Matematik baskurs, med diskret matematik

SF2741

Föreläsare: Petter Brändén

Föreläsning 2

Exempel. Lös olikheten

$$(*) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq 0.$$

Skriv på gemensam nämnare:

$$(*) = \frac{x(x+1) + (x-1)(x+1) + (x-1)x}{(x-1)x(x+1)} = \frac{x^2+x+x^2-1+x^2-x}{(x-1)x(x+1)} = \frac{3x^2-1}{(x-1)x(x+1)}$$

$$= \frac{3x^2-1}{(x-1)x(x+1)} = 3 \cdot \frac{\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{(x-1)x(x+1)}$$

		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	
$x+1$	$-$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$x+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-$		$-$		$+$		$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$		$-$		$+$		$+$		$+$
$x-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-$		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$+$
$(*)$	$-$	$\dagger$	$+$	0	$-$	$\dagger$	$+$	0	$-$	$\dagger$	$+$

Svar: $x \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup (1, \infty)$

$\dagger$ = odefinierat

Polynom

- **Definition.** Ett **polynom** är ett uttryck

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

där $a_0, a_1, \ldots, a_n$ är reella tal och x är en variabel/obekant.

Polynom

- Definition. Ett **polynom** är ett uttryck

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

  där $a_0, a_1, \ldots, a_n$ är reella tal och x är en variabel/obekant.
- Exempel. $-\sqrt{3}x^4 + 2x^2 + \pi x - 4$.

Polynom

- Definition. Ett **polynom** är ett uttryck

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

där $a_0, a_1, \ldots, a_n$ är reella tal och x är en variabel/obekant.

- Exempel. $-\sqrt{3}x^4 + 2x^2 + \pi x - 4$.

$$\begin{aligned} &(x+2)^2 - 3(2x-5) - 10 \\ =& x^2 + 4x + 4 - 6x + 15 - 10 = x^2 - 2x - 9 \end{aligned}$$

Polynom

- **Definition.** Ett **polynom** är ett uttryck

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

där $a_0, a_1, \ldots, a_n$ är reella tal och x är en variabel/obekant.

- **Exempel.** $-\sqrt{3}x^4 + 2x^2 + \pi x - 4.$

$$\begin{aligned}&(x+2)^2 - 3(2x-5) - 10\\ =&x^2 + 4x + 4 - 6x + 15 - 10 = x^2 - 2x - 9\end{aligned}$$

- Om $a_n \neq 0$ så är **graden** för f lika med n, skrives $\deg f = n$
- $\deg 0 = -\infty$ (konvention)

polynomet som är identiskt lika med 0
dvs $a_i = 0$ för alla i

Polynom

- Man kan **addera** och **multiplicera** polynom:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \\
g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots \\
f(x) + g(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots \\
f(x)g(x) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

Polynom

- Man kan **addera** och **multiplicera** polynom:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \\
g(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots \\
f(x) + g(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots \\
f(x)g(x) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

- Om $f(x) = d(x)q(x)$ för polynom $d(x)$ och $q(x)$, så säger vi att $d(x)$ och $q(x)$ är **delare** eller **faktorer** till $f(x)$.

Polynom

- Man kan **addera** och **multiplicera** polynom:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$
$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots$$
$$f(x)g(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots$$

- Om $f(x) = d(x)q(x)$ för polynom $d(x)$ och $q(x)$, så säger vi att $d(x)$ och $q(x)$ är **delare** eller **faktorer** till $f(x)$. Man skriver $d(x) \mid f(x)$. "$d(x)$ delar $f(x)$"

Polynom

- Man kan **addera** och **multiplicera** polynom:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$
$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots$$
$$f(x)g(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots$$

- Om $f(x) = d(x)q(x)$ för polynom $d(x)$ och $q(x)$, så säger vi att $d(x)$ och $q(x)$ är **delare** eller **faktorer** till $f(x)$. Man skriver $d(x) \mid f(x)$.
- Exempel. Faktorisera $x^3 - 4x$ så långt som möjligt.

$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2$

Polynomdivision

- Hur faktoriserar vi polynom systematiskt?

Polynomdivision

- Hur faktoriserar vi polynom systematiskt?
- Sats (Polynomdivision). Antag att $f(x)$ och $d(x)$ är polynom och $d(x) \neq 0$. Då finns **unika** $r(x)$ och $q(x)$ s.a.

$$f(x) = d(x)q(x) + r(x), \qquad \text{där } \deg r(x) < \deg d(x).$$

kvot

rest

Polynomdivision

- Hur faktoriserar vi polynom systematiskt?
- Sats (Polynomdivision). Antag att $f(x)$ och $d(x)$ är polynom och $d(x) \neq 0$. Då finns **unika** $r(x)$ och $q(x)$ s.a.

$$f(x) = d(x)q(x) + r(x), \qquad \text{där } \deg r(x) < \deg d(x).$$

- $d(x)$ är en delare till $f(x)$ omm $r(x) = 0$.

om och endast om
samma som ekvivalent.

Polynomdivision

- Hur faktoriserar vi polynom systematiskt?
- Sats (Polynomdivision). Antag att $f(x)$ och $d(x)$ är polynom och $d(x) \neq 0$. Då finns **unika** $r(x)$ och $q(x)$ s.a.

$$f(x) = d(x)q(x) + r(x), \qquad \text{där } \deg r(x) < \deg d(x).$$

- $d(x)$ är en delare till $f(x)$ omm $r(x) = 0$.
- Om $\deg d(x) > \deg f(x)$, så är $q(x) = 0$ och $r(x) = f(x)$.

$$f(x) = \underbrace{0}_{q(x)} \cdot d(x) + \underbrace{f(x)}_{r(x)}$$

$\deg r(x) = \deg f(x) <$
$< \deg d(x)$

Polynomdivision

- Hur faktoriserar vi polynom systematiskt?
- Sats (Polynomdivision). Antag att $f(x)$ och $d(x)$ är polynom och $d(x) \neq 0$. Då finns **unika** $r(x)$ och $q(x)$ s.a.

$$f(x) = d(x)q(x) + r(x), \qquad \text{där } \deg r(x) < \deg d(x).$$

- $d(x)$ är en delare till $f(x)$ omm $r(x) = 0$.
- Om $\deg d(x) > \deg f(x)$, så är $q(x) = 0$ och $r(x) = f(x)$.
- Hur gör vi för att få fram $q(x)$ och $r(x)$?

Exempel. Dela $\underbrace{x^4 - 3x^2 + 3x}_{=f(x)}$ med $\underbrace{x^2 + 1}_{=d(x)}$

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{rl}
x^2 - 4 & \leftarrow q(x) \\
\hline
x^4 - 3x^2 + 3x & \Big|\; x^2 + 1 \\
-(x^4 + x^2) & \\
\hline
-4x^2 + 3x & \\
-(-4x^2 - 4) & \\
\hline
3x + 4 & \leftarrow r(x)
\end{array}
$$

graden är mindre än graden x^2+1.

Vi kan inte fortsätta.

$$x^4 - 3x^2 + 3x = (x^2+1)\cdot(x^2-4) + 3x + 4$$

För att få fram $q(x)$ o $r(x)$ så kör vi polynomdivision:

$$
\begin{array}{rl}
q(x) & \\
\hline
f(x) & \Big|\; d(x) \\
\vdots & \\
r(x) &
\end{array}
$$

Unikhet. Varför är q och r unika?

Bevis detta! Motsägelse-bevis

Antag att q o r ej är unika:

$$f = dq_1 + r_1, \quad \deg r_1 < \deg d$$
$$- \quad f = dq_2 + r_2, \quad \deg r_2 < \deg d$$

$$0 = d(q_1 - q_2) + r_1 - r_2$$

dvs
$$r_2 - r_1 = d \cdot (q_1 - q_2)$$

Om $q_1 = q_2$, då är $r_1 = r_2$ (Unika)

Om $q_1 \neq q_2$, då är $\deg(\text{Högerled}) \geq d$

men $\deg(\text{Vänsterled}) < d$. Detta är en motsägelse!!

Faktorsatsen

- Kom ihåg att α kallas ett **nollställe** (rot) till $f(x)$ om $f(\alpha) = 0$.

Faktorsatsen

- Kom ihåg att α kallas ett **nollställe** (rot) till $f(x)$ om $f(\alpha) = 0$.
- Faktorsatsen. Låt $f(x)$ vara ett polynom och $\alpha \in \mathbb{R}$. Då är α ett nollställe till $f(x)$ om och endast om $x - \alpha$ är en faktor till $f(x)$.

Bevis. Polynom division: Dividera $f(x)$ med $x-\alpha$

$$f(x) = q(x)\cdot(x-\alpha) + r, \qquad \deg r < \deg(x-\alpha) = 1$$

Så r är en konstant.

Sätt in $x = \alpha$: $\quad f(\alpha) = q(\alpha)(\alpha-\alpha) + r = r$

$$\therefore \quad f(\alpha) = 0 \text{ omm } r = 0 \text{ omm } (x-\alpha) \mid f$$

Sammanfattningsvis (eller således)

Exempel. Faktorisera $f(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ så långt som möjligt. Hitta ett nollställe. $f(-1) = -1 + 5 - 8 + 4 = 0$

Faktorsatsen säger då att $x - (-1) = x + 1$ är en faktor.

$$
\begin{array}{l|l}
\quad x^2 + 4x + 4 & \\
\hline
x^3 + 5x^2 + 8x + 4 & x+1 \\
-(x^3 + x^2) & \\
\hline
\quad 4x^2 + 8x + 4 & \\
-(4x^2 + 4x) & \\
\hline
\quad\quad 4x + 4 & \\
\quad -(4x + 4) & \\
\hline
\quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

$f(x) = (x+1)(x^2 + 4x + 4)$

$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

så

<u>Svar</u>: $(x+1)(x+2)(x+2)$

Gissa nollställen

- Hur kan vi gissa nollställen mer metodiskt?

Gissa nollställen

- Hur kan vi gissa nollställen mer metodiskt?

Sats (Gissa rötter)

Låt $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ vara ett polynom med heltalskoefficienter och låt r/s vara ett rationellt tal (förkortat så långt som möjligt).

α

Om $f(r/s) = 0$ så gäller att

- r delar a_0 och
- s delar a_n.

Gissa nollställen

- Hur kan vi gissa nollställen mer metodiskt?

Sats (Gissa rötter)

Låt $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ vara ett polynom med heltalskoefficienter och låt r/s vara ett rationellt tal (förkortat så långt som möjligt).
Om $f(r/s) = 0$ så gäller att

- r delar a_0 och
- s delar a_n.

- Exempel. $f(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

Satsen ovan säger att en möjlig rot $\alpha = \frac{r}{s}$ måste uppfylla

$r \mid 4$, $s \mid 1$. Så $\frac{r}{s} = \pm 4, \pm 2, \pm 1$

Vet att rötterna är -1 och -2

Exempel. Faktorisera $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 3$ så långt som möjligt.

gissa rot: $r \mid 3$, $s \mid 2$

Så möjliga $\alpha = \frac{r}{s}$ är $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2}$

$f(1) = 2 + 5 + 1 - 3 \neq 0$, $f(-1) = -2 + 5 - 1 - 3 \neq 0$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -2 \cdot \frac{3^3}{2^3} + 5 \cdot \frac{3^2}{2^2} - \frac{3}{2} - 3 = 3 \cdot 2^{-2}(-9 + 15 - 2 - 4) = 0$$

Faktorsatsen ger $x + \frac{3}{2}$ är en faktor, dvs $\underline{\underline{2x+3}}$ är en faktor.

Exempel.

$$
\begin{array}{l}
\quad x^2 + x - 1 \\
\hline
2x^3 + 5x^2 + x - 3 \;\big|\; 2x+3 \\
-(2x^3 + 3x^2) \\
\hline
\quad 2x^2 + x - 3 \\
-(2x^2 + 3x) \\
\hline
\quad -2x - 3 \\
-(-2x - 3) \\
\hline
\quad 0
\end{array}
$$

Faktorisera $x^2 + x - 1$

Hitta rötter:

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+4}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$f(x) = (2x+3)\left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

Polynom över komplexa tal

$x^2+1 > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$

Inga reella rötter

- Kom ihåg att de **komplexa talen** är $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R} \text{ och } b \in \mathbb{R}\}$, där $i = \sqrt{-1}$.

Polynom över komplexa tal

- Kom ihåg att de **komplexa talen** är $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R} \text{ och } b \in \mathbb{R}\}$, där $i = \sqrt{-1}$.
- Hur faktoriseras polynom om man tillåter komplexa nollställen?

Polynom över komplexa tal

- Kom ihåg att de **komplexa talen** är $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R} \text{ och } b \in \mathbb{R}\}$, där $i = \sqrt{-1}$.
- Hur faktoriseras polynom om man tillåter komplexa nollställen?

Algebrans fundamentalsats

Ett polynom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, där $a_i \in \mathbb{C}$ och $a_n \neq 0$, har exakt n nollställen räknat med multiplicitet.

(dvs $f(x)$ kan skrivas som produkt av faktorer av grad 1.)

Polynom över komplexa tal

- Kom ihåg att de **komplexa talen** är $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R} \text{ och } b \in \mathbb{R}\}$, där $i = \sqrt{-1}$.
- Hur faktoriseras polynom om man tillåter komplexa nollställen?

Algebrans fundamentalsats

Ett polynom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, där $a_i \in \mathbb{C}$ och $a_n \neq 0$, har exakt n nollställen räknat med multiplicitet.

- Med andra ord, $f(x)$ faktoriseras som

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n),$$

där $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ är nollställena till $f(x)$

Tex $\quad x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$

Fler ekvationer

- Kom ihåg: Om $a \geqslant 0$, så har ekvationen $x^2 = a$ lösningar $x = \pm\sqrt{a}$
- Lös $(x+1)^2 = (2x-3)^2$

Två fall enligt ovan:

$x+1 = +(2x-3)$ eller $x+1 = -(2x-3)$

$(+)$: $x+1 = 2x-3$ så $x = 4$

(-1): $x+1 = -(2x-3) = -2x+3$ så $3x = 2$ så $x = \frac{2}{3}$

Lös $\sqrt{x} = -x$ $(x \geq 0)$

Om $\sqrt{x} = -x$, så är $(\sqrt{x})^2 = (-x)^2$

dvs $x = x^2$ dvs $x^2 - x = 0$ dvs $x = 0, 1$

Testa $x = 0, 1$ om de verkligen är lösningar:

$x = 1$: $VL = 1$ $HL = -1$ falsk rot.

$x = 0$: $VL = 0 = HL$.

Svar: $x = 0$.

Lös $x - 1 = \sqrt{4 - x}$ $\quad \underline{x \leq 4}$ $\quad x - 1 \geq 0$ dvs $\underline{x \geq 1}$

$1 \leq x \leq 4$ $\qquad$ omm då $x \in [1, 4]$

Om $x - 1 = \sqrt{4-x}$ då är $(x-1)^2 = 4 - x$

dvs

$x^2 - 2x + 1 = 4 - x$ dvs $x^2 - x - 3 = 0$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+12}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Är någon av dessa falsk?

Ligger de i intervallet $[1, 4]$?

$\frac{1 - \sqrt{13}}{2} < 0$ så ligger inte i $[1, 4]$. Falsk rot

$1 \leq \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \leq \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \leq 4$, så $\frac{1+\sqrt{13}}{2} \in [1, 4]$

Svar: $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$