Matematik baskurs, med diskret matematik

SF1671

Föreläsare: Petter Brändén

Föreläsning 3

Funktioner

- Vad är en funktion?

Funktioner

- Vad är en funktion?
- x^3, $\sin x$, e^x, $\ln x$, $\frac{\tan x}{e^x - \ln x}$, ...

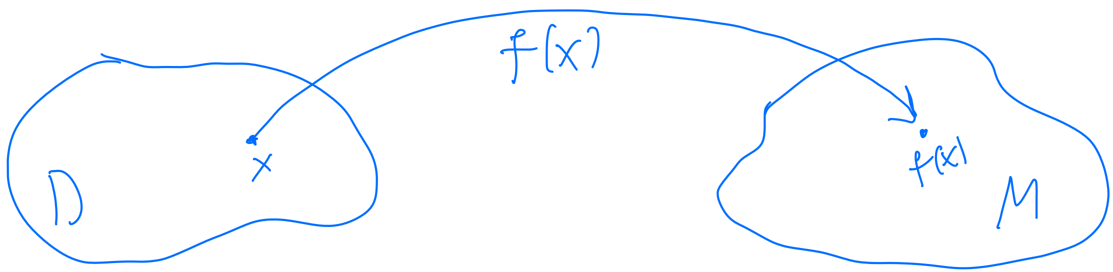
Funktioner

- Vad är en funktion?
- x^3, $\sin x$, e^x, $\ln x$, $\frac{\tan x}{e^x - \ln x}$, ...

Definition

Låt D och M vara mängder. En **funktion** f från D till M är en regel som till varje x i D associerar precis ett element $f(x)$ i M.

$$D \ni x \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow f(x) \in M$$



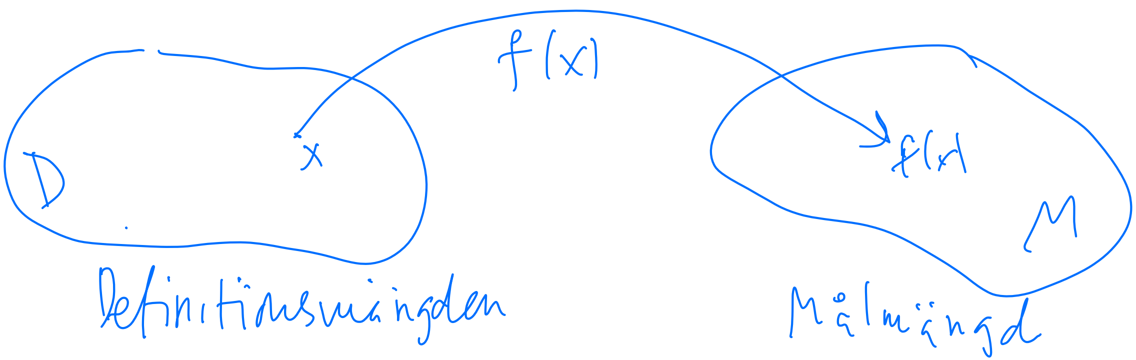
Funktioner

- Vad är en funktion?
- x^3, $\sin x$, e^x, $\ln x$, $\frac{\tan x}{e^x - \ln x}$, ...

Definition

Låt D och M vara mängder. En **funktion** f från D till M är en regel som till varje x i D associerar precis ett element $f(x)$ i M.

- Vi skriver $f : D \to M$. D kallas **definitionsmängd**. M kallas **målmängd**.



Exempel

- $f : \overset{D}{\{\text{människor}\}} \to \overset{M}{\{\text{däggdjur}\}}$

$$f(x) = \text{den biologiska modern till } x.$$

Exempel

- f : {människor} $\to$ {däggdjur}

$$f(x) = \text{den biologiska modern till } x.$$

- $h(x) = 1/x^2$, $h : (-\infty, 0) \to (0, \infty)$

D M

Exempel

- f : {människor} $\rightarrow$ {däggdjur}

$$f(x) = \text{den biologiska modern till } x.$$

- $h(x) = 1/x^2,\ h : (-\infty, 0) \rightarrow (0, \infty)$
- $g(x) = 1/x^2,\ g : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$

samma regel

Exempel

- $f : \{\text{människor}\} \to \{\text{däggdjur}\}$

$$f(x) = \text{den biologiska modern till } x.$$

- $h(x) = 1/x^2,\ h : (-\infty, 0) \to (0, \infty)$
- $g(x) = 1/x^2,\ g : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$
- h och g är inte samma funktioner.

Exempel

- $f : \{\text{människor}\} \to \{\text{däggdjur}\}$

$$f(x) = \text{den biologiska modern till } x.$$

- $h(x) = 1/x^2$, $h : (-\infty, 0) \to (0, \infty)$
- $g(x) = 1/x^2$, $g : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$
- h och g är inte samma funktioner.

Konvention

Om en regel f, gällande reella tal, är definerad utan att specifiera definitionsmängden så är definitionsmängden till f mängden av alla $x \in \mathbb{R}$ s.a. $f(x)$ är väldefinerad.

$f(x) = 1/x$ Definitionsmängden är

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Exempel. Bestäm definitionsmängd för $\frac{x}{x^2-9}$ och $\frac{x-3}{x^2-9}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $\parallel$ $\quad\quad\quad\quad$ $\parallel$

$f(x)$ $\quad\quad$ $g(x)$

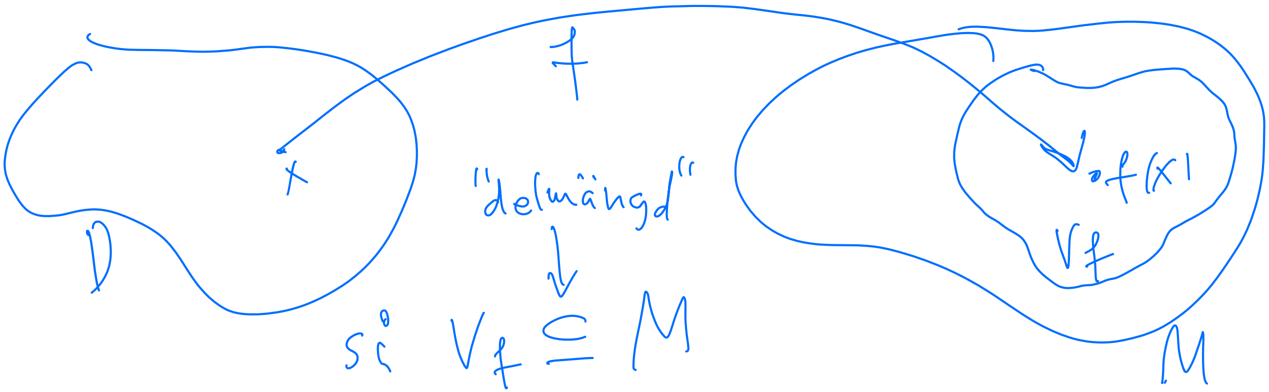
$f(x)$: $\quad x^2-9=(x-3)(x+3)$

$$D=\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$$

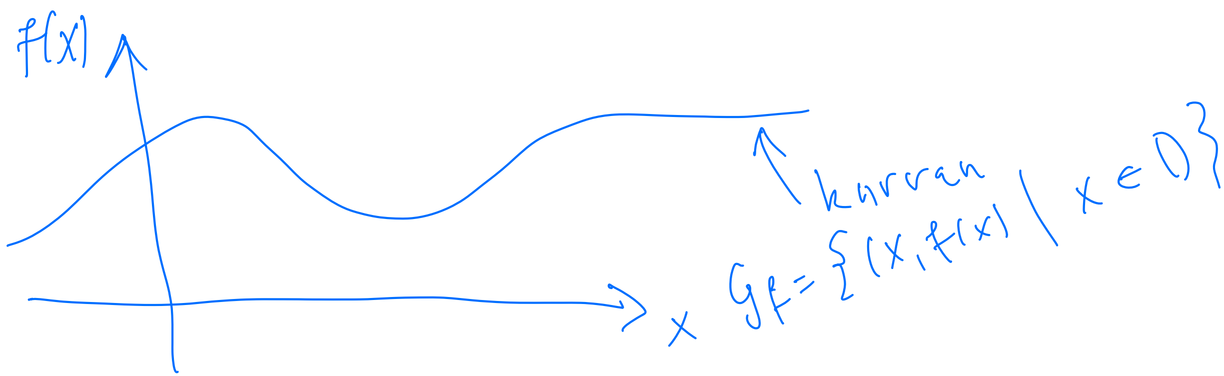
$g(x)$: $\quad$ Väldefinierad då nämnaren är nollskild, så $D=\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$

- **Värdemängden** för en funktion $f : D \to M$ är

$$V_f = \{f(x) \mid x \in D\}.$$



- **Grafen** för $f : D \to M$ är $\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$.



Vad är värdemängden för

$f : \{\text{männsikomödrar}\} \to \{\text{däggdjur}\}, \quad f(x) = \text{“xs förstfödde”}$?

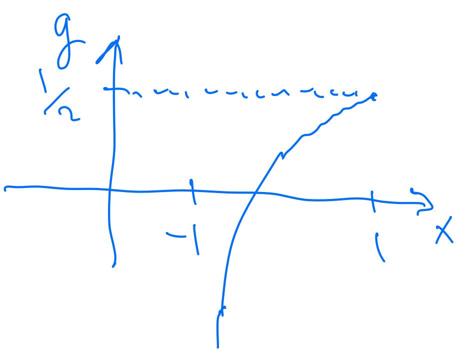
$g : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x/(x+1)$?

$V_f = \{$ alla förstfödda människor $\}$

"äldsta barnet i familjen"

$V_g = ?$ $\qquad g(x) = \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{(x+1)-1}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$

$\dfrac{1}{1+x}$ avtagande $\Rightarrow$ $1 - \dfrac{1}{1+x}$ växande



$V_g = (-\infty, 1/2)$

Kombinera funktioner

- Låt f och g vara reella funktioner. Vi kan bilda nya funktioner

$$
\begin{aligned}
(\alpha f + \beta g)(x) &= \alpha f(x) + \beta g(x), \quad \text{där } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\
(fg)(x) &= f(x)g(x) \\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}
\end{aligned}
$$

Kombinera funktioner

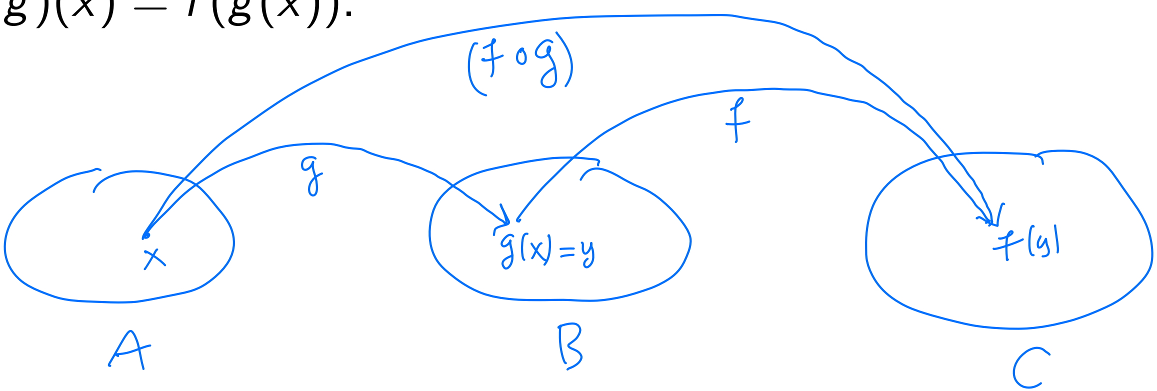
- Låt f och g vara reella funktioner. Vi kan bilda nya funktioner

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x), \quad \text{där } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

- Vi kan också **sammansätta** funktioner: Om $g : A \to B$ och $f : B \to C$ så definerar vi $f \circ g : A \to C$ genom $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.



Exempel.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \sin x$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad g(x) = e^x$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x) = \sin(e^x)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = e^{\sin x}$

$\sin(e^x) \neq e^{\sin x}$

för t.ex $x = 0$

I allmänhet är $f \circ g \neq g \circ f$

Invers funktion

- Om x, y är positiva tal så
$$y = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{y}$$

Invers funktion

- Om x, y är positiva tal så
$$y = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{y}$$
- dvs funktionerna $f, g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ där $f(x) = x^2$ och $g(x) = \sqrt{x}$ är varandras **inverser**.

Invers funktion

- Om x, y är positiva tal så
$$y = x^2 \iff x = \sqrt{y}$$
- dvs funktionerna $f, g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ där $f(x) = x^2$ och $g(x) = \sqrt{x}$ är varandras **inverser**. Notera:
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x.$$

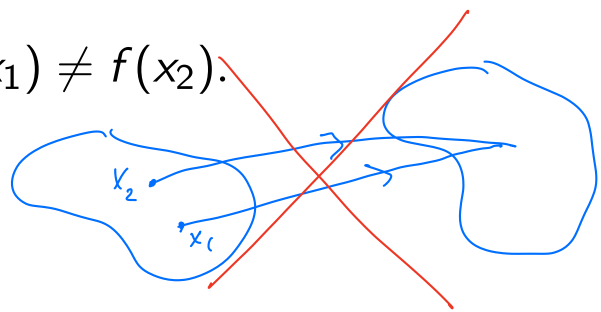
Invers funktion

- Om x, y är positiva tal så
$$y = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{y}$$
- dvs funktionerna $f, g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ där $f(x) = x^2$ och $g(x) = \sqrt{x}$ är varandras **inverser**. Notera:
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x.$$

Injektiv funktion

En funktion $f : D \to M$ är **injektiv** (eller **ett-till-ett**) om för alla $x_1, x_2 \in D$ gäller
$$x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

olika på olika



Invers funktion

- Om x, y är positiva tal så
$$y = x^2 \iff x = \sqrt{y}$$
- dvs funktionerna $f, g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ där $f(x) = x^2$ och $g(x) = \sqrt{x}$ är varandras **inverser**. Notera:
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x.$$

Injektiv funktion

En funktion $f : D \to M$ är **injektiv** (eller **ett-till-ett**) om för alla $x_1, x_2 \in D$ gäller
$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

- Om $f : D \to M$ och $g : M \to N$ är injektiva så är också $g \circ f : D \to N$ också injektiv. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow$
$g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$

Vilka är injektiva?

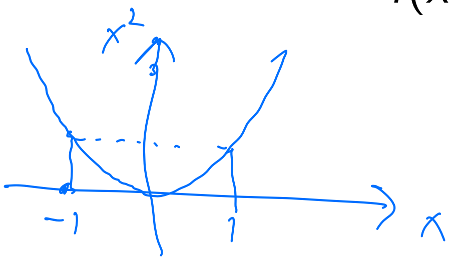
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = e^x$

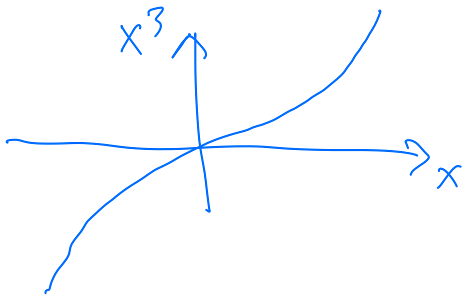
$i : \{\text{mödrar}\} \to \{\text{människor}\}$,
$i(x) = x$s förstfödde

f)



ej injektiv ty $f(-1) = f(1) = 1$

g)



$g(x)$ är "växande":

$$\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)}$$

växande kontinuerliga funktioner är injektiva

h) $h(x) = e^x$ växand, så injektiv

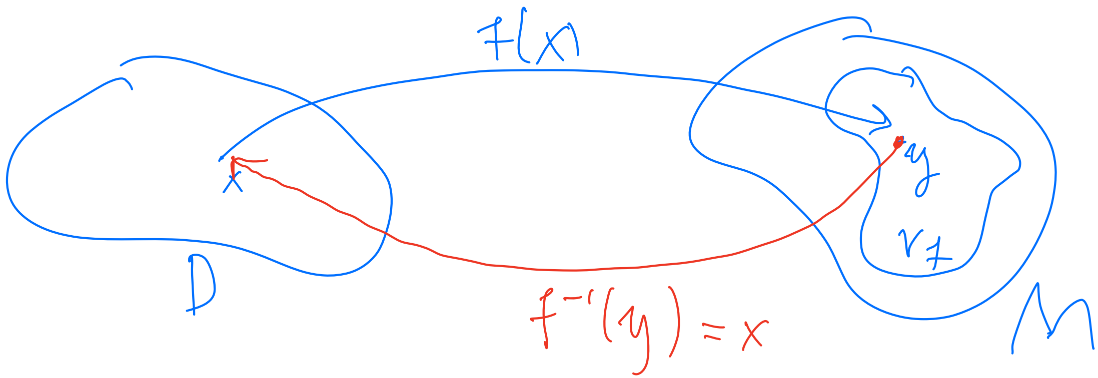
i) Injektiv ty två mödrar kan inte ha samma biologiska barn.

Invers funktion

Om $f : D \to M$ är injektiv definerar vi en funktion $f^{-1} : V_f \to D$ genom

$$f^{-1}(y) = \text{“det } x \text{ för vilket } f(x) = y\text{”}$$

f^{-1} kallas för **inversen** till f.



Dvs vi vänder på pilarna.

Funkar för att för varje $y \in V_f$, finns precis ett x s.a. $y = f(x)$.

Invers funktion

Om $f : D \to M$ är injektiv definerar vi en funktion $f^{-1} : V_f \to D$ genom

$$f^{-1}(y) = \text{"det } x \text{ för vilket } f(x) = y\text{"}$$

f^{-1} kallas för **inversen** till f.

x $f(x) = y$

- Notera $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$ och $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$.

Invers funktion

Om $f : D \to M$ är injektiv definerar vi en funktion $f^{-1} : V_f \to D$ genom

$$f^{-1}(y) = \text{“det } x \text{ för vilket } f(x) = y\text{”}$$

f^{-1} kallas för **inversen** till f.

- Notera $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$ och $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$.
- Om $f(x) = e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så är $f^{-1} = \ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

Invers funktion

Om $f : D \to M$ är injektiv definerar vi en funktion $f^{-1} : V_f \to D$ genom

$$f^{-1}(y) = \text{“det } x \text{ för vilket } f(x) = y\text{”}$$

f^{-1} kallas för **inversen** till f.

- Notera $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$ och $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$.
- Om $f(x) = e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så är $f^{-1} = \ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$
- Om $f(x) = -1/x : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ så är $f^{-1} = -1/x : (0, \infty) \to (-\infty, 0)$.

$f(x) = y = -1/x$ dvs $x = -1/y$ så $f^{-1}(y) = -1/y$

Invers funktion

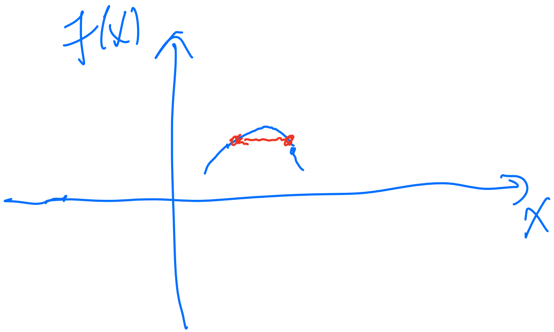
Om $f : D \to M$ är injektiv definerar vi en funktion $f^{-1} : V_f \to D$ genom

$$f^{-1}(y) = \text{“det } x \text{ för vilket } f(x) = y\text{”}$$

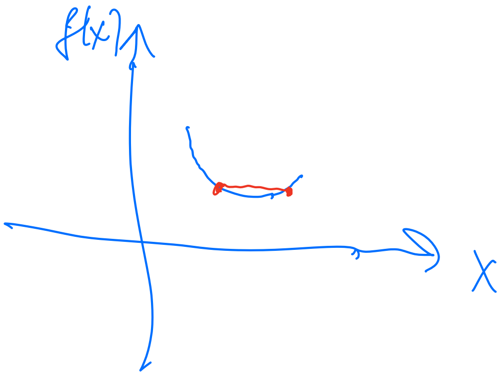
f^{-1} kallas för **inversen** till f.

- Notera $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$ och $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$.
- Om $f(x) = e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så är $f^{-1} = \ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$
- Om $f(x) = -1/x : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ så är $f^{-1} = -1/x : (0, \infty) \to (-\infty, 0)$.
- Om $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så är $f^{-1} = x^{1/3}$ $= \sqrt[3]{x}$

- När är en kontinuerlig funktion injektiv?



Om f(x) börjar växande o sedan planar ut eller "böjer" ner, så är den inte injektiv



Samma med om den börja avtagande och planar ut eller "böjer" uppåt, då är den ej injektiv.

- När är en kontinuerlig funktion injektiv?
- Om $f : D \to \mathbb{R}$ är **växande**, dvs

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2),$$

så är f injektiv.

Om.m f är avtagande eller växande.

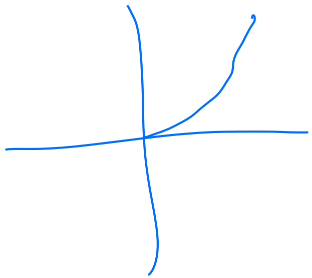
- När är en kontinuerlig funktion injektiv?
- Om $f : D \to \mathbb{R}$ är **växande**, dvs

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2),$$

  så är f injektiv.
- Samma gäller för **avtagande** funktioner.

Exempel.

$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2-x^2}{3}$



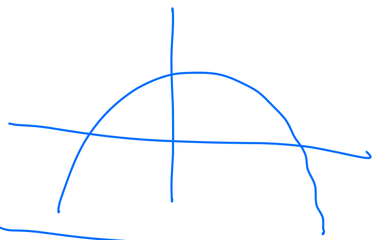
x^2 är växande för positiva x

$\frac{2-x^2}{3}$ är avtagande —"—

så f är injektiv.

Men $g:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2-x^2}{3}$

är ej injektiv



Bestäm f^{-1}. $\quad y=\frac{2-x^2}{3}$

$2-x^2=3y \Rightarrow x^2=2-3y \Rightarrow x=\sqrt{2-3y}$ (ty $x>0$)

$f^{-1}(y)=\sqrt{2-3y}$

Exponentialfunktioner

- Låt $a > 0$, $a \neq 1$.
- Om n är ett positivt heltal så $a^n = a \cdot a \cdots a \quad (n \text{ ggr})$

Exponentialfunktioner

- Låt $a > 0$, $a \neq 1$.
- Om n är ett positivt heltal så $a^n = a \cdot a \cdots a \quad (n \text{ ggr})$
- $a^{-n} = 1/a^n$

Exponentialfunktioner

- Låt $a > 0$, $a \neq 1$.
- Om n är ett positivt heltal så $a^n = a \cdot a \cdots a \quad (n \text{ ggr})$
- $a^{-n} = 1/a^n$
- Om $r = m/n$, där $m, n \in \mathbb{Z}$ och $n > 0$, så definierar vi $a^r = (a^m)^{1/n}$. Väldefinerad?

Exponentialfunktioner

- Låt $a > 0$, $a \neq 1$.
- Om n är ett positivt heltal så $a^n = a \cdot a \cdots a \quad (n \text{ ggr})$
- $a^{-n} = 1/a^n$
- Om $r = m/n$, där $m, n \in \mathbb{Z}$ och $n > 0$, så definerar vi $a^r = (a^m)^{1/n}$. Väldefinerad?
- Om $x \in \mathbb{R}$ så defineras a^x genom kontinuitet $a^x = \lim_{r \to x} a^r$.

(utanför kursen) $r \in \mathbb{Q}$

Egenskaper

$a \neq 1$

$$a^x = 1 \iff x = 0 \qquad a^{x+y} = a^x a^y$$

$$a^{-x} = 1/a^x \qquad a^{xy} = (a^x)^y$$

Exponentialfunktioner

- Låt $a > 0$, $a \neq 1$.
- Om n är ett positivt heltal så $a^n = a \cdot a \cdots a \quad (n \text{ ggr})$
- $a^{-n} = 1/a^n$
- Om $r = m/n$, där $m, n \in \mathbb{Z}$ och $n > 0$, så definerar vi $a^r = (a^m)^{1/n}$. Väldefinerad?
- Om $x \in \mathbb{R}$ så defineras a^x genom kontinuitet $a^x = \lim_{r \to x} a^r$.

Egenskaper

$$a^x = 1 \iff x = 0 \qquad a^{x+y} = a^x a^y$$

$$a^{-x} = 1/a^x \qquad a^{xy} = (a^x)^y$$

- Injektiv: Om $x_1 \neq x_2$, så är $a^{x_1} \neq a^{x_2}$, ty

$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2} \neq 1, \quad \text{enligt ovan}$$

Alternativt:
$a > 1$ a^x växande
$a < 1$ a^x avtag

Logaritmer

$= a^x$

- Vi såg att funktionen $f_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ som ges av $f_a(x) = a^x$ är injektiv.
- Inversen till f_a är betecknas med $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ och kallas **logaritm** i bas a.

Logaritmer

- Vi såg att funktionen $f_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ som ges av $f_a(x) = a^x$ är injektiv.
- Inversen till f_a är betecknas med $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ och kallas **logaritm** i bas a.
- $a^{\log_a(y)} = y$ och $\log_a(a^x) = x$.

Följer direkt från egenskaperna av inverser.

Logaritmer

$y = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$. $5^x = \frac{1}{2}(+)\frac{5}{2}$

$5^x = 3$ dvs $x = \log_5(3)$

- Vi såg att funktionen $f_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ som ges av $f_a(x) = a^x$ är injektiv.
- Inversen till f_a är betecknas med $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ och kallas **logaritm** i bas a.
- $a^{\log_a(y)} = y$ och $\log_a(a^x) = x$.

$a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} a^{x_2}$

$\log_a(1) = 0$ $\quad a^{\log_a(1)} = 1 = a^0$ $\quad \log_a(y_1 y_2) = \log_a(y_1) + \log_a(y_2)$

$\log_a(1/y) = -\log_a(y)$ $\quad \log_a(y^x) = x \log_a(y)$

$$\log_b(y) = \frac{\log_a(y)}{\log_a(b)}$$

$\log_4(2) = \log_4(4^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\log_4(4) = \frac{4}{2}$
$= 2$

Exempel. Lös $25^x - 5^x = 6$: $(5^2)^x - 5^x = 6$

$(5^2)^x = (5^x)^2$ så $(5^x)^2 - 5^x = 6$. Sätt $y = 5^x$ så

$y^2 - y = 6$ så $y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{6 \cdot 4}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot 5$

Den naturliga logaritmen

- Kom ihåg $\log_e$ där $e = 2,71828\ldots$ kallas för den naturliga logaritmen.
- Vi skriver $\log_e(x) = \ln(x)$.

Den naturliga logaritmen

- Kom ihåg $\log_e$ där $e = 2,71828...$ kallas för den naturliga logaritmen.
- Vi skriver $\log_e(x) = \ln(x)$.
- e kan definieras som
  1. Det reella tal a sådant att $(a^x)' = a^x$.
  2. Gränsvärdet
  $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$
  3. Den oändliga summan
  $$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

Exempel. Lös $2\ln(x) = \ln(x+2)$, $x > 0$

Använd log-lagarna.

$$2\ln(x) - \ln(x+2) = 0 \iff$$

$$\ln(x^2) - \ln(x+2) = 0 \iff$$

$$\ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0$$

$\boxed{\text{Vet att } \ln(y) = 0 \text{ om.m. } y = 1}$

Så $\dfrac{x^2}{x+2} = 1$

$$\iff x^2 = x+2 \iff x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$= 2, -1 \leftarrow \text{falsk}$$

Svar: $x = 2$