Matematik baskurs, med diskret matematik

SF1671

Föreläsare: Petter Brändén

Föreläsning 6

Mängdlära

- En **mängd** är en samling **element**.

Mängdlära

- En **mängd** är en samling **element**.
- Mängder kan beskrivas genom att
  - lista elementen $\{1, -7, 😉, \sqrt{3}\}$ eller
  - beskriva mängden $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha^2 + 3\alpha - 4 = 0\}$.

tillhör

"mängdbyggare"
Ibland har man
: istället för |

uttalas "sådant att"

Mängdlära

- En **mängd** är en samling **element**.
- Mängder kan beskrivas genom att
  - lista elementen $\{1, -7,$ 😉$, \sqrt{3}\}$ eller
  - beskriva mängden $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha^2 + 3\alpha - 4 = 0\}$.
- Två mängder är lika om de innehåller exakt samma element

$$\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha^2 - 2 = 0\}.$$

Mängdlära

- En **mängd** är en samling **element**.
- Mängder kan beskrivas genom att
  - lista elementen $\{1, -7,$ 😉, $\sqrt{3}\}$ eller
  - beskriva mängden $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha^2 + 3\alpha - 4 = 0\}$.
- Två mängder är lika om de innehåller exakt samma element

$$\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha^2 - 2 = 0\}.$$

- Ordningen på elementen kvittar
  $\{0, 1, 3\} = \{1, 3, 0\} = \{1, 3, 0, 1\}$.

Mängdlära

- En **mängd** är en samling **element**.
- Mängder kan beskrivas genom att
  - lista elementen $\{1, -7,$ 😉$, \sqrt{3}\}$ eller
  - beskriva mängden $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha^2 + 3\alpha - 4 = 0\}$.
- Två mängder är lika om de innehåller exakt samma element

$$\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha^2 - 2 = 0\}.$$

- Ordningen på elementen kvittar
  $\{0, 1, 3\} = \{1, 3, 0\} = \{1, 3, 0, 1\}$.
- $\varnothing$ betecknar **tomma mängden**, dvs mängden som inte innehåller några element alls.

$\varnothing = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha^2 = -1\}$

Mängdlära

- En **mängd** är en samling **element**.
- Mängder kan beskrivas genom att
  - lista elementen $\{1, -7, \text{☺}, \sqrt{3}\}$ eller
  - beskriva mängden $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha^2 + 3\alpha - 4 = 0\}$.
- Två mängder är lika om de innehåller exakt samma element

$$\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha^2 - 2 = 0\}.$$

- Ordningen på elementen kvittar
  $\{0, 1, 3\} = \{1, 3, 0\} = \{1, 3, 0, 1\}$.
- $\varnothing$ betecknar **tomma mängden**, dvs mängden som inte innehåller några element alls.
- Vi skriver $x \in S$ om x är ett element i mängden S och
- $x \notin S$ om x inte är ett element i S.

Fler beteckningar

- $\mathcal{U}$ betecknar **universum**, dvs den grundmängd som vi får ta element från.
- Ofta är $\mathcal{U}$ något av $\mathbb{Z}_+, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.

$\{$positiva heltal$\}$

Fler beteckningar

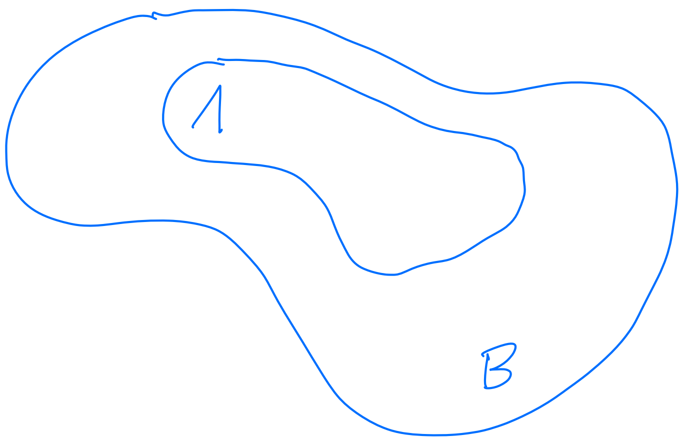
- $\mathcal{U}$ betecknar **universum**, dvs den grundmängd som vi får ta element från.
- Ofta är $\mathcal{U}$ något av $\mathbb{Z}_+, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.
- $A \subseteq B$: A är en **delmängd** till B, dvs $x \in A \implies x \in B$.

Tex: $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ $\qquad$ $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

$\emptyset \subseteq \{\sqrt{2}\} \subseteq \mathbb{R}$

Fler beteckningar

- $\mathcal{U}$ betecknar **universum**, dvs den grundmängd som vi får ta element från.
- Ofta är $\mathcal{U}$ något av $\mathbb{Z}_+, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.
- $A \subseteq B$: A är en **delmängd** till B, dvs $x \in A \implies x \in B$.
- Praktiskt att åskådliggöra med ett s.k. **Venn-diagram**:



Fler beteckningar

- $\mathcal{U}$ betecknar **universum**, dvs den grundmängd som vi får ta element från.
- Ofta är $\mathcal{U}$ något av $\mathbb{Z}_+, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.
- $A \subseteq B$: A är en **delmängd** till B, dvs $x \in A \implies x \in B$.
- Praktiskt att åskådliggöra med ett s.k. **Venn-diagram**:
- $A \subset B$: $A \subseteq B$ och $A \neq B$.

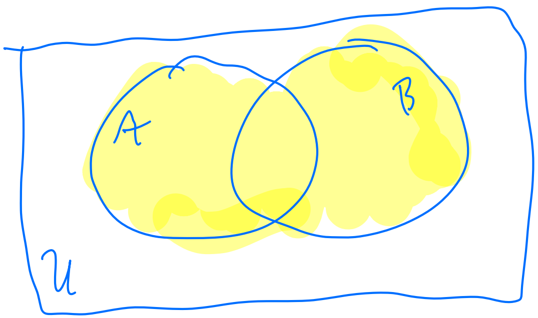
Tex $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

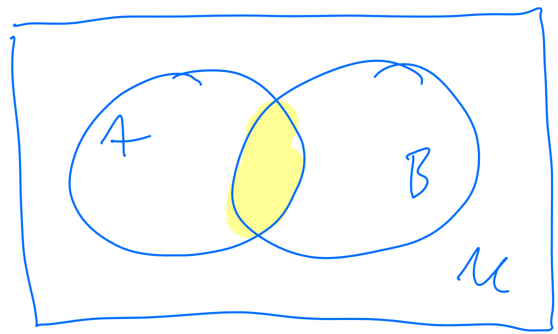
Fler beteckningar

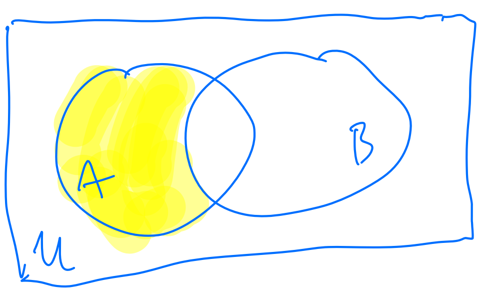
- $\mathcal{U}$ betecknar **universum**, dvs den grundmängd som vi får ta element från.
- Ofta är $\mathcal{U}$ något av $\mathbb{Z}_+, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.
- $A \subseteq B$: A är en **delmängd** till B, dvs $x \in A \Longrightarrow x \in B$.
- Praktiskt att åskådliggöra med ett s.k. **Venn-diagram**:
- $A \subset B$: $A \subseteq B$ och $A \neq B$.
- $|A|$ betecknar antalet element i A.

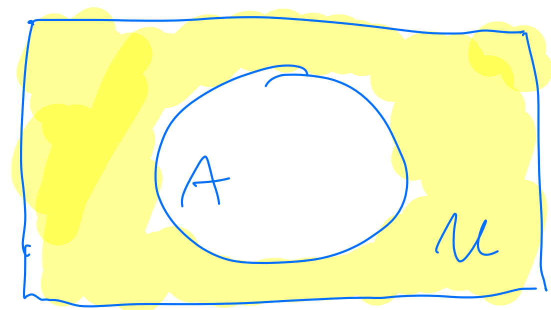
$$|\{1, 1, -2, 3, 1, 2, 2\}| = 4$$

- $A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \text{ eller } x \in B\}$ är **unionen** av A och B.
- $A \cap B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \text{ och } x \in B\}$ är **snittet** av A och B.
- $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ är **differensmängden** eller "A ta bort B".
- $A^c = \mathcal{U} \setminus A$ är **komplementet** till A.







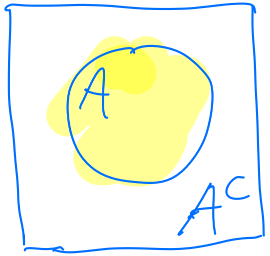


- Notera: $(A^c)^c = A$

Ty $(A^c)^c = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A^c\}$

$= \{x \in \mathcal{U} : x \in A\}$

- Notera: $(A^c)^c = A$
- $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ kallas **potensmängden** till A.



$$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

$$|\{1,2\}| = 2 \qquad |\mathcal{P}(\{1,2\})| = 2^2$$

- Notera: $(A^c)^c = A$
- $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ kallas **potensmängden** till A.
- $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

- Notera: $(A^c)^c = A$
- $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ kallas **potensmängden** till A.
- $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$
- $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \Big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\Big\}$

- Notera: $(A^c)^c = A$
- $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ kallas **potensmängden** till A.
- $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$
- $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \Big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\Big\}$
- $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\text{delmängder till tomma mängden}\}$ $= \{\emptyset\} \quad (\neq \emptyset)$

- Notera: $(A^c)^c = A$
- $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ kallas **potensmängden** till A.
- $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$
- $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \Big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\Big\}$
- $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\text{delmängder till tomma mängden}\} = \{\varnothing\}$

- Notera: $(A^c)^c = A$
- $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ kallas **potensmängden** till A.
- $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$
- $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \Big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\Big\}$
- $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\text{delmängder till tomma mängden}\} = \{\varnothing\}$
- $\mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}\Big\}$ Kalla $\varnothing = x$

$\mathcal{P}(\{x\}) = \{\varnothing, \{x\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

- Notera: $(A^c)^c = A$
- $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ kallas **potensmängden** till A.
- $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$
- $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \Big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\Big\}$
- $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\text{delmängder till tomma mängden}\} = \{\varnothing\}$
- $\mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}\Big\}$
- $\mathcal{P}\left(\Big\{\varnothing, \{\varnothing\}\Big\}\right) = ?$

Kallar $x = \emptyset$

$y = \{\emptyset\}$

$$P(\{x, y\}) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$$

$$= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

Boolesk algebra

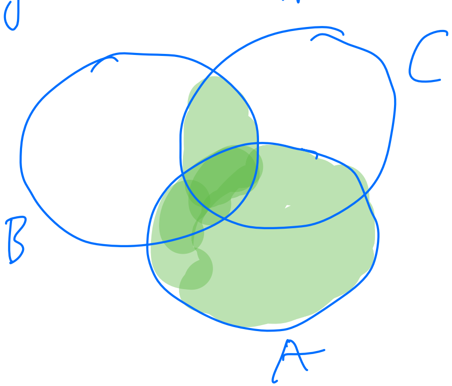
Räkneregler för union, snitt och komplement
associativa lagar
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
kommutativa lagar
$A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$
distributiva lagar
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
De Morgans lagar
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
idempotenslagar
$A \cup A = A \quad A \cap A = A$
absorbtionslagar
$A \cup (A \cap B) = A \quad A \cap (A \cup B) = A$
dubbelt komplement
$(A^c)^c = A$
inverslagar
$A \cup A^c = \mathcal{U} \quad A \cap A^c = \emptyset$
identitetslagar
$A \cap \mathcal{U} = A \quad A \cup \emptyset = A$
dominanslagar
$A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$

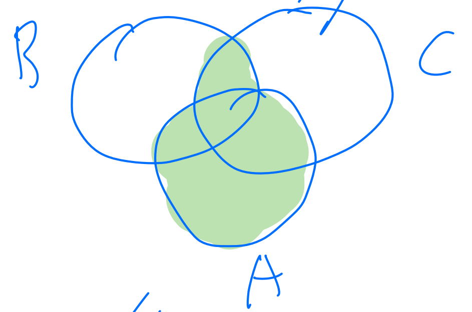
enda icke-triviala

Exempel. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Varför gäller detta? Med Venn-diagram

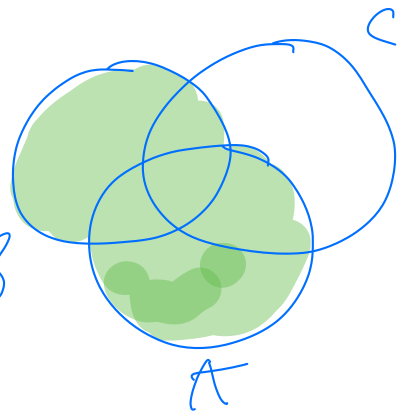
VL =



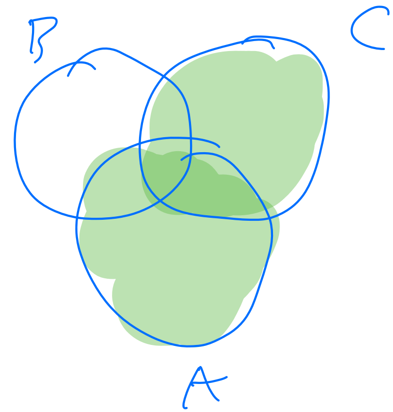


=

HL =



$\cap$



Exempel. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Två mängder är lika precis då de innehåller samma element. Ekvationen gäller precis då

$x \in VL \iff x \in HL$

Om $x \in VL$ så $x \in A \cup B$ eftersom $A \cup (B \cap C) \subseteq A \cup B$

och på samma sätt $x \in A \cup C$

dvs $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) = HL$

Om $x \in HL$ så $x \in A \cup B$ och $x \in A \cup C$

Men då gäller att $x \in A$ eller $x \in B \cap C$

dvs $x \in A \cup (B \cap C)$.

Exempel. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Visa att VL o HL innehåller precis samma element.

det. $\quad$ $\underline{(A^c)^c = A}$

$$x \in VL \iff x \in (A \cup B)^c \overset{\text{def.}}{\iff} x \notin A \cup B \iff x \notin A \text{ o } x \notin B$$

$$\iff x \in A^c \text{ o } x \in B^c \iff x \in (A^c) \cap (B^c)$$

$$\iff x \in HL.$$

Övning: Visa med Venn-diagram.

Exempel. $(A \cap C^c) \cup (C \cap B)^c = (B \cap C)^c$.

Använd lagarna för att bevisa: De Morgan

$$VL = (A \cap C^c) \cup (C \cap B)^c = \{(A^c)^c = A\} = \left((A^c)^c \cap C^c\right) \cup (C \cap B)^c$$

$$= \underbrace{(A^c \cup C)^c \cup (C \cap B)^c}_{} = \{\text{De Morgan}\} =$$

$$= \left[\underset{\overset{\cup\!\!/}{C}}{(A^c \cup C)} \cap (\underset{\subseteq C}{C \cap B})\right]^c = (C \cap B)^c = HL$$

tillför inget eftersom $\underline{C \cap B \subseteq A^c \cup C}$

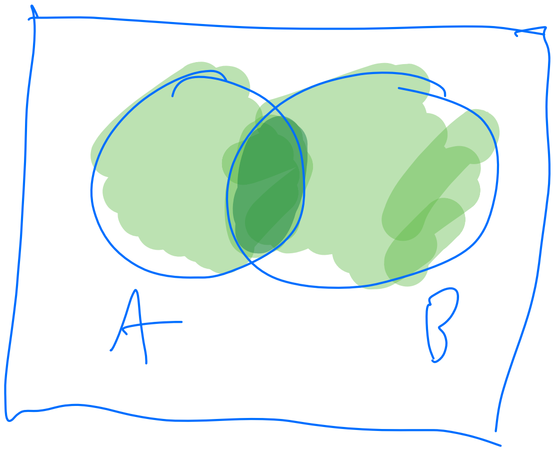
De Morgan I $\quad X^c \cap Y^c = (X \cup Y)^c$

$X = A^c, \quad Y = C$

Exempel. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. (Modulära lagen / Inklusion-exklusion)

Vill räkna antalet element i $A \cup B$

- Börja $|A| + |B|$.
- Elementen i $|A \cap B|$ har räknats två ggr.
- subtrahera $|A \cap B|$.



Exempel. Hur många heltal $1 \leq x \leq 1000$ är delbara med minst ett av talen 4 och 7?

$A = \{1 \leq x \leq 1000 \mid 4 \text{ delar } x\}$ $\qquad |A| = \frac{1000}{4} = 250$

$B = \{1 \leq x \leq 1000 \mid 7 \text{ delar } x\}$ $\qquad |B| = \{7, 14, 21, \ldots, \underset{142 \cdot 7}{\overset{\shortparallel}{994}}\} = 142$

Vi söker $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$A \cap B = \{1 \leq x \leq 1000 \mid 4 \text{ delar } x \text{ och } 7 \text{ delar } x\}$

$= \{ \text{—}\,\|\,\text{—} \mid 28 \text{ delar } x\}$

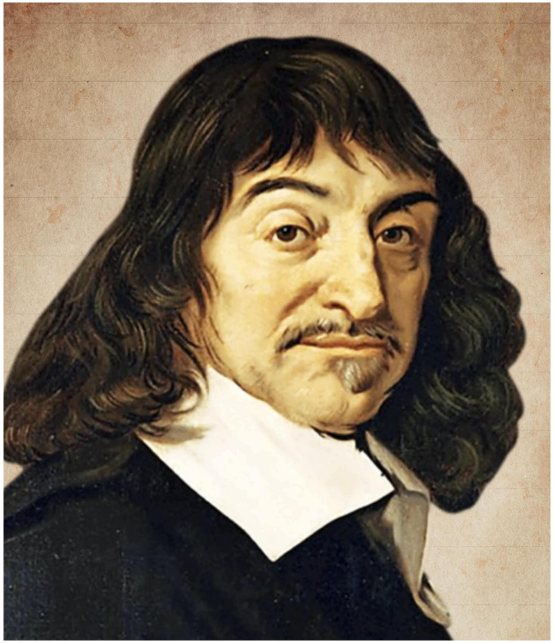
$= \{28, 56, \ldots, \underset{= 35 \cdot 28}{980}\}$

Så $|A \cap B| = 35$

$\therefore \quad |A \cup B| = 250 + 142 - 35 = 357$

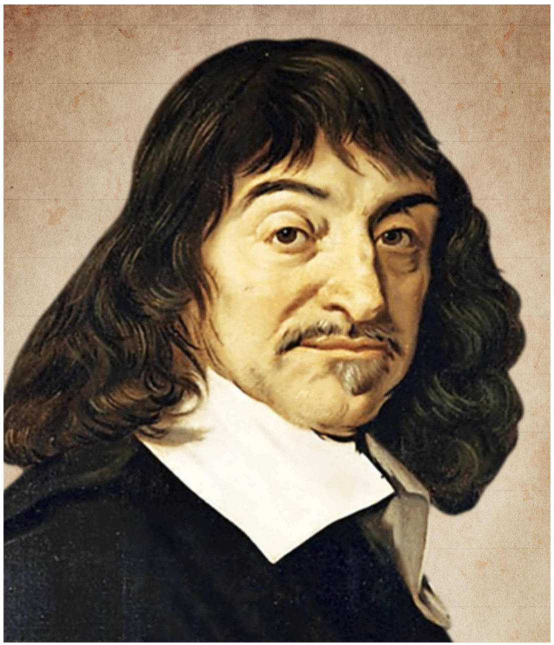
Cartesisk produkt

- René Descartes (f. 1596). Fransk filosof och matematiker.
- Utvecklade den analytiska geometrin (med koordinater).
- "Cogito, ergo sum"   "Jag tänker, alltså finns jag"



Cartesisk produkt

- René Descartes (f. 1596). Fransk filosof och matematiker.
- Utvecklade den analytiska geometrin (med koordinater).
- "Cogito, ergo sum"   "Jag tänker, alltså finns jag"



- Var Drottning Kristinas personliga lärare och rådgivare från 1649 till hans död 1650 i Stockholm.

Produktmängder (Cartesisk produkt)

- Om $x, y \in \mathcal{U}$ så kan vi bilda det **ordnade paret** (x, y).

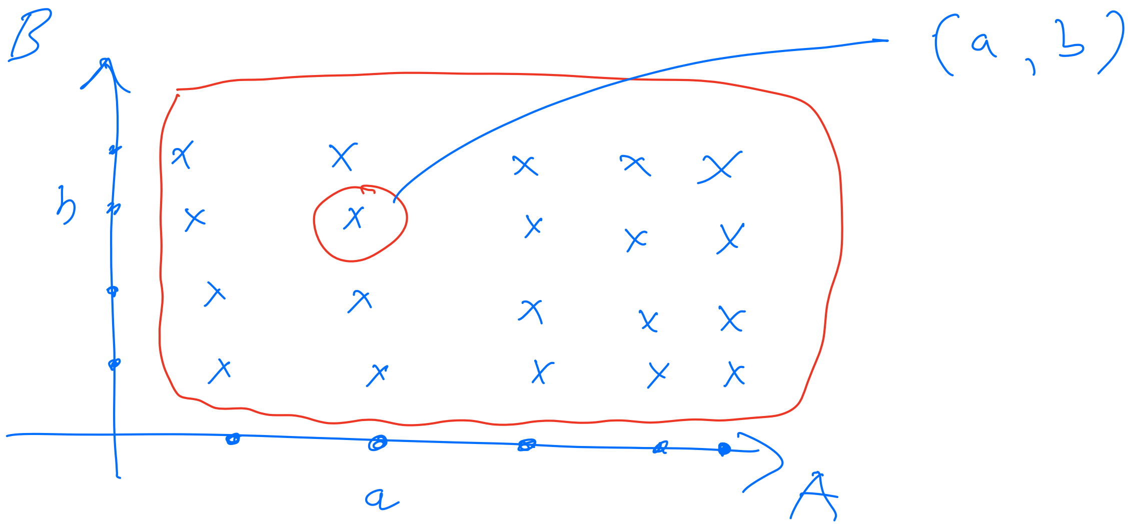
Produktmängder (Cartesisk produkt)

- Om $x, y \in \mathcal{U}$ så kan vi bilda det **ordnade paret** (x, y).
- Om $x \neq y$, så $(x, y) \neq (y, x)$.

Produktmängder (Cartesisk produkt)

- Om $x, y \in \mathcal{U}$ så kan vi bilda det **ordnade paret** (x, y).
- Om $x \neq y$, så $(x, y) \neq (y, x)$.
- **Produktmängden** av A och B är

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ och } b \in B\}.$$



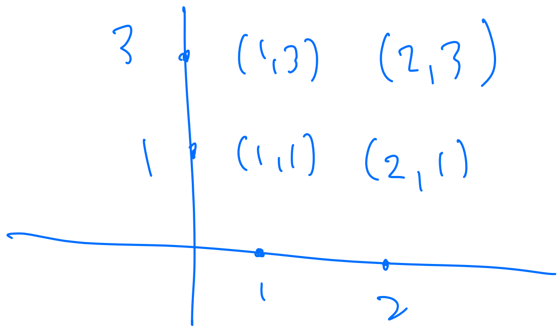
Produktmängder (Cartesisk produkt)

- Om $x, y \in \mathcal{U}$ så kan vi bilda det **ordnade paret** (x, y).
- Om $x \neq y$, så $(x, y) \neq (y, x)$.
- **Produktmängden** av A och B är

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ och } b \in B\}.$$

- Exempel. $A = \{1, 2\}$ och $B = \{1, 3\}$, så

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}.$$



Produktmängder (Cartesisk produkt)

- Om $x, y \in \mathcal{U}$ så kan vi bilda det **ordnade paret** (x, y).
- Om $x \neq y$, så $(x, y) \neq (y, x)$.
- **Produktmängden** av A och B är

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ och } b \in B\}.$$

- Exempel. $A = \{1, 2\}$ och $B = \{1, 3\}$, så

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}.$$

- Om $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, så $A \times B = \mathbb{R}^2$. ← talplanet

Produktregeln

$|A|$ uttalas också "kardinaliteten för A"

- För ändliga mängder A, B,

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|, \qquad \text{ty}$$

- för varje val av $a \in A$ finns exakt $|B|$ element $b \in B$ s.a. $(a, b) \in A \times B$.

n element i varje kolumn

m st kolumner, så får vi

$|A \times B| = m \cdot n$