Nama : Farkhan

NPM : 20081010060

Kelas : B

UAS MATEMATIKA KOMPUTASI

Jawaban:

1. Segitiga XYZ memiliki tiga sisi yaitu XY, YZ, dan XZ. Ketiga sisi tersebut dapat dicari panjangnya dengan cara sebagai berikut.

   Sisi $|XY| = \sqrt{(16+9)^2 + (1-1)^2 + (-2+2)^2} = \sqrt{25^2 + 0^2 + 0^2} = 25$

   Sisi $|YZ| = \sqrt{(-9-0)^2 + (1-1)^2 + (-2-10)^2} = \sqrt{(-9)^2 + 0^2 + (-12)^2}$

   $= \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15$

   Sisi $|XZ| = \sqrt{(16-0)^2 + (1-1)^2 + (-2-10)^2} = \sqrt{16^2 + 0^2 + (-12)^2}$

   $= \sqrt{256+144} = \sqrt{400} = 20$

   Suatu segitiga dikatakan siku-siku jika panjang sisi terpanjangnya lebih kecil dari jumlah kedua sisi lainnya. Sisi terpanjangnya adalah 25 dan jumlah kedua sisi lainnya adalah 20 + 15 = 35. 25 < 35. Jadi, segitiga XYZ merupakan segitiga siku-siku karena telah memenuhi syarat.

2. Sebuah perusahaan akan memproduksi dua jenis ban, yaitu

   Ban kualitas ekspor = e   Ban kualitas sedang = s

   Keuntungan ban kualitas ekspor dua kali keuntungan ban kualitas sedang, maka e = 2s. Jika keuntungan ban kualitas ekspor = 20, maka keuntungan ban kualitas sedang = 10.

   e = 20   s = 10

   Untuk mendapatkan keuntungan terbesar, jika:

   - $x = 0$, maka $y = \frac{40-10\cdot 0}{5-0} = \frac{40}{5} = 8\ (0, 8)$

     Keuntungan = $0 \cdot 20 + 8 \cdot 10 = 80$

   - $x = 1$, maka $y = \frac{40-10\cdot 1}{5-1} = \frac{30}{4} = 7.5\ (1, 7.5)$

     Keuntungan = $1 \cdot 20 + 7.5 \cdot 10 = 95$

- $x = 2$, maka $y = \frac{40-10\cdot 2}{5-2} = \frac{20}{3} = 6.6\ (2, 6.6)$

  Keuntungan = $2 \cdot 20 + 6.6 \cdot 10 = 106$
- $x = 3$, maka $y = \frac{40-10\cdot 3}{5-3} = \frac{10}{2} = 5\ (3, 5)$

  Keuntungan = $3 \cdot 20 + 5 \cdot 10 = 110$
- $x = 4$, maka $y = \frac{40-10\cdot 4}{5-4} = \frac{0}{1} = 0\ (4, 0)$

  Keuntungan = $4 \cdot 20 + 0 \cdot 10 = 80$

Dari hasil kemungkinan-kemungkinan tersebut, untuk menghasilkan keuntungan terbesar, yaitu nilai x = 3 dan y = 5. Jadi, ban berkualitas ekspor diproduksi sebanyak 300 ban dan ban berkualitas sedang diproduksi sebanyak 500 ban.

3. vektor terdapat pada bidang dua dimensi dengan dua buah koordinat, yaitu x dan y. vektor juga bisa terdapat pada ruang tiga dimensi dengan tiga koordinat, yaitu x, y, dan z. selain itu, vektor bisa terdapat pada ruang n dimensi dengan koordinat sebanyak n titik. vektor tersebut bisa di-skala-kan dengan cara mengalikan titik koordinatnya dengan bilangan riil atau disebut juga skalar. jika ada dua vektor dengan titik asal yang sama, maka kita bisa mendapatkan vektor ketiga dengan cara menjumlahkan kedua vektor. ruang vektor menganggap vektor sebagai panah di ruang angkasa pertama dalam dua dan tiga dimensi. penjumlahan dan perkalian vektor sama dengan penjumlahan dan perkalian pada umumnya. penjumlahan dan perkalian vektor serta kombinasi dari keduanya termasuk juga dalam ruang vektor. selain itu, perkalian dan penjumlahan pada matriks, polinomial, dan fungsi kontinu pun termasuk dalam ruang vektor. vektor adalah besaran yang memiliki nilai dan arah. ruang vektor adalah sekumpulan dari vektor yang dapat dijumlahkan dan dikalikan dengan bilangan riil.

   penjelasan dalam video tersebut dilakukan secara teratur pada setiap sub pembahasannya. penggunaan gambar serta penulisan vektor operasi pada vektor yang ditulis rapi memudahkan pemahaman. namun, kekurangan dari video tersebut, yaitu penjelasannya terkesan cepat sehingga menjadi sulit untuk diikuti dan harus memutar ulang videonya.

4. Yang ditanyakan pada soal adalah volume bagian bola yang terbuang akibat pengeboran. Volume tersebut sama dengan volume sebuah tabung dengan $r = \sqrt{3}\ m$ dan karena dibor melalui pusat, maka tingginya sama dengan 3 m.

   $V = \pi r^2 t$

   $V = \pi\left(\sqrt{3}\right)^2 3 = \pi \cdot 3 \cdot 3 = 9\pi$

   Jadi, volume bola yang terbuang akibat pengeboran adalah sebanyak 9π.

6. Syarat suatu vektor saling tegak lurus, yaitu jika dikalikan maka hasilnya = 0

   Vektor w = (3, 4) dan misalkan v = (x, y)

   $\vec{w} \cdot \vec{v} = |w| \cdot |v| \cos 90° = 0$

   $3x + 4y = 0$

   $3x = -4y \rightarrow \frac{3}{4}x = -y$

   Kemudian, vektor v harus berukuran 15, maka diperoleh persamaan sebagai berikut.

   $|v| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{225} = 15$

   $x^2 + y^2 = 225$

   $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 225$

   $\left(x - \frac{3}{4}x\right)^2 + 2\frac{3}{4}x^2 = 225$

   $\left(\frac{1}{4}x\right)^2 + \frac{6}{4}x^2 = \frac{x^2}{16} + \frac{6x^2}{4} = 225$

   $\frac{x^2+24x^2}{16} = \frac{25x^2}{16} = 225 \rightarrow$ kedua ruas diakarkan

   $\frac{5x}{4} = 15 \rightarrow 5x = 15 \cdot 4 = 60$

   $x = 12$

   Substitusikan nilai x =12 ke dalam persamaan 3x = -4y

   $3 \cdot 12 = -4y$

   $36 = -4y$

   $y = -\frac{36}{4} = -9$

   Maka, didapatkan vektor v = (12, -9). Kemudian panjang vektor v, yaitu.

   $|v| = \sqrt{12^2+(-9)^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$

7. Jika I adalah matriks identitas, buktikan.

a) IA = AI = A

Misal A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan I = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

IA = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Maka kita mendapatkan persamaan sebagai berikut.

$\begin{cases} a+2c=1 \\ 3a+4c=3 \end{cases}$ dan $\begin{cases} b+2d=2 \\ 3b+4c=4 \end{cases}$

$3a+6c=3$

$\underline{3a+4c=3\ }-$

$2c=0$

$c=0$

Kemudian substitusikan nilai c = 0 ke persamaan pertama.

$a+2\cdot 0=1$

$a=1$

$3b+4d=4$

$\underline{2b+4c=4\ }-$

$b=0$

Kemudian substitusikan nilai b = 0 ke persamaan ketiga.

$0+2d=2$

$2d=2 \rightarrow d=1$

Dengan menggunakan persamaan yang telah didapat maka substitusikan nilai a, b, c, dan d ke dalam matriks I = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Matriks identitas adalah matriks yang semua elemen diagonalnya adalah 1, maka hal tersebut telah membuktikan bahwa I adalah matriks diagonal.

b) Pada pernyataan (b) terdapat tiga matriks, misalkan.

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, dan C = $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$(A+B)C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$= \left(\begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6\cdot 4+8\cdot 3 & 6\cdot 2+8\cdot 1 \\ 10\cdot 4+12\cdot 3 & 10\cdot 2+12\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24+24 & 12+8 \\ 40+36 & 20+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 20 \\ 76 & 32 \end{bmatrix}$

$(A+B)C = \begin{bmatrix} 48 & 20 \\ 76 & 32 \end{bmatrix}$

$AC+BC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1\cdot 4+2\cdot 3 & 1\cdot 2+2\cdot 1 \\ 3\cdot 4+4\cdot 3 & 3\cdot 2+4\cdot 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5\cdot 4+6\cdot 3 & 5\cdot 2+6\cdot 1 \\ 7\cdot 4+8\cdot 3 & 7\cdot 2+8\cdot 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 24 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 38 & 16 \\ 52 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+38 & 4+16 \\ 24+52 & 10+22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 20 \\ 76 & 32 \end{bmatrix}$

$AC + BC = \begin{bmatrix} 48 & 20 \\ 76 & 32 \end{bmatrix}$

$(A+B)C = AC + BC$

$\begin{bmatrix} 48 & 20 \\ 76 & 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 20 \\ 76 & 32 \end{bmatrix}$

8. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+6+3 \\ 2+6+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 20 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+20+2 & 4+4+3 & 0+4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 11 & 4 \end{bmatrix}$

15. Temukan integral dari dua fungsi di bawah ini.

y $= \int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt$ → integralnya diubah menjadi du dan substitusi t = tan(u)^2 dan t = sec(u)^2

y $= \int_0^x \sqrt{1+\tan u^2 \sec u^2}\, dt$ → tan(u)^2 + 1 = sec(u)^2

y $= \int_0^x \sec u \sec u^2\, dt = \int_0^x \sec u^3$

y $= \frac{1}{3-1} \sec u^{3-2} \tan u + \frac{3-2}{3-1} \int_0^x \sec u^{3-2} = \frac{1}{2} \sec u \tan u + \frac{1}{2} \int_0^x \sec u$

y $= \frac{1}{2} \sec u \tan u + \frac{1}{2} \ln(|\sec u + \tan u|)$ → masukkan nilai u = arctan(t)

y $= \frac{1}{2} \sec(\arctan(t)) \tan(\arctan(t)) + \frac{1}{2} \ln(|\sec(\arctan(t)) + \tan(\arctan(t))|)$

y $= \frac{1}{2} \frac{1}{\cos(\arctan(t))} t + \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{1}{\cos(\arctan(t))} + t\right|\right) \rightarrow \cos(\arctan(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

y $= \frac{\sqrt{1+t^2}}{2} t + \frac{1}{2} \ln\left(\left|\sqrt{1+t^2} + t\right|\right)$

y $= \left[\frac{\sqrt{1+t^2}}{2} t + \frac{1}{2} \ln\left(\left|\sqrt{1+t^2} + t\right|\right)\right]_0^x$

y $= \left[\frac{\sqrt{1+x^2}}{2} x + \frac{1}{2} \ln\left(\left|\sqrt{1+x^2} + x\right|\right)\right] - \left[\frac{\sqrt{1+0^2}}{2} 0 + \frac{1}{2} \ln\left(\left|\sqrt{1+0^2} + 0\right|\right)\right]$

y $= \left[\frac{\sqrt{1+x^2}}{2} x + \frac{1}{2} \ln\left(\left|\sqrt{1+x^2} + x\right|\right)\right] - \left[\frac{1}{2} \ln(|1|)\right]$

y $= \left[\frac{\sqrt{1+x^2}}{2} x + \frac{1}{2} \ln\left(\left|\sqrt{1+x^2} + x\right|\right)\right] - \left[\frac{1}{2} 0\right]$

y $= \left[\frac{\sqrt{1+x^2}}{2} x + \frac{1}{2} \ln\left(\left|\sqrt{1+x^2} + x\right|\right)\right]$

integral yang ke-2

$\mathrm{y} = x\int_2^{x^2} \sin t^3\, dt \rightarrow dt = \frac{1}{u} du$, di mana $u = \cos t$ dan $u = -\sin t$

$\mathrm{y} = x\int \sin t^2 \sin t \frac{1}{-\sin t} du$

$\mathrm{y} = x\int -\sin t^2\, du \rightarrow\ \cos t^2 = 1 - \sin t^2$

$\mathrm{y} = x\int \cos t^2 - 1\, du = x\int u^2 - 1\, du$

$\mathrm{y} = x\frac{u^3}{3} - u = x\frac{\cos t^3}{3} - \cos t$

$\mathrm{y} = \left[x\frac{\cos t^3}{3} - \cos t\right]_2^{x^2} = \left[x\frac{\cos x^6}{3} - \cos x^2\right] - \left[x\frac{\cos 2^3}{3} - \cos 2\right]$

$\mathrm{y} = -\cos x^2 + \frac{x\cos x^6 - x\cos 8}{3} + \cos 2$

PETA PENGERJAAN SOAL