MATEMATIKA KOMPUTASI

Sesi 13

Turunan

Penyusun:
Pratama Wirya Atmaja, S.Kom., M.Kom.

SUB-CAPAIAN PEMBELAJARAN

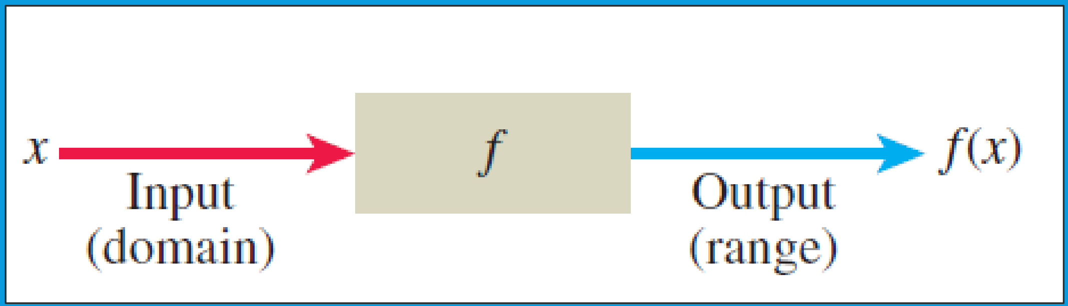
Mampu **menyimpulkan** dan **menginterpretasikan** turunan dan perannya di Informatika.

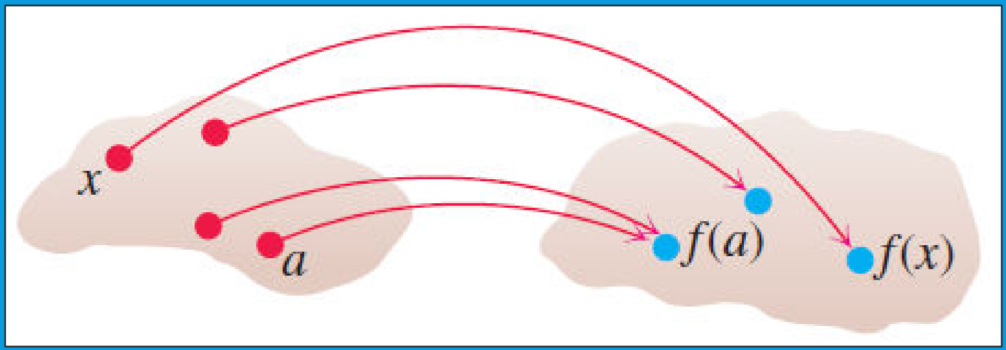
INDIKATOR PENILAIAN

- **Kelengkapan, kejelasan,** dan **ketepatan** dalam menerangkan turunan
- **Kelengkapan, kejelasan,** dan **ketepatan** dalam menerangkan peran turunan di Informatika
- **Kelengkapan, kejelasan,** dan **ketepatan** dalam menerapkan turunan di latihan soal
- **Kelengkapan, kejelasan,** dan **ketepatan** dalam mempraktekkan turunan di program sederhana

FUNGSI (1/2)

- Sebuah fungsi *f*(*x*) menghubungkan setiap nilai *x* ke sebuah nilai *f*(*x*)
- Sebuah nilai *x* hanya dapat terhubung dengan satu nilai *f*(*x*), tetapi satu nilai *f*(*x*) dapat terhubung dengan banyak nilai *x*





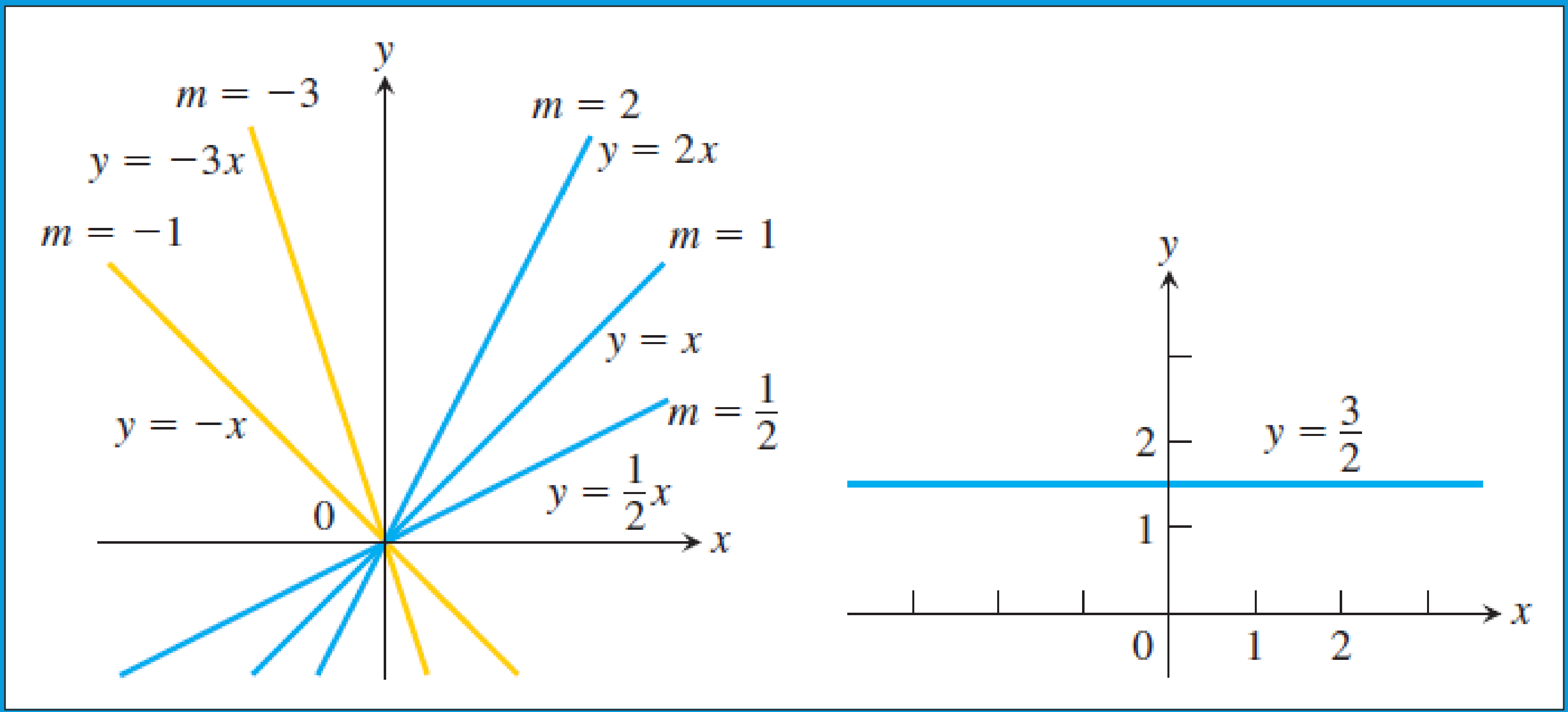
FUNGSI (2/2)

- Baik x maupun $f(x)$ memiliki interval nilai tertentu

Function	Domain (x)	Range (y)
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = 1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

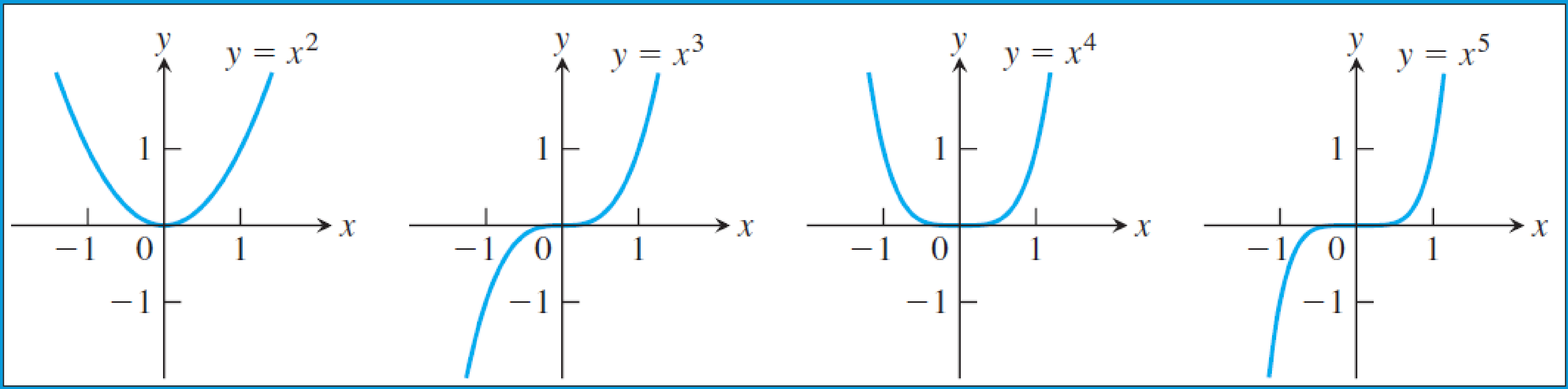
FUNGSI LINIER

- Bentuk persamaan fungsi linier: $f(x) = mx + b$



FUNGSI PANGKAT

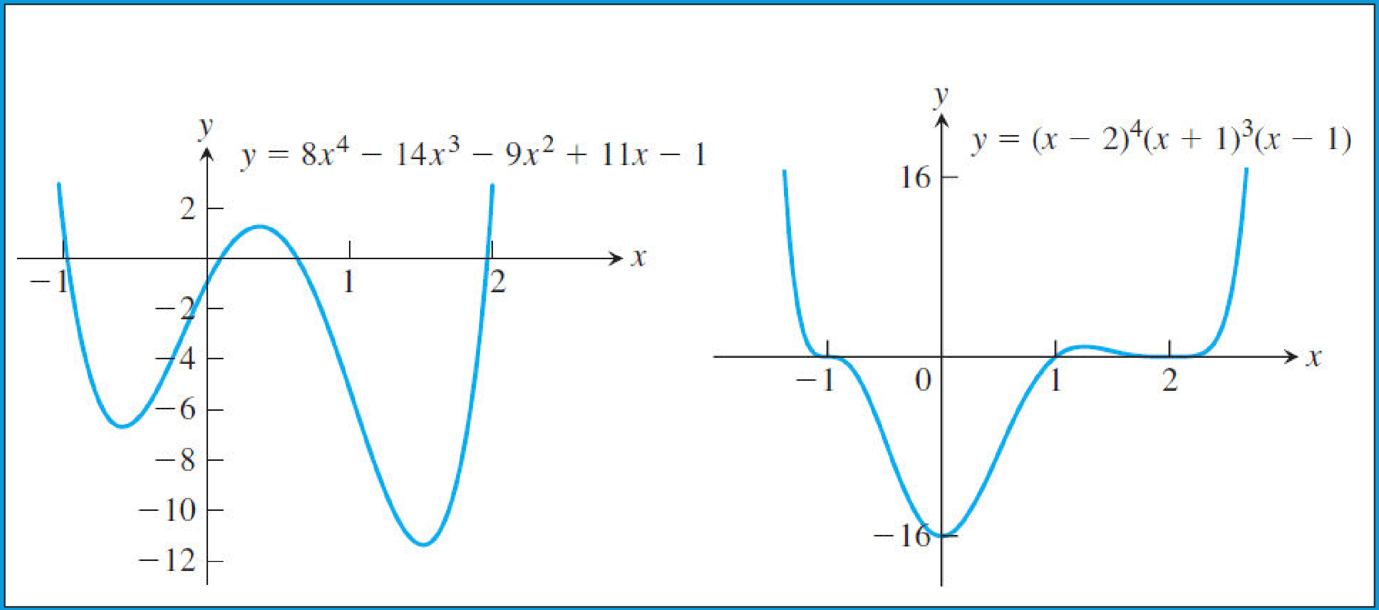
- Bentuk persamaan fungsi pangkat: $f(x) = x^a$



FUNGSI POLINOMIAL

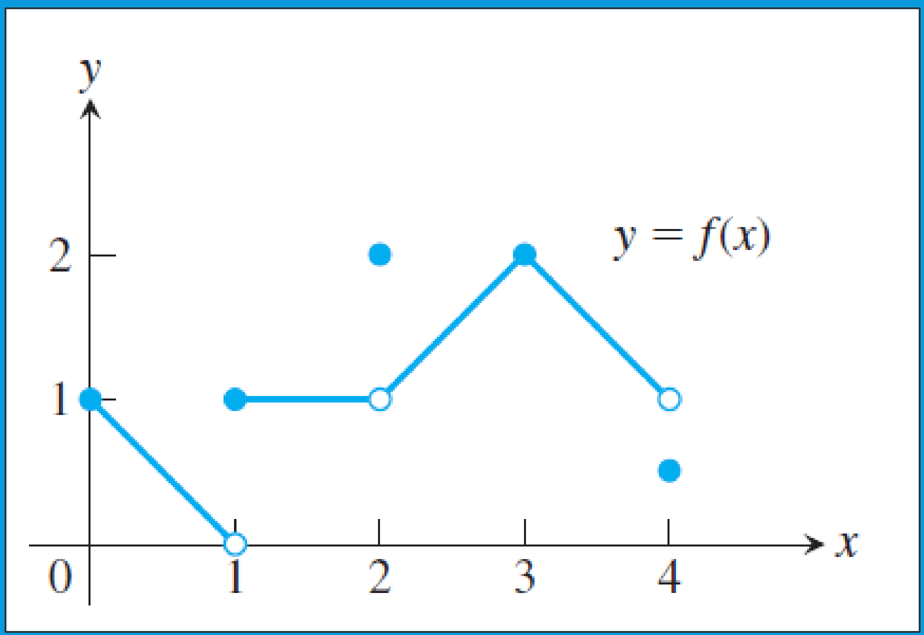
- Bentuk persamaan fungsi polinomial:

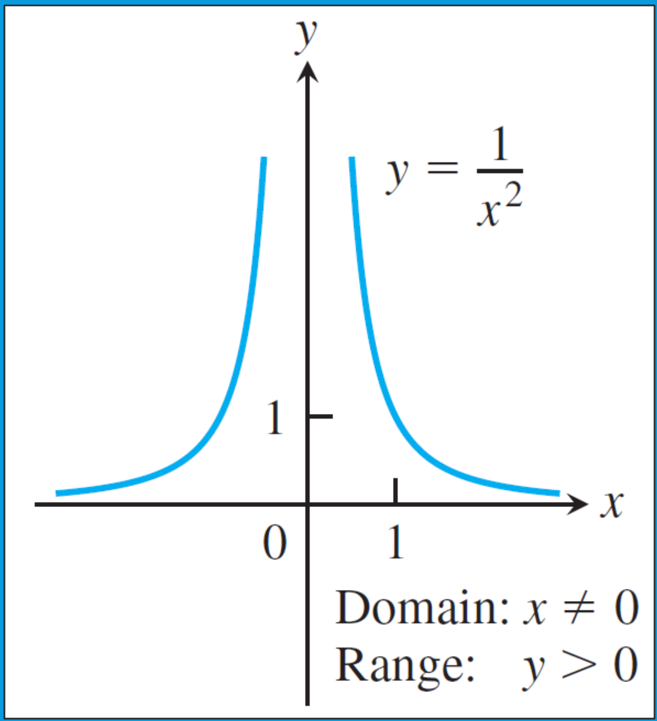
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$



KETIDAKKONTINYUAN FUNGSI

- Fungsi dapat tidak kontinyu atau terdefinisi di titik *x* tertentu





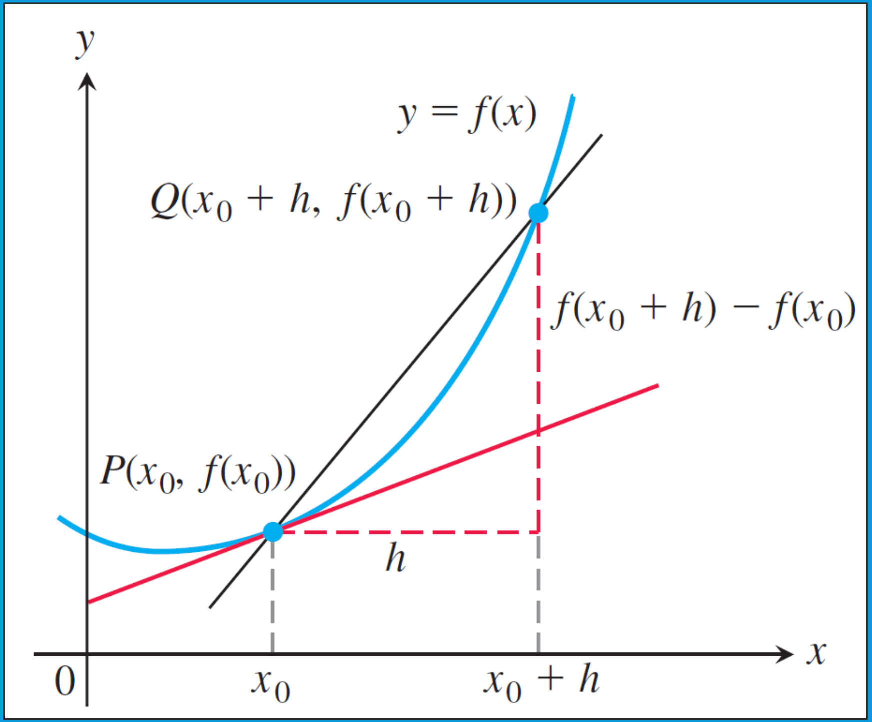
LIMIT

- Fungsi dapat dipandang **diskrit** maupun **kontinyu**
- Fungsi diskrit dipelajari di Matematika Diskrit
- Fungsi kontinyu dipelajari di Kalkulus
- Sesuatu yang kontinyu memiliki bagian-bagian kecil berjumlah **tak terhingga**
- Di antara dua nilai suatu fungsi $f(x)$ terdapat nilai-nilai dengan jumlah tak terhingga → dikatakan bahwa nilai $f(x)$ dapat mendekati suatu angka **sedekat-dekatnya** tetapi tidak pernah menyentuh angka itu
- Apa hubungannya dengan turunan fungsi itu?

LAJU PERUBAHAN NILAI FUNGSI

- Seberapa cepat nilai suatu fungsi berubah? → *rate of change*
- Misalkan kita mengambil titik x_0 dan $x_0 + h$

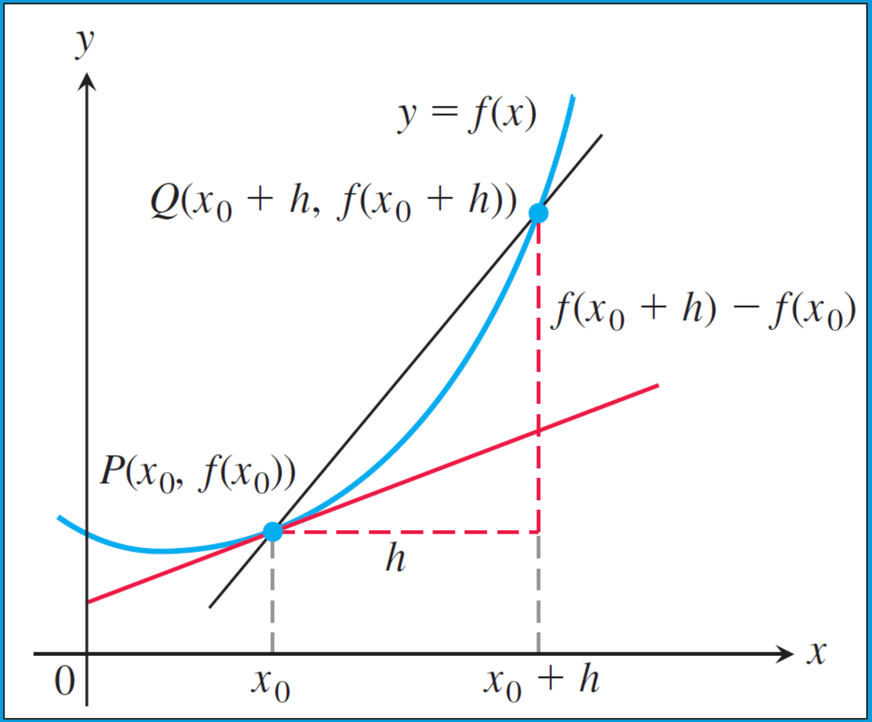
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h},$$



TURUNAN (1/2)

- Jika *h* mendekati nol sedekat-dekatnya, apa yang terjadi?
- Persamaan sebelumnya mendefinisikan **turunan** fungsinya
- Jadi turunan adalah fungsi **kemiringan** atau **akselerasi** perubahan nilai suatu fungsi

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



TURUNAN (2/2)

EXAMPLE 1 Differentiate $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

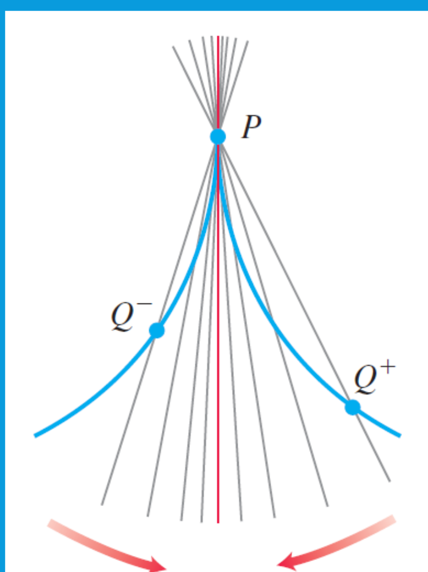
Solution We use the definition of derivative, which requires us to calculate $f(x+h)$ and then subtract $f(x)$ to obtain the numerator in the difference quotient. We have

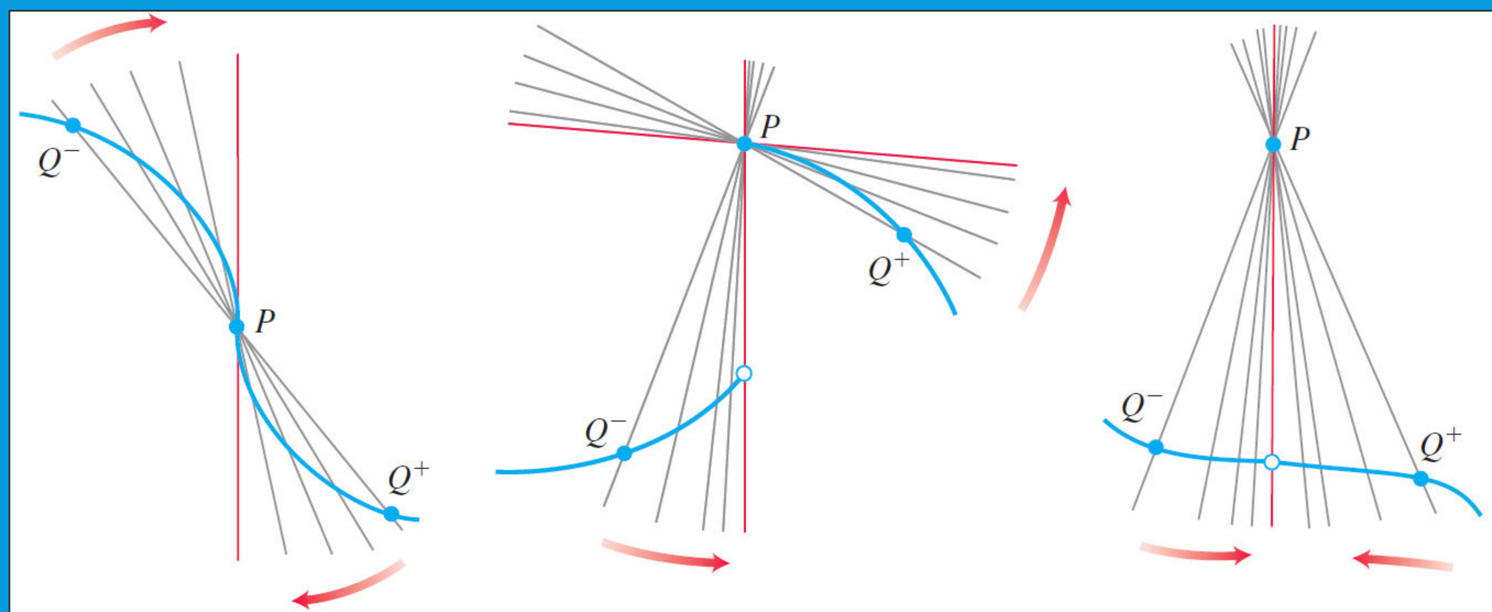
$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad \text{and} \quad f(x+h) = \frac{(x+h)}{(x+h)-1}, \text{ so}$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} && \text{Definition} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{x+h}{x+h-1} - \dfrac{x}{x-1}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} && \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x+h-1)(x-1)} && \text{Simplify.} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}. && \text{Cancel } h \neq 0.
\end{aligned}
$$

EKSISTENSI TURUNAN

- Karena turunan adalah fungsi, turunan juga mematuhi aturan limit
- Di titik di mana limit tidak ada → turunan juga tidak ada





ATURAN TURUNAN (1/2)

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\,\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,\frac{du}{dx} - u\,\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

ATURAN TURUNAN (2/2)

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

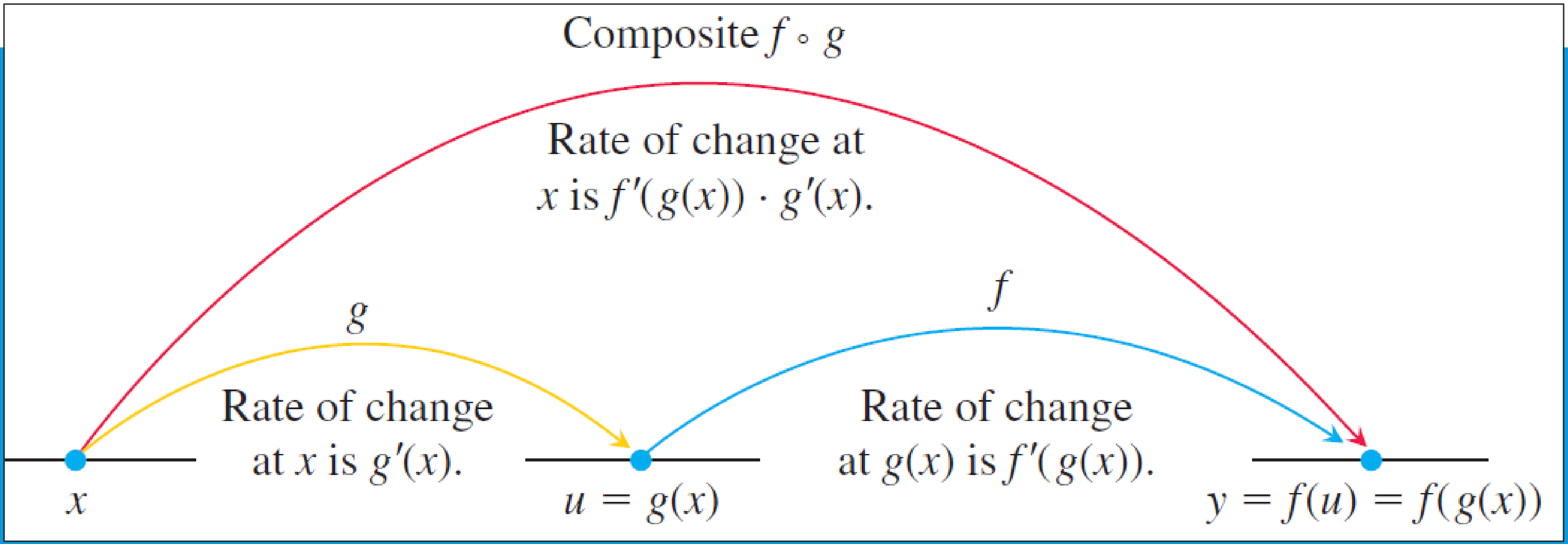
$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

ATURAN RANTAI



$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

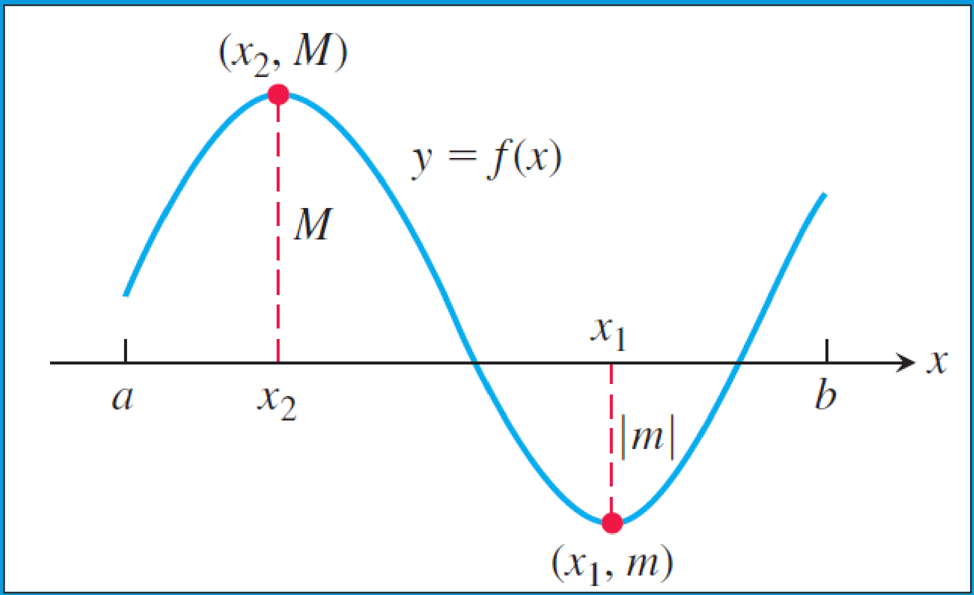
TURUNAN DARI TURUNAN

- Jika *s* adalah jarak, *v* adalah kecepatan, dan *a* adalah akselerasi:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

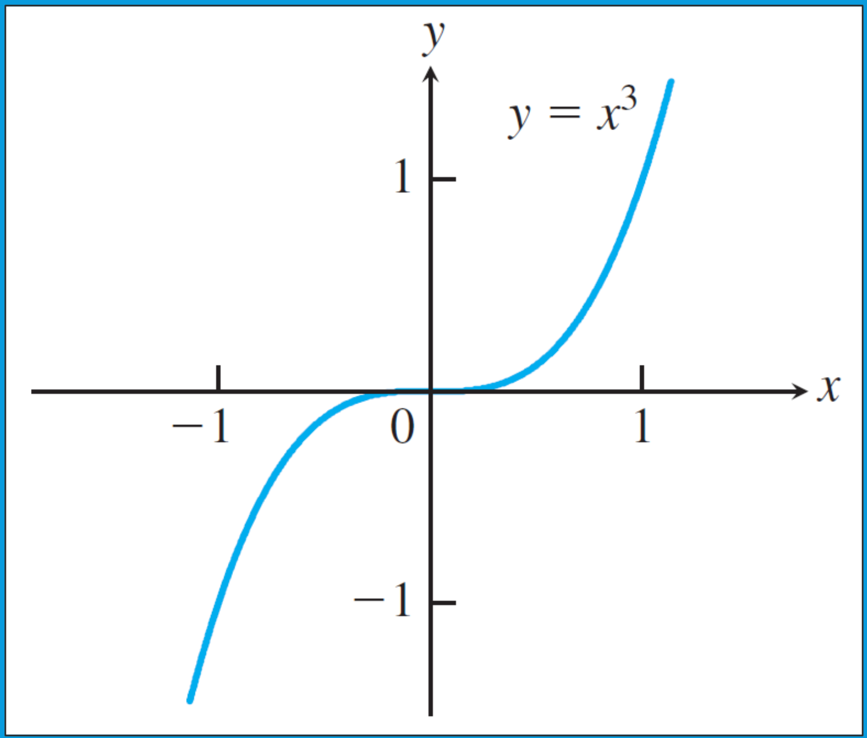
TITIK EKSTREM SUATU FUNGSI (1/2)

- Suatu fungsi dapat memiliki titik minimum atau maksimum
- Titik-titik itu dapat banyak → titik minimum/maksimum dapat bersifat lokal atau global (titik mutlak tertinggi/terendah)
- Turunan dapat digunakan untuk menemukan titik-titik itu → titik-titik itu selalu ketika turunannya **nol** → kenapa?



TITIK EKSTREM SUATU FUNGSI (2/2)

- Hati-hati! Turunan nol belum tentu di titik minimum/maksimum
- Untuk memastikan, cek bagian fungsi di kanan dan kiri titik turunan nol itu
- Gambar menunjukkan titik di mana turunan = nol (di x = 0) tetapi bukan minimum maupun maksimum



TURUNAN UNTUK OPTIMASI

- Optimasi berkutat dengan menemukan titik minimum atau maksimum untuk masalah-masalah nyata
- Contoh: jika fungsi keuntungan adalah polinomial, dengan jumlah barang yang diproduksi sebagai nilai *x*-nya, berapa banyak barang harus diproduksi agar keuntungan maksimal?
- Di dunia nyata, fungsinya sendiri belum diketahui → itu menjadi tantangan tersendiri
- Bagaimana Anda menafsirkan suatu permasalahan untuk menemukan fungsinya, yang kemudian dicari turunan dan titik maksimum/minimumnya?