MATEMATIKA DISKRIT

PERTEMUAN 5:

PERMUTASI, KOMBINASI, PIGEONHOLE

Prinsip Perkalian

- Jika sebuah aktivitas bisa dibentuk dalam *t* langkah berurutan dan langkah 1 bisa dilakukan dalam n_1 cara; langkah kedua bisa dilakukan dalam n_2 cara; ….; langkah *t* bisa dilakukan dalam n_t cara, maka banyaknya aktivitas berbeda yang mungkin adalah $\mathbf{n_1.n_2….n_t}$.

Prinsip Perkalian

- Contoh 1:

  Sebuah panitia yang terdiri dari enam orang terdiri dari Ali, Budi, Cokro, Dewi, Edi, dan Franky akan memilih seorang ketua, sekretaris, dan bendahara. Ada berapa banyak cara pemilihan ini bisa dilaksanakan ?

  Jawab:

  Pemilihan dilakukan dgn 3 langkah berurutan:

  1. Memilih ketua (ada 6 cara) → n_1
  2. Memilih sekretaris (ada 5 cara) → n_2
  3. Memilih bendahara (ada 4 cara) → n_3

Total ada $n_1 \times n_2 \times n_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$ cara

Prinsip Perkalian

- Contoh 2:

  Kursi di sebuah auditorium akan diberi nomor yang terdiri dari 1 huruf dan sebuah bil integer positif yg tidak melebihi 100. Ada berapa kursi yang dapat dilabeli dgn nomor yg berbeda?

  Jawab:

  1. Memilih huruf (ada 26 cara)
  2. Memilih angka (ada 100 cara)

  Total ada 26 x 100 = 2600 nomor berbeda yg dapat digunakan untuk melabeli kursi

Prinsip Perkalian

- Contoh 3:

  Ada berapa banyak plat nomor kendaraan bermotor di Surabaya yg dapat dibuat jika nomor terdiri dari huruf L, diikuti dgn 4 digit angka, dan 2 huruf belakang?

  Jawab:

  1. Memilih huruf pertama L (1 cara)
  2. Memilih digit angka I (9 cara)
  3. Memilih digit angka II (10 cara)
  4. Memilih digit angka III (10 cara)
  5. Memilih digit angka IV (10 cara)
  6. Memilih huruf belakang I (26 cara)
  7. Memilih huruf belakang II (26 cara)

Total ada 26.26.9.10.10.10 = 6.084.000 plat nomor

Prinsip Penjumlahan

- Jika aktivitas pertama dapat dilakukan dalam n_1 cara, aktivitas kedua dengan n_2 cara, …, dan aktivitas ke-t dengan n_t cara, dan jika aktivitas^2 ini tidak dapat dilakukan pada waktu yg bersamaan, maka ada $\mathbf{n_1 + n_2 + \ldots + n_t}$ cara untuk melakukan aktivitas tersebut

Prinsip Penjumlahan

- Contoh 1:

  Misal akan dipilih satu orang perwakilan anggota pengurus himajur dari 15 laki-laki dan 17 perempuan untuk menghadiri rapat di fakultas. Ada berapa macam cara untuk memilih perwakilan tersebut?

  Jawab:

  1. Memilih anggota dari 15 laki-laki → 15 cara
  2. Memilih anggota dari 17 perempuan → 17 cara

Maka ada 15 + 17 = 32 cara untuk memilih perwakilan

Prinsip Penjumlahan

- Contoh 2:

  Seorang mhs dapat memilih sebuah topik tugas akhir dari salah satu daftar dari 3 daftar judul yg disediakan. Ketiga daftar tsb masing2 memiliki 23, 15, dan 19 topik tugas akhir. Ada berapa banyak topik yg dapat dipilih?

  Jawab:

  Dari daftar I dapat dipilih 23 topik

  Dari daftar II dapat dipilih 15 topik

  Dari daftar III dapat dipilih 19 topik

  Maka ada 23 + 15 + 19 = 57 topik yg dapat dipilih

Permutasi

- Permutasi menggunakan prinsip perkalian
- **Permutasi** dari *n* unsur yang berbeda x_1, x_2, …, x_n adalah sebuah pengurutan dari *n* unsur x_1, x_2, …, x_n.
- Permutasi MEMPERHATIKAN urutan objek yg disusun
- Banyaknya permutasi dari n unsur = n!

Permutasi

Contoh:

- Hitung banyaknya permutasi dari 3 huruf A, B, C
- Tuliskan semua permutasi A, B, C

Jawab:

- n =3, maka permutasi = n! = 3! = 6
- ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

Permutasi r dari n unsur

- Contoh di atas mengasumsikan bahwa yg dipermutasikan adalah seluruh n.
- Permutasi r dari n mempermutasikan r

  (r ≤ n) dari n unsur yang ada.
- P(n,r) = Banyaknya permutasi-r dari sebuah himpunan dari objek-objek yang berbeda

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Permutasi r dari n unsur

- Contoh 1:

  Ada berapa cara untuk memilih juara I, II, dan III dari 100 orang yg mengikuti sebuah lomba?

  Jawab:

  n = 100 r = 3

  P(100,3) = 100.99.98 = 970.200 cara

Permutasi r dari n unsur

- Contoh 2:

  Ada berapa banyak permutasi dari huruf ABCDEFGH yang terdiri dari substring ABC?

  Jawab:

  Krn ABC harus muncul sebagai 1 kesatuan, maka jumlah yg dipermutasikan = 6 (ABC, D, E, F, G, H)

Jumlah permutasi = 6! = 720 permutasi

Generalisasi Permutasi

- Teorema: Misal X adalah barisan yg memiliki n unsur, dimana ada n_1 unsur yg sama untuk jenis 1, n_2 unsur yg sama untuk jenis 2, dst sampai n_t unsur yg sama utk jenis t. Banyaknya permutasi dari X:

$$\boxed{\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}}$$

Generalisasi Permutasi

- Contoh:
  Ada berapa permutasi dari kata MASSACHUSETTS?
  Jawab:
  Jumlah huruf: 13
  Jumlah M: $n_1 = 1$
  Jumlah A: $n_2 = 2$
  Jumlah S: $n_3 = 4$
  Jumlah C: $n_4 = 1$
  Jumlah H: $n_5 = 1$
  Jumlah U: $n_6 = 1$
  Jumlah E: $n_7 = 1$
  Jumlah T: $n_8 = 2$

Permutasi
$$= \frac{13!}{1!2!4!1!1!1!1!2!}$$
$$= \frac{6.227.020.800}{96}$$
$$= 64.864.800$$

Kombinasi

- Merupakan pemilihan objek yang **TIDAK MEMPERHATIKAN** urutan.
- C(n,r) = banyaknya kombinasi-r dari sebuah himpunan dgn n unsur berbeda

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}, \quad r \leq n$$

Kombinasi

- Contoh 1:

a. Hitunglah banyaknya kombinasi-2 dari tiga huruf A, B, dan C.

b. Daftarlah kombinasi-2 dari tiga huruf A, B, dan C.

Jawab:

a. $n = 3$ $\quad\quad r = 2$

$C(3,2) = 3!/(3-2)!2! = 3$

b. AB, AC, BC

Kombinasi

- Contoh 2:

  Ada berapa cara untuk memilih 5 pemain dari 10 orang pemain tenis untuk mengikuti lomba?

  Jawab:

  n = 10 r = 5

  C(10,5) = 10!/5!5! = 252

Ada 252 cara untuk memilih 5 pemain

Kombinasi

- Contoh 3:

  Ada berapa banyak cara untuk membentuk suatu kelompok belajar Mat Diskrit jika anggota kelompok tsb terdiri dari 3 mhs jur TF dan 4 mhs jur SI, jika ada 9 mhs TF dan 11 mhs SI?

  Jawab:

  Langkah 1: Memilih 3 mhs TF dari 9 → C(9,3)

  Langkah 2: Memilih 4 mhs SI dari 11 → C(11,4)

$$Total = Langkah 1 \, x \, Langkah 2$$

$$Total = C(9,3) \, x \, C(11,4)$$

$$Total = \frac{9!}{3!6!} \, x \, \frac{11!}{4!7!}$$

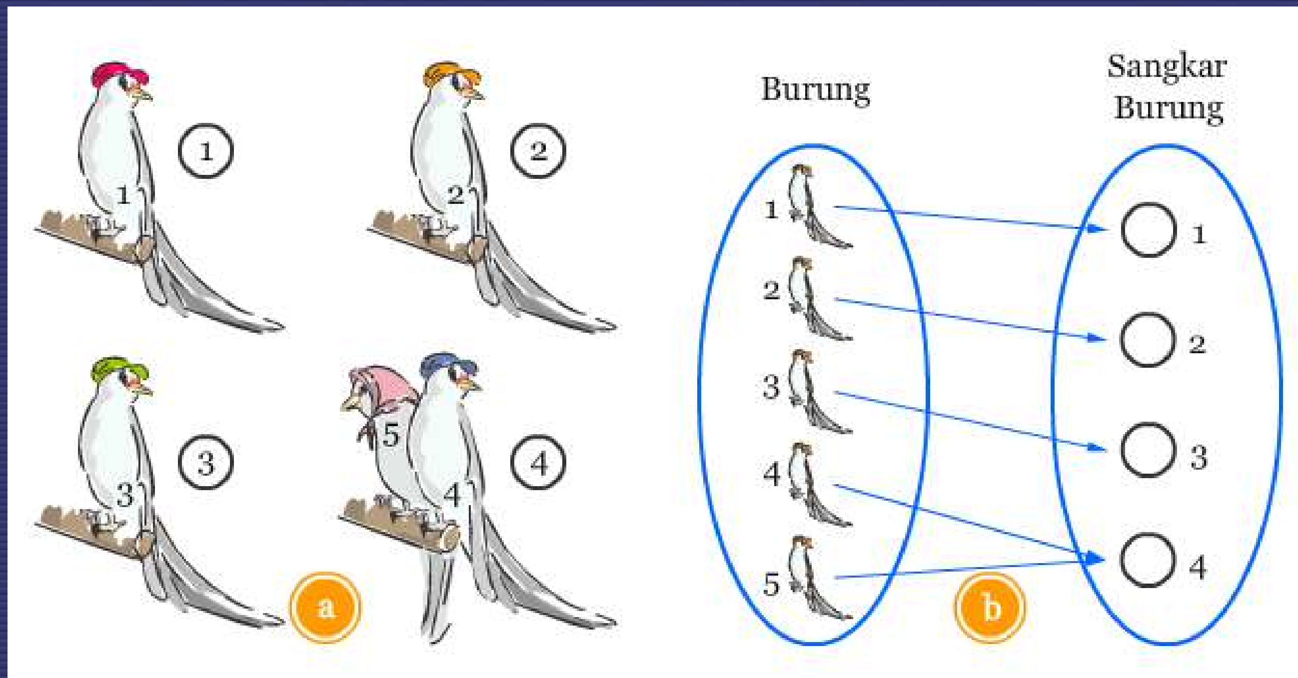
$$Total = 27.720 \, cara$$

Pigeonhole

- Prinsip Pigeonhole: “Jika ada *m* ekor merpati dan *n* buah sarang, dan $m > n$, maka setidaknya ada sarang yang berisi lebih dari 1 merpati”
- Secara umum:

  Jika ada *k+1* atau lebih objek yang diletakkan dalam *k* kotak, maka setidaknya ada 1 kotak yang berisi 2 atau lebih objek

ILUSTRASI



- Ilustrasi (a) menunjukkan beberapa burung yang hinggap di sangkarnya, sedangkan ilustrasi (b) menunjukkan korespondensi antara burung dengan sangkarnya. Prinsip sangkar burung kadang-kadang disebut sebagai prinsip kotak Dirichlet (*Dirichlet box principle*) karena prinsip tersebut dinyatakan secara formal untuk pertama kalinya oleh J. P. G. L. Dirichlet (1805 – 1859).

Prinsip Pigeonhole

- Dari 8 orang, setidaknya ada 2 orang yang memiliki hari lahir yg sama
- Dari 13 orang, setidaknya ada 2 orang yg memiliki bulan lahir yg sama
- Dari 367 orang, setidaknya ada 2 orang yg lahir pada tgl & bulan yg sama

Prinsip Pigeonhole Umum

- “Jika N objek ditempatkan pada k kotak, maka ada setidaknya 1 kotak yang berisi setidaknya $\lceil N/k \rceil$ objek”
- Contoh 1:

Dari 100 orang, setidaknya ada $\lceil 100/12 \rceil = 9$ yang lahir di bulan yang sama

Prinsip Pigeonhole Umum

- Contoh 2:

  Berapa jumlah mhs dlm kelas Mat Diskrit yg dibutuhkan untuk memastikan bahwa setidaknya 6 mhs mendapat nilai yg sama, jika ada 5 kemungkinan nilai yaitu A, B, C, D, dan E?

  Jawab:

  $$\lceil N / k \rceil = y$$

  k = 5 y = 6

  N = 30, dibutuhkan 30 mhs agar ada minimal 6 mhs dengan nilai yang sama

Prinsip Pigeonhole Umum

- Contoh 3:

  Tunjukkan bahwa jika 30 kamus dalam sebuah perpustakaan memiliki total jumlah halaman 61.327, maka salah satu kamus paling tidak memiliki 2045 halaman.

  Jawab:

  pigeon: halaman → N = 61.327

  pigeonhole: kamus → k = 30

Maka sebuah kamus setidaknya memiliki $\lceil 61.327 / 30 \rceil$ atau 2045 halaman