Matematik baskurs, med diskret matematik

SF1671

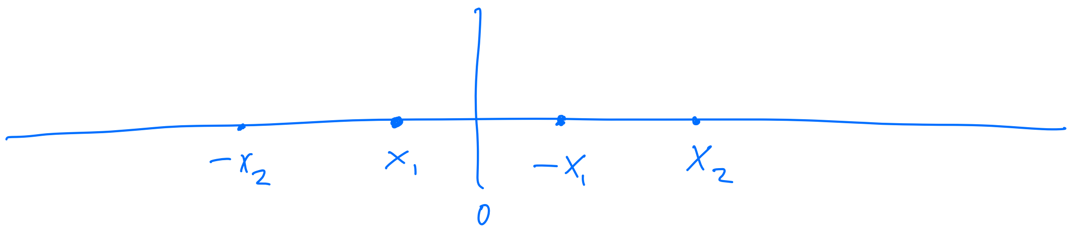
Föreläsare: Petter Brändén

Föreläsning 5

Udda och jämna funktioner.

- Antag $f : D \to M$, där D, M är mängder av reella tal s.a.

$$x \in D \iff -x \in D \quad \text{och} \quad x \in M \iff -x \in M.$$

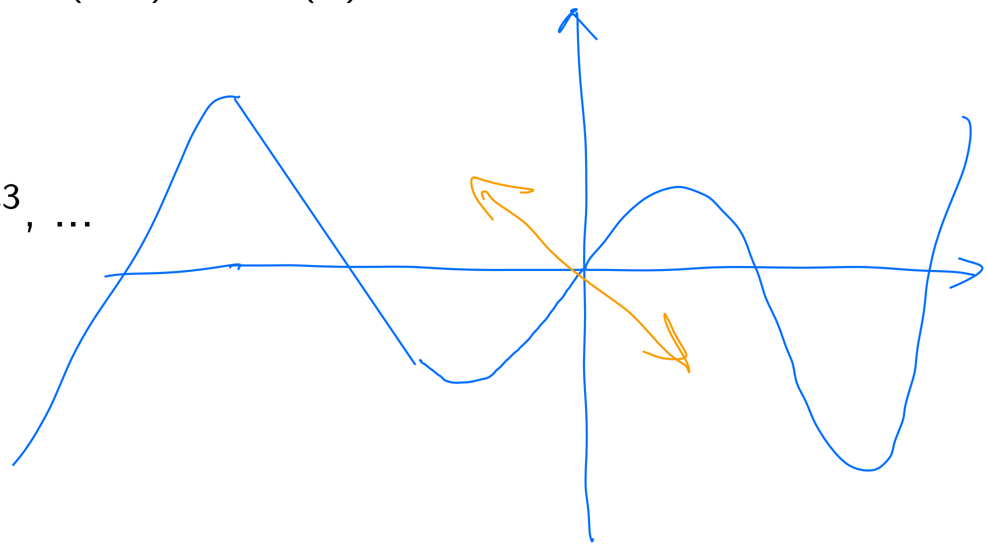


Udda och jämna funktioner.

- Antag $f : D \to M$, där D, M är mängder av reella tal s.a.

$$x \in D \Longleftrightarrow -x \in D \quad \text{och} \quad x \in M \Longleftrightarrow -x \in M.$$

- f kallas **udda** om $f(-x) = -f(x)$ för alla $x \in D$.



- $\sin x$, $\tan x$, x, x^3, ...

$\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^5}$

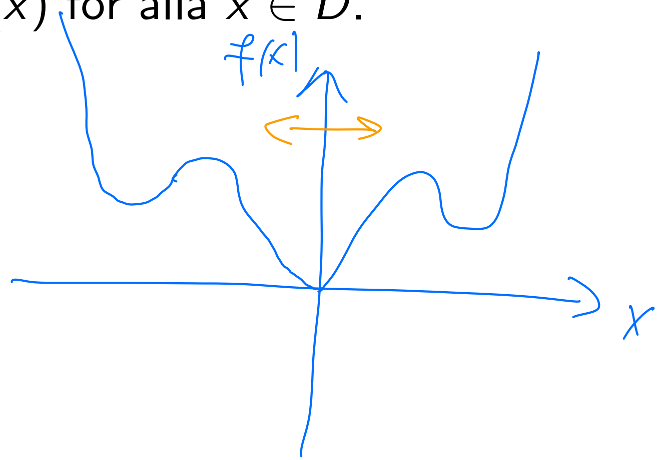
Udda och jämna funktioner.

- Antag $f : D \to M$, där D, M är mängder av reella tal s.a.

$$x \in D \iff -x \in D \quad \text{och} \quad x \in M \iff -x \in M.$$

- f kallas **udda** om $f(-x) = -f(x)$ för alla $x \in D$.

- $\sin x$, $\tan x$, x, x^3, ...
- f kallas **jämn** om $f(-x) = f(x)$ för alla $x \in D$.



- $\cos x$, x^2, x^4, ...

$\frac{1}{x^4}$, $-\frac{2}{x^6}$

Udda och jämna funktioner.

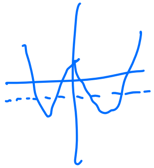
- Antag $f : D \to M$, där D, M är mängder av reella tal s.a.

$$x \in D \iff -x \in D \quad \text{och} \quad x \in M \iff -x \in M.$$

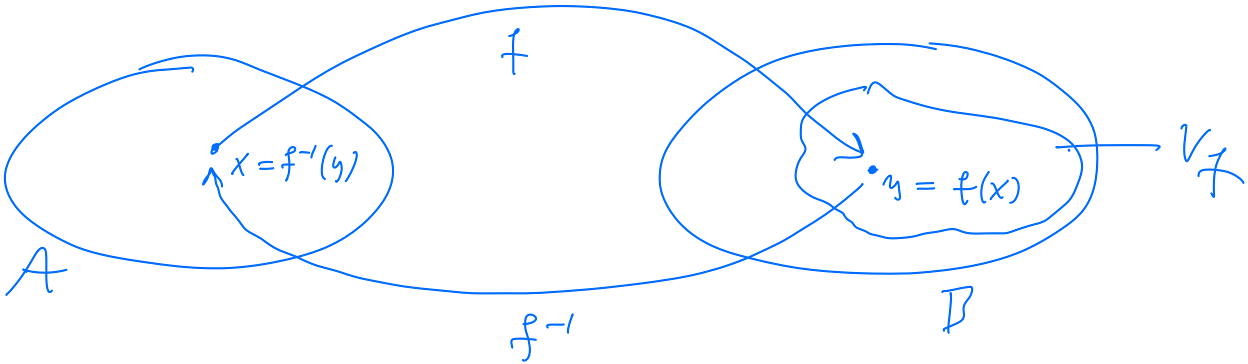
- f kallas **udda** om $f(-x) = -f(x)$ för alla $x \in D$.
- $\sin x$, $\tan x$, x, x^3, ...
- f kallas **jämn** om $f(-x) = f(x)$ för alla $x \in D$.
- $\cos x$, x^2, x^4, ...
- jämn + jämn = jämn och udda + udda = udda
- jämn · jämn = jämn, jämn · udda = udda

  udda · udda = jämn

Exempel. Om $f : A \to B$ är udda och inverterbar så är f^{-1} udda.



jämna funktioner är ej injektiva



$f^{-1} : V_f \to A$. Visa att f^{-1} är udda.

Tag $y \in V_f$ så $y = f(x)$ för ngt $x \in A$:

$$f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = \{f \text{ udda}\} = f^{-1}(f(-x))$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{enligt def.}\\ \text{av invers}\end{matrix}\right\} = -x = -f^{-1}(y).$$

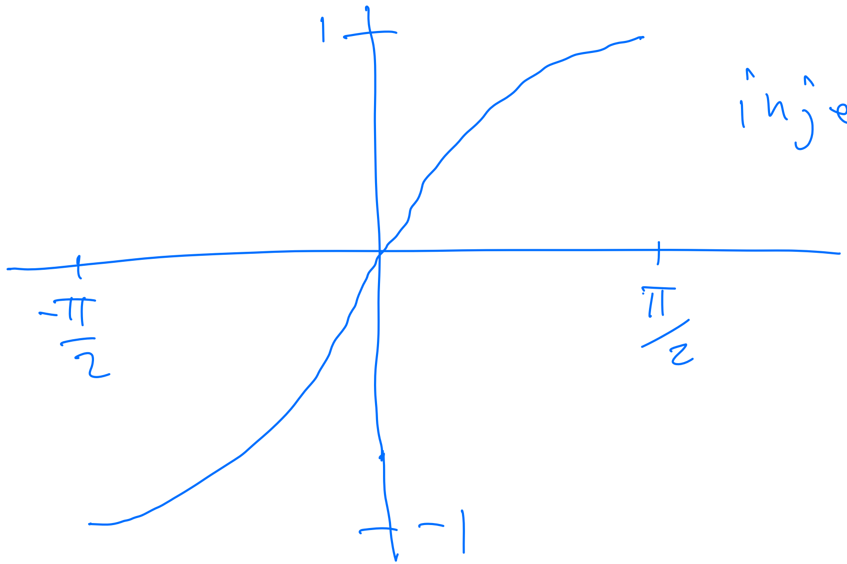
Så $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$,

så f^{-1} är udda.

Inversa trigonometriska funktioner.

- Definiera $\mathrm{Sin}\, x : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ genom $\mathrm{Sin}\, x = \sin x$.

Annan def-mängd än sin x.



injektiv här.

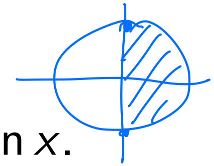
Inversa trigonometriska funktioner.

- Definiera $\mathrm{Sin}\, x : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ genom $\mathrm{Sin}\, x = \sin x$.
- $\arcsin x : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ definieras som inversen till $\mathrm{Sin}\, x$

Inversa trigonometriska funktioner.

- Definiera $\mathrm{Sin}\, x : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ genom $\mathrm{Sin}\, x = \sin x$.
- $\arcsin x : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ definieras som inversen till $\mathrm{Sin}\, x$, så
- $\arcsin(\sin x) = x$ för $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ och
- $\sin(\arcsin x) = x$ för $x \in [-1, 1]$.

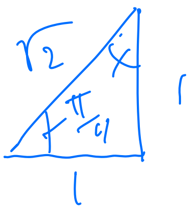
Inversa trigonometriska funktioner.



- Definiera $\operatorname{Sin} x : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ genom $\operatorname{Sin} x = \sin x$.
- $\arcsin x : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ definieras som inversen till $\operatorname{Sin} x$, så
- $\arcsin(\sin x) = x$ för $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ och
- $\sin(\arcsin x) = x$ för $x \in [-1, 1]$.

arcsin(x) är udda

Exempel. Beräkna $\arcsin(x)$ för $x = 1/\sqrt{2}, -1$ och $-\sqrt{3}/2$.



$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{ty} \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

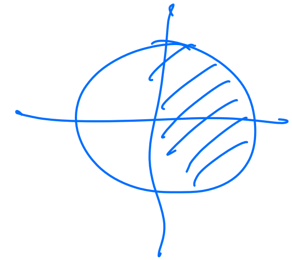
$$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \quad \text{ty} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

Exempel. Beräkna $\cos(\arcsin x)$ och $\tan(\arcsin x)$.



$$\arcsin(x) : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$\cos(\arcsin(x)) \geq 0$ för alla $x \in [-1, 1]$

$$\cos(\arcsin(x)) = \left\{ \overset{\text{trig. etta.}}{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1} \right\}$$

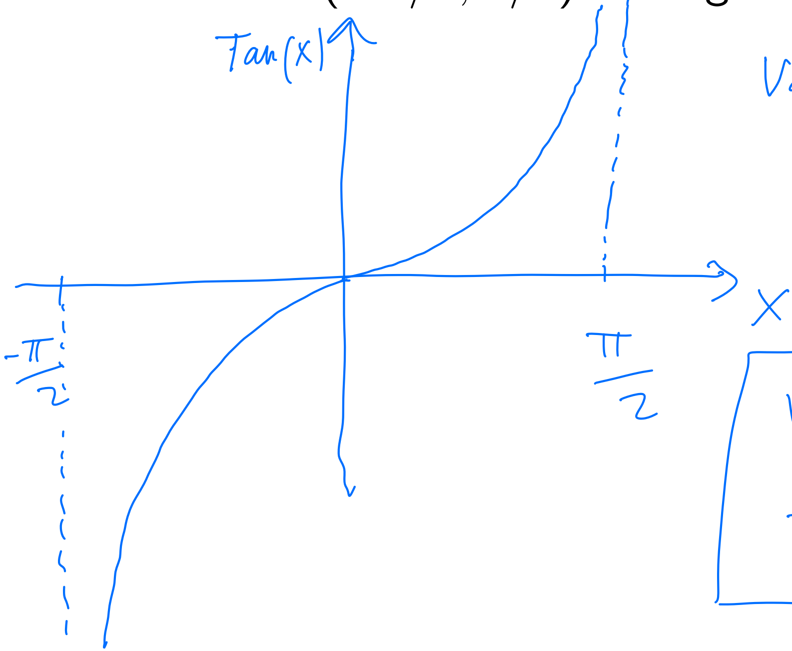
$$= \overset{+}{(-)} \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \left\{ \begin{matrix} \text{eg. invers} \\ \sin(\arcsin x) = x \end{matrix} \right\}$$

$$= \sqrt{1 - x^2}$$

$$\tan(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Inversa trigonometriska funktioner.

- Definiera $\mathrm{Tan}\, x : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ genom $\mathrm{Tan}\, x = \tan x$.



Växande, så inverterbar.

$\boxed{\text{Värdemängden för Tan } x \text{ är } \mathbb{R}}$

Inversa trigonometriska funktioner.

- Definiera $\mathrm{Tan}\, x : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ genom $\mathrm{Tan}\, x = \tan x$.
- Tan är injektiv.

Inversa trigonometriska funktioner.

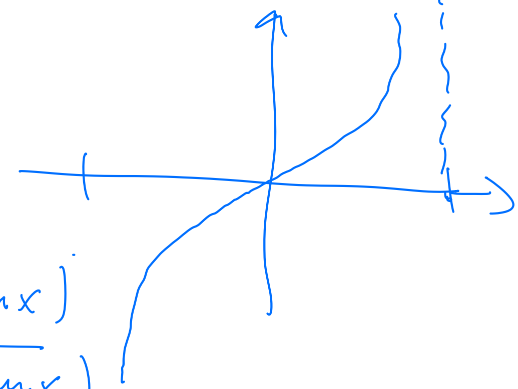
- Definiera $\mathrm{Tan}\, x : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ genom $\mathrm{Tan}\, x = \tan x$.
- Tan är injektiv.
- $\arctan x : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ definieras som inversen till $\mathrm{Tan}\, x$

Inversa trigonometriska funktioner.

- Definiera $\mathrm{Tan}\, x : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ genom $\mathrm{Tan}\, x = \tan x$.
- Tan är injektiv.
- $\arctan x : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ definieras som inversen till $\mathrm{Tan}\, x$,
- $\arctan(\tan x) = x$ för $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ och
- $\tan(\arctan x) = x$ för $x \in \mathbb{R}$.

Inversa trigonometriska funktioner.

- Definiera $\mathrm{Tan}\, x : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ genom $\mathrm{Tan}\, x = \tan x$.
- Tan är injektiv.
- $\arctan x : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ definieras som inversen till $\mathrm{Tan}\, x$,
- $\arctan(\tan x) = x$ för $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ och
- $\tan(\arctan x) = x$ för $x \in \mathbb{R}$.



Exempel. Beräkna $\sin(\arctan x)$. $= y$

x och y har samma tecken.

$$x^2 = \tan(\arctan x)^2 = \frac{\sin^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)}$$

$$= \frac{\sin^2(\arctan x)}{1 - \sin^2(\arctan x)} = \frac{y^2}{1-y^2}$$

(Lös ut y)

$$x^2(1-y^2) = x^2 - x^2y^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 = x^2y^2 + y^2 = (1+x^2)y^2$$

$$y^2 = \frac{x^2}{1+x^2}$$

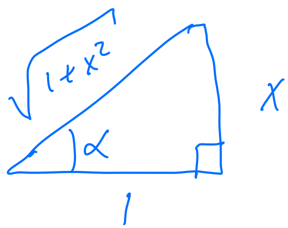
$$\boxed{y = (\pm)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

(ty x o y har samma tecken)

Exempel. Beräkna $\sin(\arctan x)$.

Två fall $\quad x \geq 0 \quad$ o $\quad x < 0 \qquad \arctan x = \alpha$

(1). $x \geq 0$



$$\tan(\alpha) = \frac{x}{1} = x$$

$$\sin(\arctan x) = \sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(2). $x < 0 \qquad x = -t \;, \; t > 0$

udda

$$\sin(\arctan x) = \sin(\arctan(-t)) = \sin(-\arctan(t))$$

$$= -\sin(\arctan t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Använd av} \\ (1) \end{array} \right\} =$$

udda

$$= -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Hyperboliska funktioner.

- Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en funktion så är

$$j(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ jämn och } u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \text{ udda}$$

- och $f(x) = j(x) + u(x)$.

Varför:

$$j(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = j(x)$$

$$u(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -u(x)$$

Hyperboliska funktioner.

- Om $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ är en funktion så är

$$j(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ jämn och } u(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2} \text{ udda}$$

- och $f(x)=j(x)+u(x)$.
- För $f(x)=e^x$ får vi

$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} = j(x) \quad \text{och} \quad \sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} = u(x)$$

Hyperboliska funktioner.

- Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en funktion så är

$$j(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ jämn och } u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \text{ udda}$$

- och $f(x) = j(x) + u(x)$.
- För $f(x) = e^x$ får vi

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{och} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- Cosinus hyperbolikus och sinus hyperbolikus

$i = \sqrt{-1}$

Med komplexa tal:
$$\begin{cases} \cosh(x) = \cos(ix) \\ \underbrace{\sinh(x)}_{i} = \sin(ix) \end{cases}$$

Hyperboliska funktioner.

- Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en funktion så är

$$j(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ jämn och } u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \text{ udda}$$

- och $f(x) = j(x) + u(x)$.
- För $f(x) = e^x$ får vi

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{och} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- Cosinus hyperbolikus och sinus hyperbolikus
- $e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$ och
  $e^{-x} = \cosh(x) - \sinh(x)$.

Identiteter.

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$ "Trig. ettan"

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$ additions-formel.

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$

$$\cosh(2x) = 2\cosh^2(x) - 1$$

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$$

Trig. ettan: $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) =$

$$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(e^{2x} + e^{-2x} + \underline{2e^x \cdot e^{-x}}\right) - \left(e^{2x} + e^{-2x} - \underline{2e^x \cdot e^{-x}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}(2 + 2) = 1$$

Hyperboliska funktioner.

- $\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x)$ (udda)

$$= \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

Hyperboliska funktioner.

- $\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x) \quad$ (udda)
- $\sinh(x)$ och $\tanh(x)$ är växande, så inverterbara.

Hyperboliska funktioner.

- $\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x)$ (udda)
- $\sinh(x)$ och $\tanh(x)$ är växande, så inverterbara.
- $\sinh^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

värdemängd är $\mathbb{R}$

$\sinh^{-1}(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y = \sinh(x) \iff x = \sinh^{-1}(y)$$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \{\text{sätt } z = e^x\} = \frac{z - 1/z}{2}$$

(Lös ut z mult. med z)

$$zy = \frac{z^2 - 1}{2} \iff 2yz = z^2 - 1 \iff z^2 - 2yz - 1 = 0$$

$$\iff z = y \underset{(-)}{+} \sqrt{y^2+1} > 0 \iff \{z = e^x\} \; e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

$$\iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

$$\tanh^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

$y = \tanh(x) \iff x = \tanh^{-1}(y)$

$y = \tanh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \{$ Mult. täljare o nämnare med $e^x \}$

$= \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \{ z = e^{2x} \} = \dfrac{z-1}{z+1}$ (Vill lösa ut x i termer av y Lös ut z.)

Mult. med $z+1$: $y(z+1) = z-1$ så

$yz + y = z - 1 \iff z(y-1) = -1-y \iff z = \dfrac{-1-y}{y-1}$

$\iff z = \dfrac{y+1}{1-y} \iff e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y} \iff \{$ log. på båda sidor $\}$

$2x = \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$ så $x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$ $\square$

Lös $2\cosh^2(x) + \sinh(2x) + 4\cosh(x) = 6$.

$$2\cdot\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 + \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} + 4\,\frac{e^x+e^{-x}}{2} = 6$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{2x} + \cancel{e^{-2x}} + 2\underbrace{e^x\cdot e^{-x}}_{=2}\right) + \frac{e^{2x}}{2} - \cancel{\frac{e^{-2x}}{2}} + 2e^x + 2e^{-x} = 6$$

$$= \boxed{e^{2x} + 2e^x + 2e^{-x} + 1 = 6}$$

Sätt $z = e^x$. Ger ekvationen

$$z^2 + 2z + 2\frac{1}{z} - 5 = 0$$. Mult. med z

$$z^3 + 2z^2 - 5z + 2 = 0$$ Gissa rot $z = 1$

Dela med $z-1$

Lös $2\cosh^2(x) + \sinh(2x) + 4\cosh(x) = 6$.

$$
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{l}{z^2+3z-2} & \\
\hline
z^3+2z^2-5z+2 & z-1 \\
\hline
-(z^3-z^2) & \\
\hline
3z^2-5z+2 & \\
-(3z^2-3z) & \\
\hline
-2z+2 & \\
-(-2z+2) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$$z^3+2z^2+5z+2 = (z-1)(z^2+3z-2)$$

$$z = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{8}{4}}$$

$$= -\frac{3}{2} (\pm) \frac{\sqrt{17}}{2}, \qquad z = e^x > 0$$

$$z = 1, \quad -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$x = \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\ln(1)}, \quad \ln\left(\frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{3}{2}\right)$$