ass}(\mathcal{M} \otimes k(s))$, donc $\mathcal{M}|U$ est pur le long de $\mathcal{M} \otimes k(s)$ et par suite est S-pur (3.3.8). Mais alors $\Gamma(U, \mathcal{M})$ est libre sur $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ (3.3.12).

3.4. Application aux modules de type fini

(3.4.0). Soient f: $(X, x) \to (S, s)$ un morphisme localement de présentation finie de schémas pointés, $\mathcal{M}$ un O_X-module de *type fini* et S-plat en x.

Nous allons voir que l'hypothèse de platitude faite sur $\mathcal{M}$, a tendance à rendre automatiquement de présentation finie le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{M}$ au voisinage de x.

Commençons par le cas d'une base locale hensélienne.

Théorème (3.4.1). *Sous les conditions de* 3.4.0, *si* (S, s) *est local hensélien, il existe un voisinage ouvert* U *de* x *dans* X *tel que* $\mathcal{M}|U$ *soit de présentation finie sur* $\mathcal{O}_U$ *est* S*-plat.*

Démonstration. La question est locale pour la topologie étale sur (X, x). Comme (S, s) est hensélien, on peut donc supposer que X est affine et que $\mathcal{M}$ admet en x un S-dévissage total $(Y_i \to T_i, \mathcal{L}_i \xrightarrow{\alpha_i} \mathcal{N}_i \to \mathcal{P}_i)_{1 \leq i \leq r}$ (1.2.3). On va prouver que $\mathcal{M}$ est alors de présentation finie sur X et S-plat. Il suffit de montrer que tous les α_i sont injectifs; par récurrence sur i, il suffit de montrer que α_1 est S-universellement injectif. Soit t_1 l'image de x dans T_1 et τ_1 le point générique de $T_1 \otimes k(s)$. Or $T_1 \otimes k(s)$ est intègre et par construction $(\mathcal{L}_1)_{\tau_1} \otimes k(s) \to (\mathcal{N}_1)_{\tau_1} \otimes k(s)$ est injectif; il en résulte que le morphisme

$$\Gamma(T_1, \mathcal{L}_1) \otimes k(s) \to (\mathcal{N}_1)_{t_1} \otimes k(s)$$

est aussi injectif. Comme $\Gamma(T_1, \mathcal{L}_1)$ est un $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$-module projectif (3.3.1), il résulte de 3.1.6 que α_1 est universellement S-injectif.

Corollaire (3.4.2). *Sous les conditions de* 3.4.0, $\mathcal{M}_x$ *est un* $\mathcal{O}_{X,x}$*-module de présentation finie.*

En effet, celà résulte de (3.4.1) dans le cas où (S, s) est hensélien; on en déduit le cas général par descente plate.

Pour étudier le passage du ponctuel au local, nous avons besoin de la variante suivante de EGA IV 3.3.1 (où l'hypothèse noethérienne est remplacée par une hypothèse de finitude relative):

Proposition (3.4.3). *Soient* $f\colon X \to S$ *un morphisme localement de présentation finie,* $\mathcal{M}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-module de type fini S-plat,* $\mathcal{N}$ *un* $\mathcal{O}_S$*-module. On a* $\operatorname{Ass}_X(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathcal{N})) = \operatorname{Ass}_{X/S}(\mathcal{M}) \cap f^{-1}(\operatorname{Ass}_S(\mathcal{N}))$.

Commençons par établir deux lemmes.

Lemme (3.4.4). *Soient* $f\colon X \to S$ *un morphisme fini,* $\mathcal{M}$ *un* O_X*-module. On a* $\operatorname{Ass}_S(f_*(\mathcal{M})) = f(\operatorname{Ass}_X(\mathcal{M}))$.

Démonstration. L'inclusion $\operatorname{Ass}_S(f_*(\mathcal{M})) \subset f(\operatorname{Ass}_X(\mathcal{M}))$ résulte de [13] II 3.1; reste à voir que si x est associé à $\mathcal{M}$ alors $s = f(x)$ est associé à $f_*(\mathcal{M})$. On peut supposer S local de point fermé s. Posons $A = O_{S,s}$ et $B = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Par hypothèse il existe $m \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ tel que x soit un point maximal de $V(\operatorname{Ann}_B(m))$. Comme B est fini sur l'anneau local A il est semi-local; comme x est au-dessus de s, x est un idéal maximal de B, donc il existe un élément c de x tel que x soit le seul idéal maximal de B contenant c. D'autre part il existe un élément b de $B - x$ et un entier n tel que $b c^n m = 0$. Alors $\operatorname{Ann}_B(bm)$ contient c^n et $\operatorname{Ann}_B(m)$; comme x est le seul idéal maximal de B contenant c^n on en déduit que $V(\operatorname{Ann}_B(bm)) = \{x\}$. Comme $A/\operatorname{Ann}_A(bm) \to B/\operatorname{Ann}_B(bm)$ est injectif et fini, on conclut que $V(\operatorname{Ann}_A(bm)) = \{s\}$ donc que $s \in \operatorname{Ass}_S(f_*(\mathcal{M}))$.

Lemme (3.4.5) *(invariance de l'assassin par localisation étale). Soient* (S, s) *un schéma pointé,* $(\tilde{S}, \tilde{s})$ *un hensélisé strict de* (S, s), M *un* $\mathcal{O}_S$*-module. Pour que* s *soit associé à* M *il faut et il suffit que* $\tilde{s}$ *soit associé à* $M \times_S \tilde{S}$.

Démonstration. On peut supposer S local de point fermé s; posons $A = \mathcal{O}_{S,s}$ et $\tilde{A} = \mathcal{O}_{\tilde{S},\tilde{s}}$. Si s est associé à M, il existe $m \in M$ tel que $\{s\} = V(\operatorname{Ann}_A(m))$; soit $\tilde{m}$ l'image réciproque de m dans $\tilde{M} = M \times_S \tilde{S}$; comme $\tilde{A}$ est A-plat on a $\operatorname{Ann}_{\tilde{A}}(\tilde{m}) = \tilde{A} \cdot \operatorname{Ann}_A(m)$; comme $\tilde{s}$ est le seul point de $\tilde{S}$ au-dessus de s on a $\{\tilde{s}\} = V(\operatorname{Ann}_{\tilde{A}}(\tilde{m}))$, donc $\tilde{s}$ est associé à $\tilde{M}$. Supposons $\tilde{s}$ associé à $\tilde{M}$; soit $\tilde{m}$ un élément de $\tilde{M}_{\tilde{s}}$ tel que $\{\tilde{s}\} = V(\operatorname{Ann}_{\tilde{A}}(\tilde{m}))$; il existe une sous-$A$-algèbre locale A' de A, localisé d'une A-algèbre étale, telle que m provienne d'un élément m' de $M' = M \otimes_A A'$; comme $\tilde{A}$ est A'-plat, le raisonnement ci-dessus montre que la projection s' de $\tilde{s}$ dans $\operatorname{Spec}(A')$ est associée à M'. D'après EGA IV 18.4.6, il existe une A-algèbre finie B, qui est un A-module libre, et un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B tels que A' soit A-isomorphe à $B_{\mathfrak{q}}$. Posons $N = M \otimes_A B$, de sorte que $\mathfrak{q}\in \mathrm{Ass}_B(N)$. D'après 3.4.4, on a $s\in \mathrm{Ass}_A(N)$; mais par ailleurs $\mathrm{Ass}_A(N)=\mathrm{Ass}_A(M)$ puisque N est un A-module libre cqfd.

Démonstration de 3.4.3. Soient x un point de X, $s=f(x)$; il faut voir que x est associé à $\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathcal{N})$ si et seulement si x est associé à $\mathcal{M}\otimes k(s)$ et s est associé à $\mathcal{N}$. Quitte à restreindre X à un ouvert contenant x, on peut supposer que $\mathrm{Ass}(\mathcal{M}\otimes k(s))$ est formé de générisations de x. D'après 3.4.5, 3.4.1, 3.3.2 et 3.3.12, on peut supposer (S, s) hensélien d'anneau A, X affine d'anneau B et $\Gamma(X, \mathcal{M})$ libre sur A.

Supposons que $x\in \mathrm{Ass}_B(M\otimes_A N)$. Les homothéties de $M\otimes_A N$, définies par les éléments de x ne sont donc pas injectives, par suite les homothèties de M définies par les éléments de x ne sont pas universellement injectives relativement à A, donc $x\in \mathrm{Ass}(M\otimes k(s))$ par 3.2.5. Prouvons que s est dans $\mathrm{Ass}_S(N)$. Comme M est un A-module libre, il suffit de voir que $s\in \mathrm{Ass}_A(M\otimes_A N)$. Soit a un élément de s. Par hypothèse, il existe un élément m de $M\otimes_A N$ tel que x soit un point maximal de $V(\mathrm{Ann}_B(m))$. Il existe donc un élément b de $B-x$ et un entier $n>0$, tels que $a^n bm=0$. Comme $\mathrm{Ass}(M\otimes k(s))$ est contenu dans le générisé de x, l'homothétie de M définie par b est A-universellement injective (3.1.6), donc l'homothètie de $M\otimes_A N$ définie par b est injective et par suite $a^n m=0$, donc $V(\mathrm{Ann}_A(m))=\{s\}$ cqfd.

Supposons $x\in \mathrm{Ass}(M\otimes k(s))$ et $s\in \mathrm{Ass}_S(N)$; montrons que $x\in \mathrm{Ass}_B(M\otimes_A N)$. Soit n un élément de N tel que $\{s\}=V(\mathrm{Ann}_A(n))$. Quitte à remplacer N par le sous-A-module engendré par n (ce qui est loisible puisque M est A-plat) et S par le sous-schéma fermé défini par $\mathrm{Ann}_A(n)$, on peut supposer que $N=A$ et que S a un seul point s. L'anneau A est alors autoassocié ([13] II 4.1). D'après la partie déjà démontrée de 3.4.3, $\mathrm{Ass}_B(M\otimes_A N)$ est contenu dans $\mathrm{Ass}(M\otimes k(s))$ donc est fini. Par [13] II 1.3, on est donc amené à montrer que les homothéties de M définies par les éléments de x ne sont pas injectives. Mais comme M est un A-module libre et comme A est autoassocié, tout endomorphisme du A-module M, qui est injectif, est A-universellement injectif ([13] II 4.5). L'assertion résulte donc de 3.2.5, puisque $x\in \mathrm{Ass}(M\otimes k(s))$. Cqfd.

Théorème (3.4.6). *Soient $f\colon X\to S$ un morphisme localement de présentation finie, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module de type fini. On suppose que* $\mathrm{Ass}(S)$ *est localement fini. Alors, l'ensemble U des points de X où $\mathcal{M}$ est S-plat est ouvert et $\mathcal{M}|U$ est un $\mathcal{O}_U$-module de présentation finie.*

Démonstration. Soient x un point de X où $\mathcal{M}$ est S-plat, $s=f(x)$; cherchons un voisinage ouvert V de x dans X tel que $\mathcal{M}|V$ soit S-plat et de présentation finie sur $\mathcal{O}_V$. D'après 3.4.2 et 2.6, on peut, quitte à restreindre X, construire un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules

$$u\colon \mathcal{N}\to\mathcal{M}$$

tel que $\mathcal{N}$ soit de présentation finie et S-plat et tel que u_x soit un isomorphisme. Comme $\mathrm{Ass}(S)$ est localement fini, il en est de même de $\mathrm{Ass}(\mathcal{N})$ (3.4.3); quitte alors à restreindre X, on peut supposer que $\mathrm{Ass}(\mathcal{N})$ est contenu dans le générisé de x et que u est surjectif. Posons $\mathcal{R} = \mathrm{Ker}(u)$. Alors $\mathrm{Ass}(\mathcal{R}) \subset \mathrm{Ass}(\mathcal{N})$, donc $\mathrm{Ass}(\mathcal{R}) = \emptyset$, puisque u_x est un isomorphisme et par suite $\mathcal{R} = 0$ ([13] II 1.2), donc u est bijectif cqfd.

Corollaire (3.4.7). *Soient A un anneau intègre et B une A-algèbre de type fini qui est plate sur A. Alors B est de présentation finie.*

Remarques (3.4.7). (i) L'assertion 3.4.2 généralise le fait bien connu qu'un module plat de type fini sur un anneau local est de présentation finie (et par suite libre (Bourbaki — Alg. com. I §2 ex. 23)), tandis que l'assertion 3.4.6 généralise le fait bien connu qu'un module plat de type fini sur un anneau intègre est projectif (Bourbaki Alg. com. II §5 ex. 6).

(ii) Compte tenu de 3.4.2, l'équivalence des conditions (i), (i'), (ii) et (ii') de 2.1 reste valable si au lieu de supposer M de présentation finie, on suppose seulement M de type fini; ces conditions sont aussi équivalentes à (iii'), à condition de remplacer U' par $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S',s'})$. Par contre, (i) n'est pas équivalent à (iii) lorsque M est de type fini: si A est un anneau local dont l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ est A-plat et tel que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ (par exemple un anneau de valuation non discrète de hauteur 1), alors $\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m}, A/\mathfrak{m}) = 0$, bien que $A/\mathfrak{m}$ ne soit pas A-plat si $\mathfrak{m} \neq 0$.

(iii) Dans (3.4.6), la condition de finitude sur $\mathrm{Ass}(S)$ ne peut pas être supprimée. Ainsi, lorsque A est un anneau absolument plat (i.e. les anneaux locaux de A sont des corps), pour que tout A-module (plat) de type fini soit de présentation finie, il faut et il suffit que A soit un produit fini de corps.

(iv) Soit A l'anneau $\mathbb{Z} \oplus I$ où I est un idéal de carré nul égal, comme $\mathbb{Z}$-module à $\oplus\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (où p parcourt l'ensemble des nombres premiers). Alors, l'ensemble des points de platitude du A-module de type fini $\mathbb{Z}$ est le point générique de $\mathrm{Spec}(A)$ qui n'est pas ouvert dans $\mathrm{Spec}(A)$.

(v) Question: le résultat de 3.4.1 est-il valable lorsque (S, s) est supposé local, non nécessairement noethérien?

§4. Platificateur universel

4.1. Platificateur d'un module de type fini (cas local hensélien)

L'outil essentiel de ce paragraphe est le résultat suivant:

Théorème (4.1.1). *Soient S un schéma, X un S-schéma de présentation finie $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module de présentation finie, S-plat et S-pur* (3.3.3), *$\mathcal{N}$ un O_X-module quotient de $\mathcal{M}$, $u: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ l'homomorphisme surjectif canonique.*

Soit F: $(\mathrm{Sch}/S)^0 \to (\mathrm{Ens})$ *le sous-foncteur de l'objet final qui «rend* u *bijectif» (de façon précise, si* T *est un* S*-schéma, on a* $F(T)=\{\emptyset\}$ *si* $u \times_S T$ *est bijectif et* $F(T)=\emptyset$ *sinon); alors,* F *est représentable par un sous-schéma fermé de* S*, qui est de présentation finie si* $\mathcal{N}$ *est de présentation finie.*

Démonstration. La question est locale sur S pour la topologie étale. On peut donc supposer que S est affine d'anneau A et qu'il existe un morphisme étale d'un schéma affine Y dans X, dont l'image contient $\mathrm{Ass}_{X/S}(\mathcal{M})$ et tel que $\Gamma(Y, \mathcal{M} \times_X Y)$ soit un A-module libre (3.3.6, 3.3.8, 3.3.12). Alors $Y \to X$ est S-universellement séparant pour $\mathcal{M}$ (cf. 3.2.6), donc, pour tout S-schéma T, $u \times_S T$ est inversible si et seulement si $(u \times_X Y) \times_S T$ est inversible. On est donc ramené au cas où $X = Y$ est affine et $M = \Gamma(X, \mathcal{M})$ est un A-module libre. Posons $N = \Gamma(X, \mathcal{N})$, $R = \Gamma(X, \mathrm{Ker}(u))$. Alors il est immédiat que F est représenté par $\mathrm{Spec}(A/I)$, où I est l'idéal de A engendré par les coordonnées des éléments de R par rapport à une base de M. Si N est de présentation finie, on voit que I est de type fini, par passage à la limite inductive et réduction au cas où A est noethérien (3.3.10).

Voici une première application de 4.1.1:

Théorème (4.1.2). *Soient* f: $(X, x) \to (S, s)$ *un morphisme localement de présentation finie,* $\mathcal{M}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-module de type fini. On suppose* (S, s) *local hensélien et on note* C *la catégorie des schémas locaux pointés au-dessus de* (S, s).

Soit F: $C^0 \to (\mathrm{Ens})$ *le sous-foncteur du foncteur final qui «rend* $\mathcal{M}$ *plat sur* S *en* x*» (de façon précise, si* g: $(S', s') \to (S, s)$ *est un objet de* C*, on a* $F(g)=\{\emptyset\}$ *si* $\mathcal{M} \otimes_S S'$ *est* S'*-plat aux points de* $X \otimes_S k(s')$ *qui sont au-dessus de* x *et* $F(g)=\emptyset$ *sinon). Alors* F *est représentable par un sous-schéma fermé de* S*, qui est de présentation finie si* $\mathcal{M}$ *est de présentation finie.*

Démonstration. La dernière assertion résulte de la première par réduction au cas noethérien. La question de la représentabilité de F est un problème local pour la topologie étale sur X. Comme (S, s) est hensélien, il résulte de 1.2.3 que l'on peut supposer que X est affine et que $\mathcal{M}$ admet un S-dévissage total en x, de longueur r $(Y_i \to T_i, \mathcal{L}_i \xrightarrow{\alpha_i} \mathcal{N}_i \to \mathcal{P}_i)_{1 \leq i \leq r}$. Si $r=0$, on a $\mathcal{M}=0$ et F est le foncteur final. Supposons $r>0$ et raisonnons par récurrence sur r. D'après l'hypothèse de récurrence, le foncteur G qui rend $\mathcal{P}_1$ plat sur S au point t_1 image de x dans T_1 est représentable par un sous-schéma fermé S_1 de S. D'après 2.1 et 3.4.7 (ii), F est un sous-foncteur de G. Quitte alors à remplacer S par S_1, on peut supposer que $\mathcal{P}_1$ est S-plat en t_1. Soit τ_1 le point générique de $X \otimes k(s)$ et U un ouvert affine de T_1, contenant

τ_1, tel que $\alpha_1|U$ soit surjectif. Il résulte encore de 2.1 et 3.4.7 que le foncteur F coïncide avec le foncteur qui rend $\alpha_1|U$ bijectif. Comme U est lisse sur S à fibres géométriquement intègres, U est S-pur, donc F est représentable par un sous-schéma fermé d'après 4.1.1, cqfd.

4.2. *Application à l'amélioration de résultats antérieurs*

Lemme (4.2.1). *Soient A un anneau, I un idéal nilpotent de A, $u: M \to N$ une application A-linéaire. Si $u \otimes_A (A/I)$ est A-universellement injective, et si N est A-plat, alors u est A-universellement injective.*

Démonstration. On se ramène tout de suite au cas où $I^2 = 0$. Supposons d'abord u injective; il s'agit de voir que $P = \operatorname{coker}(u)$ est A-plat. Comme P/IP est (A/I)-plat, il suffit de voir que $I \otimes_A P \to P$ est injectif (Bourbaki – Alg. com. III §5 Th. 1). Or par hypothèse, le diagramme ci-dessous a ses lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I \otimes_A M & \longrightarrow & I \otimes_A N & \longrightarrow & I \otimes_A P & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(la première ligne est exacte car I est un (A/I)-module et $u \otimes_A (A/I)$ est universellement A-injectif). On conclut alors à l'aide du diagramme du serpent. Si on ne fait plus l'hypothèse que u est injectif, on déduit de ce qui précède, en remplaçant M par $\operatorname{Im}(u)$, que $\operatorname{Im}(u)$ est A-plat, puis par la suite exacte des tores, que $\operatorname{Ker}(u) = I \cdot \operatorname{Ker}(u)$, donc $\operatorname{Ker}(u) = 0$ cqfd.

Lemme (4.2.2). *Soient $f: (X, x) \to (S, s)$ un morphisme localement de présentation finie, $\mathscr{M}$ un O_X-module de type fini, N un $O_{S,s}$-module plat, $u: \mathscr{M}_x \to N$ une application $O_{S,s}$-linéaire. Si $u \otimes k(s)$ est injective, u est S-universellement injective et par suite $\mathscr{M}_x$ est S-plat.*

Démonstration. Par descente plate, on peut supposer (S, s) hensélien. Quitte à restreindre X, on peut supposer X affine. Comme $X \otimes k(s)$ est noethérien et $\mathscr{M}$ de type fini, $\mathscr{M}$ est limite inductive filtrante de X-modules de présentation finie $\mathscr{M}_i$ telle que le morphisme canonique $\mathscr{M}_i \to \mathscr{M}$ induise un isomorphisme $(\mathscr{M}_i)_x \otimes k(s) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_x \otimes k(s)$ et l'on est ramené au cas où $\mathscr{M}$ est de présentation finie. Soit alors I le plus petit idéal de $\mathcal{O}_{S,s}$ tel que $\mathscr{M}_x / I \mathscr{M}_x$ soit plat sur $\mathcal{O}_{S,s}/I$ (4.1.2). Il suffit de montrer que $I = 0$. En effet, si ce point est acquis, on pourra, quitte à restreindre X, supposer que $\Gamma(X, \mathscr{M})$ est un $\mathcal{O}_{S,s}$-module libre tel que $\operatorname{Ass}(\mathscr{M} \otimes k(s))$ soit contenu dans le générisé de x (3.3.13); mais alors $\Gamma(X, \mathscr{M}) \to N$ est S-universellement injectif (3.1.6); par passage à la limite inductive sur les voisinages affines de x dans X, on conclut que u est S-universellement injectif.

Ceci étant, prouvons que $I=0$. Comme $\mathcal{M}$ est de présentation finie, I est un idéal de type fini (4.1.2) et il suffit de montrer que $I=I^2$. Quitte à remplacer $O_{S,s}$ par $O_{S,s}/I^2$, on peut supposer $I^2=0$. Mais alors, I est nilpotent, N est S-plat et $u \otimes (O_{S,s}/I)$ est S-universellement injectif; il suffit donc d'appliquer 4.2.1.

Théorème (4.2.3). *Soient $f: (X, x) \to (S, s)$ un morphisme localement de présentation finie, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module de type fini. Pour que $\mathcal{M}$ soit S-plat, en x, il faut et il suffit que $\mathcal{M}$ soit S-plat aux points de* $\mathrm{Ass}(\mathcal{M} \otimes k(s))$ *qui sont des générisations de x.*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire; pour voir qu'elle est suffisante, notons Σ la partie multiplicative de $\mathcal{O}_{X,x}$ formée des homothèties injectives de $\mathcal{M}_x \otimes k(s)$; alors $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}[\Sigma^{-1}])$ est le schéma semi-local générisé de $\mathrm{Ass}(\mathcal{M}_x \otimes k(s))$ et la condition de l'énoncé exprime que $\mathcal{M}_x[\Sigma^{-1}]$ est S-plat. Le lemme 4.2.2 montre alors que l'application canonique $\mathcal{M}_x \to \mathcal{M}_x[\Sigma^{-1}]$ est S-universellement injective, donc $\mathcal{M}_x$ est S-plat.

Corollaire (4.2.4). *Soient (S, s) un schéma local, $X \to S$ un morphisme localement de présentation finie, $\mathcal{M}$ un O_X-module de type fini. On suppose que $\mathcal{M}$ est pur le long de $X \otimes k(s)$ et est S-plat aux points de $X \otimes k(s)$. Alors $\mathcal{M}$ est S-plat.*

Démonstration. Comme $\mathcal{M}$ est S-pur, $\mathrm{Ass}(\mathcal{M}/S)$ est formé de générisations de $X \otimes k(s)$, donc $\mathcal{M}$ est S-plat aux points de $\mathrm{Ass}(\mathcal{M}/S)$ et par suite $\mathcal{M}$ est S-plat (4.2.3).

Question. Sous les conditions de 4.2.4, $\mathcal{M}$ est-il un O_X-module de présentation finie?

Corollaire (4.2.5). *Soient $f: X \to S$ un morphisme de présentation finie, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module de type fini. On suppose, soit que $\mathcal{M}$ est de présentation finie, soit que* $\mathrm{Ass}(S)$ *est localement fini. Alors, l'ensemble des points s tels que $\mathcal{M}$ soit S-plat aux points de $f^{-1}(s)$ et pur le long de $f^{-1}(s)$ est ouvert.*

Démonstration. Soit s un point de l'ensemble en question. D'après 4.2.4, $\mathcal{M}$ est plat au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$. Mais alors $\mathcal{M}$ est plat et de présentation finie au-dessus d'un voisinage ouvert quasi-compact U de $X \times_S \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ dans X (2.6 et 3.4.6). Comme X est de présentation finie sur S, on voit par passage à la limite que U contient l'image réciproque d'un ouvert V de S contenant s. Quitte à restreindre V, on peut supposer que $\mathcal{M}|X \times_S V$ est V-pur (3.3.8) cqfd.

Comme application de 4.2.4 et 3.4.6, nous laissons au lecteur le soin de préciser le théorème de «liberté générique» (EGA IV 6.9.2).

Nous allons maintenant donner quelques simplifications et généralisations de certains résultats techniques de EGA IV 11.

Tout d'abord, nous allons simplifier la démonstration de EGA IV 11.2.9 et démontrer la version locale de ce résultat (ce qui répond à la question posée dans EGA IV 11.2.10).

Théorème (4.2.6). *Soient A_0 un anneau, $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ un système inductif filtrant de A_0-algèbres, B_0 une A_0-algèbre de présentation finie, I_0 un idéal de type fini de B_0, M_0 un B_0-module de présentation finie.*

Posons $B_\lambda = B_0 \otimes_{A_0} A_\lambda$, $I_\lambda = I_0 B_\lambda$, $M_\lambda = M_0 \otimes_{A_0} A_\lambda$, $A = \varinjlim A_\lambda$, $B = \varinjlim B_\lambda$, $I = \varinjlim I_\lambda$, $M = \varinjlim M_\lambda$. Soit $\bar{\mathfrak{q}}$ un idéal premier de $\bar{B} = B/I$, $\bar{\mathfrak{q}}_\lambda$ son image réciproque dans $\bar{B}_\lambda = B_\lambda/I_\lambda$.

Pour que le $\bar{B}$-module $\operatorname{gr}^{\bullet}_{I}(M)$ soit A-plat, en $\bar{\mathfrak{q}}$, il faut et il suffit que le $\bar{B}_\lambda$-module $\operatorname{gr}^{\bullet}_{I_\lambda}(M_\lambda)$ soit A-plat en $\bar{\mathfrak{q}}_\lambda$ pour λ assez grand; si λ est ainsi choisi, l'homomorphisme canonique

$$\operatorname{gr}^{\bullet}_{I_\lambda}(M_\lambda) \otimes_{A_\lambda} A \to \operatorname{gr}^{\bullet}_{I}(M)$$

est bijectif en $\bar{\mathfrak{q}}$.

Démonstration. La suffisance de la condition et la dernière assertion résultent de la version locale de EGA IV 11.2.9.2; prouvons la nécessité. Soient $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{p}_\lambda$) l'image réciproque de $\bar{\mathfrak{q}}$ dans A (resp. A_λ). Par hensélisation et descente plate, on peut supposer A_λ local hensélien d'idéal maximal $\mathfrak{p}_\lambda$ pour tout λ, auquel cas A est hensélien, d'idéal maximal $\mathfrak{p}$. Par l'artifice de EGA IV 11.2.9 (iv), on peut supposer que B_0 et $\bar{B}_0$ sont lisses sur A_0, et que $C_0 = \operatorname{gr}^{\bullet}_{I_0}(B_0)$ est une $\bar{B}_0$-algèbre de polynômes, auquel cas, l'homomorphisme $C_0 \otimes_{A_0} A \to C = \operatorname{gr}^{\bullet}_{I}(B)$ est un isomorphisme.

Le point essentiel de la démonstration consiste à montrer que quitte à remplacer B par B_b, où b est un élément convenable de $B - \mathfrak{q}$ (on a noté $\mathfrak{q}$ l'image réciproque de $\bar{\mathfrak{q}}$ dans B), alors on peut supposer que $\operatorname{gr}^{\bullet}_{I}(M)$ est A-plat et de présentation finie sur C.

Notons $S = \operatorname{Spec}(A)$, s le point fermé de S, $X = \operatorname{Spec}(C)$, $Y = \operatorname{Spec}(\bar{B})$, y le point de Y correspondant à $\bar{\mathfrak{q}}$, $f\colon X \to Y$ le morphisme canonique, $U = X - Y$, $P = \operatorname{Proj}_Y(C)$, $\pi\colon U \to P$ le morphisme lisse surjectif canonique, $g\colon P \to Y$ le morphisme structural; enfin l'augmentation canonique de la $\bar{B}$-algèbre C correspond à une Y-section $\sigma\colon Y \to X$, d'image $(X - U)$ (Y est la ligne des sommets du cône projetant X du Y-schéma projectif P).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dd, shift right, "f"'] & U \arrow[l, hook'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ & & P \arrow[dll, "g"] \\ Y \arrow[uu, shift right, "\sigma"'] & & \end{tikzcd}$$

Le C-module de type fini $\operatorname{gr}^{\bullet}_{I}(M)$ définit un $\mathcal{O}_X$-module de type fini $\mathcal{N}$ et un $\mathcal{O}_P$-module de type fini $\mathcal{Q}$ tels que $\mathcal{N}|U = \pi^*(\mathcal{Q})$.

Par hypothèse, $\mathcal{N}$ est S-plat aux points de $f^{-1}(y)$, donc $\mathcal{Q}$ est S-plat aux points de $f^{-1}(y)$. Comme (S, s) est hensélien, et comme y est au-dessus de s, il existe un voisinage ouvert V de $f^{-1}(y)$ dans X, tel que $\mathcal{N}|V$ soit S-plat et de présentation finie sur $\mathcal{O}_V$ (3.4.1); de même, il existe un voisinage ouvert V' de $g^{-1}(y)$ dans P tel que $\mathcal{Q}|V'$ soit S-plat et de présentation finie sur $\mathcal{O}_{V'}$. Comme g est propre, on peut prendre V' de la forme $g^{-1}(W)$, où W est un voisinage ouvert de y dans Y, contenu dans $\sigma^{-1}(V)$. Il est clair que $\mathcal{N}$ est alors S-plat et de présentation finie sur $f^{-1}(W)$. Il suffit donc de choisir un élément b de $B-\mathfrak{q}$ de façon que Y_b soit contenu dans W.

On suppose désormais que $\mathrm{gr}_I^\bullet(M)$ est un A-module plat, de présentation finie sur C. Procédant comme dans EGA IV 11.2.9 I) et III) on se ramène au cas où les A_λ sont noethériens et les morphismes de transition injectifs; on termine alors comme dans EGA IV 11.2.9 VI).

Corollaire (4.2.7). *Soient A un anneau, B une A-algèbre de présentation finie, I un idéal de type fini de B, M un B-module de présentation finie, $\bar{\mathfrak{q}}$ un idéal premier de $\bar{B}=B/I$, $\mathfrak{q}$ l'image réciproque de $\bar{\mathfrak{q}}$ dans B. Si $\mathrm{gr}_I^\bullet(M)$ est A-plat en $\bar{\mathfrak{q}}$, il est A-plat au voisinage de $\bar{\mathfrak{q}}$ dans* $\mathrm{Spec}(\bar{B})$ *et M est A-plat en $\mathfrak{q}$.*

Démonstration. D'après 4.2.6 on peut supposer A noethérien. La première assertion résulte de 2.6 et la seconde de EGA 0_{III} 10.2.6.

On se propose maintenant de déduire de 4.1.2 certains résultats de EGA IV 11 sur la descente de la platitude et de les étendre aux modules de type fini.

Théorème (4.2.8) (cf. EGA IV 11.5.1). *Soient $(X, x)\to(S, s)$ un morphisme localement de présentation finie, $\mathcal{M}$ un O_X-module de type fini, $u_i\colon (S_i, s_i)\to(S, s)_{i\in I}$ une famille de morphismes. On suppose que (S, s) est local hensélien d'anneau A, que (S_i, s_i) est local d'anneau A_i et que l'homomorphisme $A\to\prod_{i\in I} A_i$ est injectif. Alors M est S-plat en x dans chacun des deux cas suivants:*

a) *pour tout $i\in I$, $\mathcal{M}_i=\mathcal{M}\times_S S_i$ est S_i-plat aux points de $X_i\otimes k(s_i)$ au-dessus de x.*

b) *$k(x)$ est une extension primaire de $k(s)$ et pour tout $i\in I$, il existe un point x_i de $X_i\otimes k(s_i)$, au-dessus de x, tel que $\mathcal{M}_i$ soit S_i-plat en x_i.*

Démonstration. Si a) est vérifié, $\mathcal{M}$ est S-plat en x d'après 4.1.2. Supposons b) vérifié et montrons que b) $\Rightarrow$ a). On doit vérifier que $\mathcal{M}_i$ est S_i-plat en tout point de $X_i\otimes k(s_i)$ au-dessus de x. D'après 4.2.3, il suffit de montrer que $\mathcal{M}_i$ est S_i-plat en tout point z_i de $\mathrm{Ass}(\mathcal{M}_i\otimes k(s_i))$ qui est au-dessus d'une générisation de x; finalement il suffit de voir que z_i est une générisation de x_i. Soient z l'image de z_i dans $X\otimes k(s)$,

Z l'adhérence de z dans $X \otimes k(s)$ (qui contient donc l'adhérence Y de x), Z_i l'adhérence de z_i dans $X_i \otimes k(s_i)$. Alors, il résulte de 3.2.3 que Z_i est une composante irréductible de $Z \otimes_{k(s)} k(s_i)$; d'autre part comme $k(x)$ est une extension primaire de $k(s)$, Y est géométriquement irréductible. Il résulte alors du lemme ci-après que Z_i contient l'image réciproque de Y et à fortiori x_i.

Lemme (4.2.9). *Soient k un corps, Z un k-schéma irréductible de type fini, Y un sous-schéma fermé géométriquement irréductible de Z, k' une extension de k, $Z' = Z \otimes_k k'$, $Y' = Y \otimes_k k'$. Alors, toute composante irréductible de Z' contient Y'.*

Démonstration. On peut supposer k' algébriquement clos, soit $\bar{k}$ la fermeture intégrale de k dans k'; comme $\bar{k}$ est algébriquement clos, tout $\bar{k}$-schéma irréductible est géométriquement irréductible (EGA IV 4.4.4) et on peut se limiter au cas où $k' = \bar{k}$ est une extension algébrique de k. Soit T' une composante irréductible de Z'. Comme $Z' \to Z$ est fidèlement plat, l'image de T' dans Z contient le point générique de Z; comme le morphisme $T' \to Z$ est entier, il est donc surjectif. Par suite T' contient un point de Z' au-dessus du point générique de Y; Comme Y est géométriquement irréductible, ce point est nécessairement le point générique de Y', donc T' contient Y'.

On laisse au lecteur le soin de déduire de 4.2.8 les énoncés de EGA IV 11.5.3 et 11.6.1 (étendus aux modules de type fini). Le critère valuatif de platitude (EGA IV 11.8.1), peut lui aussi être légèrement amélioré:

Corollaire (4.2.10). *Soient $(X, x) \to (S, s)$ un morphisme de présentation finie, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module de type fini. On suppose (S, s) local réduit. Pour que $\mathcal{M}$ soit S-plat en x, il suffit que la condition suivante soit vérifiée:*

Pour tout morphisme $(S', s') \to (S, s)$, où S' est le spectre d'un anneau de valuation de point fermé s', $\mathcal{M} \times_S S'$ est S'-plat aux points de $X \otimes_{k(s)} k(s')$ au-dessus de x.

Démonstration. Comme l'hensélisé d'un anneau réduit est réduit, on peut supposer (S, s) hensélien d'anneau A. Alors A se plonge dans le produit des anneaux locaux intègres $A/\mathfrak{p}_i$, où $\mathfrak{p}_i$ est un idéal premier minimal de A, et chacun des $A/\mathfrak{p}_i$ est dominé par un anneau de valuation; il suffit donc d'appliquer 4.2.6.

Le corollaire ci-dessous est à rapprocher de Bourbaki Alg. com. III § 5 th. 1.

Corollaire (4.2.11). *Soient f: $A \to B$ un morphisme local d'anneaux locaux, I un idéal de A, M un B-module de type fini. On suppose que A est hensélien et séparé pour la topologie I-adique et que B est un localisé d'une A-algèbre de type fini. Pour que M soit A-plat, il faut et il suffit* *que $M/I^n M$ soit A/I^n-plat pour tout n (ou encore que $\mathrm{gr}_I^\bullet(M)$ soit $\mathrm{gr}_I^\bullet(A)$-plat).*

C'est une conséquence immédiate de 4.1.2.

(Nous ignorons si 4.2.11 reste valable sans que A soit hensélien.)

Remarque (4.2.12). Le plan suivi dans 4.2 peut être adapté à la situation suivante: Soient $f: A \to B$ un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens, M un B-module de type fini. On déduit de 4.2.1 et du th. de Krull l'analogue suivant de 4.2.2: Soient N un A-module plat, $u: M \to N$ une application A-linéaire, k le corps résiduel de A; si $u \otimes_A k$ est injective, u est A-universellement injective (cf. EGA 0_{III} 10.2.4). Comme dans 4.2.3 on en déduit que M est A-plat si et seulement s'il est A-plat aux points de $\mathrm{Ass}_B(M \otimes_A k)$. Lorsque A est *complet* on a un analogue de 4.1.2: il existe un plus petit idéal I de A tel que M/IM soit A/I-plat, et pour tout homomorphisme local d'anneaux locaux $g: A \to A'$, $M \otimes_A A'$ est A'-plat si et seulement si $g(I)=0$. Ces résultats, joints au passage à la limite, sont essentiellement les arguments utilisés dans les résultats de EGA IV 11 qui ont été cités ci-dessus.

4.3. Platificateur d'un module S-pur (cas global)

L'analogue global de 4.1.2 est le résultat suivant:

Théorème (4.3.1). *Soient $f: X \to S$ un morphisme de présentation finie, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module de présentation finie S-pur, n un entier. Soit*

$$F_n: (\mathrm{Sch}/S)^0 \to \mathrm{Ens}$$

le sous-foncteur du foncteur final qui «rend $\mathcal{M}$ plat sur S en dimensions $\geqq n$». De façon précise, si T est un S-schéma, on a $F_n(T)=\{\emptyset\}$ si $\dim(Z/T) < n$ (où Z désigne le fermé de $X \times_S T$ lieu des points où $\mathcal{M} \times_S T$ n'est pas T-plat) et $F_n(T)=\emptyset$ sinon. Alors $F_n \to S$ est représentable par un monomorphisme de présentation finie.

Prouvons d'abord un lemme:

Lemme (4.3.2). *Soient $f: X \to S$ un morphisme lisse à fibres géométriquement intègres, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module de type fini, p un entier, H_p: $(\mathrm{Sch}/S)^0 \to (\mathrm{Ens})$ le sous-foncteur du foncteur final qui «rend $\mathcal{M}$ libre de rang p aux points génériques des fibres de f». Alors H_p est représentable par un sous-schéma de S qui est de présentation finie si $\mathcal{M}$ est de présentation finie.*

Démonstration. La seconde assertion résulte de la première par réduction au cas noethérien; prouvons la première; on va d'abord prouver que si H_q est vide pour tout $q>p$ alors H_p est représentable par un sous-schéma fermé de S. La question est locale sur S; soit s un point de S, cherchons un voisinage ouvert de s dans S au-dessus duquel l'assertion soit vraie. Notons x le point générique de $f^{-1}(s)$. Par hypothèse on a

$\mathrm{rg}_{k(x)}((\mathcal{M}\otimes k(s))_x) \leqq p$; il existe donc un voisinage ouvert affine V de x dans X et un homomorphisme surjectif $u: \mathcal{O}_V^p \to \mathcal{M}|V$. Quitte à restreindre S on peut supposer $f(V)=S$ auquel cas V est un ouvert S-universellement schématiquement dominant de X. Il est alors clair que H_p est égal au foncteur qui rend u inversible, de sorte que l'assertion résulte de 4.1.1.

Cela dit, comme l'assertion à démontrer est locale sur S, on peut supposer que H_p est vide pour p assez grand; raisonnons par récurrence sur le plus grand entier n tel que $H_n \neq \emptyset$. Pour $n=0$, H_n est le foncteur final et tous les autres H_n sont vides. Pour $n>0$, H_n est représentable par un sous-schéma fermé de S d'après ce qui précède; les autres H_p sont disjoints de H_n donc sont des sous-foncteurs de l'ouvert $S-H_n=U$; il suffit d'appliquer à U l'hypothèse de récurrence.

Démonstration de 4.3.1. La question est locale pour la topologie étale sur S. On peut supposer $F_n=S$ pour n assez grand et raisonner par récurrence décroissante sur n; supposons donc F_{n+1} représentable par un monomorphisme de présentation finie. Comme F_n est un sous-foncteur de F_{n+1} on peut remplacer S par F_{n+1}: en effet, localement pour la topologie étale sur F_{n+1} et sur S, $F_{n+1}\to S$ est une immersion fermée, donc l'hypothèse de pureté sur M est préservée par le changement de base $F_{n+1}\to S$. On peut donc supposer que M est S-plat en dimensions $>n$.

Soit s un point de S, cherchons un voisinage étale élémentaire (S', s') de (S, s) tel que $F_n \times_S S'$ soit représentable. Pour cela on peut supposer que S est affine et qu'il existe un morphisme étale d'un schéma affine Y dans X d'image contenant $X\otimes k(s)$, tel que Y soit somme de sous-schémas ouverts et fermés Y_j, et que, pour tout j, il existe un S-dévissage $(Z_{ij}\to T_{ij}, \mathcal{L}_{ij} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \mathcal{N}_{ij} \to \mathcal{P}_{ij} \to 0)$ de $\mathcal{M}_j=\mathcal{M}\times_X Y_j$ en dimensions $\geqq n$ au-dessus de s, tel que, pour tous les indices i tels que $\dim(T_{ji}/S)>n$, l'homomorphisme α_{ji} soit S-universellement injectif (cf. 2.9). Comme l'image de Y dans X est ouverte et contient $X\otimes k(s)$ elle contient les points de $\mathrm{Ass}_{X/S}(\mathcal{M})$ au-dessus du générisé de s (car $\mathcal{M}$ est S-pur); quitte à restreindre S on peut donc supposer que l'image de Y dans X contient $\mathrm{Ass}_{X/S}(\mathcal{M})$. Il résulte alors de 4.2.3 que pour tout S-schéma T, $\mathcal{M}\times_S T$ est T-plat en dimensions $\geqq n$ si et seulement si $\mathcal{M}_j \times_S T$ est T-plat en dimensions $\geqq n$ pour tout j; donc F_n est l'intersection des F_{nj} où F_{nj} est le foncteur qui rend $\mathcal{M}_j$ plat sur S en dimensions $\geqq n$. Il suffit donc de voir que F_{nj} est représentable par un S-schéma de présentation finie.

Soit k l'indice tel que $\dim(T_{jk}/S)=n$; comme les α_{ji} sont S-universellement injectifs pour $i<k$, on voit que pour tout S-schéma T, $\mathcal{M}_j\times_S T$ est T-plat en dimensions $\geqq n$ si et seulement $\mathcal{N}_{jk}\times_S T$ l'est, donc F_n est le foncteur qui rend $\mathcal{N}_{jk}$ plat sur S en dimension n, i.e. localement libre aux points génériques des fibres de T_{jk} sur S (2.1). D'après 4.2.3 ce foncteur est représentable par un S-schéma de présentation finie, cqfd.

Remarque (4.3.3). Lorsque S est noethérien et $n=0$ le th. 4.3.1 est démontré par une méthode différente dans [14] th. 2.

5. Platification par éclatements

5.1. Lemmes sur les éclatements

Les lemmes ci-dessous sont extraits d'un cours de Hironaka à l'IHES (1968).

Définition (5.1.1). Soient S un schéma, Y un sous-schéma fermé de S défini par un idéal $\mathscr{I}$ de $\mathcal{O}_S$, $\mathscr{M}$ un $\mathcal{O}_S$-module.

(i) On appelle éclatement de Y (ou de $\mathscr{I}$) dans S le spectre homogène de la $\mathcal{O}_S$-algèbre graduée $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{I}^n$ (cf. EGA II 8.1).

(ii) Notons $f\colon S'\to S$ l'éclatement de Y dans S. On appelle transformé strict de $\mathscr{M}$ par f le quotient du $\mathcal{O}_{S'}$-module $f^*(\mathscr{M})$ par le sous-module formé des sections à support dans $f^{-1}(Y)$ (cf. EGA IV 5.9).

Remarques (5.1.2). (i) Avec les notations de 5.1.1 il est bien connu que S' est un objet final de la sous-catégorie pleine de (Sch/S) formée des S-schémas T tels que $\mathscr{I}\mathcal{O}_T$ soit un idéal inversible de $\mathcal{O}_T$.

En particulier, si U est l'ouvert $S-Y$ de S, on voit que f est un isomorphisme au-dessus de U.

(ii) A partir de maintenant on ne considère que des éclatements d'idéaux de type fini. Si $\mathscr{I}$ est de type fini, f est un morphisme projectif et $\mathscr{I}\mathcal{O}_{S'}$ est un $\mathcal{O}_{S'}$-module très ample pour f; en outre le sous-schéma fermé Y' de S' défini par l'idéal $\mathscr{I}O_{S'}$ s'identifie canoniquement au S-schéma $\operatorname{Proj}(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{I}^n/\mathscr{I}^{n+1})$ («lieu à l'infini du cône tangent à S le long de Y»).

(iii) Comme $\mathscr{I}\mathcal{O}_{S'}$ est un idéal inversible de $O_{S'}$ on voit que $U'=f^{-1}(U)$ est un ouvert schématiquement dense de S' et plus généralement que si $\mathscr{M}$ est S-plat, $f^*(\mathscr{M})$ est égal au transformé strict de $\mathscr{M}$ par f.

(iv) Si T est un S-schéma, on voit à l'aide de (i) que l'éclaté de $\mathscr{I}O_T$ dans T est S-isomorphe à l'adhérence schématique de $U'\times_S T$ dans $S'\times_S T$.

(v) Soient $\mathscr{I}$ et $\mathscr{J}$ deux idéaux de type fini de $\mathcal{O}_S$; notons $f\colon S'\to S$ l'éclatement de $\mathscr{I}$ dans S et $g\colon S''\to S'$ l'éclatement de $\mathscr{J}O_{S'}$ dans S'; on voit à l'aide de (i) que $f\circ g$ est S-isomorphe à l'éclatement de $\mathscr{J}\mathscr{I}$ dans S.

Définition (5.1.3). Soient $f\colon S'\to S$ un morphisme de type fini, U un ouvert de S. On dit que f est un éclatement U-admissible s'il existe un sous-schéma fermé de présentation finie Y de S, disjoint de U, tel que f soit isomorphe à l'éclatement de Y dans S. (NB. L'isomorphisme est alors unique.)

Lemme (5.1.4). *Soient S un schéma quasi-compact et quasi-séparé, U un ouvert de S, $f\colon S'\to S$ un éclatement U-admissible, $g\colon S''\to S'$ un éclatement $f^{-1}(U)$-admissible; alors $f\circ g$ est un éclatement U-admissible.*

Démonstration. Supposons que f soit l'éclatement dans S d'un idéal de type fini $\mathscr{I}$ définissant un sous-schéma fermé Y disjoint de U et que g soit l'éclatement dans S' d'un idéal de type fini $\mathscr{J}$ de $O_{S'}$ définissant un sous-schéma fermé Z disjoint de $f^{-1}(U)$. On peut remplacer U par l'ouvert plus grand $S-Y-f(Z)$ qui est quasi-compact.

Comme S est quasi-compact et quasi-séparé et comme $\mathscr{I}'=\mathscr{I}O_{S'}$ est S-ample, il existe un entier $n>0$ tel que $f^*f_*(\mathscr{J}\mathscr{I}'^n)\to\mathscr{J}\mathscr{I}'^n$ soit surjectif (EGA IV 1.7.15); remplaçant $\mathscr{I}$ par $\mathscr{I}^n$ on peut supposer $n=1$.

Considérons l'homomorphisme canonique $u\colon \mathscr{O}_S\to f_*(\mathscr{O}_{S'})$. Il résulte de EGA II 5.4.3 et IV 18.12.8 que $f_*(\mathscr{O}_{S'})$ est une $\mathscr{O}_S$-algèbre entière. D'autre part u est un isomorphisme au-dessus de U. Considérons l'idéal $f_*(\mathscr{J}\mathscr{I}')$ de $f_*(\mathscr{O}_{S'})$ qui est égal à $f_*(\mathscr{O}_{S'})$ au-dessus de U. D'après EGA IV 1.7.7 il existe un sous-$\mathscr{O}_S$-module de type fini $\mathscr{K}$ de $f_*(\mathscr{J}\mathscr{I}')$, égal à $\mathscr{O}_S$ au-dessus de U et tel que le morphisme canonique $f^*(\mathscr{K})\to\mathscr{J}\mathscr{I}'$ soit surjectif. Comme la sous-$\mathscr{O}_S$-algèbre de $f_*(\mathscr{O}_{S'})$ engendrée par $\mathscr{K}$ est finie et isomorphe à $\mathscr{O}_S$ au-dessus de U et comme $f^{-1}(U)=S'-V(\mathscr{J}\mathscr{I}')$, on voit facilement qu'il existe un entier $m>0$, tel que $\mathscr{K}^m$ soit contenu dans $u(\mathscr{O}_S)$. D'après EGA IV 1.7.7, il existe un sous-$\mathscr{O}_S$-module de type fini $\mathscr{L}$ de $u^{-1}(\mathscr{K}^m)$ tel que $\mathscr{K}^m=u(\mathscr{L})$. Par construction, $\mathscr{L}$ est alors un idéal de type fini de $\mathscr{O}_S$ tel que $\mathscr{L}\mathscr{O}_{S'}=\mathscr{J}^m\mathscr{I}'^m$; il en résulte immédiatement que $f\circ g$ est S-isomorphe à l'éclatement de l'idéal $\mathscr{I}\mathscr{L}$ dans S cqfd.

Lemme (5.1.5). *Soient S un schéma quasi-compact et quasi-séparé, U un ouvert quasi-compact de S, (U_i) une partition de U en ouverts. Il existe un éclatement U-admissible $f\colon S'\to S$ et une partition (S'_i) de S' en ouverts tels que $f^{-1}(U_i)=f^{-1}(U)\cap S'_i$ pour tout i.*

Démonstration. On peut se borner au cas d'une partition de U en deux ouverts U_1 et U_2. Soit $\mathscr{R}_i$ $(i=1,2)$ un idéal de type fini de $\mathscr{O}_S$ tel que $U_i=S-V(\mathscr{R}_i)$, qui vaut $\mathscr{O}_S$ sur U_i et 0 sur U_j $(j\neq i)$ (EGA IV 1.7.7). Faisons éclater l'idéal $\mathscr{R}_1+\mathscr{R}_2$ dans S; on est alors ramené au cas où $\mathscr{R}_1+\mathscr{R}_2$ est un idéal inversible et où U est schématiquement dense dans S' (5.1.2(ii)). Comme $\mathscr{R}_1\cap\mathscr{R}_2|U$ est nul par construction, on a $\mathscr{R}_1\cap\mathscr{R}_2=0$. Alors $(\mathscr{R}_1+\mathscr{R}_2)^{-1}\mathscr{R}_i$ $(i=1,2)$ définit une partition de S en ouverts qui prolonge la partition donnée de U.

5.2. Enoncé du théorème de platification par éclatements

Pour motiver l'énoncé du résultat principal, nous allons tout d'abord examiner la cas global d'un morphisme projectif: il se trouve que l'on dispose alors d'un procédé canonique de «platification».

Soient $f: X \to S$ un morphisme projectif de schémas noethériens, $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_X$-module de type fini, Q: $(\mathrm{Sch}/S)^0 \to \mathrm{Ens}$ le foncteur dont l'ensemble des points à valeur dans un S-schéma T est l'ensemble des classes de modules quotients de $\mathscr{M} \times_S T$, de présentation finie sur $X \times_S T$ et T-plats. D'après (9) le foncteur Q est représentable par un schéma somme disjointe de S-schémas projectifs.

Soit U un ouvert de S au-dessus-duquel $\mathscr{M}$ est plat. Alors le faisceau $\mathscr{M} \times_S U$ définit un élément de $Q(U)$, donc un S-morphisme s: $U \to Q$. Soit S' l'image fermée de s (EGA I.9.5). L'immersion $S' \to Q$ définit un élément de $Q(S')$, c'est à dire un module quotient $\mathscr{N}'$ de $\mathscr{M} \times_S S'$ qui est S'-plat. En fait, on vérifie immédiatement sur cette construction que le morphisme structural g: $S' \to S$ est projectif et vérifie les conditions suivantes:

a) g est un isomorphisme au-dessus de U et $g^{-1}(U)$ est un ouvert schématiquement dense de S';

b) le quotient de $\mathscr{M} \times_S S'$ par le sous-module des sections de support disjoint de $g^{-1}(U)$ (égal à $\mathscr{N}'$) est S'-plat.

En outre le morphisme g est universel pour les propriétés a) et b). (N.B. Il n'est pas certain que g soit nécéssairement un éclatement U-admissible; cf. toutefois EGA III 2.3.5.)

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons étendre aux morphismes de présentation finie, non nécessairement projectifs, l'assertion d'existence d'un morphisme projectif vérifiant les conditions a) et b) ci-dessus, mais nous ne prétendons plus trouver un morphisme g universel pour les propriétés en question.

Définition (5.2.1). Soient f: $X \to S$ un morphisme de présentation finie, $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_X$-module de type fini, n un entier. On dit que $\mathscr{M}$ est S-plat en dimension $\geqq n$, s'il existe un ouvert rétro-compact V de X (EGA 0_{III} 9.1.1) tel que $\dim((X-V)/S) < n$ et tel que $\mathscr{M}|V$ soit un $\mathscr{O}_V$-module de présentation finie, S-plat.

Théorème (5.2.2). *Soient S un schéma quasi-compact et quasi-séparé, U un ouvert quasi-compact de S, f: $X \to S$ un schéma de présentation finie, $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_X$-module de type fini, n un entier. Supposons que $\mathscr{M}|f^{-1}(U)$ soit U plat en dimension $\geqq n$. Alors il existe un éclatement U-admissible g: $S' \to S$, tel que le transformé strict de $\mathscr{M}$ par g soit S'-plat en dimension $\geqq n$.*

5.3. *Quelques réductions élémentaires*

Notons d'abord le lemme suivant:

Lemme (5.3.1). *Soit S un schéma quasi-compact et quasi-séparé, U et V deux ouverts quasi-compacts de S, f: $V' \to V$ un éclatement $U \cap V$-*

admissible de V. Alors il existe un éclatement U-admissible

$$\bar{f}\colon S' \to S$$

qui prolonge f.

Démonstration. Supposons que f soit l'éclatement de l'idéal de type fini $\mathscr{I}$ de $\mathcal{O}_V$, de sorte que l'on a $\mathscr{I}|U \cap V = \mathcal{O}_{U \cap V}$. D'après EGA IV 1.7.7, il existe un idéal de type fini $\bar{\mathscr{I}}$ de $\mathcal{O}_S$ tel que $\bar{\mathscr{I}}|U = \mathcal{O}_U$ et $\bar{\mathscr{I}}|V = \mathscr{I}$ et il suffit de prendre pour $\bar{f}$ l'éclatement de $\bar{\mathscr{I}}$ dans S.

Concernant la démonstration de (5.2.2), on peut faire les remarques suivantes:

(5.3.2). On peut supposer U schématiquement dominant dans S.

En effet, il suffit de remplacer S par l'éclatement dans S d'un idéal de type fini $\mathscr{I}$ tel que $U = S - V(\mathscr{I})$ (EGA IV 1.7.7 et 5.1.2(iii)).

Une fois cette réduction faite, le transformé strict de $\mathscr{M}$ par un éclatement U-admissible $S' \to S$ est le quotient de $\mathscr{M} \times_S S'$ par le sous-module des sections nulles au-dessus de U.

(5.3.3). Le théorème 5.2.2 est de nature locale sur S.

En effet, soient $(S_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert affine fini de S et $f_i\colon S'_i \to S_i$ un éclatement $U \cap S_i$-admissible qui est solution de la restriction du problème au-dessus de S_i. Notons $\mathscr{J}_i$ un idéal de type fini de $\mathcal{O}_S$, tel que l'éclatement de $\mathscr{J}_i$ soit U-admissible et prolonge f_i (5.3.1). Alors, il résulte de 5.1.2(iii) et (v), que l'éclatement de $\mathscr{J} = \prod_i \mathscr{J}_i$ est solution du problème initial.

(5.3.4). Le théorème 5.2.2 est de nature locale sur X pour la topologie étale.

Celà résulte immédiatement de 5.1.2(v) et du fait que la formation du transformé strict commute aux changements de base plats $X' \to X$.

5.4. *Démonstration de 5.2.2 dans un cas particulier*

Nous allons démontrer 5.2.2 dans le cas particulier où X est lisse sur S à fibres géométriquement intègres de dimension n. Notons qu'il résulte alors de 2.1 qu'un $\mathcal{O}_X$-module $\mathscr{M}$ de présentation finie est S-plat en dimension $\geqq n$, si et seulement si $\mathscr{M}$ est localement libre au-dessus d'un ouvert V de X qui se projette *sur* S. Pour «rendre $\mathscr{M}$ localement libre», nous allons utiliser la technique des idéaux de Fitting.

Rappels sur les idéaux de Fitting (5.4.1). Soient S un schéma, $\mathscr{M}$ un $\mathcal{O}_S$-module de type fini, r un entier; rappelons la définition du r-ième idéal de Fitting de $\mathscr{M}$:

Supposons d'abord S affine d'anneau A et considérons une présentation de $\Gamma(S, \mathscr{M})$:

$$A^{(I)} \xrightarrow{u} A^n \to \Gamma(S, \mathscr{M}) \to 0. \qquad (*)$$

Alors l'idéal de A engendré par les coéfficients de la matrice de $\Lambda^{n-r}(u)$ ne dépend pas du choix de la suite exacte $(*)$; c'est le r-éme idéal de Fitting de $\mathscr{M}$: on le note $F_r(\mathscr{M})$.

Passons au cas général. Lorsque U parcourt l'ensemble des ouverts affines de S, les idéaux $F_r(\mathscr{M}|U)$ de $\mathscr{O}_U$ se recollent et définissent le r-ème idéal de Fitting $F_r(\mathscr{M})$ de $\mathscr{M}$.

Si $\mathscr{M}$ est de présentation finie, $F_r(\mathscr{M})$ est de type fini.

Pour tout S-schéma T, on a $F_r(\mathscr{M} \times_S T) = F_r(\mathscr{M}) \cdot \mathscr{O}_T$.

Un point s de S est dans $V(F_r(\mathscr{M}))$ si et seulement si $\dim_{k(s)}(\mathscr{M} \otimes k(s))$ est $>r$ et $X - V(F_r(\mathscr{M}))$ est le plus grand ouvert de X au-dessus duquel $\mathscr{M}$ peut être localement engendré par r éléments.

Lemme (5.4.2). Si $F_r(\mathscr{M})$ *est localement monogène,* $\mathscr{M}/\mathrm{Ann}_{\mathscr{M}}(F_r(\mathscr{M}))$ *est localement engendrable par r éléments.*

Démonstration. On peut supposer S local d'anneau A. Considérons une suite exacte

$$A^{(I)} \xrightarrow{u} A^n \to \Gamma(S, \mathscr{M}) \to 0$$

et notons $(u_{ji})_{i\in I,\, 1\leqq j\leqq n}$ la matrice de u. Par hypothèse l'idéal $F_r(\mathscr{M})$, engendré par les déterminants d'ordre $n-r$ extraits de cette matrice est monogène. Comme A est local, $F_r(\mathscr{M})$ est engendré par l'un de ces déterminants. Quitte à remplacer $\mathscr{M}$ par un module $\mathscr{M}'$ dont $\mathscr{M}$ est un quotient, et à changer de notations, on peut supposer que I est l'intervalle $[1, n-r]$ de $\mathbb{N}$ et que $F_r(\mathscr{M})$ est engendré par $D = \mathrm{d\acute{e}t}((u_{ij})_{1\leqq i,\, j\leqq n-r})$. Notons $(m_j)_{1\leqq j\leqq n}$ l'image dans $\Gamma(S, \mathscr{M})$ de la base canonique de A^n, de sorte que les m_j sont liés par le système d'équations

$$\sum_{1\leqq j\leqq n} u_{ji}\, m_j = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq n-r).$$

Pour tout i $(1 \leqq i \leqq n-r)$ et tout j $(n-r < j \leqq n)$, notons D_{ji} le déterminant obtenu en substituant dans l'expression de D la j-ème colonne de la matrice de u à la i-ème colonne. D'après les règles de Cramer, les m_j sont liés par les relations

$$D m_i + \sum_{n-r<j\leqq n} D_{ji}\, m_j = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq n-r);$$

comme $D_{ji} \in F_r(\mathscr{M})$ il existe $b_{ji} \in A$ tel que $D_{ji} = b_{ji} D$ et l'on a

$$D\Big(m_i + \sum_{n-r<j\leqq n} b_{ji}\, m_j\Big) = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq n-r)$$

ce qui prouve que $\mathscr{M}/\mathscr{A}nn_{\mathscr{M}}(D)$ est engendré par l'image de $(m_j)_{n-r<j\leqq n}$ cqfd.

Lemme (5.4.3). *Si $F_r(\mathcal{M})$ est inversible et si $\mathcal{M}$ est libre de rang r aux points de* $\mathrm{Ass}(S)$, *alors $\mathcal{M}/\mathcal{A}nn_{\mathcal{M}}(F_r(\mathcal{M}))$ est localement libre de rang r.*

Démonstration. Posons $\mathcal{N}=\mathcal{M}/\mathcal{A}nn_{\mathcal{M}}(F_r(\mathcal{M}))$. Comme $F_r(\mathcal{M})$ est inversible, $\mathcal{N}$ est égal à $\mathcal{M}$ aux points de $\mathrm{Ass}(S)$ et par suite est localement libre de rang r en ces points. D'autre part la question est locale sur S et d'après (5.4.2) on peut supposer que l'on a une suite exacte

$$0\to\mathcal{R}\to\mathcal{O}_S^r\to\mathcal{N}\to 0.$$

On voit alors que $\mathcal{R}$ est nul aux points de $\mathrm{Ass}_S(\mathcal{R})\subset\mathrm{Ass}(S)$, donc est nul.

Prouvons maintenant 5.2.2 dans le cas où X est lisse sur S à fibres géométriquement intègres de dimension n. Comme $\mathcal{M}$ est U-plat en dimension $\geqq n$, il résulte de 2.1 qu'il existe un ouvert quasi-compact V de X, se projetant *sur* U, tel que $\mathcal{M}|V$ soit localement libre. Soient $s\in U$, x le point générique de $X\otimes k(s)$; alors $x\in V$; notons $r(s)$ le rang du $\mathcal{O}_{X,x}$-module libre $\mathcal{M}_x$. Comme le morphisme $V\to U$ est ouvert, la fonction $s\mapsto r(s)$ est localement constante sur U. D'après 5.1.5 on peut, quitte à faire un éclatement U-admissible de S, puis à prendre une partition ouverte convenable de S, supposer que $r(s)$ est une conction constante sur U, de valeur r. Enfin, compte tenu de 5.3 et 3.3.11, on peut supposer que $S=\mathrm{Spec}(A)$, $X=\mathrm{Spec}(B)$ et B est libre sur A de base $e_{i,\,i\in I}$.

Comme V est quasi-compact, il existe un X-module de présentation finie $\mathcal{N}$ et un morphisme surjectif u: $\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ tel que $u|V$ soit un isomorphisme. Considérons le r-ème idéal de Fitting $F_r(\mathcal{N})$ de $\mathcal{N}$; c'est un idéal de type fini et $F_r(\mathcal{N})|V=\mathcal{O}_V$.

On peut former l'idéal $\mathcal{I}$ des «coéfficients» de $F_r(\mathcal{N})$ relativement à S, c'est dire l'idéal de $\mathcal{O}_S$ définissant le plus grand sous-schéma fermé de S au dessus duquel $\mathcal{O}_X$ est égal à $\mathcal{O}_X/F_r(\mathcal{N})$ (4.1.1). Rappelons (loc. cit.) que $\mathcal{I}$ est un idéal de type fini engendré par les coordonnées par rapport à la base (e_i) d'une famille de générateurs du $\mathcal{O}_X$-module $F_r(\mathcal{N})$. Comme $F_r(\mathcal{N})|V=\mathcal{O}_V$, on a $\mathcal{I}|U=\mathcal{O}_U$. Quitte alors à faire éclater $\mathcal{I}$ dans S, on peut supposer que $\mathcal{I}$ est un idéal inversible. Vu la définition de l'idéal de coéfficients $\mathcal{I}$, il est clair que l'idéal fractionnaire de type fini $\mathcal{J}=(\mathcal{I}\mathcal{O}_X)^{-1}\,F_r(\mathcal{M})$ de $\mathcal{O}_X$ est entier et a un idéal de coéfficients égal à $\mathcal{O}_S$. Par suite $W=X-V(\mathcal{J})$ est un ouvert quasi-compact qui se projette *sur* S. Quitte alors à remplacer X par W, on peut supposer que $F_r(\mathcal{N})$ est un idéal inversible de $\mathcal{O}_X$. Enfin, on peut supposer U schématiquement dominant dans S (5.3.2), donc V schématiquement dominant dans X.

Notons $\overline{\mathcal{N}}$ (resp. $\overline{\mathcal{M}}$) le quotient de $\mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{M}$) par le sous-module des sections nulles au-dessus de U et soit $\bar{u}$: $\overline{\mathcal{N}}\to\overline{\mathcal{M}}$ le morphisme surjectif déduit de u par passage au quotient. Comme $F_r(\mathcal{N})$ est un idéal inversible et que $\mathcal{N}$ est localement libre de rang r sur V donc aux points de $\mathrm{Ass}(X)$, il résulte de 5.4.3 que $\mathcal{N}/\mathcal{A}nn_{\mathcal{N}}(F_r(\mathcal{N}))$ est localement libre de rang r. Comme $F_r(\mathcal{N})=\mathcal{O}_X$ au-dessus de U, $\mathcal{A}nn_{\mathcal{N}}(F_r(\mathcal{N}))$ et nul au-dessus de U; il en résulte que $\bar{\mathcal{N}}$ est un quotient de $\mathcal{N}/\mathcal{A}nn_{\mathcal{N}}(F_r(\mathcal{N}))$ de sorte que l'on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N}/\mathcal{A}nn_{\mathcal{N}}(F_r(\mathcal{N})) \to \bar{\mathcal{N}} \to 0.$$

Or $\mathrm{Ass}(\mathcal{P}) \subset \mathrm{Ass}(X) \subset V$ et $\mathcal{P}|V=0$, donc $\mathcal{P}=0$ et $\bar{\mathcal{N}}$ est localement libre de rang r, le même raisonnement prouve que $\mathrm{Ker}(\bar{u})=0$, donc $\bar{\mathcal{M}}$ est localement libre de rang r, ce qui achève la démonstration de 5.2.2 dans ce cas.

5.5. *Démonstration de* 5.2.2 *dans le cas où S est noethérien*

Nous allons établir le lemme technique suivant:

Lemme (5.5.1). *Soient S un schéma noethérien, X un S-schéma de présentation finie, n un entier $\geqq 0$, U un ouvert de S, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module de présentation finie, h': $S' \to S$ un éclatement, $X'=X \times_S S'$, $\mathcal{M}'=\mathcal{M} \times_S S'$, $U'=U \times_S S'$, $\bar{\mathcal{M}}'$ le transformé strict de $\mathcal{M}$ par l'éclatement h'. On suppose*

(i) *$\mathcal{M}$ est S-plat en dimensions $\geqq n+1$.*

(ii) *$\bar{\mathcal{M}}'$ est plat en dimensions $\geqq n$ au-dessus de U'.*

(iii) *$U \neq S$.*

Alors, il existe un ouvert W de S, strictement plus grand que U et un éclatement U'-admissible $S'' \to S'$ tel que le transformé strict de $\bar{\mathcal{M}}'$ par cet éclatement soit plat en dimensions $\geqq n$, au dessus de l'image réciproque W'' de W dans S''.

Montrons d'abord comment le lemme entraîne le théorème 5.2.2 dans le cas noethérien. Pour $n > \dim(X/S)$, $\mathcal{M}$ est évidemment S-plat en dimensions $\geqq n$. Procédant par récurrence décroissante sur n, on peut donc supposer $\mathcal{M}$ S-plat en dimensions $\geqq n+1$. On peut supposer U schématiquement dense dans S (5.3.2). Soit E la famille des ouverts V de S, contenant U, tels que le théorème 5.2.2 soit vrai pour la restriction de la situation au-dessus de V. Alors E est non vide car $U \in E$; comme S est noethérien, E possède un élément maximal V_0. Le lemme ci-dessus (appliqué avec $U=V_0$) entraîne, compte tenu de 5.1.4 et de 5.3.2 que $V_0=S$ cqfd.

Soit s un point maximal de $S-U$. On peut trouver un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X & X \times_S \tilde{S} \arrow[l] & Y \arrow[l] \\ (S,s) \arrow[u, leftarrow] & (\tilde{S},\tilde{s}) \arrow[l] \arrow[u, leftarrow] & \end{tikzcd}$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

a) $(\tilde{S}, \tilde{s})$ est un voisinage étale élémentaire affine de (S, s) tel que $\tilde{s}$ soit le seul point de $\tilde{S}$ au-dessus de s.

b) $Y \to X \times_S \tilde{S}$ est étale et son image contient $X \times_S k(\tilde{s})$.

c) Y est affine somme disjointe d'ouverts affines $Y_{i, i \in I}$.

d) Pour tout $i \in I$, l'image réciproque $\mathcal{M}_i$ de $\mathcal{M}$ sur Y_i, possède un $\tilde{S}$-dévissage en dimensions $\geqq n$ $(Z_{ij} \to T_{ij}, \mathcal{L}_{ij} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \mathcal{N}_{ij} \to \mathcal{P}_{ij})$ tel que les morphismes α_{ij} soient S-universellement injectifs pour les indices ij tels que $\dim(T_{ij}/S) > n$ et soient surjectifs au-dessus d'un ouvert de T_{ij} qui se projette sur S, pour tous les indices ij.

L'existence de telles données résulte pour l'essentiel de 1.2.4 et 2.9; les conditions auxiliaires énoncées dans a) et b) peuvent être réalisées après restriction convenable du voisinage étale $\tilde{S}$.

Soient alors H le sous-schéma réduit de S, d'espace sous-jacent $S - U$, et s un point maximal de H. D'après la condition a), le morphisme $\tilde{H} = H \times_S \tilde{S} \to H$ est un isomorphisme au-dessus de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{H,s})$, donc aussi au-dessus d'un voisinage ouvert de s dans H. Quitte à restreindre $\tilde{S}$, on peut supposer que l'image de $\tilde{S}$ dans S est un ouvert S_1 tel que $\tilde{S} \to S_1$ soit un isomorphisme au-dessus de $H_1 = H \cap S_1$. On peut également renforcer la condition b) en la condition b′) ci-après:

b′) Le morphisme $Y \to X \times_S \tilde{S}$ est étale et son image contient $X \times_S H_1$.

Nous affectons d'un indice 1 (resp. d'un $\sim$) les objets déduits d'objets au-dessus de S par l'immersion ouverte $S_1 \to S$ (resp. le morphisme étale $\tilde{S} \to S$).

Supposons avoir résolu le lemme 5.5.1 après avoir fait le changement de base $\tilde{S} \to S$, avec l'ouvert $\tilde{W} = \tilde{S}$ et un éclatement $\tilde{U}'$-admissible $\tilde{S}'' \to \tilde{S}'$.

Cet éclatement est celui d'un idéal $\tilde{\mathcal{I}}'$ de $\tilde{S}'$ tel que $\tilde{\mathcal{I}}' | \tilde{U}' = O_{\tilde{U}'}$. Considérons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} S_1' & \longleftarrow & \tilde{S}' \\ {\scriptstyle h_1'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{h}'} \\ S_1 & \longleftarrow & \tilde{S} \end{array}$$

Alors $\tilde{S}' \to S_1'$ est un morphisme étale surjectif et est un isomorphisme au dessus de $(h_1')^{-1}(H_1)$ (qui est un sous-schéma fermé de S_1', d'espace sous-jacent $S_1' - U_1'$). Il est clair dans ces conditions que l'idéal $\tilde{\mathcal{I}}'$ est l'image réciproque d'un idéal $\mathcal{I}_1'$ de S_1'; soit $S_1'' \to S_1'$ l'éclatement de $\mathcal{I}_1'$. Par descente fidèlement plate de $\tilde{S}''$ à S_1'', on voit que l'on a prouvé le lemme 5.1.1, pour la restriction de la situation au-dessus de S_1 et avec l'ouvert $W_1 = S_1$. D'après 5.3.1, on peut prolonger l'éclatement $S_1'' \to S_1'$ en un éclatement U'-admissible $S'' \to S'$; on a alors prouvé le lemme 5.5.1 avec pour ouvert $W = U \cup S_1$.

Nous sommes donc ramenés à prouver 5.5.1 dans le cas où $S=\tilde{S}$ avec $W=S$. Par descente plate (cf. condition b')), on peut remplacer X par Y. Enfin, pour construire l'éclatement U'-admissible $S''\to S'$, on peut appliquer les réductions de 5.3.4 donc se ramener au cas où $Y=Y_i$; bref il nous suffit de prouver le lemme suivant:

Lemme (5.5.2). *Soient S un schéma affine noethérien, U un ouvert de S, $X\to S$ un morphisme affine de présentation finie, n un entier, $\mathscr{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module de présentation finie, qui possède un S-dévissage en dimensions $\geqq n$ $(Z_j\to T_j, \mathscr{L}_j \xrightarrow{\alpha_j} \mathscr{N}_j\to\mathscr{P}_j)$ dans lequel les α_j sont S-universellement injectifs pour $j=\dim(T_j/S)\geqq n+1$ et sont surjectifs au-dessus d'un ouvert de T_j qui se projette sur S, pour $j\leqq n$.*

Soient $S'\to S$ un éclatement, $U'=U\times_S S'$, $X'=X\times_S S'$, $\mathscr{M}'=\mathscr{M}\times_S S'$ tels que le transformé strict $\overline{\mathscr{M}}'$ de $\mathscr{M}$ soit plat en dimensions $\geqq n$ au-dessus de U'. Alors il existe un éclatement U'-admissible $S''\to S'$, tel que le transformé strict de $\overline{\mathscr{M}}'$ par cet éclatement soit S''-plat en dimensions $\geqq n$.

Nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme (5.5.3). *Soient S un schéma noethérien, X un S-schéma lisse à fibres intègres de dimension r, $0\to\mathscr{L}\xrightarrow{\alpha}\mathscr{N}\to\mathscr{P}\to 0$ une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules de type fini telle que $\mathscr{L}$ soit localement libre, U un ouvert schématiquement dominant de S.*

i) *Soit $\mathscr{R}$ un sous-module cohérent de $\mathscr{N}$, tel que $\dim(\mathscr{R}/S)<r$. Alors $\mathscr{R}\cap\mathscr{L}=0$, donc le morphisme $\mathscr{R}\hookrightarrow\mathscr{N}\to\mathscr{P}$ est injectif et l'on a une suite exacte $0\to\mathscr{L}\to\mathscr{N}/\mathscr{R}\to\mathscr{P}/\mathscr{R}\to 0$.*

ii) *Supposons $\dim(\mathscr{P}/S)<r$ et soient $\mathscr{R}$ un sous-module cohérent de $\mathscr{P}$, nul au-dessus de U, $\mathscr{R}'$ son image réciproque dans $\mathscr{N}$. Alors la suite exacte $0\to\mathscr{L}\to\mathscr{R}'\to\mathscr{R}\to 0$ est canoniquement scindée, un relèvement de $\mathscr{R}$ dans $\mathscr{R}'$ étant donné par le sous-module $\mathscr{Q}'$ de $\mathscr{R}'$ des sections nulles au-dessus de U; en particulier, on a une suite exacte*

$$0\to\mathscr{L}\to\mathscr{N}/\mathscr{Q}\to\mathscr{P}/\mathscr{R}\to 0.$$

Démonstration de 5.5.3. Soit x un point de $\mathrm{Ass}(\mathscr{R}\cap\mathscr{L})$; alors le point x est dans $\mathrm{Ass}(\mathscr{L})$, donc dans $\mathrm{Ass}(X)$, puisque $\mathscr{L}$ est localement libre sur X. Mais alors $x\in\mathrm{Ass}(X/S)$ (EGA IV 3.3.1), c'est à dire est un point générique d'une fibre de X au-dessus de S; ceci contredit l'hypothèse $\dim(\mathscr{R}/S)<r$. On a donc $\mathrm{Ass}(\mathscr{R}\cap\mathscr{L})=\emptyset$ et par suite $\mathscr{R}\cap\mathscr{L}=0$ ce qui démontre (i).

Prouvons (ii). Soit W le complémentaire du support de $\mathscr{R}$. Alors, $W\supset X\times_S U$ et s'envoie surjectivement sur S puisque $\dim(\mathscr{R}/S)<r$. Notons i l'immersion ouverte $W\to X$ et β: $\mathscr{L}\to\mathscr{R}'$ l'injection canonique. Alors le morphisme $i^*(\beta)$: $\mathscr{L}|W\to\mathscr{R}'|W$ est un isomorphisme. Par

ailleurs soit $x \in X - W$ et notons s la projection de x dans S. Comme U est schématiquement dense dans S, on a $\operatorname{prof}(\mathcal{O}_{S,s}) \geqq 1$ et comme x n'est pas le point générique de $X \otimes k(s)$, on a $\operatorname{prof}(\mathcal{O}_{X,x} \otimes k(s)) \geqq 1$ donc $\operatorname{prof}(\mathcal{O}_{X,x}) \geqq 2$ (EGA IV 6.3.1); mais alors $\mathscr{L}$ est $X-W$-clos (EGA IV 5.10.5) autrement dit le morphisme canonique $\mathscr{L} \to i_* i^*(\mathscr{L})$ est un isomorphisme. Considérons alors le diagramme commutatif suivant où la première ligne est exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{Q}' \arrow[r] & \mathscr{R}' \arrow[r] & i_* i^*(\mathscr{R}') \\ & & \mathscr{L} \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, "\sim"] & i_* i^*(\mathscr{L}). \arrow[u, "\wr\, i_* i^*(\beta)"'] \end{tikzcd}$$

Il nous montre que β admet un inverse de noyau $\mathscr{Q}'$, cqfd.

Démonstration de 5.5.2. Notons $\mathscr{R}'$ le noyau du morphisme canonique $\mathscr{M}' \to \bar{\mathscr{M}}'$. Vu les propriétés exigées du -S-dévissage de $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}$ est S-plat en dimensions $\geqq n+1$ et par suite on a $\dim(\mathscr{R}'/S') \leqq n$. Notons $(Z_j' \to T_j'$, $\mathscr{L}_j' \xrightarrow{\alpha_j'} \mathscr{N}_j' \to \mathscr{P}_j')$ l'image réciproque sur X' du S-dévissage de $\mathscr{M}$. Par récurrence décroissante sur j, on déduit de lemme 5.5.3 i), que $\mathscr{R}'$ définit de proche en proche un T_j'-module $\mathscr{R}_j'$ (isomorphe à $\mathscr{R}'$ comme S'-module) qui est un sous-module de $\mathscr{N}_j'$, tel que $\mathscr{R}_j' \cap \mathscr{L}_j' = 0$ pour $j \geqq n+1$. Par passage au quotient, on en déduit un S' dévissage de $\bar{\mathscr{M}}'$: $(Z_j' \to T_j'$, $\mathscr{L}_j' \to \mathscr{N}_j'/\mathscr{R}_j' \to \mathscr{P}_j'/\mathscr{R}_j')$. On peut alors remplacer S par S', $\mathscr{M}$ par $\bar{\mathscr{M}}'$ donc supposer $\mathscr{M}$ S-plat en dimensions $\geqq n$, au-dessus de U. Alors $\mathscr{N}_n$ est U-plat en dimensions $\geqq n$.

D'après le cas lisse traité dans 5.4, il existe un éclatement U-admissible $S'' \to S$, tel que le transformé strict $\bar{\mathscr{N}}_n''$ de $\mathscr{N}_n$ soit S''-plat en dimensions $\geqq n$. Notons $\mathscr{R}_n''$ le noyau du morphisme $\mathscr{N}_n'' \to \bar{\mathscr{N}}_n''$; $\mathscr{R}_n''$ est donc le sous-module de $\mathscr{N}_n''$ formé des sections nulles au-dessus de U. Considérons la partie du S''-dévissage de $\mathscr{M}''$ relative à la dimension $n+1$; c'est à dire la suite exacte

$$0 \to \mathscr{L}_{n+1}'' \xrightarrow{\alpha_{n+1}''} \mathscr{N}_{n+1}'' \to \mathscr{P}_{n+1}'' \to 0.$$

Par définition d'un dévissage relatif, Z_n'' est un sous-schéma fermé de T_{n+1}'', $\mathscr{P}_{n+1}''$ provient d'un Z_n''-module (noté encore $\mathscr{P}_{n+1}''$) et $\mathscr{N}_n''$ est l'image directe, par le morphisme fini $Z_n'' \to T_n''$, du module $\mathscr{P}_n''$. Il en résulte que $\mathscr{R}_n''$ provient en fait du sous-module de $\mathscr{P}_{n+1}''$ formé des sections nulles au-dessus de U. D'après le lemme 5.5.3 (ii), $\mathscr{R}_n''$ se relève canoniquement en le sous-module $\mathscr{R}_{n+1}''$ de $\mathscr{N}_{n+1}''$ formé des sections nulles au-dessus de U. De proche en proche, on relève $\mathscr{R}_n''$ en le sous-module $\mathscr{R}''$ de $\mathscr{M}''$ formé des sections nulles au-dessus de U. Il est clair dans ces conditions que le transformé strict $\bar{\mathscr{M}}'' = \mathscr{M}''/\mathscr{R}''$ de $\mathscr{M}$ est S''-plat en dimensions $\geqq n$ cqfd.

5.6. Fin de la démonstration de 5.2.2

Nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme (5.6.1). *Soient S un schéma noethérien, X un S-schéma de type fini, $\mathcal{N}$ un $\mathcal{O}_X$-module de type fini, S-plat, n un entier, U un ouvert de S et V un ouvert de $X \times_S U = X_U$, tel que* $\dim(X_U - V/S) < n$. *Alors, il existe un fermé T de $X - V$, tel que* $\dim(T/S) < n$ *qui contient* $\mathrm{Ass}(\mathcal{M}/S) \cap (X_U - V)$.

En effet, soit $x \in \mathrm{Ass}(\mathcal{M}/S) \cap (X_U - V)$. Notons s la projection de x sur S et $\bar{x}$ l'adhérence de x dans X. Comme $\dim(X_U - V/S) < n$, on a aussi $\dim(\bar{x} \otimes_S k(s)) < n$ et par suite $\dim(\bar{x}/S) < n$ puisque $\mathcal{N}$ est S-plat (EGA IV 12.1.1.5). On termine alors par un argument de constructibilité (cf. EGA IV 9.8.3), qui montre que $E = \mathrm{Ass}(\mathcal{M}/S) \cap (X_U - V)$ est contenu dans l'adhérence d'un nombre fini de points de E.

Revenons à la démonstration de 5.2.2. Il résulte de 5.3 que l'on peut supposer X et S affines et U schématiquement dense dans S. Soit V un ouvert quasi-compact de $X \times_S U$, tel que $\mathcal{M}|V$ soit S-plat et tel que $\dim((X \times_S U - V)/U) < n$. On peut trouver un $\mathcal{O}_X$-module de présentation finie $\mathcal{N}$ et un morphisme surjectif u: $\mathcal{N} \to \mathcal{M}$ qui soit un isomorphisme au-dessus de V.

Considérons S comme limite projective filtrante de schémas affines noethériens $S_{i,\, i \in I}$. Pour i assez grand, on peut supposer que les objets $U, X, V, \mathcal{N}$ proviennent d'objets $U_i, X_i, V_i, \mathcal{N}_i$ au-dessus de S_i, tel que $\mathcal{N}_i|V_i$ soit S_i-plat et $\dim((X_i \times_{S_i} U_i - V_i)/U_i) < n$. D'après 5.5, il existe un idéal $\mathcal{I}_i$ de O_{S_i}, avec $\mathcal{I}_i|U_i = \mathcal{O}_{U_i}$, tel que le transformé strict $\bar{\mathcal{N}}_i'$ de $\mathcal{N}_i$, par l'éclatement $S_i' \to S_i$ de $\mathcal{I}_i$, soit S_i'-plat en dimensions $\geqq n$. Posons $X_i' = X_i \times_{S_i} S_i'$, $\mathcal{N}_i' = \mathcal{N}_i \times_{S_i} S_i'$. Il existe donc un ouvert W_i' de X_i', contenant V_i, tel que $\bar{\mathcal{N}}_i'|W_i'$ soit S_i'-plat et tel que $\dim((X_i' - W_i')/S_i') < n$. D'après 5.6.1, on peut, quitte à retrancher de W_i' un fermé de $W_i' - V_i$ de dimension relative $< n$, supposer que $\mathrm{Ass}(\bar{\mathcal{N}}_i'/S_i') \cap W_i' \times_{S'} U$ est contenu dans V_i.

Soit $S' \to S$ l'éclatement U-admissible défini par l'idéal $\mathcal{I} = \mathcal{I}_i \mathcal{O}_S$, de sorte que S' est un sous-schéma fermé de $S \times_{S_i} S_i'$. Posons $X' = X \times_S S'$, $\mathcal{N}' = \mathcal{N} \times_S S'$, $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \times_S S'$, $W' = W_i' \times_{S_i'} S'$. Alors le transformé strict $\bar{\mathcal{N}}'$ de $\mathcal{N}$ par l'éclatement $S' \to S$ est isomorphe à $\bar{\mathcal{N}}_i' \times_{S_i'} S'$ donc est S'-plat en dimensions $\geqq n$. Plus précisemment, $\bar{\mathcal{N}}'$ est S'-plat aux points de W'; on a $\dim((X' - W')/S') < n$ et $\mathrm{Ass}(\bar{\mathcal{N}}'/S') \cap W' \times_{S'} U$ est contenu dans V. Quitte alors à remplacer X' par W', S par S' on peut supposer que les conditions suivantes sont réalisées:

a) le quotient $\bar{\mathcal{N}}$ de $\mathcal{N}$ par le sous-module des sections nulles au-dessus de U est S-plat.

b) On a $\mathrm{Ass}(\bar{\mathcal{N}}/S) \cap X \times_S U \subset V$.

Comme $\mathcal{N} = \bar{\mathcal{N}}$ au-dessus de U, $\mathcal{N}$ est U-plat et l'on a

$$\mathrm{Ass}(\mathcal{N}) \cap X \times_S U \subset V$$

(3.4.3). Soit alors $\mathscr{R} = \operatorname{Ker}(u)$. Par construction, $\mathscr{R}|V = 0$; ce qui précède entraîne $\mathscr{R} = 0$ au-dessus de U. Mais alors, si $\bar{\mathscr{M}}$ est le quotient de $\mathscr{M}$ par le sous-module des sections nulles sur $U \times_S X$, il est clair que le morphisme canonique $\bar{u}$: $\mathscr{N} \to \bar{\mathscr{M}}$, déduit de u par passage au quotient est un isomorphisme, donc $\bar{\mathscr{M}}$ est S-plat, ce qui achève la démonstration de 5.2.2.

5.7. *Applications aux espaces algébriques*

Dans ce numéro, nous donnons quelques applications très simples du théorème 5.2.2. Pour sacrifier au goût du jour, nous les formulons dans le cadre plus général des espaces algébriques de Artin [1]. Commençons par quelques généralisations et variantes des résultats de Knutson [12].

Soit S un schéma. On note (Sch/S) la catégorie des S-schémas, (E/S) la catégorie des faisceaux sur (Sch/S) pour la topologie étale et on identifie de la manière habituelle (Sch/S) à une sous-catégorie pleine de (E/S).

Définition (5.7.1). Soit S un schéma. Un espace algébrique Y au-dessus de S (ou un S-espace algébrique) est un faisceau sur (Sch/S) pour la topologie étale, quotient d'un S-schéma X par une relation d'équivalence étale représentable R. Plus précisément, il existe donc un S-schéma X, un S-schéma R, un S-monomorphisme $i: R \to X \times_S X$ et un S-morphisme de faisceaux étales p: $X \to Y$, tels que les conditions suivantes soient réalisées:

(i) i: $R \to X \times_S X$ est un graphe d'une S-relation d'équivalence sur X.

(ii) Les projections, canoniques $\overset{q_1}{\underset{q_2}{:}}$ $R \xrightarrow{i} X \times_S X \rightrightarrows X$ sont des morphismes étales.

(iii) (p, Y) est un conoyau de la double flèche $\overset{q_1}{\underset{q_2}{:}}$ $R \rightrightarrows X$ dans la catégorie (E/S).

Un espace algébrique (absolu) est un espace algébrique au-dessus de Spec$(\mathbb{Z})$.

Lemme (5.7.2). *Avec les notations précédentes, le carré*

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{q_1} & R \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_2} \\ Y & \xleftarrow[p]{} & X \end{array} \qquad (*)$$

est cartésien et le morphisme p: $X \to Y$ est représentable par morphismes étales surjectifs.

Démonstration. La première assertion résulte de propriétés générales des catégories de faisceaux (SGA 3 IV 4.4.9); prouvons la dernière assertion. Soit Z un schéma, $u\colon Z \to Y$ un morphisme dans (E/S); il nous faut montrer que $F = X \times_Y Z$ est un schéma tel que la projection $F \to Z$ soit un morphisme étale surjectif. On peut supposer Z affine. Comme p est un épimorphisme dans (E/S), il existe un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] & Z' \arrow[l, "u'"'] \arrow[d, "v"] \\ Y & Z \arrow[l, "u"'] \end{tikzcd}$$

dans lequel v est un morphisme de schémas, affine, étale, surjectif. Alors $F' = F \times_Y Z' \simeq R \times_X Z'$ est un schéma et $F' \to Z'$ est étale surjectif puisqu'il en est ainsi de $q_2\colon R \to X$. On est ramené à un problème d'effectivité de la donnée de descente canonique sur F', relativement au morphisme étale affine $Z' \to Z$. Notons que la question de la représentabilité de $F = X \times_Y Z$ est de nature locale sur X. Soit U un ouvert affine de X; alors $U \times_Y Z'$ est un ouvert de F', stable par la donnée de descente et est un sous-objet du schéma affine $U \times_Z Z'$, donc est séparé. Comme $Z' \to Z$ est quasi-compact et universellement ouvert, on peut recouvrir $U \times_Y Z'$ par des ouverts quasi-compacts stable par la donnée de descente; étant séparés sur Z', ils sont alors quasi-affines sur Z' (EGA IV 18.12.12) et par suite se descendent au-dessus de Z (SGA 1 VIII 7.9).

Notons que le diagramme suivant de (E/S) (où δ est l'application diagonale) est cartésien:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "pq_1"] \arrow[d, "i"] & Y \arrow[d, "\delta"] \\ X \times_S X \arrow[r, "p \times p"] & Y \times_S Y. \end{tikzcd}$$

Ce qui justifie les définitions suivantes:

Définition (5.7.3). Avec les notations de 5.7.1, on dit que Y est quasi-séparé (resp. localement séparé, resp. séparé) sur S si i est quasi-compact (resp. est une immersion, resp. est une immersion fermée).

Compte tenu de 5.7.2, les espaces algébriques quasi-séparés que l'on vient de définir coïncident avec ceux de Knutson [12]. Nous renvoyons à loc. cit. pour l'extension aux espaces algébriques des propriétés des schémas de nature locale pour la topologie étale. Rappelons aussi qu'un espace algébrique Y est quasi-compact si dans 5.7.1, on peut choisir X quasi-compact.

Définition (5.7.4). Soient Y un espace algébrique, Z un sous-espace algébrique de Y. Un voisinage étale élémentaire de Z dans Y est la donnée d'un morphisme étale u: $Y' \to Y$, où Y' est un schéma et u est un isomorphisme au-dessus de Z.

On notera que Z est alors représentable et que, quitte à restreindre Y', on peut supposer que $u^{-1}(Z)$ est un sous-schéma fermé de Y'.

Lemme (5.7.5). *Soient Z un sous-espace algébrique d'un espace algébrique Y, X un schéma, v: $X \to Y$ un morphisme étale qui au-dessus de Z est un morphisme fini de rang $r \geqq 1$. Supposons que tout ensemble fini de points de X soit contenu dans un ouvert affine. Alors il existe un voisinage étale élémentaire Y' de Z dans Y. Si X est séparé, on peut prendre Y' séparé.*

Nous reprenons l'idée de Knutson consistant à utiliser les produits symétriques. Par récurence sur l'entier $n \geqq 0$, on prouve que le produit $X^n/Y = X \times_Y X \times_Y \cdots \times_Y X$ (n facteurs) est un schéma et en procédant comme dans la démonstration de 5.7.2 on voit que tout ensemble fini de points de X^n/Y est contenu dans un ouvert affine, puisqu'il en ainsi pour X. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_r$ opère sur X^r/Y par permutation des facteurs. Soit U le plus grand ouvert de X^r/Y au-dessus duquel $\mathfrak{S}_r$ opère librement. Alors le faisceau étale U', quotient de U sous-l'action de $\mathfrak{S}_r$ est un schéma et $U \to U'$ est un revêtement fini étale galoisien de degré $r!$ (SGA 1 V 1.8 et [17] chap. X). Le morphisme canonique $U \to Y$ se factorise à travers U' et on vérifie immédiatement (en travaillant localement pour la topologie étale sur Y) que U' est un voisinage étale élémentaire de Z dans Y. Si X est séparé, il en est de même de U donc aussi de U'.

Proposition (5.7.6). *Soit Y un espace algébrique quasi-compact et quasi-séparé. Alors il existe une suite finie Z_i, $i = 1, \ldots, r$ de sous-espaces algébriques de Y tels que:*

(i) *Pour tout i, Z_i est réduit et quasi-compact.*

(ii) *Les Z_i sont disjoints et recouvrent Y.*

(iii) $Y_i = \bigcup_{j \geqq i} Z_j$ *est un ouvert de l'espace de Y.*

(iv) *Il existe un voisinage étale élémentaire séparé et quasi-compact Y_i' de Z_i dans Y_i et l'image de Y_i' dans Y est Y_i.*

Démonstration. Considérons Y comme quotient d'un schéma affine X par une relation d'équivalence étale de graphe R. On a donc un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{q_1} & R \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_2} \\ Y & \xleftarrow{p} & X \end{array}$$

et comme X est séparé et Y quasi-séparé, le morphisme q_2 est étale séparé, de présentation finie. Alors la fonction sur X qui à x associe le nombre de points géométriques de $q_2^{-1}(x)$ est une fonction constructible semi-continue inférieurement (cf. EGA IV 18.10.17.1) et q_2 est fini si et seulement si cette fonction est localement constante. Cette fonction est compatible avec les changements de base sur X, donc provient d'une fonction constructible sur Y. Notons Z_i le sous-espace algébrique quasi-compact et réduit au-dessus duquel elle prend la valeur i. Alors la restriction de p au-dessus de Z_i est un revêtement fini étale de degré i et on peut appliquer 5.7.5.

Proposition (5.7.7). *Soit Y un espace algébrique quasi-séparé. Alors il existe un ouvert de Y, contenant les points maximaux de Y (donc à fortiori dense) qui est représentable.*

Démonstration. L'assertion est locale sur Y. On peut donc supposer qu'il existe un schéma X affine et un morphisme étale surjectif $p: X \to Y$. Alors le plus grand ouvert de Y au-dessus duquel p est fini répond à la question.

Proposition (5.7.8) (cf. [12] chap. III th. 1.1). *Soit $\mathscr{M}$ un faisceau quasi-cohérent sur un espace algébrique Y quasi-compact et quasi-séparé. Alors $\mathscr{M}$ est limite inductive filtrante de ses sous-faisceaux (quasi-cohérents) de type fini.*

Démonstration. Compte tenu de 5.7.6, on est ramené par récurrence sur i à prouver l'assertion suivante: soit U un ouvert quasi-compact de Y, Z le sous-espace algébrique fermé réduit d'espace $Y-U$, $u: Y' \to Y$ un voisinage étale élémentaire séparé quasi-compact de Z dans Y, tel que u soit surjectif. Enfin soit $\mathscr{M}$ un faisceau quasi-cohérent sur Y. Supposons la proposition démontrée pour $(U, \mathscr{M}|U)$, alors elle est vraie pour $(Y, \mathscr{M})$. Soit U' (resp. $\mathscr{M}'$) l'image réciproque de U (resp. $\mathscr{M}$) par u. Alors $\mathscr{M}'$ est limite inductive filtrante de ses sous-faisceaux quasi-cohérents de type fini $\mathscr{M}'_{i,\, i\in I}$ (EGA I 9.4.9). Fixons i dans I. Il nous suffit de construire un sous-faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{M}$, de type fini, dont l'image réciproque sur Y' contient $\mathscr{M}'_i$. Par hypothèse on peut trouver un tel faisceau $\mathscr{N}$ au dessus de U. Soit $\mathscr{N}'$ son image réciproque sur U'. Alors il existe un sous-faisceau quasi-cohérent $\bar{\mathscr{N}}'$ de $\mathscr{M}'$, de type fini, qui prolonge $\mathscr{N}'$ (EGA I 9.4.7) et on peut supposer que $\mathscr{N}'$ majore $\mathscr{M}'_i$. Mais alors, comme Y' est un voisinage étale élémentaire de Z dans Y, il est clair que $\bar{\mathscr{N}}'$ est automatiquement stable par la donnée de descente sur $\mathscr{M}'$ relative au morphisme étale $Y' \to Y$, donc provient d'un sous-faisceau $\bar{\mathscr{N}}$ de $\mathscr{M}$ qui répond à la question.

Nous pouvons maintenant étendre aux espaces algébriques le théorème 5.2.2.

Théorème (5.7.9). *Soient S un espace algébrique quasi-compact et quasi-séparé, U un ouvert quasi-compact de S, $f: X \to S$ un espace algé-*

brique de présentation finie, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module de type fini, n un entier. Supposons que $\mathcal{M}|f^{-1}(U)$ soit U-plat en dimensions $\geqq n$ (cf. 5.2.1). *Alors, il existe un éclatement U-admissible $g: S' \to S$ (défini par un faisceau d'idéaux quasi-cohérent de type fini) tel que le transformé strict de $\mathcal{M}$ par g soit S'-plat en dimensions $\geqq n$.*

Notons d'abord qu'il résulte de 5.7.8 que les lemmes sur les éclatements démontrés dans 5.1 et les réductions faites dans 5.3 sont aussi valables lorsque S est un espace algébrique quasi-compact et quasi-séparé.

Compte tenu de 5.7.6 on est ramené à prouver, que si V est un ouvert quasi-compact de S tel que le fermé réduit complémentaire Z, possède un voisinage étale élémentaire $\tilde{S}$, quasi-compact et séparé, couvrant S et si (5.7.9) est vrai pour la restriction de la situation au-dessus de V, alors (5.7.9) est vrai. Soit donc $V' \to V$ un éclatement $U \cap V$ admissible tel que le transformé strict de $\mathcal{M}$ devienne V'-plat en dimensions $\geqq n$. On prolonge cet éclatement de V en un éclatement U-admissible $S' \to S$ (5.3.1). Quitte alors à remplacer S par S' (5.1.4), on peut supposer que $U \supset V$. Soit alors $\tilde{U}$ l'image réciproque de U dans $\tilde{S}$. Comme tout éclatement $\tilde{U}$-admissible de $\tilde{S}$ se descend en un éclatement U-admissible de S, on peut remplacer S par $\tilde{S}$ donc supposer S représentable. Compte tenu de 5.3.4, on peut également supposer X représentable et on est ramené au cas traité dans 5.2.2.

Corollaire (5.7.10). *Soient S un espace algébrique quasi-compact et quasi-séparé, U un ouvert quasi-compact de S, n un entier, X un S-espace algébrique de type fini, qui au-dessus de U est de dimension relative $\leqq n$. Alors il existe un éclatement U-admissible $S' \to S$, tel que le transformé strict de X par cet éclatement soit de dimension relative $\leqq n$ au-dessus de S'.*

Démonstration. On applique 5.7.9 avec $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$ et $n+1$ à la place de n.

Corollaire (5.7.11). *Soit S un espace algébrique quasi-compact et quasi-séparé, U un ouvert quasi-compact de S, $X \to S$ un S-espace algébrique de type fini. On suppose que $X \times_S U \to U$ est une immersion ouverte. Il existe un éclatement U-admissible $S' \to S$, tel que si $\overline{X}'$ est le transformé strict de X par cet éclatement, alors le morphisme $\overline{X}' \to S'$ est plat, quasi-fini (et est une immersion ouverte au-dessus de U). Si X est localement séparé sur S (resp. est séparé sur S), $\overline{X}' \to S'$ est étale (resp. une immersion ouverte).*

En effet, d'après 5.7.9, il existe un éclatement U-admissible $S' \to S$ qui rend $\overline{X}' \to S'$-plat et on peut supposer U schématiquement dense dans S' (5.3.2). Il est alors clair que $\overline{X}'$ est quasi-fini sur S'. Supposons X localement séparé sur S, donc $\overline{X}'$ localement séparé sur S' et montrons que l'immersion diagonale $\delta: \overline{X}' \to \overline{X}' \times_{S'} \overline{X}'$ est ouverte ce qui prouvera que $\overline{X}'$ est étale sur S'. Soit V un ouvert de $\overline{X}' \times_{S'} \overline{X}'$ qui contient $\delta(\overline{X}')$ comme sous-espace algébrique fermé, défini par un idéal $\mathscr{I}$. Or $\overline{X}'$ est S'-plat, $\overline{X}' \to S'$ est une immersion ouverte au-dessus de U et U est schématiquement dense dans S'; par suite δ est un isomorphisme aux points de $\mathrm{Ass}(\overline{X}' \times_{S'} \overline{X}')$, donc $\mathscr{I} = 0$. Si de plus X est séparé sur S, δ est une immersion fermée, donc un isomorphisme et le monomorphisme étale $\overline{X}' \to S'$ est une immersion ouverte.

Corollaire (5.7.12). *Soient S un espace algébrique quasi-compact et quasi-séparé, $X \to S$ un S-espace algébrique propre, U un ouvert quasi-compact de S au-dessus duquel $X \to S$ est un isomorphisme. Alors il existe un éclatement U-admissible $S' \to S$, tel que si $\overline{X}'$ est le transformé strict de X par cet éclatement, le morphisme canonique $\overline{X}' \to S'$ soit un isomorphisme (autrement dit, il existe un éclatement $X \times_S U$ admissible de X, soit X', tel que le morphisme composé $X' \to X \to S$ soit un éclatement U-admissible).*

En effet d'après 5.7.12, on peut supposer que $\overline{X}' \to S'$ est une immersion ouverte; on peut aussi supposer U schématiquement dense dans S'. Comme $\overline{X}' \to S'$ est propre, c'est un isomorphisme.

Corollaire (5.7.13) (lemme de Chow). *Soient S un espace algébrique quasi-compact et quasi-séparé, $f\colon X \to S$ un S-espace algébrique quasi-séparé de type fini, n'ayant qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Alors, il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "h"] \\ S \arrow[from=u, "f"'] & Y \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd}$$

tel que:

(i) *p est quasi-projectif.*

(ii) *g est un éclatement U-admissible, où U est un ouvert dense quasi-compact de X.*

(iii) *h est un morphisme plat quasi-fini surjectif, qui est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert quasi-compact de Y, schématiquement dense dans Y. Si X est localement séparé sur S (resp. est séparé sur S), h est étale (resp. est un isomorphisme).*

(N.B. Dans le cas séparé 5.7.13 est une simple généralisation de [12] chap. IV §3; le cas non séparé nous a été signalé par Artin.)

Démonstration. Comme X est quasi-séparé et n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, on peut trouver un ouvert dense U de X, affine sur S, rétro-compact dans X et représentable (5.7.7). On déduit facilement de 5.7.8 que V se réalise alors comme ouvert d'un S-schéma projectif P. Soit Γ le sous-espace algébrique fermé de $X \times_S P$, adhérence schématique du graphe de l'identité de U. Alors le morphisme $\Gamma \to X$ est projectif et est un isomorphisme au-dessus de U. D'après 5.7.12, il existe un morphisme propre $Z \to \Gamma$, tel que le morphisme composé $Z \to \Gamma \to X$ soit un éclatement U admissible. Le morphisme $Z \to \Gamma \to P$ est un morphisme de type fini et possède au-dessus de U une section $s: U \to Z$ qui est une immersion ouverte d'image schématiquement dense dans Z. Compte tenu du fait que U n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, on voit immédiatement qu'il existe un ouvert quasi-compact dense V de U au-dessus duquel $Z \to P$ est un isomorphisme. Quitte à remplacer U par V on suppose désormais que $Z \to P$ est un isomorphisme au-dessus de U. Il existe alors un éclatement U-admissible $P' \to P$ tel que le transformé strict X' de Z soit plat et quasi-fini sur P' (5.7.11). Alors $X' \to Z \to X$ est un éclatement U-admissible de X (5.1.4) et il nous suffit de prendre pour Y le sous-espace algébrique ouvert de P', image de X'. Les autres assertions de 5.7.13 résultent aussi de 5.7.11.

On démontre de même la forme quantitative suivante du lemme de Chow:

Corollaire (5.7.14). *Soient S un espace algébrique quasi-compact et quasi-séparé, $X \to S$ un S-espace algébrique séparé, de type fini, U un ouvert de X quasi-projectif sur S. Alors il existe un éclatement U-admissible X' de X qui est quasi-projectif sur S.*

Seconde partie: Platitude et projectivité

Introduction

Dans cette seconde partie, nous étudions le problème de la «descente» des propriétés de platitude et de projectivité en algèbre commutative: soient $f: A \to B$ un homomorphisme d'anneaux commutatifs, M un A-module, soumis éventuellement à certaines conditions préalables, et tel que $B \otimes_A M$ soit B-plat (resp. projectif); à quelles conditions sur f peut-on assurer que M est A-plat (resp. projectif)?

Le problème de la descente de la platitude est bien connu lorsqu'on fait sur M une hypothèse préalable de «finitude relative»: cf. EGA IV 11, ainsi que le §4 de la première partie. Au §1 nous étudions le problème sans faire d'hypothèse préalable sur M. On s'aperçoit immédiatement qu'il est alors nécessaire d'imposer de sérieuses restrictions à f: en particulier, si f est injectif et descend la platitude, il «descend la nullité» (condition (O) du §1).

Il est facile de prouver qu'un homomorphisme injectif et fini vérifie la condition (O); en fait, D. Ferrand a démontré dans [7] qu'un homomorphisme injectif et fini d'anneaux noethériens descend la platitude. Nous montrons ici que ce résultat reste valable sans hypothèse noethérienne. Nous montrons aussi qu'un homomorphisme injectif $f\colon A \to B$, qui descend la nullité, descend aussi la platitude lorsque A est noethérien. Pour cela, nous étudions une condition sur f, plus stricte que la descente de la platitude et qui, de même que la condition (O), ne fait pas intervenir la multiplication de B. Par ailleurs, nous donnons un exemple d'homomorphisme injectif $f\colon A \to B$ qui descend la nullité et non la platitude; dans cet exemple, A est un anneau de valuation (d'ailleurs monstrueux).

Dans le cas où l'anneau de base A est local noethérien complet intègre, la condition (O) pour une A-algèbre B équivaut à l'existence d'une forme linéaire non nulle sur le A-module B; nous montrons par un exemple que cette condition n'implique pas toujours l'existence d'une A-algèbre quotient de B qui soit finie et fidèle, même lorsque B est de type fini sur A.

En vue d'étudier la descente de la projectivité, nous introduisons au §2 une «condition de Mittag-Leffler» sur les modules. Lazard a montré dans [13] que tout sous-module pur d'un module libre est réunion filtrante de sous-modules purs et projectifs, et Goblot a remarqué [8] que la même propriété vaut pour les sous-modules purs de A^I lorsque A est noethérien. Dans notre terminologie, cette propriété caractérise les modules plats de Mittag-Leffler. Une autre caractérisation de ces modules est la suivante: le A-module plat M est de Mittag-Leffler si et seulement s'il est limite inductive filtrante de A-modules libres de type fini L_i tels que le système projectif des duals vérifie la condition de Mittag-Leffler ensembliste (EGA 0_{III} 13.1.2).

Nous énonçons un certain nombre de critères de descente de la condition de Mittag-Leffler, sous une hypothèse préalable de platitude; ces critères ressemblent, du moins dans le cas noethérien, aux critères de EGA IV 11 pour la descente de la platitude sous une hypothèse préalable de finitude relative.

Au §3, nous étudions le passage de la propriété de Mittag-Leffler à la propriété de projectivité. Dans ce but, nous utilisons systématiquement la méthode de récurrence transfinie introduite par Kaplansky [11]; cette méthode permet dans de nombreuses questions de supposer satisfaite une hypothèse de dénombrabilité, et il se trouve que tout module plat, de Mittag-Leffler et de type dénombrable est projectif (2.2.2).

En particulier, les critères de descente de la propriété de Mittag-Leffler obtenus au §2 fournissent des critères analogues de descente de la projectivité. Les mêmes méthodes permettent de calculer la «dimension finitiste» des anneaux noethériens [4]. Enfin, les techniques de descente de la projectivité peuvent être utilisées pour étudier certains problèmes de dimension homologique des modules plats; nous en donnons un exemple (3.3).

Conventions et notations

Sauf aux n^{os} 1.1, 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4, les anneaux sont supposés commutatifs.

Pour tout ensemble E on note 1_E l'application identique de E.

Un ordinal est un ensemble sur lequel la relation ($x \in y$ ou $x = y$) est un bon ordre; un cardinal est un ordinal qui n'est équipotent à aucun de ses éléments. Pour tout ordinal u, on note $\aleph_u$ le cardinal infini d'indice u.

On note (Ens) la catégorie des ensembles, (Ab) la catégorie des groupes abéliens, $\mathrm{Mod}(A)$ la catégorie des modules à gauche sur un anneau A.

Si A est un anneau commutatif, on note $\mathrm{Min}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A. Pour tout idéal I de A, on note $D(I)$ l'ensemble des idéaux premiers de A ne contenant pas I.

La duale d'une catégorie C est notée C^0.

§1. Descente de la platitude

Soit $f: A \to B$ un homomorphisme d'anneaux; on dit que f *descend la platitude* s'il vérifie la condition

(P) tout A-module P, tel que $B \otimes_A P$ soit B-plat, est A-plat.

Cette condition a été étudiée par Ferrand [7] et Olivier [15]. Rappelons notamment les résultats suivants [15]:

Soit $f: A \to B$ un homomorphisme vérifiant (P). Tout idéal monogène contenu dans $\mathrm{Ker}(f)$ est engendré par un idempotent, et l'inclusion $f(A) \hookrightarrow B$ vérifie (P).

Soit $f: A \to B$ un homomorphisme injectif vérifiant (P). Le A-module sous-jacent à B vérifie la condition

(O) tout A-module P, tel que $B \otimes_A P = 0$, est nul.

On peut se demander si la réciproque de ce dernier résultat est vraie; nous allons voir que la réponse est affirmative lorsque A est noethérien et négative dans le cas général.

1.1. Rappel sur les suites universellement exactes

Soit A un anneau non nécessairement commutatif; on note T le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ de $(\mathrm{Mod}(A))^0$ dans $\mathrm{Mod}(A^0)$; rappelons que T est exact et fidèle. La proposition suivante est un amalgame de résultats bien connus ([13, 18]):

Proposition (1.1.1). *Soit* $0 \to M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P \to 0$ *une suite exacte de* $\mathrm{Mod}(A)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *u est A-universellement injectif, i.e. pour tout A^0-module Q, $1_Q \otimes_A u$ est injectif;*

(ii) *$1_{TM} \otimes_A u$ est injectif;*

(iii) *Tu est inversible à droite;*

(iv) *Tv est A^0-universellement injectif;*

(v) *pour tout A-module de présentation finie F, $\mathrm{Hom}_A(F, v)$ est surjectif;*

(vi) *il existe un système inductif filtrant de suites exactes scindées de* $\mathrm{Mod}(A)$, *de limite isomorphe à* $0 \to M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P \to 0$.

Rappelons rapidement la démonstration: (i) ⇒ (ii) est clair; (ii) ⇒ (iii) s'obtient en formant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{A^0}(TM, TN) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{A^0}(TM, Tu)} & \mathrm{Hom}_{A^0}(TM, TM) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(TM \otimes_A N) & \xrightarrow{T(1_{TM} \otimes_A u)} & T(TM \otimes_A M) \end{array}$$

(dans lequel les colonnes sont les isomorphismes déduits de la propriété universelle du produit tensoriel) et en utilisant l'exactitude de T; (iii) ⇒ (iv) est clair; (iv) ⇒ (v) s'obtient en formant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} TP \otimes_A F & \xrightarrow{Tv \otimes_A 1_F} & TN \otimes_A F \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(\mathrm{Hom}_A(F, P)) & \xrightarrow{T(\mathrm{Hom}_A(F, v))} & T(\mathrm{Hom}_A(F, N)) \end{array}$$

(dans lequel les colonnes sont les isomorphismes décrits dans Bourbaki, Alg. comm., chap. I, §2, ex. 14) et en utilisant la fidélité de T; (v) ⇒ (vi) s'obtient en procédant par «pull-back» à partir d'une écriture de P comme limite inductive filtrante de A-modules de présentation finie ([13] I 2.3); (vi) ⇒ (i) est clair.

Nous dirons que la suite $0 \to M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P \to 0$ est *A-universellement exacte* si elle vérifie les conditions (i) à (vi) de 1.1.1; conformément à [13] nous dirons qu'un sous-module M d'un A-module N est *pur* si la suite $0 \to M \to N \to N/M \to 0$ est A-universellement exacte.

Nous dirons qu'un A-module P est *relativement projectif* si le foncteur $\mathrm{Hom}_A(P, \cdot)$ transforme toute suite A-universellement exacte en une suite exacte; de même nous dirons qu'un A-module I est *relativement injectif* si le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\cdot, I)$ transforme toute suite A-universellement exacte en une suite exacte. Les caractérisations suivantes sont bien connues [18]:

(1.1.2) Un A-module P est relativement projectif si et seulement s'il est facteur direct d'une somme directe de A-modules de présentation finie.

(1.1.3) Pour tout A-module M, il existe une suite A-universellement exacte $0 \to N \to P \to M \to 0$, telle que P soit relativement projectif.

(Pour prouver ces assertions, on remarque que tout A-module de présentation finie est relativement projectif (1.1.1 (v)), ce qui prouve la suffisance de la condition de 1.1.2; d'autre part, si M est un A-module limite inductive filtrante de A-modules de présentation finie F_i, on forme la suite exacte $0 \to N \to \bigoplus F_i \to M \to 0$; cette suite est A-universellement exacte (en effet, si F est un A-module de présentation finie, le foncteur $\mathrm{Hom}_A(F, \cdot)$ commute aux limites inductives filtrantes) d'où 1.1.3 et la nécessité de la condition de 1.1.2.)

(1.1.4) Un A-module I est relativement injectif si et seulement si l'application A-linéaire canonique $j_I: I \to T^2(I)$ est inversible à gauche.

(1.1.5) Pour tout A-module M, il existe une suite A-universellement exacte $0 \to M \to I \to N \to 0$, telle que I soit relativement injectif.

(Pour prouver ces assertions, on note que, pour tout A^0-module Q, le A-module TQ est relativement injectif (vu l'isomorphisme $T(Q \otimes_A \cdot) \to \mathrm{Hom}_A(\cdot, TQ)$); ceci prouve la suffisance de la condition de 1.1.4; par ailleurs, pour tout A-module M, l'application A-linéaire canonique $j_M: M \to T^2(M)$ est A-universellement injective, puisque j_{TM} est un inverse à droite de Tj_M; ceci prouve 1.1.5 et la nécessité de la condition de 1.1.4.)

1.2. Généralisation d'un théorème de Ferrand

Dans [7], Ferrand prouve qu'un homomorphisme injectif et fini d'anneaux noethériens descend la platitude. Nous allons montrer que ce résultat est valable sans hypothèse noethérienne; d'autre part, si A est un anneau noethérien et si $f: A \to B$ est un homomorphisme injectif vérifiant la condition (O), nous allons montrer que f descend la platitude.

Soient A un anneau (commutatif), M un A-module; introduisons la condition suivante sur M:

(Q) étant donnée une suite exacte $0 \to Q \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} P \to 0$ telle que L soit A-plat, si $\operatorname{Im}(1_M \otimes_A u)$ est un sous-A-module pur de $M \otimes_A L$, alors $\operatorname{Im}(u)$ est un sous-A-module pur de L (i.e. P est A-plat).

Il est clair que si $f\colon A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux, et si le A-module sous-jacent à B vérifie la condition (Q), alors f descend la platitude.

Lemme (1.2.1) (Olivier, cf. [15]). *Soient M un A-module, N un sous-module pur de M. Si N vérifie* (Q), *alors M vérifie* (Q).

(En particulier, un homomorphisme universellement injectif descend la platitude.)

Démonstration. Soit $0 \to Q \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} P \to 0$ une suite exacte de $\operatorname{Mod}(A)$ telle que L soit A-plat. Utilisons le foncteur T de 1.1. Si R est un A-module, on déduit de 1.1.1 que $\operatorname{Im}(1_R \otimes_A u)$ est un sous-A-module pur de $R \otimes_A L$ si et seulement si $\operatorname{Hom}_A(v, TR)$ est inversible à gauche.

Par hypothèse TN est isomorphe à un facteur direct de TM; donc, si $\operatorname{Hom}_A(v, TM)$ est inversible à gauche, il en est de même de $\operatorname{Hom}_A(v, TN)$; si N vérifie (Q), alors Tv est inversible à gauche, donc M vérifie (Q).

Introduisons maintenant les conditions «duales» des conditions (O) et (Q), relatives à un A-module M:

(O′) tout A-module N, tel que $\operatorname{Hom}_A(M, N) = 0$, est nul;

(Q′) étant donnée une application A-linéaire injective $u\colon J \to I$, telle que I soit un A-module injectif, si l'application A-linéaire $\operatorname{Hom}_A(M, u)$ est inversible à gauche, alors u est inversible à gauche (i.e. J est injectif).

Lemme (1.2.2). (i) *On a* (O′) $\Rightarrow$ (O); *la réciproque est vraie si A est linéairement compact pour la topologie discrète (p.ex. local noethérien complet).*

(ii) *On a* (Q′) $\Rightarrow$ (Q).

(iii) *Si* $\operatorname{Supp}(M) = \operatorname{Spec}(A)$, *on a* (Q′) $\Rightarrow$ (O′).

Démonstration. (i) Si M, P et E sont trois A-modules, on a un isomorphisme fonctoriel

$$\operatorname{Hom}_A(M \otimes_A P, E) \to \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_A(P, E)); \qquad (*)$$

prenant $E = P$ on voit que (O′) $\Rightarrow$ (O). Supposons A linéairement compact pour la topologie discrète; notons R le radical de A et E l'enveloppe injective de A/R; le foncteur $\operatorname{Hom}_A(\cdot, E)$ définit une dualité sur $\operatorname{Mod}(A)$ pour laquelle tout A-module de type fini est réflexif ([8] 5.17); comme, pour vérifier la condition (O′), on peut se borner à prendre N monogène, l'implication (O)$\Rightarrow$(O′) résulte ici de l'isomorphisme $(*)$ où l'on prend $P=\mathrm{Hom}_A(N, E)$.

(ii) Supposons que M vérifie (Q′); utilisons le foncteur T de 1.1. Soit $0 \to Q \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} P \to 0$ une suite exacte telle que L soit A-plat et que $\mathrm{Im}(1_M \otimes_A u)$ soit un sous-A-module pur de $M \otimes_A L$. D'après 1.1.1 et l'isomorphisme $(*)$ on voit que $\mathrm{Hom}_A(M, Tv)$ est inversible à gauche. Comme TL est un A-module injectif, la condition (Q′) montre que Tv est inversible à gauche; ainsi M vérifie (Q).

(iii) Supposons que M vérifie (Q′). Soit R l'intersection des idéaux R' de A tels que $\mathrm{Hom}_A(M, A/R')=0$. Alors $\mathrm{Hom}_A(M, A/R)=0$, et tout A-module N, tel que $\mathrm{Hom}_A(M, N)=0$, est annulé par R et est injectif. En particulier tout A/R-module est injectif, donc l'anneau A/R est semi-simple. Posons $S=1+R$ et montrons que $A/R=A[S^{-1}]$. Quitte à localiser par S, on peut supposer que R est contenu dans le radical de A. Le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\cdot, A/R)$ est alors exact et fidèle; ainsi $R=0$, d'où l'assertion. En particulier, on a $M[S^{-1}]=0$. Si $\mathrm{Supp}(M)=\mathrm{Spec}(A)$, cela implique $A[S^{-1}]=0$, donc $R=A$; par suite M vérifie (O′).

Donnons maintenant des exemples de conditions qui impliquent (Q′). L'idée essentielle de ces exemples est la suivante: comme la catégorie $\mathrm{Mod}(A)$ a des enveloppes injectives, il suffit, pour vérifier (Q′), de prendre pour u une enveloppe injective; on essaye alors de montrer que $\mathrm{Hom}_A(M, u)$ est bijectif, pour pouvoir appliquer le lemme suivant:

Lemme (1.2.3). *Soient M un A-module, N un sous-module de M, $u: J \to I$ une application A-linéaire injective telle que le A-module I soit injectif. Si* $\mathrm{Hom}_A(M, u)$ *est bijectif,* $\mathrm{Hom}_A(N, u)$ *est bijectif.*

Démonstration. On forme le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & \mathrm{Hom}_A(M/N, J) & \to & \mathrm{Hom}_A(M, J) & \to & \mathrm{Hom}_A(N, J) & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & \mathrm{Hom}_A(M/N, I) & \to & \mathrm{Hom}_A(M, I) & \to & \mathrm{Hom}_A(N, I) & \to 0
\end{array}$$

dans lequel les colonnes sont injectives et la colonne médiane est bijective; on déduit alors du lemme des cinq que toutes les colonnes sont bijectives.

Théorème (1.2.4). *Un A-module fidèle de type fini vérifie* (Q′).
(En particulier, un homomorphisme injectif et fini descend la platitude.)

Démonstration. Soient $u: J \to I$ une enveloppe injective, L un A-module libre de type fini, F un A-module quotient de L. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_A(F, J) & \to & \mathrm{Hom}_A(F, I) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_A(L, J) & \to & \mathrm{Hom}_A(L, I)
\end{array}$$

est cartésien; comme la seconde ligne est une enveloppe injective, la première ligne est une extension essentielle. Ainsi, si $\mathrm{Hom}_A(F, u)$ est inversible à gauche, c'est un isomorphisme. Si F est fidèle, il existe un monomorphisme de A dans une puissance finie de F, et u est un isomorphisme (1.2.4) donc F vérifie la condition (Q').

Corollaire (1.2.5) (Mollier). *Soit $f: A \to B$ un homomorphisme injectif et fini. Si B est noethérien, A est noethérien.*

Démonstration. D'après Bass [5] il suffit de voir que si $(I_r)_{r \in R}$ est une famille de A-modules injectifs, alors $\bigoplus_{r \in R} I_r$ est un A-module injectif. Par hypothèse, $\mathrm{Hom}_A(B, \bigoplus_{r \in R} I_r) = \bigoplus_{r \in R} \mathrm{Hom}_A(B, I_r)$ est un B-module injectif. Il suffit donc d'appliquer 1.2.4 au A-module B.

Indiquons au passage un résultat qui généralise légèrement EGA IV 11.4.1.

Lemme (1.2.6) (Bass, cf. [4]). *Soient A un anneau, R un idéal de A; les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *le A-module A/R vérifie* (O');

(i') *tout A-module M est extension essentielle de* $\mathrm{Ann}_M(R)$;

(ii) *le A-module A/R vérifie* (O);

(iii) *R est T-nilpotent, autrement dit, pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de R, il existe un entier N tel que $\prod_{0 \leq n \leq N} a_n = 0$.*

Démonstration. (i)$\Leftrightarrow$(i') est immédiat; (i)$\Rightarrow$(ii) par 1.2.2; si (ii) est vérifié, et si $(a_n)_{n \in N}$ est une suite d'éléments de R, on forme le A-module P, limite inductive de la suite d'applications A-linéaires

$$A \xrightarrow{a_0} A \xrightarrow{a_1} \cdots \longrightarrow A \xrightarrow{a_n} A \xrightarrow{a_{n+1}} \cdots;$$

alors $P/RP = 0$, donc $P = 0$, donc il existe un entier N tel que $\prod_{0 \leq n \leq N} a_n = 0$, d'où (iii). Si (i) n'est pas vérifié, soit M un A-module non nul tel que, pour tout élément non nul x de M, on ait $Rx \neq 0$; on construit par récurrence une suite $(a_n, x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $R \times M$ telle que $x_{n+1} = a_n x_n$ et $x_n \neq 0$ pour tout entier n; alors $\prod_{0 \leq n \leq N} a_n \neq 0$ pour tout entier N; ceci contredit (iii).

Proposition (1.2.7). *Soient A un anneau, R un idéal T-nilpotent de A, M un A-module admettant un sous-module fidèle de type fini; le A-module $M \oplus (A/R)$ vérifie* (Q').

Démonstration. Soit $u: J \to I$ une enveloppe injective. Si $\mathrm{Hom}_A(A/R, u)$ est inversible à gauche, c'est un isomorphisme, et il en est de même de

$\mathrm{Hom}_A(N, u)$ pour tout A-module N annulé par R. On forme le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(M/RM, J) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M/RM, I) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_A(M, J) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M, I) \end{array}$$

dans lequel les colonnes sont essentielles (1.2.6 (i')). Comme la première ligne est bijective, la seconde ligne est essentielle; si elle est inversible à gauche, c'est un isomorphisme, et u est un isomorphisme par 1.2.3, cqfd.

Corollaire (1.2.8) (cf. EGA IV 11.4.1). *Soient $f\colon A \to B$ un homomorphisme injectif, R un idéal T-nilpotent de A, P un A-module tel que $B \otimes_A P$ soit B-plat et que P/RP soit (A/R)-plat. Alors P est A-plat.*

Théorème (1.2.9). *Soient A un anneau noethérien réduit, M un A-module vérifiant* (O'). *Alors M vérifie* (Q').

Démonstration. Par récurrence noethérienne, on peut supposer l'énoncé prouvé pour tous les anneaux réduits quotients de A et distincts de A. Soit $u\colon J \to I$ une enveloppe injective telle que $\mathrm{Hom}_A(M, u)$ soit inversible à gauche.

Si A n'est pas intègre, soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de A; comme le $(A/\mathfrak{p})$-module $M/\mathfrak{p}M$ vérifie (O'), il résulte de l'hypothèse de récurrence que $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{p}, J)$ est un $(A/\mathfrak{p})$-module injectif. Comme l'homomorphisme $A \to \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(A)} A/\mathfrak{p}$ est injectif et fini, il résulte de 1.2.4 que J est injectif.

Si A est intègre, nous allons d'abord vérifier que le sous-module de torsion de J est injectif, autrement dit, que pour tout élément non nul s de A, le (A/sA)-module $\mathrm{Hom}_A(A/sA, J)$ est injectif.

Comme M vérifie (O'), il existe une forme linéaire non nulle f sur M; posons $F = f(M)$, choisissons un élément non nul t de F et posons $R = \mathrm{Ann}_A(F/stF)$; alors $R \subset sA$: en effet, si $r \in R$, il existe $a \in F$ tel que $rt = sta$, d'où $r = sa$ puisque t est A-régulier.

Soit R' la racine de R. D'après l'hypothèse de récurrence, le (A/R')-module $\mathrm{Hom}_A(A/R', J)$ est injectif. Par ailleurs F/RF est un module quotient de M/RM, et c'est un (A/R)-module fidèle de type fini; a fortiori M/RM a un sous-(A/R)-module fidèle de type fini. Il résulte donc de 1.2.7 que le (A/R)-module $\mathrm{Hom}_A(A/R, J)$ est injectif. A fortiori $\mathrm{Hom}_A(A/sA, J)$ est un (A/sA)-module injectif, d'où l'assertion.

Quitte alors à diviser J par son sous-module de torsion, on peut supposer que J est sans torsion; notons K le corps de fractions de A; alors I est un K-module, donc $\mathrm{Hom}_A(M, I)$ est un K-module et il en est de même de son facteur direct $\mathrm{Hom}_A(M, J)$.

Soit J' le sous-module $\sum_{u \in \mathrm{Hom}_A(M,J)} \mathrm{Im}(u)$ du A-module J. Comme M vérifie (O'), J' est un sous-module essentiel de J. Comme $\mathrm{Hom}_A(M,J)$ est un K-module, J' est divisible, donc est un K-module puisque J est sans torsion. Par suite J' est injectif, donc $J'=J$ et J est injectif, cqfd.

Corollaire (1.2.10). *Soient A un anneau noethérien, $f\colon A \to B$ un homomorphisme injectif vérifiant (O); alors f descend la platitude.*

Démonstration. Par localisation, complétion et descente plate, on peut supposer A local complet; soit A' le quotient de A par son nilradical. Par 1.2.2(i), B vérifie (O′). Soit P un A-module tel que $B \otimes_A P$ soit B-plat. Par 1.2.9, $A' \otimes_A P$ est A'-plat. Par EGA IV 11.4.1, P est A-plat, cqfd.

Remarque (1.2.11). Soient A un anneau local noethérien complet intègre, E l'enveloppe injective du corps résiduel de A, M un A-module. Alors, pour que M vérifie (O), il faut et il suffit que $M \otimes_A E \neq 0$. En effet, si cette dernière condition est vérifiée, on a $\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A E, E) \neq 0$, c'est-à-dire $\mathrm{Hom}_A(M, A) \neq 0$ puisque $A = \mathrm{End}_A(E)$; ainsi il existe une forme linéaire non nulle sur M, donc M a un module quotient de type fini et fidèle, lequel vérifie (O); a fortiori M vérifie (O).

1.3. Cas des anneaux de valuation

Dans ce numéro, on considère un homomorphisme d'anneaux $f\colon A \to B$, où A est un anneau de valuation. On va donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que f soit universellement injectif (resp. vérifie (P), resp. vérifie (O)). Les conditions trouvées ne sont pas en général équivalentes; en particulier la condition (O) n'est pas toujours suffisante pour descendre la platitude.

Lemme (1.3.1). *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *l'homomorphisme f est universellement injectif;*

(ii) *le quotient de B par son sous-A-module de torsion est fidèlement plat sur A;*

(iii) *il existe une spécialisation $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ dans* $\mathrm{Spec}(B)$, *telle que $f^{-1}(\mathfrak{q}) = 0$ et $f^{-1}(\mathfrak{q}')$ soit l'idéal maximal de A.*

Démonstration. Notons K le corps de fractions de A.

Il est clair que (ii) implique (i) et (iii). Si (iii) est vérifié, $B/\mathfrak{q}$ est fidèlement plat sur A, et a fortiori $\mathrm{Im}(B \to B \otimes_A K)$ est fidèlement plat sur A, donc (ii) est vérifié. Si (i) est vérifié, l'homomorphisme $A \to \mathrm{Im}(B \to B \otimes_A K)$ est universellement injectif [15] et plat, donc fidèlement plat; ainsi (ii) est vérifié.

Lemme (1.3.2). *Pour tout* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, *l'homomorphisme $A \to A_{\mathfrak{p}} \times (A/\mathfrak{p})$ descend la platitude.*

Démonstration. Soit M un A-module tel que $M_{\mathfrak{p}}$ soit A-plat et que $M/\mathfrak{p}M$ soit $(A/\mathfrak{p})$-plat; pour voir que M est A-plat, il suffit de voir que le A-module $T = \mathrm{Ker}(M \to M_{\mathfrak{p}})$ est nul. Soit $x \in T$. Si $M/\mathfrak{p}M$ est $(A/\mathfrak{p})$-plat, il existe $s \in \mathfrak{p}$ et $y \in M$ tels que $x = sy$. Si $M_{\mathfrak{p}}$ est A-plat, il existe $t \in A - \mathfrak{p}$ tel que $ty = 0$. Comme t divise s, on conclut que $x = 0$, cqfd.

Lemme (1.3.3). *Pour que f vérifie* (O), *il faut et il suffit que $B \neq 0$ et que pout tout point non fermé $\mathfrak{p}$ de* $\mathrm{Spec}(A)$, *il existe une spécialisation* $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ *dans* $\mathrm{Spec}(B)$ *telle que* $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q}) \neq f^{-1}(\mathfrak{q}')$.

Démonstration. Nécessité: comme la condition (O) est universelle, on peut supposer $\mathfrak{p} = 0$. Soient K le corps de fractions de A et

$$I = \mathrm{Ker}(B \to B \otimes_A K).$$

Comme $(K/A) \otimes_A I = 0$, on a $(K/A) \otimes_A (B/I) \neq 0$ puisque f vérifie (O), donc la A-algèbre plate B/I n'est pas une K-algèbre: elle contient donc des idéaux premiers $\bar{\mathfrak{q}} \subset \bar{\mathfrak{q}}'$ tels que $\bar{\mathfrak{q}}$ soit au-dessus de 0 mais non $\bar{\mathfrak{q}}'$. Il suffit alors de prendre pour $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}'$ les images réciproques respectives de $\bar{\mathfrak{q}}$ et $\bar{\mathfrak{q}}'$ dans B.

Suffisance: soit M un A-module non nul tel que $B \otimes_A M = 0$; cherchons une contradiction avec la condition de l'énoncé.

a) Montrons que $\mathrm{Supp}(M)$ admet un point maximal. Sinon, on a $M_{\mathfrak{p}} = 0$ où $\mathfrak{p}$ désigne l'intersection des éléments de $\mathrm{Supp}(M)$; soit $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ une spécialisation dans $\mathrm{Spec}(B)$ telle que $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p} \neq f^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{p}'$. On a $M_{\mathfrak{p}'} \neq 0$ et $(M_{\mathfrak{p}'})_{\mathfrak{p}} = 0$, donc $M_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}'} \neq 0$ (sinon $M_{\mathfrak{p}'}$ serait plat (1.3.2) et non nul, de sorte que $M_{\mathfrak{p}}$ serait non nul). Mais ceci contredit le fait que l'homomorphisme $A_{\mathfrak{p}'}/pA_{\mathfrak{p}'} \to B_{\mathfrak{q}'}/qB_{\mathfrak{q}'}$ est universellement injectif (1.3.1).

b) Soit $\mathfrak{p}$ le point maximal de $\mathrm{Supp}(M)$; montrons que $\mathfrak{p} = \bigcup_{\mathfrak{p}' \in D(\mathfrak{p})} \mathfrak{p}'$. Sinon, $D(\mathfrak{p})$ a un point fermé $\mathfrak{p}'$; d'après la condition de l'énoncé, il existe une spécialisation $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}$ dans $\mathrm{Spec}(B)$, au-dessus de la spécialisation $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$; comme on a $M_{\mathfrak{p}'} = 0 \neq M_{\mathfrak{p}}$, le raisonnement de a) fournit une nouvelle contradiction.

c) Montrons que $\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}} = 0$. Soient $x \in M_{\mathfrak{p}}$ et $s \in \mathfrak{p}$; notons $\mathfrak{p}'$ le point maximal de $V(sA)$; vu b), on a $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$, donc $M_{\mathfrak{p}'} = 0$; ainsi il existe $t \in A - \mathfrak{p}'$ tel que $tx = 0$; comme t divise s, on a $sx = 0$, d'où l'assertion.

Cela dit, on voit que $M_{\mathfrak{p}}$ est un $k(\mathfrak{p})$-espace vectoriel non nul; comme il existe un point de $\mathrm{Spec}(B)$ au-dessus de $\mathfrak{p}$, on ne peut avoir $M_{\mathfrak{p}} \otimes_A B = 0$.

Lemme (1.3.4). *Pour que f vérifie* (P) *il faut et il suffit qu'il vérifie* (O) *et que, pour tout point $\mathfrak{p}'$ de* $\mathrm{Spec}(A)$ *qui n'est pas maximal, il existe une spécialisation* $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ *dans* $\mathrm{Spec}(B)$ *telle que* $f^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{p}' \neq f^{-1}(\mathfrak{q})$.

Démonstration. Nécessité: supposons que f vérifie (P); il est clair que f vérifie (O); montrons qu'il vérifie la dernière condition. Par localisation, on peut supposer que $\mathfrak{p}'$ est le point fermé de $\mathrm{Spec}(A)$. Si $D(\mathfrak{p}')$ admet un point fermé, l'existence de la spécialisation cherchée résulte de la condition (O) par 1.3.3; on peut donc supposer que $\mathfrak{p}' = \bigcup_{\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{p}')} \mathfrak{p}$. Si f vérifie (P), $B/\mathfrak{p}'B$ n'est pas B-plat, donc il existe $\mathfrak{q}' \in V(\mathfrak{p}'B)$ tel que $\mathfrak{p}'B_{\mathfrak{q}'} \neq 0$. Par suite, il existe $\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{p}')$ tel que $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}'} \neq 0$. Soit $s \in \mathfrak{p}' - \mathfrak{p}$. Pour tout entier n, on a $s^n A \subset \mathfrak{p}$, donc $s^n B_{\mathfrak{q}'} \neq 0$. L'idéal $sB_{\mathfrak{q}'}$ de $B_{\mathfrak{q}'}$ n'est pas nilpotent; comme il est monogène, ce n'est pas un nilidéal; il existe donc un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B, contenu dans $\mathfrak{q}'$, tel que $sB_{\mathfrak{q}'} \not\subset \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}'}$; a fortiori $\mathfrak{q}$ n'est pas au-dessus de $\mathfrak{p}'$.

Suffisance: il s'agit de prouver que sous les conditions de l'énoncé, tout A-module de torsion M tel que $B \otimes_A M$ soit B-plat est nul. Sinon, comme f vérifie (O), on voit comme dans la preuve de 1.3.3 a) que $\mathrm{Supp}(M)$ a un point maximal $\mathfrak{p}$. Comme M est de torsion, on a $\mathfrak{p} \neq 0$; on peut donc trouver une spécialisation $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}$ dans $\mathrm{Spec}(B)$ telle que $\mathfrak{p}' = f^{-1}(\mathfrak{q}') \neq f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. Comme $M_{\mathfrak{p}'} = 0 \neq M_{\mathfrak{p}}$, on a $M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}'M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ (1.3.2). Quitte à effectuer le changement d'anneaux $A \to A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}'A_{\mathfrak{p}}$, on peut donc se ramener au cas où f est universellement injectif (1.3.1); mais alors f descend la platitude, donc M est plat, donc $M = 0$.

Proposition (1.3.5). *Pour qu'il existe un homomorphisme $f: A \to B$ qui vérifie* (O) *et ne vérifie pas* (P), *il faut et il suffit que* $\mathrm{Spec}(A)$ *ne soit pas bien ordonné par l'ordre opposé à l'inclusion (i.e. qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A qui est réunion d'idéaux premiers strictement plus petits que $\mathfrak{p}$).*

Démonstration. La nécessité s'obtient en comparant les énoncés de 1.3.3 et 1.3.4. Inversement, supposons donnée une suite strictement croissante $(\mathfrak{p}_n)_{n \in N}$ d'idéaux premiers de A, telle que $\mathfrak{p}_0 = 0$; soit $\mathfrak{p}$ la réunion des $\mathfrak{p}_n$, qui est un idéal premier de A. L'homomorphisme produit

$$f: A \to (A/\mathfrak{p}) \times \prod_{n \in N} (A_{\mathfrak{p}_{n+1}}/\mathfrak{p}_n A_{\mathfrak{p}_{n+1}}) = B$$

vérifie (O) (1.3.3) et ne vérifie pas (P): en effet $B/\mathfrak{p}B$ est B-plat, car il est limite inductive des $B/\mathfrak{p}_n B$ qui sont des facteurs directs de B.

1.4. Problèmes et compléments

(1.4.1) D'après Olivier [15], certaines propriétés fondamentales des homomorphismes fidèlement plats sont aussi vérifiées par les homomorphismes universellement injectifs (ainsi la condition (P) et la «descente effective» des modules). Il semble naturel de chercher à préciser cette analogie; par exemple:

a) Ferrand a soulevé la question suivante: soit $f\colon A \to B$ un homomorphisme universellement injectif; alors $\mathrm{Spec}(f)$ est-il couvrant pour la topologie fpqc, autrement dit, existe-t'il une B-algèbre C qui est fidèlement plate sur A?

b) Soit $f\colon A \to B$ un homomorphisme de type fini, universellement injectif, et supposons A local noethérien complet intègre; par analogie avec EGA IV 14.5, on peut se demander s'il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ de B tel que l'homomorphisme $A \to B/\mathfrak{p}$ soit injectif et fini.

Nous allons voir que la réponse aux questions posées dans a) et b) est en général négative.

Prenons pour A un anneau local noethérien complet normal, de dimension 2. Soient $S = \mathrm{Spec}(A)$, s le point fermé de S, $U = S - \{s\}$, $\mathscr{L}$ un $\mathcal{O}_U$-module inversible. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le A-module $A_n = \Gamma(U, \mathscr{L}^{\otimes n})$ est de type fini (EGA IV 5.11.1). On munit $B = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ de sa structure naturelle de A-algèbre. Soient $X = \mathrm{Spec}(B)$, $f\colon X \to S$ le morphisme structural, $V = f^{-1}(U)$; alors V s'identifie au torseur de base U, sous le groupe multiplicatif G_m, défini par le $\mathcal{O}_U$-module inversible $\mathscr{L}$, et B s'identifie à $\Gamma(V, \mathcal{O}_V)$.

Proposition (1.4.1.1). (i) *B est une A-algèbre de type fini si et seulement si $\mathscr{L}$ est d'ordre fini.*

(ii) *Soit C une sous-A-algèbre de B contenant A_1 et A_{-1}; alors*

a) *l'homomorphisme $A \to C$ est universellement injectif;*

b) *C admet un anneau quotient fini et fidèle sur A si et seulement si $\mathscr{L}$ est d'ordre fini;*

c) *le morphisme* $\mathrm{Spec}(C) \to \mathrm{Spec}(A)$ *est couvrant pour la topologie fpqc si et seulement si $\mathscr{L}$ est trivial.*

Démonstration. (i) Si $\mathscr{L}$ est d'ordre fini r, la A-algèbre B est engendrée par $\bigoplus_{-r \leq n \leq r} A_n$. Inversement, supposons que la A-algèbre B soit de type fini. L'homomorphisme $A \to B$ a un inverse à gauche A-linéaire; il est donc universellement injectif, et f est surjectif. Montrons que f est équidimensionnel. En effet, la fibre générique de f est de dimension 1; soit d'autre part x un point de $X \otimes k(s)$; comme l'homomorphisme $B \to \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ est bijectif, on a $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) \geqq 2$ (EGA IV 5.10.5). Il résulte donc de EGA IV 5.6.5 que $\dim(X \otimes k(s)) \leqq 1$. L'assertion résulte maintenant de EGA IV 13.1.1. Cela dit, comme A est complet, f a une quasi-section finie (EGA IV 14.4.4 et 14.5.9): autrement dit, il existe un idéal I de B tel que $\bar{B} = B/I$ soit un A-module fini et fidèle, qu'on peut supposer sans torsion. Soient $\bar{S} = \mathrm{Spec}(\bar{B})$, $\bar{U}$ l'image réciproque de U dans $\bar{S}$. Comme U est régulier de dimension 1, et connexe, le $\mathcal{O}_U$-module défini par $\mathcal{O}_{\bar{U}}$ est localement libre de rang constant r. Comme l'image réciproque de $\mathscr{L}$ sur $\overline{U}$ est triviale, l'opération de norme montre que $\mathscr{L}$ est d'ordre fini divisant r.

(ii) Comme $A = A_0$ est un facteur direct du A-module B et a fortiori du A-module C, l'assertion a) est claire. Comme C contient A_1 et A_{-1}, le morphisme structural $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(C)$ est un isomorphisme au-dessus de U, et l'argument utilisé à la fin de la preuve de (i) prouve aussi c). Soit maintenant S' un S-schéma fidèlement plat quasi-compact tel que $f \times_S S'$ ait une section. Notons U' l'image réciproque de U dans S', $i\colon U \to S$ et $i'\colon U' \to S'$ les immersions ouvertes canoniques; comme $f \times_S S'$ a une section, l'image réciproque $\mathscr{L}$ de $\mathscr{L}'$ sur U' est triviale; comme l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_S \to i_*(\mathcal{O}_U)$ est un isomorphisme, on voit par platitude qu'il en est de même de l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{S'} \to i'_*(\mathcal{O}_{U'})$. Par suite $i'_*(\mathscr{L}')$ est un $\mathcal{O}_{S'}$-module inversible trivial. Comme S est local, on voit par fidèle platitude que $i_*(\mathscr{L})$ est un $\mathcal{O}_S$-module inversible trivial; a fortiori $\mathscr{L}$ est trivial, cqfd.

La prop. 1.4.1.1 fournit le contre-exemple cherché: on peut choisir A et $\mathscr{L}$ de façon que $\mathscr{L}$ soit d'ordre infini; on prend alors pour C la sous-A-algèbre de B engendrée par A_1 et A_{-1}; l'homomorphisme $A \to C$ est universellement injectif et de type fini, mais le morphisme $\operatorname{Spec}(C) \to \operatorname{Spec}(A)$ n'est pas couvrant pour la topologie fpqc et n'admet pas de quasi-section finie.

Dans ce contre-exemple, la fibre générique est de dimension 1; les remarques qui suivent montrent que de tels phénomènes ne se produisent pas lorsque la fibre générique est de dimension 0.

Lemme (1.4.1.2). *Considérons un carré cocartésien d'anneaux*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ A' & \xrightarrow{f'} & B'. \end{array}$$

Si A est noethérien, et si f vérifie (O), *alors $g(A) \to h(B)$ vérifie* (O).

Démonstration. On peut supposer A local complet et g injectif. Quitte à remplacer A par $A/\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ parcourt $\operatorname{Min}(A)$, on peut supposer A intègre. Par 1.2.11, il existe une forme A-linéaire non nulle u sur le A-module B. Alors $u' = 1_{A'} \otimes_A u$ induit une forme linéaire non nulle sur le $g(A)$-module $h(B)$. On conclut par 1.2.11.

Lemme (1.4.1.3). *Soient A un anneau local noethérien complet intègre, B une A-algèbre vérifiant* (O), *$(R_i)_{i\in I}$ une famille finie d'idéaux de B dont le produit est un idéal nilpotent. Il existe $i \in I$ tel que la A-algèbre $B/R_i = B_i$ vérifie* (O).

Démonstration. Comme la B-algèbre $\prod_{i\in I} B_i$ vérifie (O), on peut remplacer B par $\prod_{i\in I} B_i$. Soit E l'enveloppe injective du corps résiduel de A. Comme $B\otimes_A E \neq 0$, il existe $i\in I$ tel que $B_i\otimes_A E\neq 0$. On conclut par 1.2.11.

Proposition (1.4.1.4). *Soient A un anneau local noethérien complet intègre de corps de fractions K, B une A-algèbre vérifiant* (O) *et telle que $B\otimes_A K$ soit fini sur K; il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ de B tel que $B/\mathfrak{p}$ soit fini et fidèle sur A (en particulier, si B est intègre, il est fini sur A).*

Démonstration. Par 1.4.1.2 on peut supposer que le A-module B est sans torsion; raisonnons par récurrence sur son rang n. Pour $n=1$ l'assertion résulte de l'existence d'une forme linéaire non nulle sur le A-module B. Pour $n>1$ on peut supposer que B n'est pas intègre (quitte à effectuer le changement d'anneaux $A\to A'$ où A' est la fermeture intégrale de A dans le corps de fractions de B). Comme $\mathrm{Min}(B)=\mathrm{Min}(B\otimes_A K)$ est fini, il existe $\mathfrak{p}\in\mathrm{Min}(B)$ tel que la A-algèbre $B/\mathfrak{p}$ vérifie (O) (1.4.1.3); elle est alors finie par l'hypothèse de récurrence.

Exemple. Soient A un anneau local noethérien complet normal, I un idéal de A, $S=\mathrm{Spec}(A)$, $f\colon X\to S$ l'éclatement de I dans S; pour que f descende la platitude, il faut et il suffit que I soit principal (i.e. que f soit un isomorphisme).

En effet, si f descend la platitude, il existe par 1.4.1.3 un ouvert affine de X, d'anneau B, tel que la A-algèbre B vérifie (O); comme A et B ont même corps de fractions, et comme A est normal, on a $B=A$ (1.4.1.4) donc I est principal (car IB est un B-module inversible).

(1.4.2). En relation avec la condition (P), Venken a proposé le problème suivant: soit $f\colon A\to B$ un homomorphisme d'anneaux, et soit P un A-module tel que $B\otimes_A P$ soit B-plat; à quelles conditions existe-t'il une application A-linéaire $u\colon P\to Q$ telle que Q soit A-plat et que $1_B\otimes_A u$ soit un isomorphisme? Mentionnons dans cette direction le résultat suivant:

Lemme (1.4.2.1). *Soient A un anneau, S une partie multiplicative de A formée d'éléments A-réguliers, P un A-module tel que $P[S^{-1}]$ soit A-plat et que P/sP soit (A/sA)-plat pour tout $s\in S$, T le sous-module de S-torsion de P. Alors T est S-divisible et P/T est A-plat.*

Démonstration. Soit $j\colon A\to A[S^{-1}]$ l'homomorphisme canonique; pour tout couple $(s,t)\in S\times S$ tel que s divise t, notons $u_{ts}\colon A/sA\to A/tA$ l'application A-linéaire déduite par passage au quotient de l'homothétie de A de rapport t/s. Comme s est A-régulier, u_{ts} est injectif. Le système inductif filtrant $(A/sA, u_{ts})$ a une limite isomorphe au A-module de S-torsion $\mathrm{Coker}(j)$.

Pour voir que T est S-divisible, on forme le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T/sT & \xrightarrow{1_T \otimes u_{ts}} & T/tT \\ \downarrow & & \downarrow \\ P/sP & \xrightarrow{1_P \otimes u_{ts}} & P/tP \end{array}$$

dont les colonnes sont injectives (car T est le sous-module de S-torsion de P). Comme P/tP est (A/tA)-plat et comme u_{ts} est injectif, la seconde ligne est injective, donc la première l'est aussi; d'autre part le système inductif filtrant $(T/sT, 1_T \otimes u_{ts})$ a une limite isomorphe à $\mathrm{Coker}(1_T \otimes j)$, qui est nul, puisque T est de S-torsion. Donc $T = sT$ pour tout $s \in S$.

Montrons que P/T est A-plat. Soit $s \in S$; comme s est A-régulier et comme P/sP est (A/sA)-plat, on a $\mathrm{Tor} \cdot \dim_A(P/sP) \leqq 1$; faisant varier s et passant à la limite inductive on obtient $\mathrm{Tor} \cdot \dim_A(\mathrm{Coker}(1_P \otimes j)) \leqq 1$; mais on a une suite exacte

$$0 \to P/T \to P[S^{-1}] \to \mathrm{Coker}(1_P \otimes j) \to 0$$

et par hypothèse $P[S^{-1}]$ est A-plat; par suite P/T est A-plat.

Questions (1.4.3). 1) Soit $f\colon A \to B$ un homomorphisme d'anneaux, tel que le A-module B admette un quotient fidèle de type fini. Si A est noethérien, f descend la platitude (1.2.10); en est-il de même dans le cas général?

Notons que, d'après 1.2.1 et 1.2.4, il en est en tout cas ainsi lorsque le A-module B admet un facteur direct fidèle de type fini.

2) Soit $f\colon A \to B$ un homomorphisme injectif et entier. Lorsque A est noethérien, f descend-il la platitude? (Lorsqu'on ne fait aucune hypothèse de finitude, un contre-exemple de Lazard montre que f ne descend pas en général la platitude, cf. [7].)

Pour étudier ce problème on se ramène par dévissage au cas où A est local complet normal et où B est le normalisé de A dans une extension algébrique de son corps de fractions. Si alors A est une $\mathbb{Q}$-algèbre, l'application trace montre que f est universellement injectif (car il a un inverse à gauche A-linéaire). D'autre part, on peut toujours trouver un sous-anneau local complet régulier R de A tel que A soit fini sur R; on montre alors, en introduisant le A-module $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ et en appliquant 1.2.10 et 1.2.11, que f descend la platitude si et seulement si l'homomorphisme composé $R \to B$ descend la platitude; on peut donc se ramener au cas où A est régulier. Si $\dim(A) \leqq 2$, alors f est fidèlement plat. Nous ignorons ce qui se passe si $\dim(A) > 2$.

§ 2. Modules de Mittag-Leffler

Soit (E_i, u_{ij}) un système projectif d'ensembles indexé par un ensemble ordonné filtrant I. Suivant EGA 0_{III} 13.1.2, on dit que (E_i, u_{ij}) est un système projectif de Mittag-Leffler s'il vérifie la condition (ML): pour tout $i \in I$, la famille filtrante décroissante $(u_{ij}(E_j))_{j \geqq i}$ est stationnaire. Les systèmes projectifs de Mittag-Leffler ont d'utiles propriétés cohomologiques (EGA 0_{III} 13.2.2).

Soient maintenant C une petite catégorie, (E_i, u_{ij}) un système projectif de C indexé par un ensemble ordonné filtrant I; on dit que (E_i, u_{ij}) est un système projectif de Mittag-Leffler si pour tout foncteur $F\colon C \to (\text{Ens})$, le système projectif des ensembles $F(E_i)$ est de Mittag-Leffler. On vérifie aisément que cette condition ne dépend que du pro-objet de C défini par (E_i, u_{ij}): on définit ainsi les pro-objets de Mittag-Leffler; par dualité on définit de même les ind-objets de Mittag-Leffler.

Nous nous intéressons ici au cas où C est la catégorie des modules de présentation finie sur un anneau A (non nécessairement commutatif); la catégorie des ind-objets de C est alors équivalente à la catégorie des A-modules. Nous allons exprimer la condition de Mittag-Leffler dans ce cadre et traduire les résultats cohomologiques correspondants.

Les idées essentielles de ce paragraphe sont implicites dans le chap. I de la thèse de D. Lazard [13].

2.1. Stabilisateurs

Les notations sont celles de 1.1. La prop. 1.1.1 admet la variante «relative» suivante:

Proposition (2.1.1). *Soient $u\colon M \to N$ et $v\colon M \to M'$ deux applications A-linéaires. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *pour tout A^0-module Q, on a* $\operatorname{Ker}(1_Q \otimes_A u) \subset \operatorname{Ker}(1_Q \otimes_A v)$;

(ii) *on a* $\operatorname{Ker}(1_{TM'} \otimes_A u) \subset \operatorname{Ker}(1_{TM'} \otimes_A v)$;

(iii) *Tu factorise Tv à gauche;*

si $\operatorname{Coker}(u)$ *est de présentation finie, ces conditions sont équivalentes à*

(iv) *u factorise v à droite.*

Démonstration. Formons le diagramme cocartésien de A-modules

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{u} & N \\ \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ M' & \xrightarrow{u'} & N' \end{array}$$

et remarquons que, pour tout A^0-module Q, on a la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Ker}(1_Q \otimes u) \cap \operatorname{Ker}(1_Q \otimes v) \to \operatorname{Ker}(1_Q \otimes u) \to \operatorname{Ker}(1_Q \otimes u') \to 0;$$

en particulier, on a $\mathrm{Ker}(1_Q \otimes u')=0$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(1_Q \otimes u) \subset \mathrm{Ker}(1_Q \otimes v)$. Appliquant alors 1.1.1, on voit que les conditions (i) à (iii) expriment chacune que u' est A-universellement injectif. Si $\mathrm{Coker}(u)$ est de présentation finie il en est de même de $\mathrm{Coker}(u')$, donc u' est A-universellement injectif si et seulement si u' est inversible à gauche, i.e. si et seulement si u factorise v à droite, cqfd.

Nous dirons que v *domine* u si les conditions (i) à (iii) de 2.1.1 sont vérifiées.

Rappelons que tout A-module est limite inductive filtrante de A-modules de présentation finie, et que, pour tout A-module de présentation finie F, le foncteur $\mathrm{Hom}_A(F, \cdot)$ commute aux limites inductives filtrantes (ces deux assertions expriment l'équivalence entre la catégorie $\mathrm{Mod}(A)$ et la catégorie des «ind-A-modules de présentation finie»).

Lemme (2.1.2). *Soit $(F_i, u_{ji})_{i \in I}$ un système inductif filtrant de A-modules de présentation finie, de limite (M, u_i); soient i et j deux indices tels que $i \leqq j$; les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *u_{ji} domine u_i;*

(ii) *pour tout $k \geqq i$, u_{ki} factorise u_{ji} à droite.*

Démonstration. Comme u_i domine u_{ki}, u_{ji} domine u_{ki} si (i) est vérifié, donc (ii) est vérifié (2.1.1); la réciproque est claire.

Définition (2.1.3). Soient $u\colon F \to M$ et $v\colon F \to G$ deux applications A-linéaires telles que F et G soient de présentation finie. On dit que v *stabilise* u (ou que v est un stabilisateur de u) si u et v se dominent mutuellement.

On appelle *A-module de Mittag-Leffler* un A-module M qui vérifie

(ML) toute application A-linéaire d'un A-module de présentation finie dans M admet un stabilisateur.

Justifions la terminologie.

Proposition (2.1.4). *Soit (F_i, u_{ji}) un système inductif filtrant de A-modules de présentation finie, de limite (M, u_i); les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *M vérifie* (ML);

(ii) *pour tout i il existe $j \geqq i$ tel que u_{ji} domine u_i;*

(iii) *pour tout A-module N, le système projectif*

$$(\mathrm{Hom}_A(F_i, N), \mathrm{Hom}_A(u_{ji}, N))$$

vérifie la condition (ML) *de* EGA 0_{III} 13.1.2;

(iv) *même énoncé que* (iii) *mais on se limite au module $N = \prod_{i \in I} F_i$.*

Démonstration. Si (i) est vérifié, pour tout i il existe un stabilisateur $v\colon F_i \to G$ de u_i; comme $\operatorname{Hom}_A(G, \cdot)$ commute aux limites inductives filtrantes, et comme v factorise u_i à droite, il existe $j \geqq i$ tel que v factorise u_{ji} à droite, et u_{ji} domine u_i, donc (ii) est vérifié. Si (ii) est vérifié, et si $u\colon F \to M$ est une application A-linéaire telle que F soit de présentation finie, il existe i et $v \in \operatorname{Hom}_A(F; F_i)$ tels que $u = u_i v$; si u_{ji} domine u_i, il est clair que $u_{ji} v$ stabilise u. Ainsi (i)$\Leftrightarrow$(ii).

Si (ii) est vérifié, soit i un indice; il existe $j \geqq i$ tel que u_{ji} domine u_i; par 2.1.2, u_{ki} factorise u_{ji} à droite pour tout $k \geqq i$, donc, pour tout A-module N, $\operatorname{Im}(\operatorname{Hom}_A(u_{ji}, N)) = \operatorname{Im}(\operatorname{Hom}_A(u_{ki}, N))$; donc (iii) est vérifié. Il est clair que (iii) $\Rightarrow$ (iv). Si (iv) est vérifié, pour tout i il existe $j \geqq i$ tel que pour tout $k \geqq j$ on ait $\operatorname{Im}(\operatorname{Hom}_A(u_{ji}, F_j)) = \operatorname{Im}(\operatorname{Hom}_A(u_{ki}, F_j))$; ainsi u_{ki} factorise u_{ji} à droite, donc (ii) est vérifié.

Proposition (2.1.5). *Pour qu'un A-module M vérifie* (ML) *il faut et il suffit que pour toute famille $(Q_r)_{r \in R}$ de A^0-modules, l'application Z-linéaire canonique $\left(\prod_{r \in R} Q_r\right) \otimes_A M \to \prod_{r \in R} (Q_r \otimes_A M)$ soit injective.*

Démonstration. On sait que si F est un A-module de présentation finie, le foncteur $\cdot \otimes_A F$ commute aux produits directs. Soit maintenant (F_i, u_{ji}) un système inductif filtrant de A-modules de présentation finie de limite (M, u_i).

Supposons que M vérifie (ML); soit $(Q_r)_{r \in R}$ une famille de A^0-modules. Soit x un élément de $\operatorname{Ker}\left(\left(\prod_{r \in R} Q_r\right) \otimes_A M \to \prod_{r \in R} (Q_r \otimes_A M)\right)$. Pour i assez grand, x provient d'un élément x_i de $\left(\prod_{r \in R} Q_r\right) \otimes_A F_i$. Soit $j \geqq i$ tel que u_{ji} stabilise u_i; on forme le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\left(\prod_{r \in R} Q_r\right) \otimes_A F_i & \longrightarrow & \prod_{r \in R} (Q_r \otimes_A F_i) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\left(\prod_{r \in R} Q_r\right) \otimes_A F_j & \longrightarrow & \prod_{r \in R} (Q_r \otimes_A F_j)
\end{array}$$

dont les lignes sont bijectives. L'image de x_i dans $\prod_{r \in R} (Q_r \otimes_A F_j)$ est nulle puisque $\operatorname{Ker}(1_{Q_r} \otimes_A u_i) = \operatorname{Ker}(1_{Q_r} \otimes_A u_{ji})$ pour tout $r \in R$; donc $x = 0$ et M vérifie la condition de l'énoncé.

Supposons que M vérifie la condition de l'énoncé. Soient i un indice, Q un A^0-module, $(x_r)_{r \in R}$ une famille d'éléments de $\operatorname{Ker}(1_Q \otimes_A u_i)$. On forme le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
Q^R \otimes_A F_i & \longrightarrow & (Q \otimes_A F_i)^R \\
\downarrow & & \downarrow \\
Q^R \otimes_A F & \longrightarrow & (Q \otimes_A F)^R
\end{array}$$

dans lequel la première ligne est bijective et la seconde ligne injective: par suite (x_r) provient d'un élément de $Q^R \otimes_A \operatorname{Ker}(u_i)$, donc aussi d'un élément de $Q^R \otimes_A \operatorname{Ker}(u_{ji})$ pour j assez grand; donc $x_r \in \operatorname{Ker}(1_Q \otimes u_{ji})$ pour tout r. En particulier, prenons $Q = T(M \oplus F_i)$ et soit $(x_r)_{r \in R}$ une famille de générateurs du groupe abélien $\operatorname{Ker}(1_Q \otimes_A u_i)$; on voit alors que u_{ji} stabilise u_i, et M vérifie (ML).

Corollaire (2.1.6). *Soit* $0 \to M \to N \to P \to 0$ *une suite A-universellement exacte. Si N vérifie* (ML), *M vérifie* (ML). *Si M et P vérifient* (ML), *N vérifie* (ML).

C'est clair par le critère de 2.1.5.

Corollaire (2.1.7). *Soit P un A-module plat vérifiant* (ML). *Pour tout système projectif filtrant (Q_r, u_{rs}) de A^0-modules, l'application canonique $(\varprojlim Q_r) \otimes_A P \to \varprojlim (Q_r \otimes_A P)$ est injective; elle est bijective si les u_{rs} sont injectifs.*

Démonstration. La première assertion résulte de 2.1.5 et de la platitude de P. La seconde assertion résulte du lemme du serpent appliqué au diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to (\varprojlim Q_s) \otimes_A P & \longrightarrow & Q_r \otimes_A P & \longrightarrow & (\varprojlim (Q_r/Q_s)) \otimes_A P \to 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to \varprojlim (Q_s \otimes_A P) & \longrightarrow & Q_r \otimes_A P & \longrightarrow & \varprojlim ((Q_r/Q_s) \otimes_A P)
\end{array}$$

où r est un indice fixé.

En particulier, soit P un A-module plat de Mittag-Leffler; alors, pour tout A^0-module Q et tout $x \in Q \otimes_A P$, l'ensemble des sous-modules Q' de Q tels que $x \in Q' \otimes_A P$ a un plus petit élément, qu'on appelle le «module des coefficients de x dans Q». En sens inverse:

Proposition (2.1.8). *Soit P un A-module plat, tel que, pour tout A^0-module libre de type fini L et tout $x \in L \otimes_A P$, l'ensemble des sous-modules Q de L, tels que $x \in Q \otimes_A P$, ait un plus petit élément. Alors P vérifie* (ML).

Démonstration. Pour tout A-module M notons M^* le A^0-module $\operatorname{Hom}_A(M, A)$. Si L et M sont deux A-modules, L étant libre de type fini, on a un isomorphisme fonctoriel $L^* \otimes_A M \to \operatorname{Hom}_A(L, M)$; convenons d'identifier la source et le but de cet isomorphisme. Alors, pour tout $x \in L^* \otimes_A M$, on voit aisément que le module des coefficients de x dans M s'identifie à l'image de x, considéré comme un élément de $\operatorname{Hom}_A(L, M)$.

Cela dit, écrivons P comme limite inductive filtrante de A-modules libres de type fini (L_i, u_{ij}) ([13] I 1.2); pour tout i, notons u_i: $L_i \to P$ la limite des u_{ji} et cherchons un stabilisateur de u_i. Soit Q_i le module des coefficients de u_i dans L_i^*. Alors $u_i \in Q_i \otimes_A P$, donc $u_{ji} \in Q_i \otimes_A L_j$ pour j assez grand. Donc $Q_i = \operatorname{Im}(\operatorname{Hom}_A(u_{ji}, A))$ pour j assez grand, et le système projectif des L_j^* vérifie la condition de Mittag-Leffler. Par l'isomorphisme fonctoriel ci-dessus, on voit que pour tout A-module M, le système projectif $(\operatorname{Hom}_A(L_j, M))$ vérifie la condition de Mittag-Leffler; d'après 2.1.4, P vérifie (ML).

Soit u: $F \to M$ une application A-linéaire telle que F soit de présentation finie. Supposons que $u(F)$ soit contenu dans un sous-module pur de présentation finie G de M; alors il est clair que $F \to G$ stabilise u. On peut se demander si la réciproque est vraie; dans cette direction, on a:

Proposition (2.1.9). *On suppose que u admet un stabilisateur.*

(i) *Si A est local et si M est plat, il existe un sous-module pur libre de type fini L de M contenant $u(F)$.*

(ii) *Si A est commutatif local hensélien, il existe un sous-module pur de présentation finie de M contenant $u(F)$.*

Démonstration. (i) On écrit M comme limite inductive filtrante de A-modules libres de type fini (L_i, u_{ji}); pour tout i on note u_i la limite des u_{ji}; pour i assez grand, u admet un stabilisateur v: $F \to L_i$ tel que $u = u_i v$. Posons $R = \operatorname{Im}(\operatorname{Hom}_A(v, A)) \subset F^*$; alors $R = \operatorname{Im}(\operatorname{Hom}_A(u_{ji} v, A))$ pour tout $j \geqq i$. Comme A est local, et comme R est un A^0-module de type fini, on peut trouver un épimorphisme minimal p: $L' \to R$, où L' est un A^0-module libre de type fini. On choisit $q \in \operatorname{Hom}_A(L_i^*, L')$ tel que $\operatorname{Hom}_A(v, A) = p q$. Alors q est surjectif, et il en est de même de $q \circ (\operatorname{Hom}_A(u_{ji}, A))$ pour tout $j \geqq i$. Par transposition, p et q définissent des applications A-linéaires s: $F \to L'^* = L$ et t: $L \to L_i$. On a $v = t s$, donc $u = u_i t s$, donc $u(F) \subset u_i(t(L))$. D'autre part $u_{ji} t$ est inversible à gauche pour tout $j \geqq i$, donc $u_i t$ est A-universellement injectif.

(ii) Soit v: $F \to G$ un stabilisateur de u. Comme A est local, on peut, quitte à remplacer G par un de ses facteurs directs contenant $v(M)$, supposer que tout facteur direct non nul de G coupe $v(F)$ selon un sous-module non nul. Soit alors w: $G \to M$ une application A-linéaire telle que $u = w v$. On va prouver que w est A-universellement injectif. Ecrivons M comme limite inductive de A-modules de présentation finie F_i; quitte à remplacer M par les divers F_i pour i assez grand, on peut supposer M de présentation finie; il existe alors w': $M \to G$ tel que $v = w' u$. Il suffit de voir que $w' w$ est un automorphisme de G. Comme $(1 - w' w) v = 0$, il suffit de vérifier le lemme suivant:

Lemme (2.1.10). *Soient A un anneau commutatif local hensélien, G un A-module de type fini, f un endomorphisme de G, tel que, pour tout facteur direct non nul G' de G, on ait $G' \cap \operatorname{Ker}(f) \neq 0$. Alors $1 - f$ est bijectif.*

Démonstration. Comme A est hensélien et G de type fini, l'anneau $A[f]$ est composé direct d'anneaux locaux; quitte à remplacer A par les divers composants locaux de $A[f]$, on peut supposer que f est un scalaire. Mais alors f n'est pas inversible, puisque l'homothétie de G qu'il définit n'est pas injective; donc $1-f$ est inversible.

2.2. Structure des modules de Mittag-Leffler

Soit M un A-module relativement projectif (1.1). Il est clair que M vérifie (ML) (1.1.2 et 2.1.6). La réciproque est fausse; on a toutefois le résultat suivant:

Théorème (2.2.1). *Soit M un A-module de Mittag-Leffler. Toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de M est contenue dans un sous-module pur, de type dénombrable et relativement projectif de M.*

Démonstration. On suit la démonstration des th. 3.1 et 3.2 de [13] I.

On construit par récurrence sur l'entier n une suite (F_n, u'_n, v_n) qui vérifie les conditions suivantes:

a) F_n est un A-module de présentation finie, $u'_n \in \operatorname{Hom}_A(F_n \oplus A, F_{n+1})$, $v_n \in \operatorname{Hom}_A(F_n, M)$;

b) $F_0 = 0$;

c) u'_n stabilise l'élément v'_n de $\operatorname{Hom}_A(F_n \oplus A, M)$ de matrice (v_n, x_n) et l'on a $v_{n+1}\, u'_n = v'_n$.

Comme M vérifie (ML), la construction est possible. Notons u_n la restriction de u'_n à F_n, F la limite inductive de (F_n, u_n), $v\colon F \to M$ la limite des v_n. On va montrer que $v(F)$ vérifie les conditions de l'énoncé; cela résulte des remarques suivantes:

(i) Comme $x_n \in \operatorname{Im}(v'_n) \subset \operatorname{Im}(v_{n+1}) \subset \operatorname{Im}(v)$, $\operatorname{Im}(v)$ contient la suite (x_n).

(ii) v est universellement injectif: en effet u_n stabilise v_n, donc on a

$$\operatorname{Ker}(1_{TF} \otimes u_n) = \operatorname{Ker}(1_{TF} \otimes v_n)$$

et

$$\operatorname{Ker}(1_{TF} \otimes v) = \varinjlim \operatorname{Ker}(1_{TF} \otimes v_n) = \varinjlim \operatorname{Ker}(1_{TF} \otimes u_n) = 0.$$

(iii) F est de type dénombrable et relativement projectif: la première assertion est claire puisque $F = \varinjlim F_n$; prouvons la seconde assertion. D'après (ii) et 2.1.6, F vérifie (ML), donc, pour tout A-module N', le système projectif $(\operatorname{Hom}_A(F_n, N'))$ est de Mittag-Leffler; sa limite est $\operatorname{Hom}_A(F, N')$. Soit

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

une suite A-universellement exacte; pour tout entier n, la suite

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(F_n, N') \to \operatorname{Hom}_A(F_n, N) \to \operatorname{Hom}_A(F_n, N'') \to 0$$

est exacte (1.1.1). Par passage à la limite, on déduit de EGA 0_{III} 13.2.2 que la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(F, N') \to \mathrm{Hom}_A(F, N) \to \mathrm{Hom}_A(F, N'') \to 0$$

est exacte, ce qui prouve que F est relativement projectif. Cqfd.

Corollaire (2.2.2). *Un module de type dénombrable est relativement projectif si et seulement s'il vérifie* (ML); *en particulier, un module plat de type dénombrable est projectif si et seulement s'il vérifie* (ML).

La propriété énoncé en 2.2.1 caractérise les modules de Mittag-Leffler, d'après le lemme suivant:

Lemme (2.2.3). *Soit (M_i, u_{ji}) un système inductif filtrant de A-modules de Mittag-Leffler, de limite (M, u_i). Si, pour tout i, il existe $j \geqq i$ tel que u_{ji} domine u_i, alors M vérifie* (ML); *en particulier, si les u_{ji} sont A-universellement injectifs, alors M vérifie* (ML).

Démonstration. Soit $u: F \to M$ une application A-linéaire telle que F soit de présentation finie. Il existe i et $v \in \mathrm{Hom}_A(F, M_i)$ tels que $u = u_i v$. Soit $j \geqq i$ tel que u_{ji} domine u_i. Alors, pour tout A^0-module Q, on a $\mathrm{Ker}(1_Q \otimes u) = \mathrm{Ker}(1_Q \otimes u_{ji} v)$, donc tout stabilisateur de $u_{ji} v$ stabilise u.

2.3. Modules strictement de Mittag-Leffler

Soit (F_i, u_{ji}) un système inductif filtrant de A-modules de présentation finie, de limite (M, u_i). Si M est de Mittag-Leffler, il résulte de 2.1.4 que pour tout i, la famille $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_A(u_{ji}, N))_{j \geqq i}$ est stationnaire. Si M est de type dénombrable, on a $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_A(u_{ji}, N)) = \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_A(u_i, N))$ pour j assez grand (cf. EGA 0_{III} 13.2.2); cette égalité n'est plus valable en général.

Définition (2.3.1). Soient $u: F \to M$ et $v: F \to G$ deux applications A-linéaires, telles que F et G soient de présentation finie. On dit que v *stabilise strictement* u si u et v se factorisent mutuellement à droite.

On dit qu'un A-module M est *strictement de Mittag-Leffler* s'il vérifie

(SML) toute application A-linéaire d'un A-module de présentation finie F dans M admet un stabilisateur strict.

Proposition (2.3.2). *Soit (F_i, u_{ji}) un système inductif filtrant de A-modules de présentation finie, de limite (M, u_i). Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *M vérifie* (SML);

(ii) (*resp.* (ii')) *Pour tout sous-module de type fini (resp. monogène) F de M, il existe un endomorphisme de M induisant l'identité sur F et qui se factorise par un A-module de présentation finie;*

(iii) *pour tout A-module N et tout indice i, il existe $j \geqq i$ tel que* $\operatorname{Im}(\operatorname{Hom}_A(u_i, N)) = \operatorname{Im}(\operatorname{Hom}_A(u_{ji}, N))$;

(iv) *pour tout A-module N, l'application canonique* $TN \otimes_A M \to T(\operatorname{Hom}_A(M, N))$ *est injective* (*où T est le foncteur* $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, *cf.* 1.1).

Démonstration. Il est clair que (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (ii'); montrons que (ii') $\Rightarrow$ (ii). Notons B l'anneau $\operatorname{End}_A(M)$, I l'ensemble des éléments de B qui se factorisent par un A-module de présentation finie; il est facile de voir que I est un idéal bilatère de B; donc l'ensemble S des éléments s de B tels que $1 - s \in I$ est multiplicativement stable. La condition (ii') dit que tout élément de M est annulé par un élément de S; supposons cette condition vérifiée et soit $(x_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ une suite finie d'éléments de M. On construit par récurrence une suite $(s_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ d'éléments de S telle que s_{i+1} annule $s_i s_{i-1} \ldots s_1 x_{i+1}$ quel que soit i. Alors le produit des s_i annule le sous-A-module de M engendré par les x_i, donc (ii) est vérifié. L'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) se prouve comme l'équivalence (ii) (iii) de 2.1.4. Pour montrer l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iv) on procède comme en 2.1.5:

Supposons que M vérifie (SML), soient N un A-module et x un élément de $\operatorname{Ker}(TN \otimes_A M \to T(\operatorname{Hom}_A(M, N)))$. Pour i assez grand, x provient d'un élément x_i de $TN \otimes_A F_i$. Soit $j \geqq i$ tel que u_{ji} stabilise strictement u_i. On forme le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} TN \otimes_A F_i & \longrightarrow & T(\operatorname{Hom}_A(F_i, N)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ TN \otimes_A F_j & \longrightarrow & T(\operatorname{Hom}_A(F_j, N)) \end{array}$$

dans lequel les lignes sont des isomorphismes (Bourbaki, Alg. comm., chap. I, § 2, ex. 14). Comme u_{ji} stabilise strictement u_i, on a

$$\operatorname{Coker}(\operatorname{Hom}_A(u_i, N)) = \operatorname{Coker}(\operatorname{Hom}_A(u_{ji}, N));$$

le diagramme ci-dessus montre alors que l'image de x_i dans $TN \otimes_A F_j$ est nulle; a fortiori x est nul, d'où (iv).

Supposons que M vérifie (iv); comme (iv) implique manifestement la condition de 2.1.5, M vérifie (ML); dès lors, si u_{ji} stabilise u_i, on a $\operatorname{Ker}(1_{TN} \otimes u_i) = \operatorname{Ker}(1_{TN} \otimes u_{ji})$ pour tout A-module N, donc

$$\operatorname{Coker}(\operatorname{Hom}_A(u_i, N)) = \operatorname{Coker}(\operatorname{Hom}_A(u_{ji}, N))$$

par (iv), de sorte que u_{ji} stabilise strictement u_i. Cqfd.

Remarques (2.3.3). 1) La condition (SML) implique (ML) (2.3.2 et 2.1.4); il est clair que tout module relativement projectif vérifie (SML).

2) Si M vérifie (SML), tout sous-module pur de M vérifie (SML) (utiliser le critère 2.3.2(iv)).

3) Si M est limite inductive filtrante de facteurs directs de M qui vérifient (SML), il est clair que M vérifie (SML). En particulier, toute somme directe de modules vérifiant (SML) vérifie (SML). Si A est commutatif local hensélien, M vérifie (SML) si et seulement s'il est limite inductive filtrante de facteurs directs de présentation finie (2.1.9).

4) Si A est commutatif et linéairement compact pour la topologie discrète, les conditions (ML) et (SML) sont équivalentes. En effet, A est composé direct d'anneaux locaux, donc on peut supposer A local; il est alors hensélien; par 2.1.9, tout A-module de Mittag-Leffler M est limite inductive filtrante de sous-modules purs de présentation finie F_i; comme F_i est linéairement compact pour la topologie discrète, il est nécessairement facteur direct de M [8].

Si A est commutatif local noethérien non complet, on peut donner des exemples de A-modules plats P, vérifiant (SML) et tels que $\mathrm{Ext}^1_A(P, A) \neq 0$; si $0 \to A \to Q \to P \to 0$ est une suite exacte non scindée, le A-module plat Q vérifie (ML) et ne vérifie pas (SML).

Etudions maintenant la condition (SML) pour les modules plats:

Proposition (2.3.4). *Soit M un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *M est plat et vérifie* (SML);

(ii) (*resp.* (ii′)) *pour tout sous-module de type fini (resp. monogène) F de M, il existe un endomorphisme de M induisant l'identité sur F et qui se factorise par un A-module libre de type fini;*

(iii) *pour tout $x \in M$ on a $x \in o_M(x) \cdot M$, où $o_M(x)$ désigne l'idéal à droite de A, image de la forme linéaire sur* $\mathrm{Hom}_A(M, A)$ *définie par x.*

Démonstration. L'équivalence (i) ⇔ (ii) est immédiate d'après [13] I 1.3. L'équivalence (ii) ⇔ (ii′) s'obtient comme l'équivalence (ii) ⇔ (ii′) de 2.3.2 (où l'on prend cette fois pour I l'ensemble des endomorphismes de B qui se factorisent par un A-module libre de type fini). Si (ii′) est vérifié, soit $x \in M$; il existe une séquence $M \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} M$ d'applications A-linéaires, telle que L soit libre de type fini et que $vu(x) = x$. Comme L est libre de type fini, on a évidemment $u(x) \in o_L(u(x)) \cdot L$, donc $x = vu(x) \in o_L(u(x)) \cdot M$; comme $o_L(u(x)) \subset o_M(x)$, on a a fortiori (iii). Si (iii) est vérifié, pour tout $x \in M$ on peut trouver une suite $(u_i, x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathrm{Hom}_A(M, A) \times M$ telle que $x = \sum_{1 \leq i \leq n} u_i(x)\, x_i$; notons $u\colon M \to A^n$ l'application produit des u_i et $v\colon A^n \to M$ l'application linéaire définie par les x_i; alors $vu(x) = x$, d'où (ii′).

(On notera que si (iii) est vérifié, pour tout $x \in M$, $o_M(x)$ est l'idéal des coefficients de x: en effet, tout idéal à droite I de A tel que $x \in IM$ contient nécessairement $o_M(x)$.)

2.4. Exemples de modules plats de Mittag-Leffler

(2.4.1) Soient A un anneau non nécessairement commutatif et noethérien à gauche, C la catégorie (abélienne) des A-modules de type fini, M un A-module. On suppose que le foncteur $\mathrm{Hom}_A(M,\cdot)$: $C \to (\mathrm{Ab})$ est exact. Notons M^* le A^0-module $\mathrm{Hom}_A(M, A)$. Le morphisme fonctoriel k_N: $M^* \otimes_A N \to \mathrm{Hom}_A(M, N)$ est un isomorphisme lorsque N est libre de type fini; comme les deux foncteurs en présence sont exacts à droite, k_N est un isomorphisme pour tout objet N de C. Si maintenant N est un A-module quelconque, on voit en écrivant N comme limite inductive filtrante de sous-modules de type fini que k_N est injectif. En particulier M^* est plat et vérifie la condition (iii) de 2.3.4 (pour tout $x \in M^*$, prenant $N = \mathrm{Coker}(x)$, on voit même que $x \in M^* \cdot \mathrm{Im}(x)$), donc il vérifie (SML).

(2.4.2) Les hypothèses de 2.4.1 sont vérifiées lorsque M est projectif; on voit en particulier que si A est un anneau noethérien à droite et I est un ensemble, le A-module A^I est plat et vérifie (SML) [8].

Soient maintenant A un anneau commutatif noethérien, I un ensemble, J un idéal de A; pour tout A-module de type fini M, notons $C_J(I, M)$ le sous-module de M^I formé des familles qui tendent vers zéro pour la topologie J-adique. D'après le théorème de Krull, $C_J(I, M)$ est un foncteur exact de M. Par suite, le morphisme fonctoriel $C_J(I, A) \otimes_A M \to C_J(I, M)$ est bijectif (car il l'est pour M libre de type fini), donc $C_J(I, A) = C_J(I)$ est un sous-A-module pur de A^I; en particulier il est plat et vérifie (SML).

(2.4.3) Soit A un anneau commutatif local noethérien complet d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. On sait [10] que $\mathrm{Ext}^1_A(M, N) = 0$ lorsque M est plat et N est de type fini. Il résulte donc de 2.4.1 que le dual d'un A-module plat est un A-module plat strictement de Mittag-Leffler.

Proposition (2.4.3.1). *Soient P un A-module plat, $\hat{P}$ le complété $\mathfrak{m}$-adique de P. Il existe un ensemble I et un isomorphisme $C_{\mathfrak{m}}(I) \to \hat{P}$. De plus, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *P vérifie* (ML) (*ou* (SML), *c'est la même chose par* 2.3.3 4));

(ii) *$P \to \hat{P}$ est A-universellement injectif;*

(iii) *$P \to P^{**}$ est A-universellement injectif.*

Démonstration. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de P relevant une base de $P/\mathfrak{m}P$ sur $A/\mathfrak{m}$. Pour tout entier n, $P/\mathfrak{m}^n P$ est un $(A/\mathfrak{m}^n)$-module libre de base l'image de $(e_i)_{i \in I}$; si $u_n: (A/\mathfrak{m}^n)^{(I)} \to P/\mathfrak{m}^n P$ est l'isomorphisme correspondant, $\varprojlim u_n$ est un isomorphisme de $C_{\mathfrak{m}}(I)$ sur $\hat{P}$, d'où la première assertion. D'autre part (i) $\Rightarrow$ (iii) par 2.3.4, (iii) $\Rightarrow$ (ii) car P et $\hat{P}$ ont même dual, (ii) $\Rightarrow$ (i) par 2.3.3 2); cqfd.

2.5. Descente de la condition (ML)

A partir de maintenant les anneaux sont supposés commutatifs.

Proposition (2.5.1). *Soient $f: A \to B$ un homomorphisme universellement injectif, $u: F \to M$ et $v: F \to G$ deux applications A-linéaires telles que F et G soient de présentation finie. Si $1_B \otimes_A v$ stabilise $1_B \otimes_A u$, alors v stabilise u. En particulier, si $B \otimes_A M$ est un B-module de Mittag-Leffler, M est un A-module de Mittag-Leffler.*

Démonstration. Formons le diagramme cocartésien de A-modules

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{u} & M \\ \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ G & \xrightarrow{t} & N. \end{array}$$

Par hypothèse, $1_B \otimes_A s$ et $1_B \otimes_A t$ sont B-universellement injectifs et a fortiori A-universellement injectifs (1.1.1 (vi)). Comme f est universellement injectif, il en résulte que s et t sont A-universellement injectifs (car, pour tout A-module P, $u \otimes_A 1_B: P \to B \otimes_A P$ est A-universellement injectif). Autrement dit, v stabilise u.

Soit maintenant (F_i, u_{ji}) un système inductif filtrant de A-modules de présentation finie, de limite (M, u_i). Supposons que le B-module $B \otimes_A M$ vérifie (ML); alors, pour tout i, il existe $j \geqq i$ tel que $1_B \otimes u_{ji}$ stabilise $1_B \otimes u_i$; donc u_{ji} stabilise u_i et M vérifie (ML).

Proposition (2.5.2). *Soient $f: A \to B$ un homomorphisme vérifiant la condition* (O) *du* §1 *(p. ex. un homomorphisme fini de noyau T-nilpotent), M un A-module plat tel que le B-module $B \otimes_A M$ vérifie* (ML); *alors M vérifie* (ML).

Démonstration. Pour tout ensemble I, notons $t_I: \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Mod}(A)$ le foncteur défini par $t_I(N) = \mathrm{Ker}(N^I \otimes_A M \to (N \otimes_A M)^I)$. Comme M est A-plat, t_I est exact à gauche. Si I et J sont deux ensembles, si l'on convient d'identifier $N^{I \times J}$ et $(N^I)^J$ pour tout A-module N, on a l'inclusion $t_J(N^I) \subset t_{I \times J}(N)$ [1].

Soit maintenant C la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}(A)$ formée des modules qui annulent tous les foncteurs t_I; d'après les propriétés ci-dessus, C est stable par sous-objets, produits et extensions; d'autre part, comme le B-module $B \otimes_A M$ vérifie (ML), il résulte de 2.1.5 que $TB = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est objet de C.

Soit N un A-module. Il existe un plus petit sous-module N' de N tel que N/N' soit objet de C, et N' n'a aucun quotient non nul dans C; en particulier, $\mathrm{Hom}_A(N', TB) = 0$, donc $B \otimes_A N' = 0$, donc $N' = 0$ d'après

[1] Plus précisément, on a la suite exacte $0 \to t_J(N^I) \to t_{I \times J}(N) \to (t_I(N))^J$.

la propriété (O); mais alors N est objet de C, donc $C=\mathrm{Mod}(A)$ et M vérifie (ML) par 2.1.5.

Corollaire (2.5.3). *Soient A un anneau noethérien, I un idéal de A tel que A soit complet pour la topologie I-adique, M un A-module plat tel que M/IM vérifie* (ML). *Pour que M vérifie* (ML), *il faut et il suffit que, pour tout $\mathfrak{p}\in D(I)$, $M/\mathfrak{p}M$ soit séparé pour la topologie I-adique.*

Démonstration. Notons d'abord que si $u\colon F\to N$ et $v\colon F\to G$ sont des applications A-linéaires telles que F et G soient de type fini et que v stabilise u, les filtrations de F induites par les filtrations I-adiques respectives de N et G sont identiques, et que, si u est injectif, v est injectif; on en déduit que tout A-module de Mittag-Leffler est séparé pour la topologie I-adique. La condition de l'énoncé est donc nécessaire. Inversement, supposons-la vérifiée.

Montrons d'abord que, pour tout A-module de type fini F, $M\otimes_A F$ est séparé pour la topologie I-adique. Par dévissage, il suffit d'après la propriété de l'énoncé de prouver que si $0\to F'\to F\to F''\to 0$ est une suite exacte de A-modules de type fini, et si $M\otimes_A F'$ et $M\otimes_A F''$ sont séparés pour la topologie I-adique, $M\otimes_A F$ est séparé pour la topologie I-adique. Mais il résulte du lemme d'Artin-Rees et de la platitude de M que la filtration de $M\otimes_A F'$ induite par la filtration I-adique de $M\otimes_A F$ est I-bonne, donc séparée. On en déduit aisément que la filtration I-adique de $M\otimes_A F$ est séparée.

Pour prouver que M vérifie (ML) il suffit d'après 2.1.8 de montrer que pour tout A-module de type fini F, tout élément x de $M\otimes_A F$ a un module de coefficients dans F. Vus 2.5.2 et l'hypothèse sur M/IM, l'image de x dans $M\otimes_A(F/I^nF)$ a un module de coefficients J_n dans F/I^nF quel que soit l'entier n. Soit J le sous-module $\varprojlim J_n$ de $F=\varprojlim F/I^nF$. Comme $M\otimes_A(F/J)$ est séparé pour la topologie I-adique, on a $x\in M\otimes_A J$ donc J est le module de coefficients cherché. Cqfd.

Nous allons maintenant améliorer la prop. 2.5.2 dans le cas où A est noethérien. Rappelons la définition suivante:

Définition (EGA IV 15.7.8). Soit $f\colon X\to S$ un morphisme de schémas. On dit que f est *submersif* s'il est surjectif et si la topologie de Zariski de S est quotient de celle de X. On dit que f est *universellement submersif* si $f\times_S S'$ est submersif pour tout S-schéma S'.

Lemme (2.5.4). *Soit $f\colon X\to S$ un morphisme de schémas. On suppose S noethérien et f universellement submersif. Soient s un point de S, s' une spécialisation de s dans S. Il existe un point x de X au-dessus de s et une spécialisation x' de x au-dessus de s'.*

C'est immédiat par réduction au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète.

Proposition (2.5.5). *Soient $f\colon A \to B$ un homomorphisme d'anneaux, M un A-module plat; on suppose que A est noethérien, que* $\mathrm{Spec}(f)$ *est universellement submersif et que le B-module $B \otimes_A M$ vérifie* (ML). *Alors M vérifie* (ML).

Démonstration. Supposons d'abord A local complet, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soit F l'ensemble des idéaux I de A tels que M/IM ne vérifie pas (ML); si F est non vide, il a un élément maximal I qui est nécessairement un idéal premier de A (car l'ensemble des idéaux de A qui n'appartiennent pas à F est stable par produit, d'après 2.5.2). Cherchons une contradiction avec les hypothèses de l'énoncé. On peut supposer $I=0$, auquel cas A est intègre et f est injectif. Par 2.5.3 il suffit de voir que M est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Soit V un anneau de valuation discrète dominant A. Par 2.5.4 et 1.3.1, l'homomorphisme $1_V \otimes_A f$ est universellement injectif. Par 2.5.1, $V \otimes_A M$ est un V-module de Mittag-Leffler. Comme V est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, $V \otimes_A M$ l'est aussi, donc M l'est aussi, puisqu'il s'identifie à un sous-A-module de $V \otimes_A M$, d'où l'assertion.

Le cas où A est local se déduit du précédent par descente plate (2.5.1).

Pour étudier le cas général, nous utiliserons le lemme suivant:

Lemme (2.5.6). *Soient A un anneau, M un A-module plat tel que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $M_\mathfrak{p}$ soit un $A_\mathfrak{p}$-module de Mittag-Leffler. Pour que M soit un A-module de Mittag-Leffler, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée: pour toute application A-linéaire $u\colon F \to M$ où F est de présentation finie, l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de A tels que $u_\mathfrak{p}$ soit A-universellement injective est ouvert dans* $\mathrm{Spec}(A)$.

Démonstration. La nécessité se prouve facilement en introduisant un stabilisateur de u. Inversement, supposons vérifiée la condition de l'énoncé. Soit $v\colon G \to M$ une application A-linéaire telle que G soit de présentation finie, et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Par 2.1.9, $v_\mathfrak{p}(G_\mathfrak{p})$ est contenu dans un sous-$A_\mathfrak{p}$-module pur, libre de type fini $L_\mathfrak{p}$ de $M_\mathfrak{p}$. On déduit alors de la propriété de l'énoncé qu'il existe un élément f de $A-\mathfrak{p}$ et un sous-A_f-module pur, libre de type fini L_f de M_f qui contient $\mathrm{Im}(v_f)$; a fortiori v_f a un stabilisateur. Ainsi, localement pour la topologie de Zariski sur $\mathrm{Spec}(A)$, v a un stabilisateur. On déduit alors de 2.5.1 par un argument de quasi-compacité que v a un stabilisateur, cqfd.

Revenant à la démonstration de 2.5.5, montrons que le A-module M vérifie les conditions de 2.5.6. On sait déjà que M est ponctuellement de Mittag-Leffler. Soit $u\colon L \to M$ une application A-linéaire telle que L soit libre de type fini; comme M est A-plat et comme $B \otimes_A M$ est un B-module de Mittag-Leffler, il existe une application A-linéaire $v\colon L \to L'$ telle que L' soit libre de type fini, que v factorise u à droite et que $1_B \otimes_A v$

domine $1_B \otimes_A u$. L'ensemble U des points de $\mathrm{Spec}(A)$ où v est inversible à gauche est ouvert. Il suffit donc de voir que u est A-universellement injectif au-dessus de U. Soit $\mathfrak{p} \in U$. Comme $1_B \otimes_A v_{\mathfrak{p}}$ est inversible à gauche et domine $1_B \otimes_A u_{\mathfrak{p}}$ on voit que $1_B \otimes_A u_{\mathfrak{p}}$ est B-universellement injectif, donc que $1_B \otimes_A u \otimes_A k(\mathfrak{p})$ est injectif. Comme $\mathrm{Spec}(f)$ est surjectif il en résulte que $u \otimes_A k(\mathfrak{p})$ est injectif. Comme L est libre et M est plat, $u_{\mathfrak{p}}$ est A-universellement injectif par I 3.1.6, cqfd.

§ 3. Applications

3.1. Descente de la projectivité

Dans ce paragraphe, nous utiliserons systématiquement la technique de dévissage introduite par Kaplansky [11]; rappelons de quoi il s'agit.

Définition (3.1.1). Soient A un anneau, M un A-module. On appelle *dévissage transfini* de M une famille $(M_u)_{u \in U}$ de sous-modules de M, indexée par un ordinal U, croissante, telle que $M_0 = 0$, que $M = \bigcup_{u \in U} M_u$ et que, pour tout ordinal limite $u' \in U$, on ait $M_{u'} = \bigcup_{u \in u'} M_u$.

On dit que $(M_u)_{u \in U}$ est un *dévissage de Kaplansky* si, pour tout ordinal u tel que $u+1 \in U$, M_u est facteur direct de M_{u+1} et M_{u+1}/M_u est de type dénombrable.

Lemme (3.1.2). *Soit $(M_u)_{u \in U}$ un dévissage transfini d'un A-module M. Si, pour tout ordinal u tel que $u+1 \in U$, M_u est facteur direct de M_{u+1}, alors M est isomorphe à la somme directe des M_{u+1}/M_u.*

La démonstration se fait facilement, par récurrence transfinie, cf. [11].

On voit en particulier qu'un A-module est somme directe de sous-modules de type dénombrable si et seulement s'il admet un dévissage de Kaplansky.

On va maintenant déduire des résultats de 2.5 des critères de descente de la projectivité. Pour abréger, on dira qu'un homomorphisme $f: A \to B$ vérifie la condition (C) (resp. (C')) si tout A-module plat P tel que le B-module $B \otimes_A P$ soit de Mittag-Leffler (resp. projectif), est nécessairement un A-module de Mittag-Leffler (resp. projectif).

Théorème (3.1.3). (C) *implique* (C').

Démonstration. Soit $f: A \to B$ un homomorphisme vérifiant la condition (C). Soit P un A-module plat tel que $B \otimes_A P$ soit un B-module projectif. Par [11] on sait que le B-module $B \otimes_A P$ est somme directe d'une famille $(Q_i)_{i \in I}$ de sous-modules de type dénombrable. On dira qu'un sous-module P' de P est *adapté* à la décomposition $(Q_i)_{i \in I}$ s'il est pur et si $\mathrm{Im}(B \otimes_A P' \to B \otimes_A P)$ est somme d'une sous-famille de $(Q_i)_{i \in I}$.

D'après la propriété (C), P vérifie (ML). Par 2.2.1, l'ensemble des sous-modules de type dénombrable de P a une partie cofinale formée de sous-modules purs. On va montrer que cet ensemble a une partie cofinale formée de sous-modules adaptés. Soit P_0 un sous-module pur de type dénombrable de P. On construit, par récurrence sur n, une suite (P_n, I_n) vérifiant les conditions suivantes:

a) P_n est un sous-module pur de type dénombrable de P, I_n est une partie dénombrable de I;

b) I_n est l'ensemble des $i \in I$ tels que la projection de $B \otimes_A P_n$ dans Q_i soit non nulle;

c) l'image de $B \otimes_A P_{n+1}$ dans $B \otimes_A P$ contient les Q_i $(i \in I_n)$.

Cette construction est possible: il suffit de remarquer que les Q_i sont de type dénombrable et que, pour tout sous-B-module de type dénombrable Q de $B \otimes_A P$, il existe un sous-A-module de type dénombrable R de P tel que $Q \subset \operatorname{Im}(B \otimes_A R \to B \otimes_A P)$.

Posons alors $P' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ et $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$; il est clair que P' est un sous-module pur de type dénombrable de P contenant P_0, et que $\operatorname{Im}(B \otimes_A P' \to B \otimes_A P)$ est somme de $(Q_i)_{i \in J}$; d'où l'assertion.

Soit A l'ensemble des sous-modules adaptés de P distincts de P. Pour tout $N \in A$, choisissons un sous-module non nul de type dénombrable N' de P/N, adapté à la décomposition de $B \otimes_A (P/N)$ quotient de $(Q_i)_{i \in I}$. L'image réciproque de N' dans P sera notée $s(N)$; c'est un sous-module adapté de P strictement plus grand que N. D'après le principe de récurrence transfinie, il existe un et un seul dévissage transfini $(P_u)_{u \in U}$ de P tel que, pour tout ordinal u tel que $u+1 \in U$, on ait $P_{u+1} = s(P_u)$. Par 2.2.2, P_{u+1}/P_u est projectif de type dénombrable. Donc P est projectif (3.1.1) cqfd.

Exemples (3.1.4). 1) La condition (O) du §1 implique (C) (2.5.2) donc aussi (C'). En particulier, un homomorphisme fidèlement plat et un homomorphisme injectif et fini vérifient (C').

2) Soit f: $A \to B$ un homomorphisme. Si A est noethérien et si $\operatorname{Spec}(f)$ est universellement submersif, f vérifie (C) (2.5.5) donc aussi (C').

3) Soient A un anneau, M un A-module; par 1), la condition «P est projectif» est locale pour la topologie de Zariski sur $\operatorname{Spec}(A)$.

Soient maintenant S un schéma, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_S$-module; nous dirons que $\mathcal{M}$ est *localement projectif* si pour tout ouvert affine U de S, $\Gamma(U, \mathcal{M})$ est un $\Gamma(U, \mathcal{O}_S)$-module projectif. Cette condition est locale pour la topologie de Zariski sur S, et même pour la topologie fpqc, d'après 1).

Nous dirons qu'un morphisme de schémas $f: X \to S$ vérifie la condition (C') si tout $\mathcal{O}_S$-module plat $\mathcal{M}$, tel que $f^*(\mathcal{M})$ soit un $\mathcal{O}_X$-module localement projectif, est localement projectif. D'après 2), si f est quasi-compact, quasi-séparé et universellement submersif, et si S est noethérien, f vérifie (C'); en particulier, si f est propre surjectif et si S est noethérien, f vérifie (C').

3.2. Dimension finitiste des anneaux noethériens

Définition (3.2.1) (voir [4]). Soit A un anneau.

1) On appelle *dimension finitiste* de A et l'on note $FPD(A)$ le plus petit entier n tel que tout A-module de dimension projective finie soit de dimension projective $\leqq n$, ou $+\infty$ s'il n'existe pas de tel entier.

2) On appelle *dimension finitiste faible* de A et l'on note $FWD(A)$ le plus petit entier n tel que tout A-module de Tor-dimension finie soit de Tor-dimension $\leqq n$, ou $+\infty$ s'il n'existe pas de tel entier.

Rappelons les résultats suivants:

(3.2.2) (Auslander-Buchsbaum, voir [3]). Si A est un anneau noethérien, on a $FWD(A) = \sup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)} \mathrm{prof}(A_{\mathfrak{p}})$.

(3.2.3) (Bass, voir [5]). Si A est un anneau noethérien, on a $FPD(A) \geqq \dim(A)$ (dimension de Krull); l'égalité a lieu si A est de Gorenstein.

Nous allons voir que pour tout anneau noethérien A, on a $FPD(A) = \dim(A)$, ce qui précise 3.2.3. Nous utiliserons le résultat auxiliaire suivant:

Proposition (3.2.4). *Soient A un anneau $\aleph_0$-noethérien, P un A-module projectif muni d'une différentielle d. Il existe un dévissage transfini $(P_u)_{u\in U}$ du A-module P vérifiant la condition suivante: pour tout $u \in U$, P_u est stable par d, et l'application linéaire $H(P_u) \to H(P)$ déduite de l'inclusion $P_u \hookrightarrow P$ par passage aux modules d'homologie est injective.*

(Rappelons qu'un anneau A est $\aleph_0$-noethérien lorsque tout idéal de A est de type dénombrable.)

Démonstration. Soit $(Q_i)_{i\in I}$ une décomposition du A-module projectif P en somme directe de sous-modules de type dénombrable. En utilisant la suite exacte d'homologie, on se ramène par récurrence transfinie à montrer que si P est non nul, il existe un sous-module non nul P' de P, somme d'une sous-famille dénombrable de $(Q_i)_{i\in I}$, tel que $d(P') \subset P'$ et que $H(P') \to H(P)$ soit injectif.

Soit I_0 une partie dénombrable quelconque de I; on construit par récurrence sur n une suite croissante (I_n) de parties dénombrables de I

6*

telle que, si $P_n = \sum_{i \in I_n} Q_i$, on ait $d(P_n) \subset P_{n+1}$ et $d(P) \cap P_n \subset d(P_{n+1})$. La possibilité de cette construction vient du fait que, comme A est $\aleph_0$-noethérien, $d(P) \cap P_n$ est de type dénombrable. Posons alors $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$ et $P' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$; on a $P' = \sum_{i \in J} Q_i$; P' est stable par d et contient P_0; comme $d(P) \cap P' = d(P')$, $H(P') \to H(P)$ est injectif; ceci prouve l'assertion.

Corollaire (3.2.5). *Soient A un anneau $\aleph_0$-noethérien, M un A-module de dimension projective finie q. Il existe un dévissage transfini $(M_u)_{u \in U}$ de M tel que, pour tout ordinal u tel que $u+1 \in U$, M_{u+1}/M_u soit de type dénombrable et de dimension projective $\leqq q$.*

On applique 3.2.4 à une résolution projective de M de longueur q.

Rappelons [2] qu'inversement, si A est un anneau quelconque et si M est un A-module muni d'un dévissage transfini dont les quotients successifs sont de dimension projective $\leqq q$, alors M est de dimension projective $\leqq q$.

Il en résulte notamment que, si A est un anneau $\aleph_0$-noethérien, $FPD(A)$ est la borne supérieure des dimensions projectives des A-modules de type dénombrable et de dimension projective finie.

Théorème (3.2.6). *Pour tout anneau noethérien A, on a $FPD(A) = \dim(A)$.*

Démonstration. Par 3.2.3 il suffit de voir que $FPD(A) \leqq \dim(A)$. Pour cela on peut supposer $\dim(A) = n < +\infty$ et raisonner par récurrence sur n. Pour $n=0$, A est artinien et l'assertion est bien connue (voir par exemple [4]); supposons $n>0$. Il suffit de voir que si M est un A-module de type dénombrable et de dimension projective finie, et si

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

est une résolution de M telle que P_i soit projectif de type dénombrable pour $i<n$, alors P_n est projectif. Par 3.2.2, P_n est plat; comme il est de type dénombrable, il suffit de montrer qu'il vérifie (ML).

Supposons d'abord A local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Par complétion et descente plate (2.5.1) on peut supposer A complet. Si $\mathrm{prof}(A) < n$, P_{n-1}/P_n est A-plat par 3.2.2, donc P_n vérifie (ML); supposons donc que $\mathrm{prof}(A) = n$, autrement dit, que A est de Cohen-Macaulay. Par 2.5.3, il suffit de voir que $P_n/\mathfrak{p} P_n$ est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A. Comme A est de Cohen-Macaulay, on peut par EGA 0_{IV} 16.5.9 trouver une suite A-régulière d'éléments de $\mathfrak{p}$, engendrant un idéal I tel que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A/I)$. On peut aussi supposer que $\mathfrak{p}$ n'est pas maximal, auquel cas $\mathrm{Tor}_n^A(M, A/I) = 0$, de sorte que l'application linéaire $P_n/IP_n \to P_{n-1}/IP_{n-1}$ est injective; donc P_n/IP_n est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. D'autre part, comme $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A/I)$, il existe une application

A-linéaire injective $j\colon A/\mathfrak{p}\to A/I$; alors $1_{P_n}\otimes_A j\colon P_n/\mathfrak{p}P_n\to P_n/IP_n$ est injectif, puisque P_n est plat; donc $P_n/\mathfrak{p}P_n$ est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, d'où l'assertion.

Si A est quelconque, le cas local montre que P_n est ponctuellement projectif. D'après 2.5.6, il suffit donc de voir que si $u\colon L\to P_n$ est une application A-linéaire telle que L soit libre de type fini, l'ensemble des points de $\operatorname{Spec}(A)$ où u est A-universellement injective est ouvert.

Soit $\mathfrak{p}$ un point de $\operatorname{Spec}(A)$ tel que $u_{\mathfrak{p}}$ soit A-universellement injectif. Notons $v\colon L\to P_{n-1}$ l'application composée de la séquence $L\xrightarrow{u}P_n\to P_{n-1}$. L'ensemble des points $\mathfrak{q}$ de $\operatorname{Spec}(A)$ où v est inversible à gauche est un ouvert U contenant $\operatorname{Ass}(A_{\mathfrak{p}})$ ([13] II 4.4). Quitte à remplacer A par A_f où f est un élément convenable de $A-\mathfrak{p}$, on peut supposer que U est schématiquement dense dans $\operatorname{Spec}(A)$. Soit alors s un élément régulier de A tel que $D(s)\subset U$. Comme $\operatorname{Tor}_i^A(M, A/sA)=0$ pour $i>1$, on a la suite exacte

$$0\to P_n/sP_n\to P_{n-1}/sP_{n-1}\to\cdots\to P_1/sP_1$$

donc, d'après l'hypothèse de récurrence, P_n/sP_n est un (A/sA)-module projectif. En particulier, l'ensemble des points de $\operatorname{Spec}(A)$ où $u\otimes_A 1_{A/sA}$ est inversible à gauche est un ouvert contenant $\mathfrak{p}$; quitte à localiser encore, on peut supposer que $u\otimes_A 1_{A/sA}$ est inversible à gauche. Posons $Q=\operatorname{Coker}(u)$. Alors Q_s est plat, Q/sQ est (A/sA)-plat, et $\operatorname{Tor}_1^A(Q, A/sA)$ est de type fini et nul en $\mathfrak{p}$. Quitte à localiser encore, on peut supposer que s est Q-régulier. Il résulte alors de 1.4.2.1 que Q est plat i.e. que u est A-universellement injectif, cqfd.

Corollaire (3.2.7). *Soit A un anneau noethérien de dimension finie n. Tout A-module plat est de dimension projective $\leqq n$.*

En effet $FPD(A)=n<+\infty$, donc tout A-module plat est de dimension projective finie (nécessairement $\leqq n$) par [10], prop. 6.

Dans le cas «relatif» signalons le résultat suivant:

Théorème (3.2.8). *Soient A un anneau, B une A-algèbre finie et libre, M un B-module de* Tor-*dimension finie. On a les égalités*

$$\operatorname{Tor}\cdot\dim_B(M)=\operatorname{Tor}\cdot\dim_A(M),\tag{1}$$

$$\dim\cdot\operatorname{proj}_B(M)=\dim\cdot\operatorname{proj}_A(M).\tag{2}$$

Nous utiliserons le lemme suivant:

Lemme (3.2.9). *Soit P un B-module plat. Si P est un A-module de Mittag-Leffler, c'est un B-module de Mittag-Leffler.*

Démonstration. Notons F le B-module $\operatorname{Hom}_A(B, A)$: il est clair que F est de type fini et fidèle. Si M est un B-module et N est un A-module, on a un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_B(M, B \otimes_A N) \to \mathrm{Hom}_A(M \otimes_B F, N), \tag{$*$}$$

car B est un A-module libre de type fini.

On va reprendre la démonstration de 2.5.2; comme alors, introduisons la sous-catégorie pleine C de $\mathrm{Mod}(B)$ formée des B-modules M tels que $M^I \otimes_B P \to (M \otimes_B P)^I$ soit injectif pour tout ensemble I. Comme dans loc. cit. on voit que C est stable par sous-objets, produits et extensions. Il faut voir que $C = \mathrm{Mod}(B)$, autrement dit, que pour tout B-module non nul M il existe une application B-linéaire non nulle de M dans un objet de C.

Comme le A-module P vérifie (ML) et comme B est une A-algèbre finie et libre, il est clair que, pour tout A-module N, le B-module $B \otimes_A N$ est objet de C. Soit M un B-module, prenons pour N le A-module $M \otimes_B F$ et supposons $\mathrm{Hom}_B(M, B \otimes_A N) = 0$. Par l'isomorphisme $(*)$ il en résulte $\mathrm{End}_A(N) = 0$, donc $N = 0$. Comme F est un B-module fidèle de type fini, on a aussi $M = 0$, cqfd.

Montrons l'égalité (1) de 3.2.8. On se ramène par hensélisation au cas où A et B sont locaux d'idéaux maximaux respectifs $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$. Il suffit de voir que si M est A-plat et si $\mathrm{Tor}\cdot\dim_B(M) \leqq 1$, alors M est B-plat. On forme une suite exacte de $\mathrm{Mod}(B)$

$$0 \to P \xrightarrow{u} L \to M \to 0$$

où L est B-libre; il faut voir que u est B-universellement injectif. Comme L est A-libre et comme u est A-universellement injectif, P est un A-module de Mittag-Leffler (2.1.6); comme P est B-plat, c'est un B-module de Mittag-Leffler (3.2.9); il est donc limite inductive filtrante de sous-B-modules purs, libres de type fini (2.1.9); on peut donc supposer que P et L sont libres de type fini. Comme u est A-universellement injectif, il définit par passage au quotient une application B-linéaire injective de $P/\mathfrak{m}P$ dans $L/\mathfrak{m}L$; comme $B/\mathfrak{m}B$ est artinien (donc de dimension finitiste nulle) cette application linéaire est B-universellement injective, donc $P/\mathfrak{n}P \to L/\mathfrak{n}L$ est injective; comme P et L sont libres de type fini, u est B-universellement injectif (I 3.1.6) cqfd.

Montrons l'égalité (2) de 3.2.8. Vue l'égalité (1), il suffit de montrer que si M est B-plat et A-projectif, il est B-projectif. On raisonne comme dans la démonstration de 3.1.3, en utilisant 3.2.9. Soit $(Q_i)_{i\in I}$ une décomposition du A-module M en somme directe de sous-modules de type dénombrable. On dit qu'un sous-B-module de M est adapté à la décomposition $(Q_i)_{i\in I}$ s'il est pur et somme d'une sous-famille de $(Q_i)_{i\in I}$. Par récurrence transfinie (voir 3.1.3) il suffit de vérifier que l'ensemble des sous-B-modules de type dénombrable de M a une partie cofinale formée de sous-modules adaptés. Soit I_0 une partie dénombrable de I. On construit par récurrence sur n une suite (P_n, I_n) telle que P_n soit un sous-B-module pur de type dénombrable de M, que I_n soit une partie dénombrable de I et que, si P_n' désigne la somme des Q_i $(i \in I_n)$, on ait $P_n' \subset P_n \subset P_{n+1}'$. Comme M vérifie (ML) (3.2.9) la construction est possible (2.2.1); la réunion des P_n est alors un sous-module adapté de M contenant P_0', ce qui termine la démonstration.

3.3. Dimension projective des modules plats

Soit A un anneau; on note $d(A)$ la borne supérieure des dimensions projectives des A-modules plats. Si A est noethérien, on a $d(A) \leqq \dim(A)$ (3.2.7); on peut se demander si $d(A) = \dim(A)$. D'après Jensen (non publié) la réponse est négative, en particulier si A est un anneau noethérien dénombrable de Gorenstein, on a $d(A) = 1$. Nous allons relier ce résultat aux travaux de Osofsky [16]:

Théorème (3.3.1). *Soit A un anneau noethérien. On a*

$$d(A) = \sup(\dim \cdot \mathrm{proj}_A(A[S^{-1}]))$$

où S parcourt l'ensemble des parties multiplicatives de A.

Démonstration. Notons d le second membre de l'égalité à démontrer; il s'agit de voir que $d(A) \leqq d$. Par récurrence noethérienne et par 3.1.4 1), on peut supposer A intègre de corps de fractions K, et l'égalité prouvée pour tous les anneaux quotients de A distincts de A.

On peut évidemment supposer A infini; posons $\mathrm{card}(A) = \aleph_u$ et soit $v \mapsto s_v$ une bijection de $\aleph_u$ sur $A - (0)$. Pour tout $v \in \aleph_u$ notons S_v la partie multiplicative de A engendrée par $(s_{v'})_{v' \in v}$. Notons U l'ordinal du produit lexicographique de $\aleph_u$ par $\aleph_0$; pour tout $w \in U$, notons w' et w'' les projections respectives de w sur $\aleph_u$ et $\aleph_0$; alors w'' est un entier, et l'on a $w_1 < w_2$ si et seulement si $w_1' < w_2'$ ou $w_1' = w_2'$ et $w_1'' < w_2''$.

Soit $w \in U$. On note K_w le sous-A-module $s_{w'}^{-w''} \cdot (A[S_{w'}^{-1}])$ de K. Alors $(K_w/A)_{w \in U}$ est un dévissage transfini du A-module K/A. Pour tout $w \in U$, K_{w+1}/K_w est isomorphe à $A[S_{w'}^{-1}]/s_{w'} \cdot A[S_{w'}^{-1}]$.

Soit P un A-module plat, montrons que $\dim \cdot \mathrm{proj}_A(P) \leqq d$. On a $\dim \cdot \mathrm{proj}_A(K) \leqq d$; comme $K \otimes_A P$ est un K-espace vectoriel, on a donc $\dim \cdot \mathrm{proj}_A(K \otimes_A P) \leqq d$; il suffit donc de voir que

$$\dim \cdot \mathrm{proj}_A((K/A) \otimes_A P) \leqq d+1.$$

Comme P est plat, il est clair que $((K_w/A) \otimes_A P)_{w \in U}$ est un dévissage transfini de $(K/A) \otimes_A P$. D'après [2] il suffit de montrer que les quotients successifs sont de dimension projective $\leqq d+1$. Soit $w \in U$. Alors

$(K_{w+1}/K_w)\otimes_A P$ est un $(A/s_{w'}A)$-module plat, qui est de dimension projective $\leqq d$ par l'hypothèse de récurrence noethérienne; c'est donc un A-module de dimension projective $\leqq d+1$, d'où l'assertion.

Corollaire (3.3.2). *Soit A un anneau noethérien de dimension finie n et de cardinal infini $\aleph_u$. Alors $d(A)\leqq \inf(n, u+1)$. Si A est complet, on a $d(A)=\inf(n, u+1)$.*

Démonstration. La première assertion résulte de 3.3.1, et du fait connu qu'un A-module plat de type $\aleph_u$ est de dimension projective $\leqq u+1$ (voir une démonstration simple de ce dernier point dans [8] appendice *I*). Prouvons la seconde assertion. On sait ([16] 6.10) que si A est local noethérien complet régulier de corps de fractions K, alors $\dim\cdot\operatorname{proj}_A(K)=\inf(n, u+1)$. Supposons maintenant A local noethérien complet intègre de corps de fractions K. Il existe un homomorphisme injectif et fini $f: R\to A$, tel que R soit local noethérien complet régulier; en outre, si L est le corps de fractions de R, on a $K=A\otimes_R L$. Par 3.1.4 1), on a $\dim\cdot\operatorname{proj}_A(K)=\dim\cdot\operatorname{proj}_R(L)=\inf(n, u+1)$, donc l'égalité est encore vraie dans ce cas. Le cas général se ramène facilement au cas intègre.

Remarques (3.3.3). 1) Nous ignorons si, lorsque A est un anneau noethérien intègre de corps de fractions K, on a toujours $d(A)=\dim\cdot\operatorname{proj}_A(K)$.

2) Soit A un anneau noethérien. Etant donné un A-module plat P, appelons *dimension injective relative* de P le plus petit des entiers n tels que $\operatorname{Ext}_A^{n+1}(Q, P)=0$ pour tout A-module plat Q. On montre facilement que cet entier est aussi la dimension injective de P au sens de la théorie de l'homologie relative définie sur la catégorie $\operatorname{Mod}(A)$ par la classe des suites universellement exactes. On peut montrer [10] qu'un anneau local noethérien est complet si et seulement s'il est de dimension injective relative nulle; plus généralement, si A est un anneau noethérien complet pour une topologie I-adique, on peut montrer que les dimensions injectives relatives du A-module A et du (A/I)-module A/I sont égales.

Signalons sans démonstration le résultat suivant, dans cet ordre d'idées: Soient k un corps non dénombrable, X et Y des indéterminées, A le localisé de l'anneau $k[X, Y]$ en l'idéal maximal (X, Y), $K=k(X, Y)$ le corps de fractions de A. On a $\operatorname{Ext}_A^1(K, A)=0\neq\operatorname{Ext}_A^2(K, A)$. En particulier, A est de dimension injective relative 2.

Nous remercions très vivement R. Bkouche, D. Ferrand, R. Goblot, C. U. Jensen, D. Lazard et J.-P. Olivier, dont les travaux récents (et parfois non publiés) sont à l'origine de ce travail, et qui nous ont aidés dans de nombreuses discussions (ou échanges épistolaires) à en mettre au point les résultats. En particulier, D. Lazard nous a aidés à étudier le problème de descente de la projectivité, et les résultats des n^{os} 3.2 et 3.3 doivent beaucoup aux suggestions de C. U. Jensen.

Références

1. Artin, M.: The implicit function theorem in algebraic geometry. Interscience colloquium in algebraic geometry. Bombay 1968 (Oxford University Press).
2. Auslander, M.: On the dimension of modules and algebras. III. Nagoya Math. J. **9**, 67–77 (1955).
3. – Buchsbaum, D.: Homological dimension in Noetherian rings. II. Trans. Am. Math. Soc. **88**, 194–206 (1958).
4. Bass, H.: Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. Trans. Am. Math. Soc. **95**, 466–488 (1960).
5. – Injective dimension in Noetherian rings. Trans. Am. Math. Soc. **102**, 18–29 (1962).
6. – Big projective modules are free. Illinois J. of Math. **7**, 23–31 (1963).
7. Ferrand, D.: Descente de la platitude par un homomorphisme fini. C.R.A.S. **246**, 946–949 (1969).
8. Goblot, R.: Sur deux classes de catégories de Grothendieck. Thèse (à paraître).

EGA: Grothendieck, A., Dieudonné, J., Eléments de géométrie algébrique. Publ. Math. I.H.E.S. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32.

SGA: Grothendieck, A., Séminaire de géométrie algébrique (I.H.E.S.).

9. Grothendieck, A.: Séminaire Bourbaki, exposé 221.
10. Jensen, C.U.: On the vanishing of $\varprojlim^{(i)}$. J. of Algebra **15**, 151–166 (1970).
11. Kaplansky, I.: Projective modules. Annals of Math. **68**, 372–377 (1958).
12. Knutson, D.: Algebraic spaces. Thèse M.I.T. Lectures Notes N° 203. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971.
13. Lazard, D.: Thèse (=Autour de la platitude). Bull. S.M.F. **97**, 81–128 (1969); et: Disconnexités des spectres d'anneaux et des préschémas. Bull. S.M.F. **95**, 95–108 (1967).
14. Murre, J.P.: Representation of unramified functors. Séminaire Bourbaki, exposé 294.
15. Olivier, J.-P.: Thèse (à paraître).
16. Osofsky, B.L.: Homological dimension and the continuum hypothesis. Trans. Am. Math. Soc. **132**, 217–230 (1968).
17. Raynaud, M.: Anneaux henséliens, Lecture notes, n° 169. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970.
18. Warfield, R.B.: Purity and algebraic compactness for modules. Pacific J. of Math. **28**, 699–719 (1969).

Michel Raynaud
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
F-91 Orsay
France

Laurent Gruson
Faculté des Sciences de Lille
3, avenue des Chalets
F-75 Paris XVIe
France

(Reçu le 17 fevrier 1971)