Matematik baskurs, med diskret matematik

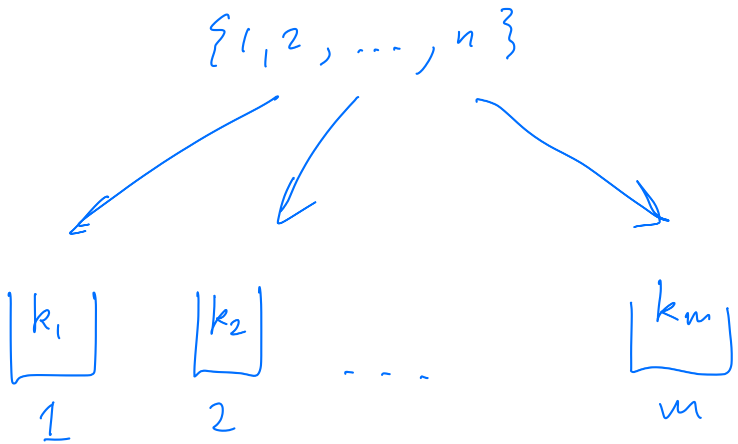
SF1671

Föreläsare: Petter Brändén

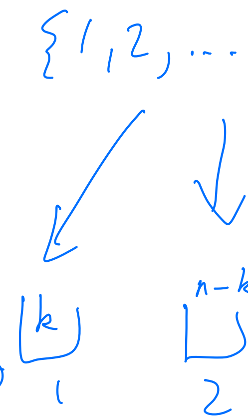
Föreläsning 18

Multinomialtal

$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}$ $\quad k_1+k_2+\cdots+k_m = n$



k_i tal i låda i.



$\binom{n}{k}$

delmängd av storlek k

Multinomialsatsen

Binomialsatsen $\begin{cases} (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \\ (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \end{cases}$

$$(x_1+x_2+\dots+x_m)^n = \sum_{\substack{k_1,k_2,\dots,k_m \geq 0 \\ k_1+k_2+\dots+k_m = n}} \binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_m} \cdot x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \cdots x_m^{k_m}$$

$U = \{$udda pos. heltalen$\}$ $\quad \sum_{k \in U} x^k = x^1 + x^3 + x^5 + x^7 + \dots$

$$VL = \underset{1}{(x_1+x_2+\dots+x_m)} \cdot \underset{2}{(x_1+x_2+\dots+x_m)} \cdot \dots \cdot \underset{n}{(x_1+x_2+\dots+x_m)}$$

När vi utvecklar produkten så får precis en variabel från varje parantes. Vi får en term $x_{f(1)} x_{f(2)} \cdots x_{f(n)}$

$f(1)$ = indexet för variabeln vi valde i första paranten

f kan översättas till att 1 hamnar i låda $f(1)$ 2 hamnar i låda $f(2)$ o.s.v.

Om vi summerar över alla f så fås alla fördelningar av $\{1,\dots,n\}$ i lådorna ...

Exempel

Vad är koefficienten framför $x^3y^5z^{24}$ i $(x+y+z^2)^{20}$?

Gör variabelbytet $z^2 = w$

$(x+y+w)^{20}$ Vi söker koefficienten framför

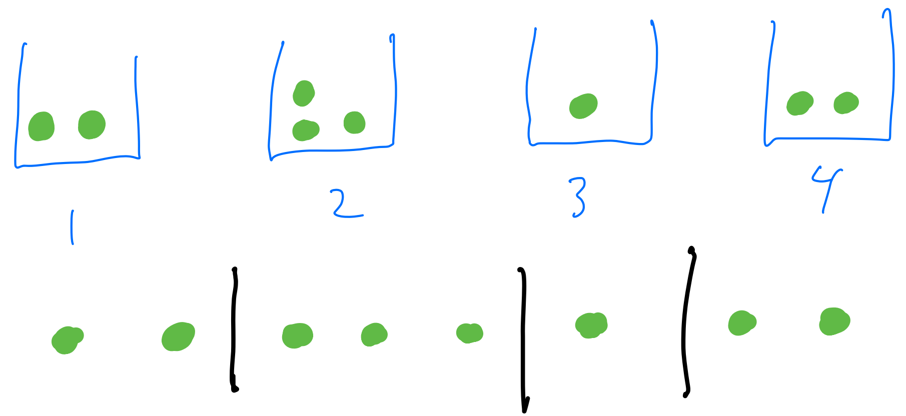
$x^3y^5z^{24} = \boxed{x^3y^5w^{12}}$

$$(x+y+w)^{20} = \sum_{\substack{k_1,k_2,k_3 \geq 0 \\ k_1+k_2+k_3=20}} \binom{20}{k_1,k_2,k_3} x^{k_1} y^{k_2} w^{k_3}$$

$k_1 = 3$, $k_2 = 5$, $k_3 = 12$

Svar: $\binom{20}{3,5,12} = \frac{20!}{3!\,5!\,12!}$

Exempel.
På hur många sätt kan man fördela 8 identiska kulor i 4 olika lådor, så att ingen låda är tom?

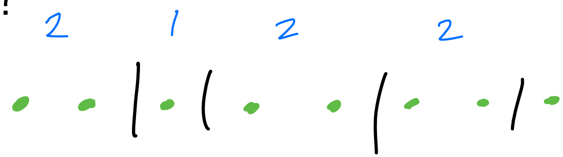


Vi ska alltså placera 3 streck i mellanrummen mellan de 8 kulorna

välj 3 ur 7 dvs $\binom{7}{3}$

Kompositioner

- På hur många sätt kan man fördela n identiska kulor i k olika lådor, så att ingen låda är tom?
- Svar. $\binom{n-1}{k-1}$



$n-1$ mellanrum

$k-1$ ska väljas

x_i = antalet bollar i låda i

$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$, x_i är ett pos. heltal för varje i

Kompositioner

- På hur många sätt kan man fördela n identiska kulor i k olika lådor, så att ingen låda är tom?
- Svar. $\binom{n-1}{k-1}$
- Hur många heltalslösningar har ekvationen

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n, \qquad x_i > 0 \text{ för alla } i?$$

- Svar. $\binom{n-1}{k-1}$.

  Ty, låt $x_i =$ antalet kulor i låda i

Kompositioner

- På hur många sätt kan man fördela n identiska kulor i k olika lådor, så att ingen låda är tom?
- Svar. $\binom{n-1}{k-1}$
- Hur många heltalslösningar har ekvationen

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n, \qquad x_i > 0 \text{ för alla } i?$$

- Svar. $\binom{n-1}{k-1}$.
  Ty, låt $x_i =$ antalet kulor i låda i
- $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ kallas för en komposition av n i k delar.

$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$

delar

Kompositioner

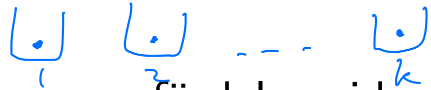
- På hur många sätt kan man fördela n identiska kulor i k olika lådor, om lådor får vara tomma?

y_i = # kulor i låda i

$\Longleftrightarrow$ $y_1 + y_2 + \dots + y_k = n$, $y_i \geq 0$ för alla i

(hitta lösningar)

Kompositioner



- På hur många sätt kan man fördela n identiska kulor i k olika lådor, om lådor får vara tomma?
- Hur många heltalslösningar har ekvationen

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k = n, \qquad y_i \geq 0 \text{ för alla } i?$$

- Svar. $\binom{n+k-1}{k-1}$

Låt $x_i = y_i + 1$, dvs $y_i = x_i - 1$

Vi får: $y_1 + y_2 + \dots + y_k = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_k - 1)$

$= x_1 + \dots + x_k - k = n$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + \dots + x_k = n + k \\ x_i > 0 \text{ alla } i \end{array}}$$

Antalet lösningar

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Oordnade val med upprepning tillåten

- En multimängd är en mängd med upprepade element tillåtna.
- $\{2, 3, 3, 2, 4, 6, 4\} \neq \{2, 3, 4, 6\}$.

Oordnade val med upprepning tillåten

- En multimängd är en mängd med upprepade element tillåtna.
- $\{2, 3, 3, 2, 4, 6, 4\} \neq \{2, 3, 4, 6\}$.
- $\{2, 3, 3, 2, 4, 6, 4\}$ har storlek 7.
- $\{1, 1\}$ har storlek 2.

Oordnade val med upprepning tillåten

- En multimängd är en mängd med upprepade element tillåtna.
- $\{2,3,3,2,4,6,4\} \neq \{2,3,4,6\}$.
- $\{2,3,3,2,4,6,4\}$ har storlek 7.
- $\{1,1\}$ har storlek 2.
- $\{1,1,2\} = \{1,2,1\}$
- Hur många multimängder av storlek n med element från $\{1,2,\ldots,k\}$ finns det?

$\underline{\underline{n=7}}$

$\underline{\underline{k=8}}$

$\{2,3,3,2,4,6,4\}$ skrives som

$1^0\,2^2\,3^2\,4^2\,5^0\,6^1\,7^0\,8^0$

$$\binom{n+k-1}{k-1} \rightsquigarrow (y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6,y_7,y_8) =$$

$(0,2,2,2,0,1,0,0)$

$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8=7=n$

Oordnade val med upprepning tillåten

- En multimängd är en mängd med upprepade element tillåtna.
- $\{2, 3, 3, 2, 4, 6, 4\} \neq \{2, 3, 4, 6\}$.
- $\{2, 3, 3, 2, 4, 6, 4\}$ har storlek 7.
- $\{1, 1\}$ har storlek 2.
- $\{1, 1, 2\} = \{1, 2, 1\}$
- Hur många multimängder av storlek n med element från $\{1, 2, \ldots, k\}$ finns det?
- Svar. $\binom{n+k-1}{k-1}$

Exempel.

Lilla Olga ska köpa lördagsgodis. I butiken finns 7 sorter och hon får välja ~~högst~~ exakt 15 godisar. På hur många olika sätt kan hon välja innehållet i godispåsen?

Kan antaga att godisarna är $\{1,2,3,4,5,6,7\}$

Godispåse motsvarar en multimängd av $\{1,2,\dots,7\}$ av storlek 15.

$k=7$
$n=15$

Svar!

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{15+7-1}{6} = \binom{21}{6}$$

Exempel.

Hur många heltalslösningar finns till $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 14$, där $x_1 \geq -3$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq -5$, $x_4 \geq 3$?

$\Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$ ← överskottet

$x_5 \geq 0, \quad x_1 \geq -3, \quad x_2 \geq 2, \quad x_3 \geq -5, \quad x_4 \geq 3$

Variabelbyte.

$y_1 = x_1 + 4, \quad y_1 \geq 1$

$y_2 = x_2 - 1, \quad y_2 \geq 1$

$y_3 = x_3 + 6, \quad y_3 \geq 1$

$y_4 = x_4 - 2, \quad y_4 \geq 1$

$y_5 = x_5 + 1, \quad y_5 \geq 1$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$

$(y_1 - 4) + (y_2 + 1) + (y_3 - 6) + (y_4 + 2) + (y_5 - 1) = 14$

$\Leftrightarrow \quad y_1 + y_2 + \dots + y_5 = 22$

$y_1, \dots, y_5 \geq 1$

Antal lösningar: $\binom{22-1}{5-1} = \binom{21}{4}$

Exempel.

Hur många heltalslösningar finns till $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 44$, där $-3 \leq x_1 \leq 13$ och $x_i \geq 1$ för $i \geq 2$?

$(*)$

$\Longleftrightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 44, \quad -3 \leq x_1 \leq 13$

$x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 1$

$x_6 \geq 0$

Gör variabelbyte: $y_1 = x_1 + 4$

$1 \leq y_1 \leq 17$

$y_i = x_i$ för $i = 2, 3, 4, 5$

$y_6 = x_6 + 1$

$(*)$ $(y_1 - 4) + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 - 1 = 44$

$$\boxed{y_1 + y_2 + \dots + y_6 = 49 \qquad y_i \geq 1 \text{ alla } i, \quad y_1 \leq 17}$$

Antalet lösningar till (★) är $A - B$

där A är antalet lösningar till

$y_1 + \dots + y_6 = 49 \quad y_i \geq 1$ för alla i; $A = \binom{48}{5}$

B är antalet lösningar till

$y_1 + \dots + y_6 = 49, \quad y_1 \geq 18, \quad y_2, \dots, y_6 \geq 1$

För att lösa B gör ett variabelbyte.

$z_1 = y_1 - 17, \quad z_i = y_i$ för övriga i.

Vi får $\quad z_1 + 17 + z_2 + \dots + z_6 = 49, \quad z_i \geq 1$

dvs $\quad z_1 + z_2 + \dots + z_6 = 32 \qquad B = \binom{31}{5}$

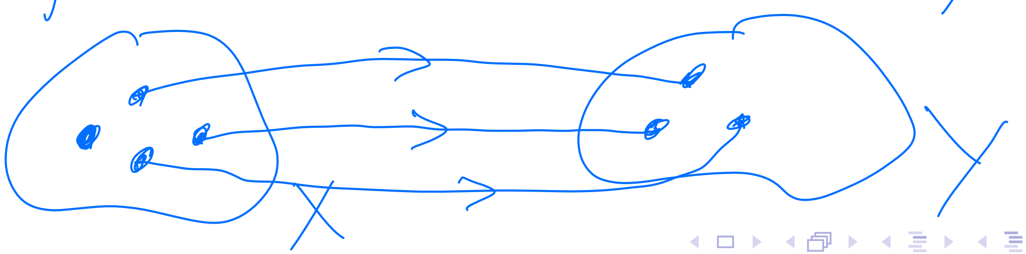
Svar: $A - B = \binom{48}{5} - \binom{31}{5}$

Postfacksprincipen (Pigeon-hole principle)

Lådprincipen

- Om fler än k objekt ska fördelas i k lådor, så måste en av lådorna innehålla <u>minst två element</u>.

<u>Alternativt</u>: Om X och Y är ändliga mängder $|X| > |Y|$, så finns ingen injektion från X till Y.



Födelsedagsproblemet

Finns 366 möjliga födelsedagar. (29/2)

Om vi har 367 personer i en grupp, så måste två av dem ha samma födelsedag.

367 <u>objekt</u> (personer)

366 <u>lådor</u> (födelsedagar)

Handskakningsproblemet (pre-corona)

På en fest (med fler än 1 person) så skakar vissa hand med varandra. Visa att det alltid finns två pers som har skakar hand med lika många pers.

Låt $n = \#$ personer på festen ≥ 2

Personerna $= \{1, 2, \ldots, n\}$

<u>Fall 1</u>: Någon person skakar inte hand. Då finns ingen som skakar hand med $n-1$ pers.

Definiera $f : \{1, \ldots, n\} \to \{0, 1, \ldots, n-2\}$

$f(i) = \#$ personer som i skakar hand med

f är ingen injektion, enligt postfachsprinc.

Därför är $f(i) = f(j)$ för några i, j.

Handskakningsproblemet

Fall 2: Alla skakar hand någon gång.

$$f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n-1\}$$

Samma argument funkar igen.