Matematik baskurs, med diskret matematik

SF1671

Föreläsare: Petter Brändén

Föreläsning 14

Induktionsbevis | Vi har en följd av påståenden

$P(1), P(2), P(3), \ldots$

Vill bevisa $P(n)$ för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$

Induktion: basfall: Visar $P(1)$ sann

Induktionssteget: Visa $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Om vi kan visa basfall o induktionssteg så gäller $P(n)$ för alla n.

$$\underset{\text{sann}}{P(1)} \underset{\text{induktionssteg}}{\Longrightarrow} \underset{\text{sann}}{P(2)} \Rightarrow \ldots$$

Stark induktion: $P(1), P(2), P(3), \ldots$

basfall: $P(1)$ sann

induktionssteg: Om $P(1)$ och $P(2)$ och $P(3)$ ... och $P(n)$ är sann så är också $P(n+1)$ sann

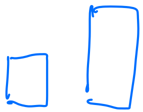
I vissa fall så behöver vi visa flera "basfall", t ex vid rekursion av typen

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$
$$n \geq 2$$

Exempel. Vi ska bygga ett torn av klossar. Det finns två typer av klossar. Ena typen är 1cm hög och den andra är 2cm hög. Hur många olika torn av höjd n kan jag bygga, om första klossen alltid måste vara 1cm?

antal

$a_n = \#$ torn av höjd n

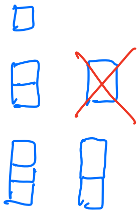


1cm 2cm

$n=1$

$n=2$

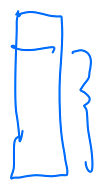
$n=3$



n	a_n
0	0
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5

Två fall

Fall I: sista klossen har höjd 1.

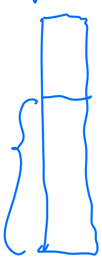


torn av höjd $n-1$

$\boxed{\text{ges } a_{n-1}}$

Fall 2: sista klossen har höjd 2.

$\boxed{\text{ges } a_{n-2}}$



höjd $n-2$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ n \geq 2 \\ a_0 = 0,\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Exempel. Alla heltal $n \geq 2$ kan skrivas som en produkt av primtal.

Bevis med stark induktion.

$P(n)$: n kan skrivas som en produkt av primtal.

Basfall: $n=2$ och 2 är ett primtal. ✓

Induktionssteg: Antag $P(2), P(3), \ldots, P(n)$ är sanna, $n \geq 2$.

Två fall: Fall 1: $n+1$ är ett primtal ✓

Fall 2: $n+1$ är inte ett primtal

Betyder att $n+1 = a \cdot b$, där a och b är mindre än $n+1$ och större än 1.

Starka induktionsantagandet säger att $P(a)$ och $P(b)$ är sanna, så a och b kan skrivas som en produkt av primtal. Men då kan även $n+1 = a \cdot b$ skrivas som en produkt av primtal.

Exemplet följer nu med starka induktionsprincipen. □

Exempel. Låt $t \geq 2$ vara ett heltal. Varje positivt heltal x kan unikt skrivas på formen

bas t

$$x = a_n \cdot t^n + a_{n-1} \cdot t^{n-1} + \cdots a_1 \cdot t + a_0 \cdot t^0$$

$(a_n a_{n-1} \ldots a_0)_t$

där $a_n > 0$ och $0 \leq a_i < t$ för alla i.

Bevis med stark induktion:

Bas $x = 1$: $x = a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = \ldots = 0$

$x = 1 \cdot t^0$ är den unika formen.

Induktionssteg: Antag sant för $x = 1, 2, 3, \ldots, k-1$
Vill visa sant för $x = k$. Dividera med t:

$x = q \cdot t + r$, $0 \leq r < t$ och q, r är unika

Eftersom $q < k$, så kan vi använda induktionsantagandet

så $q = \tilde{a}_n \cdot t^n + \tilde{a}_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \tilde{a}_1 t^1 + \tilde{a}_0 t^0$.

(Kalla $r = a_0$)

$x = q \cdot t + r = (\tilde{a}_n t^n + \tilde{a}_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \tilde{a}_1 t^1 + \tilde{a}_0 t^0) \cdot t + r$

$= \tilde{a}_n t^{n+1} + \tilde{a}_{n-1} t^n + \cdots + \tilde{a}_1 t^2 + \tilde{a}_0 t^1 + a_0$

sätt $\tilde{a}_k = a_{k+1}$ för $k = 0, 1, \ldots, n$

$$x = a_{n+1} t^{n+1} + a_n t^n + \cdots + a_1 t^1 + a_0$$

Exempel. Talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras rekursivt av $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 4$ och

$$a_n = 4n - 6 + a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}, \qquad \text{för } n \geq 3.$$

Visa med induktion eller stark induktion att $a_n = n^2$ för alla $n \geq 0$.

Eftersom vi bara kan använda rekursionen för $n \geq 3$ så måste kolla $n=0,1,2$ för hand (våra basfall).

basfall: $a_0 = 0 = 0^2$, $a_1 = 1 = 1^2$, $a_2 = 4 = 2^2$ ✓

Induktionssteget: Antag att $a_k = k^2$ för $k \leq n-1$ och visa för n. (Kan antaga att $n \geq 3$)

Använd rekursionen och induktionsantagandet ($a_k = k^2$).

$$a_n = 4n - 6 + a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} \overset{\substack{\text{ind.ant.} \\ a_k = k^2}}{=}$$

$$= 4n - 6 + (n-1)^2 - (n-2)^2 + (n-3)^2 =$$

$$= 4n - 6 + n^2 - 2n + 1 - n^2 + 4n - 4 + n^2 - 6n + 9 =$$

$$= 0 + 0 \cdot n + n^2 = n^2.$$

Så $a_n = n^2$ och Exemplet följer med stark induktion.

Exempel. Bevisa att $(n \geq 1)$.

$$P(n): \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \right)$$

Bevisa med induktion.

Basfall: $P(1)$ dvs $\frac{1}{1^2} \leq 2 - \frac{1}{1}$ dvs $1 \leq 1$ ✓

Induktionssteget: Antag $P(n)$ sann och bevisa $P(n+1)$ är sann.

$P(n+1)$: $VL(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = VL(n) + \frac{1}{(n+1)^2}$

$= \left\{ \begin{array}{l} \text{ind. ant.} \\ VL(n) \leq HL(n) \end{array} \right\} \leq HL(n) + \frac{1}{(n+1)^2} = 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$

Återstår att visa att $\boxed{\cancel{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq HL(n+1) = \cancel{2} - \frac{1}{n+1} \quad ☆}$

dvs att $-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq -\frac{1}{(n+1)} \Longleftarrow$

$\frac{1}{(n+1)^{\cancel{2}}} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n\cancel{(n+1)}}$

Sant eftersom $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

Så ☆ är sann, så $VL(n+1) \leq HL(n+1)$ dvs $P(n+1)$ är sann. Olikhet följer nu av induktionsprincipen.

Satslogik

(påstående)

- En sats är ett enkelt eller sammansatt uttalande som antingen är sant eller falskt.

Tex: $P(n)$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

sant för $n \geq 1$

$R(n)$ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{2}$

falsk för $n \geq 1$

Satslogik

- En sats är ett enkelt eller sammansatt uttalande som antingen är sant eller falskt.
  - 9 är ett primtal. falskt

Satslogik

- En sats är ett enkelt eller sammansatt uttalande som antingen är sant eller falskt.
  - 9 är ett primtal.
  - Jorden är platt.

Satslogik

- En sats är ett enkelt eller sammansatt uttalande som antingen är sant eller falskt.
  - 9 är ett primtal.
  - Jorden är platt.
  - IFK Göteborg har vunnit UEFA-cupen två gånger. Sant 1982 1987

Satslogik

- En sats är ett enkelt eller sammansatt uttalande som antingen är sant eller falskt.
  - 9 är ett primtal.
  - Jorden är platt.
  - IFK Göteborg har vunnit UEFA-cupen två gånger.
  - (Victor kan lyfta flera tusen kilo) och (ta sig över hav och land.)

Sammansatt uttalande

Satslogik

- En sats är ett enkelt eller sammansatt uttalande som antingen är sant eller falskt.
  - 9 är ett primtal.
  - Jorden är platt.
  - IFK Göteborg har vunnit UEFA-cupen två gånger.
  - Victor kan lyfta flera tusen kilo och ta sig över hav och land.
  - Om 9 är ett primtal, så kan Victor lyfta flera tusen kilo och ta sig över hav och land. Sann eller falsk?

Ett falsk uttalande implicerar alla uttalanden.
Så sant.

Satslogik

- En sats är ett enkelt eller sammansatt uttalande som antingen är sant eller falskt.
  - 9 är ett primtal.
  - Jorden är platt. Falsk
  - IFK Göteborg har vunnit UEFA-cupen två gånger.
  - Victor kan lyfta flera tusen kilo och ta sig över hav och land.
  - Om 9 är ett primtal, så kan Victor lyfta flera tusen kilo och ta sig över hav och land.
  - Om jorden inte är platt ~~om~~ så är Bianca är övningsassistent i SF1671.

Sant eller falskt ?

Eftersom Bianca ej är övningsassistent så är satsen falsk.

Satslogik

- En sats är ett enkelt eller sammansatt uttalande som antingen är sant eller falskt.
  - 9 är ett primtal.
  - Jorden är platt.
  - IFK Göteborg har vunnit UEFA-cupen två gånger.
  - Victor kan lyfta flera tusen kilo och ta sig över hav och land.
  - Om 9 är ett primtal, så kan Victor lyfta flera tusen kilo och ta sig över hav och land.
  - Om jorden inte är platt om så är Bianca är övningsassistent i SF1671.

sant

- Istället för sant eller falsk skriver vi 1 och 0.

falskt

Satslogik

- En sats är ett enkelt eller sammansatt uttalande som antingen är sant eller falskt.
  - 9 är ett primtal.
  - Jorden är platt.
  - IFK Göteborg har vunnit UEFA-cupen två gånger.
  - Victor kan lyfta flera tusen kilo och ta sig över hav och land.
  - Om 9 är ett primtal, så kan Victor lyfta flera tusen kilo och ta sig över hav och land.
  - Om jorden inte är platt om så är Bianca är övningsassistent i SF1671.
- Istället för sant eller falsk skriver vi 1 och 0.
- Om p och q är satser, så kan vi bilda nya satser.

Satslogik

- En sats är ett enkelt eller sammansatt uttalande som antingen är sant eller falskt.
  - 9 är ett primtal.
  - Jorden är platt.
  - IFK Göteborg har vunnit UEFA-cupen två gånger.
  - Victor kan lyfta flera tusen kilo och ta sig över hav och land.
  - Om 9 är ett primtal, så kan Victor lyfta flera tusen kilo och ta sig över hav och land.
  - Om jorden inte är platt om så är Bianca är övningsassistent i SF1671.
- Istället för sant eller falsk skriver vi 1 och 0.
- Om p och q är satser, så kan vi bilda nya satser.
- Konjunktion: $p \wedge q$ uttalas "p och q". Sanningstabell:

"och"

definitionen av $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exempel. Konjunktion:

4 är ett primtal och 4 är udda

Falskt uttalande bestående av två satser

p : 4 är ett primtal

q : 4 är udda.

$p \wedge q$ är falskt.

- **Disjunktion**: $p \vee q$ uttalas "p eller q".

$p \vee q$ är sann om någon (eller båda) av p, q är sanna

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Exempel: Viktors ovan.

- Implikation: $p \to q$ uttalas "Om p är sann, så är q sann".

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Vi har sett $\Longrightarrow$ förut

Den används i matematiken, men $\longrightarrow$ används i logiken.

Exempel: Om Mika bor vid Zinkens damm, så bor hon i Stockholm.