8. Vektor

AGUNG MUSTIKA RIZKI, S.KOM., M.KOM.

Outline Matematika Komputasi

1. Pengenalan Matematika Komputasi
2. Sistem Bilangan
3. Fungsi Ilmu Logika
4. Kombinatorika
5. Probabilitas
6. Trigonometri
7. Sistem Koordinat
8. **Vektor**
9. Matriks
10. Transformasi Matriks
11. Aritmetika
12. Turunan
13. Integral 1
14. Integral 2 (Kondisional)

PENDAHULUAN

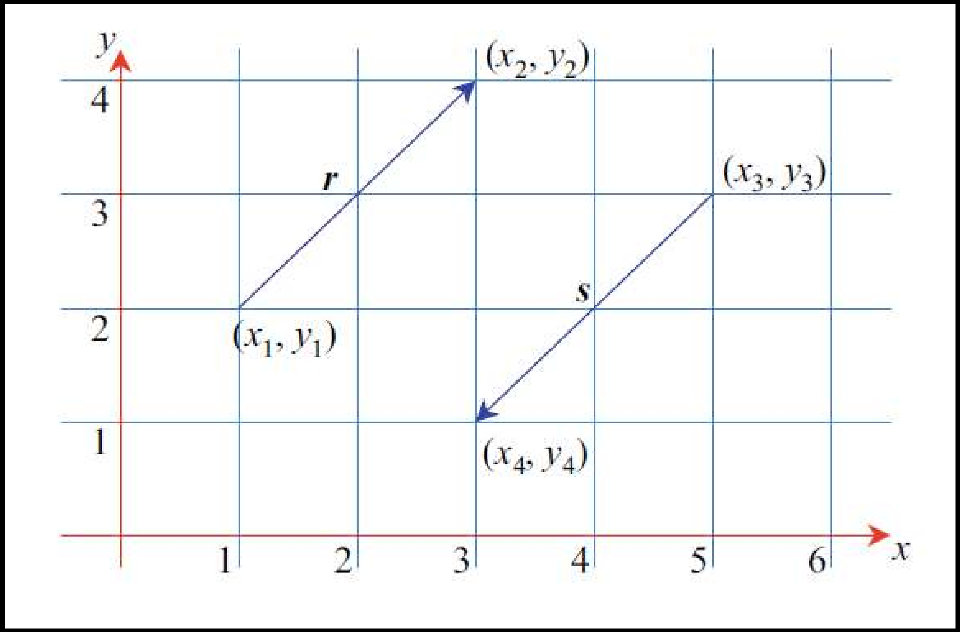
- Satu angka untuk mewakili kuantitas disebut skalar. Contoh : tinggi badan, usia, ukuran sepatu dll.
- Ada hal lain yang membutuhkan lebih dari satu angka untuk mewakili. Contoh: angin, gaya, berat, kecepatan dan suara. Beberapa diantaranya memiliki nilai dan arah. Besaran seperti itu disebut vektor.
- Besaran vektor adalah besaran yang terdiri dari 2 variabel yaitu **nilai & arah.**

VEKTOR 2D – Notasi Vektor

- Sebuah **besaran vektor** dapat dinyatakan oleh huruf dicetak tebal (misal $\mathbf{r}$) atau diberi tanda diatas huruf (misal $\bar{\mathrm{r}}$) atau diberi anak panah diatasnya (misal $\vec{\mathrm{r}}$).
- Vektor memiliki satu atau lebih angka yang diapit tanda kurung.
- $\mathbf{r}$ = $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ => 3 dan 4 adalah komponen $\mathbf{r}$
- Vektor baris : $\mathbf{r} = [3 \quad 4]$
- Keduanya akan berbeda pada pembahasan matriks.
- $\mathbf{r} = [3 \quad 4]^{\boldsymbol{T}}$ => T adalah transpose

Representasi Grafis Vektor

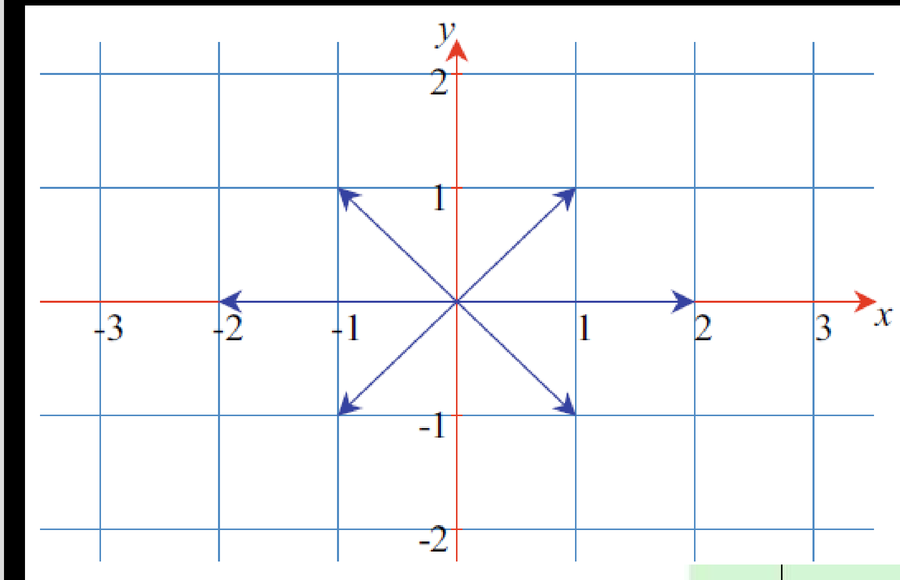
- Panah digunakan untuk merepresentasikan vektor karena memiliki panjang dan arah.
- Secara umum, jika koordinat kepala $(x_h,\ y_h)$ dan ekor vektor adalah $(x_t,\ y_t)$, komponennya Δx dan Δy sebagai berikut :
- Δx = x_h - x_t
- Δy = y_h - y_t
- Vektor tidak memiliki posisi absolut selama kita mempertahankan panjang dan orientasinya.



- $x_r = x_2 - x_1 = 3 - 1 = 2$ $y_r = y_2 - y_1 = 4 - 2 = 2$
- $x_s = x_4 - x_3 = 3 - 5 = -2$ $y_s = y_4 - y_3 = 1 - 3 = -2$
- Notasi negatif (-) menunjukkan arah vektor

Magnitud / Panjang Vektor

- **Nilai magnitud / panjang vektor** dinyatakan dengan simbol tegak lurus (misal $|\mathbf{r}|$).
- Nilai dihitung dengan teorema phytagoras :
- $|\mathbf{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$
- Contoh sebuah vekor $\mathbf{r}$:
  $(x_h, y_h) = (4, 5)$
  $(x_t, y_t) = (1, 1)$
- $|\mathbf{r}| = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2}$
  $= \sqrt{9 + 16}$
  $= 5$



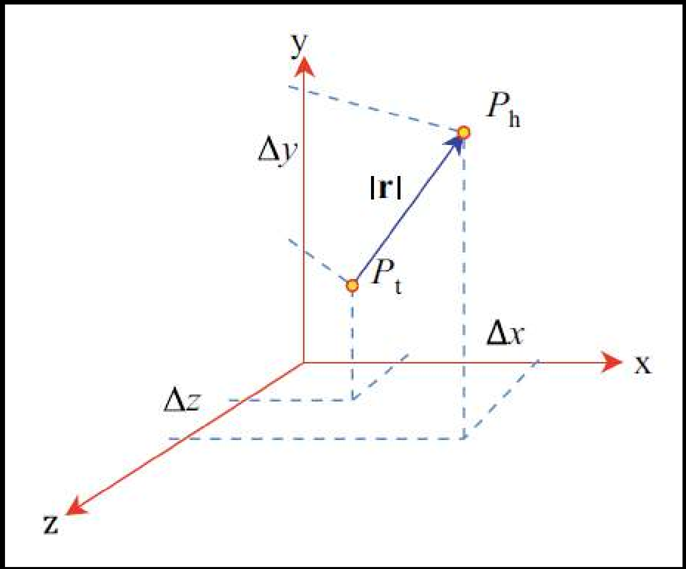
Gambar menunjukkan 8 vektor

Tabel menunjukkan sifat geometris dari 8 vektor diatas

x_h	y_h	x_t	y_t	Δx	Δy	$\lvert$vector$\rvert$
2	0	0	0	2	0	2
0	2	0	0	0	2	2
−2	0	0	0	−2	0	2
0	−2	0	0	0	−2	2
1	1	0	0	1	1	$\sqrt{2}$
−1	1	0	0	−1	1	$\sqrt{2}$
−1	−1	0	0	−1	−1	$\sqrt{2}$
1	−1	0	0	1	−1	$\sqrt{2}$

VEKTOR 3D

Vektor 3D $\mathbf{r}$ kepala, ekor, komponen, dan besarnya dijelaskan sebagai berikut.



- $\mathbf{r} = [\Delta x\ \Delta y\ \Delta \boldsymbol{z}]^{\boldsymbol{T}}$
- $\Delta x = x_h - x_t$
- $\Delta y = y_h - y_t$
- $\Delta z = z_h - z_t$
- $|\mathbf{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$

Manipulasi Vektor

- Karena vektor berbeda dengan skalar, ada aturan untuk mengontrol bagaimana dua entitas matematika berinteraksi satu sama lain.
- Interaksi yang dimaksud :
  - Penjumlahan vektor
  - Pengurangan vektor
  - Perkalian vektor
  - Skala vektor

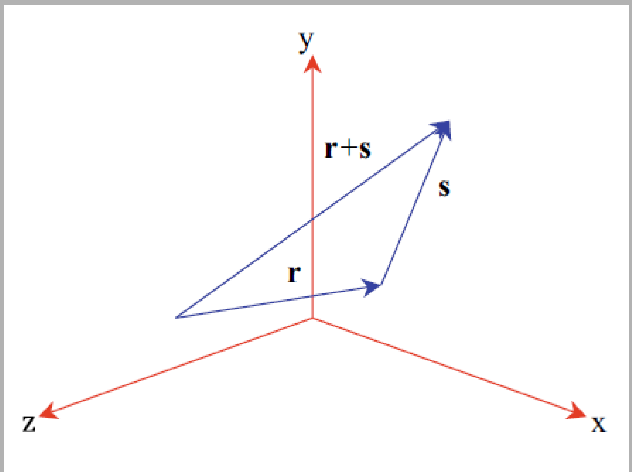
Manipulasi Vektor

- Karena vektor berbeda dengan skalar, ada aturan untuk mengontrol bagaimana dua entitas matematika berinteraksi satu sama lain.
- Interaksi yang dimaksud :
  - Penjumlahan vektor
  - Pengurangan vektor
  - Perkalian vektor
  - Skala vektor

Skala Vektor

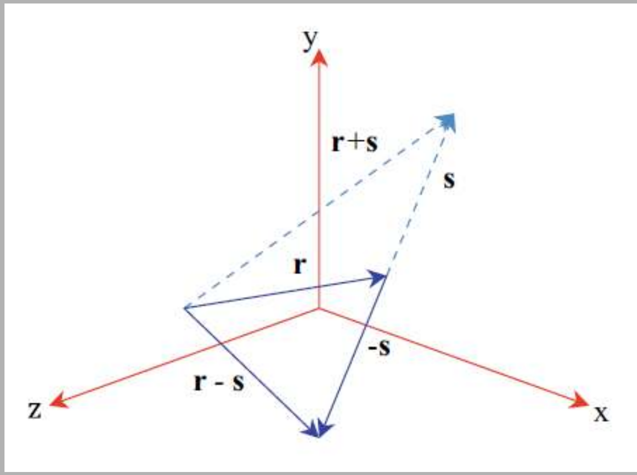
- Secara umum berlaku :
- $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ maka $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \lambda n_1 \\ \lambda n_2 \\ \lambda n_3 \end{bmatrix}$ dimana $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}$
- Hal ini juga berlaku untuk pembagian, jika **n** dibagi dengan 2, maka komponennya juga dibagi 2.
- Arah vektor tetap tidak berubah - hanya besarannya yang berubah.

Penjumlahan dan Pengurangan Vektor



- Jika diketahui vektor $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}$
- maka $\boldsymbol{r} \pm \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} x_r \pm x_r \\ y_r \pm y_s \\ z_r \pm z_s \end{bmatrix}$
- Penjumlahan vektor bersifat komutatif
- **a + b = b + a**
- Contoh :
- $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Penjumlahan dan Pengurangan Vektor



- **a** - **b** ≠ **b** - **a**
- Contoh :
- $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

Vektor Posisi

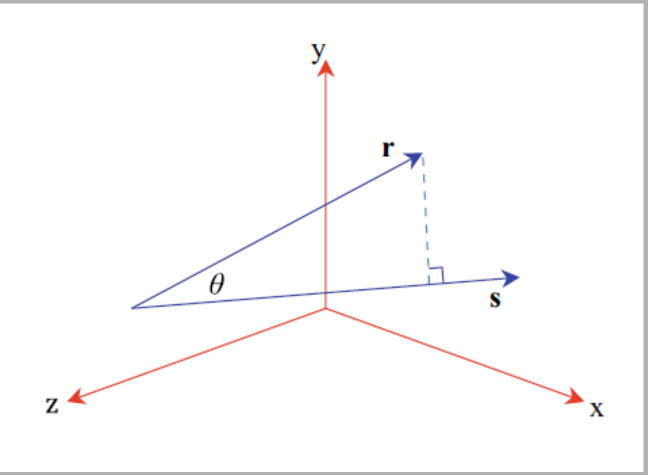
- Vektor yang titik awalnya di titik asal.
- Jika ada sebuah titik P (x, y, z), maka vektor posisi p dibuat dengan mengasumsikan bahwa P adalah kepala vektor dan titik asal adalah ekornya.
- Karena koordinat ekornya adalah (0, 0, 0) komponen vektornya adalah x, y, z.
- Akibatnya, besaran vektor $|\boldsymbol{p}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Perkalian Vektor

- Karena besaran vektor mempunyai arah, maka perkalian vektor tidak dapat dilakukan dengan menggunakan aturan-aturan aljabar biasa.
- Terdapat 3 macam perkalian:
  - Perkalian vektor dengan skalar
  - Perkalian skalar dari dua vektor
  - Perkalian vektor dari dua vektor

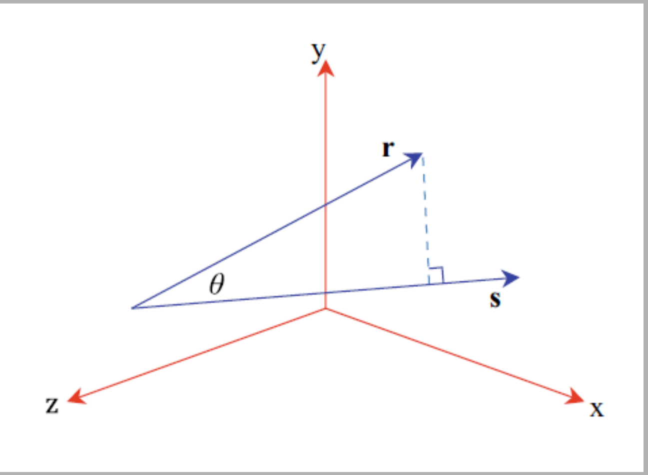
- Perkalian skalar dari dua vektor juga disebut sebagai perkalian titik dari dua vektor.
- Perkalian skalar dari dua vektor $\bar{a}$ dan vektor $\bar{b}$ ditulis menjadi $\bar{a} \cdot \bar{b}$, hasilnya adalah skalar didefinisikan seperti berikut ini:
- $\boldsymbol{\bar{a} \cdot \bar{b} = ab \cdot \cos \theta}$
- Dengan θ adalah sudut antar vektor $\bar{a}$ dan vektor $\bar{b}$.

Perkalian Skalar dari 2 Vektor (Perkalian Titik)



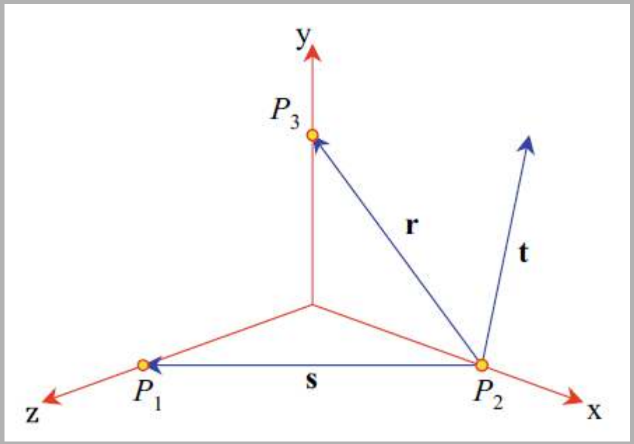
- Perkalian skalar dari dua vektor juga disebut sebagai perkalian titik dari dua vektor.
- Perkalian skalar dari dua vektor $\bar{a}$ dan vektor $\bar{b}$ ditulis menjadi $\bar{a}\,.\,\bar{b}$, hasilnya adalah skalar didefinisikan seperti berikut ini:
- $\boldsymbol{\bar{a}}\ .\ \boldsymbol{\bar{b}} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\ .\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\theta}$
- Dengan θ adalah sudut antar vektor $\bar{a}$ dan vektor $\bar{b}$.

Perkalian Skalar dari 2 Vektor (Perkalian Titik)



- Jika kedua vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ **saling tegak lurus** ($\alpha = 90°$), maka $\overline{\boldsymbol{a}}\,.\,\overline{\boldsymbol{b}} = \mathbf{0}$ → karena cos 90° = 0
- Jika kedua vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ **searah** ($\alpha = 0°$), maka $\overline{\boldsymbol{a}}\,.\,\overline{\boldsymbol{b}} = \overline{\boldsymbol{ab}}$ → karena $cos\ 0°$ = 1
- Jika kedua vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ **berlawanan arah** ($\alpha = 180°$), maka $\overline{\boldsymbol{a}}\,.\,\overline{\boldsymbol{b}} = -\overline{\boldsymbol{ab}}$→ karena $cos\ 180°$ = -1
- Perkalian titik memiliki **sifat distributif**
  $$\boldsymbol{A}.(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}.\boldsymbol{C}$$
- Perkalian titik memiliki **sifat komutatif**
  $$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}.\boldsymbol{A}$$

Perkalian Vektor dari Dua Vektor (Perkalian Silang)

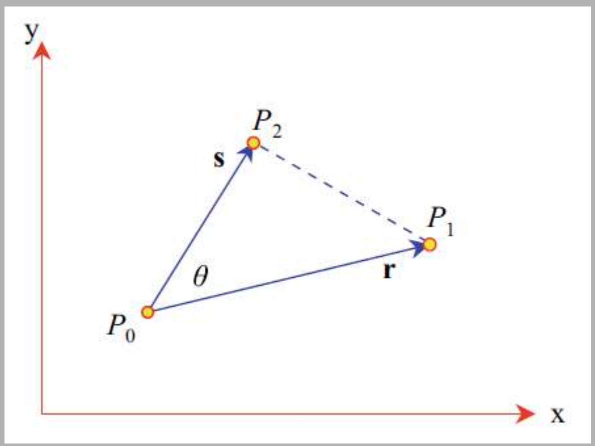


- P1 = (0, 0, 1)
- P2 = (1, 0, 0)
- P3 = (0, 1, 0)

- Jika $\mathbf{r} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ dan $\mathbf{s} = d\mathbf{i} + e\mathbf{j} + f\,\mathbf{k}$**,** maka berlaku rumus :
- $\mathbf{r} \times \mathbf{s} = (bf - ce)\,\mathbf{i} + (cd - af)\,\mathbf{j} + (ae - bd)\,\mathbf{k}$
- Contoh :
- $r = [(x3 - x2)\ (y3 - y2)\ (z3 - z2)]^T$
- $s = [(x1 - x2)\ (y1 - y2)\ (z1 - z2)]^T$
- $r = -1i + 1j + 0k$
- $s = -1i + 0j + 1k$
- $r \times s = [1 \times 1 - 0 \times 0]i + [0 \times (-1) - (-1) \times 1]j$

  $+ [(-1) \times 0 - 1 \times (-1)]k$
- $t = i + j + k$

Menghitung Area 2D



- Diketahui segitiga dengan $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ and $P_2(x_2, y_2)$.
- **r** = $(x_1 - x_0)$i + $(y_1 - y_0)$j
- **s** = $(x_2 - x_0)$i + (y2 − y_0)j
- |r × s| = $(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)$

  $= x_1(y_2 - y_0) - x_0(y_2 - y_0) - x_2(y_1 - y_0) + x_0(y_1 - y_0)$

  $= x_1\, y_2 - x_1\, y_0 - x_0\, y_2 + x_0\, y_0 - x_2\, y_1 + x_2\, y_0 + x_0\, y_1 - x_0\, y_0$

  $= x_1\, y_2 - x_1\, y_0 - x_0\, y_2 - x_2\, y_1 + x_2\, y_0 + x_0\, y_1$

  $= (x_0\, y_1 - x_1\, y_0) + (x_1\, y_2 - x_2\, y_1) + (x_2\, y_0 - x_0\, y_2)$.
- area = $\frac{1}{2}$ |r × s|
- area = $\frac{1}{2}[(x_0\, y_1 - x_1\, y_0) + (x_1\, y_2 - x_2\, y_1) + (x_2\, y_0 - x_0\, y_2)]$

Vektor pada Komputer

- Vektor untuk citra digital
- Ruang vektor untuk pembelajaran mesin

TERIMA KASIH