9. Matriks

AGUNG MUSTIKA RIZKI, S.KOM., M.KOM.

Outline Matematika Komputasi

1. Pengenalan Matematika Komputasi
2. Sistem Bilangan
3. Fungsi Ilmu Logika
4. Kombinatorika
5. Probabilitas
6. Trigonometri
7. Sistem Koordinat
8. Vektor
9. **Matriks**
10. Transformasi Matriks
11. Aritmetika
12. Turunan
13. Integral 1
14. Integral 2 (Kondisional)

PENDAHULUAN

- Matriks adalah kumpulan bilangan yang disusun dalam bentuk pesegi panjang atau bujursangkar.
- Ukuran atau ordo dari suatu matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom yang membentuknya.
- Matriks yang hanya memiliki satu baris/kolom disebut vektor baris/kolom.

NOTASI MATRIKS

- Notasi matriks: huruf kapital A, B, C, ...
- a_{mn} = elemen matriks A yang terletak pada baris ke-m, kolom ke-n
- $m \times n$ = ukuran atau ordo matriks A

Baris ke-1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Kolom ke-1

Unsur/entri/elemen ke-mn
(baris m kolom n)

Jenis Matriks

Terdapat beberapa jenis matriks:

a. Matriks Nol
b. Matriks Bujur Sangkar
c. Matriks Diagonal
d. Matriks Satuan *(Identity)*
e. Matriks Skalar
f. Matriks Segitiga Atas *(Upper Triangular)*
g. Matriks Segitiga Bawah *(Lower Triangular)*
h. Matriks Simetris
i. Matriks Antisimetris

Matriks Nol

- Matriks nol adalah matriks yang semua elemennya nol.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Sifat-sifat matriks nol:

  $A + 0 = A$, jika ukuran matriks A = ukuran matriks 0

  $A * 0 = 0$, begitu juga $0 * A = 0$

Matriks Bujursangkar

- Matriks bujursangkar adalah matriks yang jumlah baris dan jumlah kolomnya sama.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{bmatrix}$$

- Elemen a_{11} a_{22} a_{33} disebut diagonal utama dari matriks bujursangkar A.

Matriks Diagonal

- Matriks diagonal adalah matriks bujursangkar yang semua elemen diluar diagonal utamanya nol.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriks Identitas *(Identity)*

- Matriks diagonal adalah matriks diagonal yang semua elemen diagonalnya satu.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Sifat matriks identitas:

$$A * I = A$$
$$I * A = A$$

Matriks Skalar

- Matriks skalar adalah matriks diagonal yang semua elemen diagonalnya sama tetapi bukan nol atau satu.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks Segitiga Atas *(Upper Triangular)*

- Matriks segitiga atas adalah matriks bujursangkar yang semua elemen dibawah diagonalnya nol.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks Segitiga Bawah *(Lower Triangular)*

- Matriks segitiga bawah adalah matriks bujursangkar yang semua elemen diatas diagonalnya nol.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks Simetris

- Matriks simetris adalah matriks bujursangkar yang elemennya simetris secara diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Dapat juga dikatakan bahwa matriks simetris adalah matriks yang *transpose*-nya sama dengan matriks itu sendiri.

$$A = A^T$$

Matriks Antisimetris

- Matriks antisimetris adalah matriks yang *transpose*-nya adalah negatif dari matriks tersebut.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Maka $A^T = -A$ dan $a_{ij} = -a_{ij}$

Penjumlahan Matriks

- Syarat: dua matriks dengan ordo sama dapat dijumlahkan.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

- Beberapa sifat operasi penjumlahan matriks :
  a. Komutatif → $A + B = B + A$
  b. Asosiatif → $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
  c. Matriks Nol adalah Matriks Identitas → $A + 0 = 0 + A = A$
  d. Matriks Identitas Operasi Penjumlahan → $A + (-A) = (-A) + A = 0$

Pengurangan Matriks

- Syarat: dua matriks dengan ordo sama dapat dikurangkan.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks dengan Skalar

- Cara melakukan operasi perkalian matriks dengan skalar adalah dengan mengalikan semua elemen-elemen baris dengan skalarnya.

$$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

- Dimana k merupakan suatu konstanta.

Perkalian Matriks dengan Matriks

- Syarat : dua matriks dapat dikalikan jika matriks pertama memiliki jumlah kolom yang sama dengan jumlah baris pada matriks kedua.
- Ordo matriks hasil perkalian dua matriks adalah jumlah baris matriks pertama dikali jumlah kolom matriks kedua.
- Misalnya:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{(2x3)} \qquad B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}_{(3x2)}$$

Perkalian Matriks dengan Matriks

- $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{(2x3)}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}_{(3x2)}$

- $AB = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{(2x3)} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}_{(3x2)}$

$$= \begin{bmatrix} ap + br + ct & aq + bs + cu \\ dp + er + ft & dq + es + fu \end{bmatrix}$$

Hukum Perkalian Matriks

- Hukum Distributif → $A * (B + C) = AB + AC$
- Hukum Assosiatif → $A * (B * C) = (A * B) * C$
- Tidak Komutatif → $\mathrm{A} * B \neq B * A$
- Jika $\mathrm{A} * B = 0$, maka beberapa kemungkinan :

  -$\mathrm{A} = 0 \; dan \; B = 0$

  -$\mathrm{A} = 0 \; atau \; B = 0$

  -$\mathrm{A} \neq 0 \; dan \; B \neq 0$

- Bila $\mathrm{A} * B = A * C$, belum tentu $B = C$

Transpose Matriks

- Jika diketahui suatu matriks $A = a_{ij}$ berukuran $i\ x\ j$ maka *transpose* dari matriks A adalah A^T berukuran $j\ x\ i$, yang didapat dari matriks A dengan menuliskan baris ke-$\boldsymbol{i}$ dari matriks $\boldsymbol{A}$ sebagai kolom **ke-**$\boldsymbol{i}$ di matriks $\boldsymbol{A^T}$.
- Beberapa sifat matriks :

  a. $(A + B)^T = A^T + B^T$

  b. $(A^T)^T = A$

  c. $k\ (A^T) = (k\ A^T)$

  d. $(AB)^T = B^T A^T$

Determinan Matriks

- Pada aljabar, determinan matriks dapat diartikan sebagai nilai yang mewakili sebuah matriks bujursangkar.
- Simbol nilai determinan matriks A biasanya dinyatakan sebagai $\det(A)$ atau $|A|$.
- Cara menghitung nilai determinan matriks bujursangkar ordo 3 akan berbeda dengan matriks bujursangkar ordo 2.

Determinan Matriks Ordo 2

- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
- $\det(A) = |A| = ad - bc$

Determinan Matriks Ordo 3

- $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

- $\det(A) = |A| = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{vmatrix}$ $\det(A) = |A| = \left[\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right]$

  $- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$

- $\det(A) = |A| = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

Invers Matriks

- Invers matriks dapat diartikan sebagai **kebalikan dari suatu matriks** tertentu, disimbolkan $\boldsymbol{A^{-1}}$
- Jika suatu matriks bujursangkar A dikalikan terhadap inversnya yaitu matriks $\boldsymbol{A^{-1}}$ maka menghasilkan matriks I (matriks identitas pada operasi perkalian)
- Jika pada penjumlahan dua matriks bujursangkar A dan $-A$ akan menghasilkan matriks nol (matriks identitas pada operasi penjumlahan)

Invers Matriks Ordo 2

- Jika suatu matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
- Maka rumus inversnya adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Invers Matriks Ordo 3

- Terdapat lima langkah dalam menentukan invers matriks ordo 3, yakni sebagai berikut :
    1. Tentukan minor matriks
    2. Tentukan kofaktor matriks
    3. Tentukan adjoin matriks
    4. Tentukan determinan matriks
    5. Operasikan rumus invers matriks

Minor Matriks

- Minor matriks adalah **determinan matriks bagian dari matriks** yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen pada baris dan kolom tertentu.
- Jika sebuah matriks A dengan ordo 3 seperti ini

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- Maka matriks minor M_{ij} adalah matriks yang diperoleh dengan cara menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A sehingga diperoleh matriks minor berordo 2 seperti berikut

Minor Matriks

- Maka matriks minor M_{ij} adalah matriks yang diperoleh dengan cara menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A sehingga diperoleh matriks minor berordo 2 seperti berikut :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \quad M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Kofaktor Matriks

- Kofaktor baris ke-i dan kolom ke-j disimbolkan dengan C_{ij} dapat ditentukan dengan rumus berikut

$$\boldsymbol{C_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| \qquad C_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| \qquad C_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}|$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| \qquad C_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| \qquad C_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}|$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| \qquad C_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| \qquad C_{33} = (-1)^{3+3}|M_{33}|$$

Adjoin Matriks

- Secara umum, sebuah matriks memiliki matriks adjoin seperti berikut

$$\boldsymbol{Adj(A)} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1j} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2j} \\ \ldots & \ldots & \cdots & \ldots \\ C_{i1} & C_{i2} & \cdots & C_{ij} \end{pmatrix}$$

Invers Matriks

- Secara umum, menentukn invers matriks ordo 3 dapat diperoleh melalui rumus berikut :

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, . \, Adj(A)}$$

Matriks pada Komputer

- Pengolahan citra digital
- Pembelajaran mesin
- Algoritma
- dll

TERIMA KASIH