Matematik baskurs, med diskret matematik

SF1671

Föreläsare: Petter Brändén

Föreläsning 17

Binomialtal:

$[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, $[0] = \emptyset$

$0 \leq k \leq n$

$$\binom{[n]}{k} = \{ S \mid S \subseteq [n] \text{ och } |S| = k \}$$

$$\binom{[3]}{2} = \{ \{1,3\}, \{1,2\}, \{2,3\} \}$$

$$\binom{n}{k} = \text{"}n \text{ välj } k\text{"} = \left| \binom{[n]}{k} \right|$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Pascals triangel. För heltal $0 \le k \le n > 0$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

$\binom{n}{k} = 0$ om vi inte har $0 \le k \le n$

Rekursion: $\binom{0}{0} = \binom{[0]}{0} = 1$

0 ← $k=0$

$n=0$: 0 1 0

$n=1$: 0 1 1 0

$n=2$: 0 1 2 1 0

$n=3$: 0 1 3 3 1 0

$n=4$: 0 1 4 6 4 1 0

$n=4$: 0 1 5 10 10 5 1 0

$n=6$: 0 1 6 15 20 15 6 1 0

$n=7$: 0 1 7 21 35 35 21 7 1 0

$35 = \binom{7}{4}$

$\binom{0}{0}$

$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

Bevis:

disjunkt union

$$\binom{[n]}{k} = \binom{[n-1]}{k} \cup \left\{ S \cup \{n\} \;\middle|\; S \in \binom{[n-1]}{k-1} \right\}$$

alla som inte innehåller n

innehåller n

Additionsprincipen

$$\binom{n}{k} = \left|\binom{[n]}{k}\right| = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Binomialsatsen. För heltal $n \geq 0$,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Induktionsbevis:

basfall: $n=0$

$$VL = (1+x)^0 = 1$$

$$HL = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k = \binom{0}{0} x^0 = 1 \quad \checkmark$$

Induktionssteg: Antag sant för $n-1$, där $n-1 \geq 0$ och visa för n.

$$VL_n = (1+x)^n = (1+x)\cdot\underbrace{(1+x)^{n-1}}_{=VL_{n-1}} = \left\{\begin{matrix}\text{ind. ant.}\\ VL_{n-1} = HL_{n-1}\end{matrix}\right\}$$

$$= (1+x)\cdot HL_{n-1} = (1+x)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1} =$$

$j=k$ $j=k+1$ dvs $k=j-1$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j + \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} x^j$$

ok $j=n$

$\binom{n-1}{n} = 0$

ok med $j=0$

$\binom{n-1}{-1} = 0$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n-1}{j} x^j + \sum_{j=0}^{n} \binom{n-1}{j-1} x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left[\binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1} \right] x^j = \left\{ \text{Sätt } j=k \right\} = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] x^k$$

Exempel. Sätt $x = \pm 1$ i biniomialsatsen.

$$(x+1)^1 = 1 + x$$
$$(x+1)^2 = 1 + 2x + x^2$$
$$(x+1)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$
$$(x+1)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$
$$\vdots$$

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$\boxed{x = 1}$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$\boxed{x = -1}$ $\boxed{n \geq 1}$

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = *$$

dela upp k i jämn och udda

$k = 2j$ $\qquad$ $k = 2j+1$

avrunda ner

$$* = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} (-1)^{2j} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} (-1)^{2j+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} = 0$$

Det finns lika många delmängder av jämn storlek som av udda storlek.

Exempel. Utveckla $(1+x)^m \cdot (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$.

Vad säger detta om binomialtalen?

Ersätt med binomialtal

$$\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k$$

$$\sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \cdot \binom{n}{k-j}\right) \cdot x^k$$

$$\boxed{\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \cdot \binom{n}{k-j}}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left[\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right] x^k$$

Exempel. 186 studenter ska ha seminarium i 4 olika salar med 36, 42, 45 och 63 platser vardera. På hur många olika sätt kan studenterna fördelas? ($36+42+45+63=186$, så inga tomma platser).

1). Välj de som ska sitta i sal 1: $\binom{186}{36}$ olika sätt,

2). Välj nu de som ska sitta i sal 2: $\binom{186-36}{42}$

3). —||— sal 3: $\binom{186-36-42}{45}$

4). —||— sal 4 $\binom{186-36-42-45}{63} = \binom{63}{63}$

Multiplikationsprincipen:

Svar: $\binom{186}{36} \cdot \binom{186-36}{42}\binom{186-36-42}{45} \cdot \binom{63}{63}$

$$= \frac{186!}{36!\,(\cancel{186-36})!} \cdot \frac{(\cancel{186-36})!}{42!\,(\cancel{186-36-42})!} \cdot \frac{(\cancel{186-36-42})!}{45!\,63!} = \frac{186!}{36!\cdot 42!\cdot 45!\cdot 63!}$$

Multinomialtal

Antag $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$. Multinomialtalet

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}$$

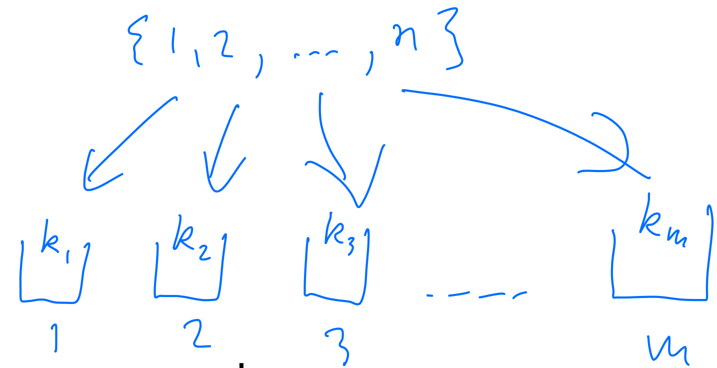
är antalet sätt att fördela talen $\{1, 2, \ldots, n\}$ i m olika lådor så att

låda 1 får k_1 element,

låda 2 får k_2 element,

$\ddots$

låda m får k_m element.



Sats.

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$$

$m = 2$

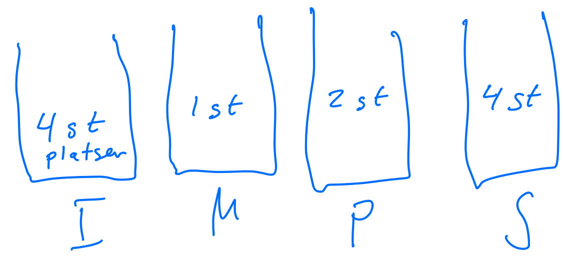
$$\binom{n}{k, n-k} = \binom{n}{k}$$

Exempel.

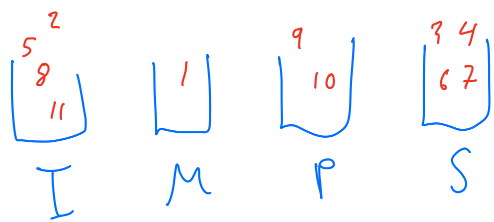
Hur många olika ord kan man bilda genom att kasta om bokstäverna i MISSISSIPPI? ← numrerat platserna

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

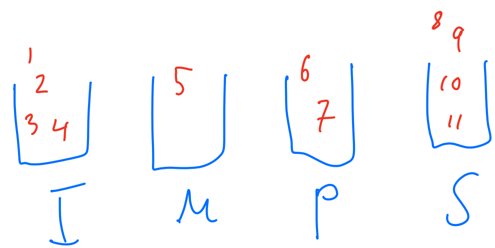
T ex IIII M PP SSSS



MISSISSIPPI



IIII M PP SSSS



Svar!

$$\binom{11}{4,1,2,4} = \frac{11!}{4!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 4!} = \frac{11!}{24\cdot 2\cdot 24}$$

Ordnat val med upprepning

Antalet sätt att ordna n objekt, där man har

$$\begin{array}{rl} k_1 & \text{stycken av första slaget,} \\ k_2 & \text{stycken av andra slaget,} \\ & \ddots \\ k_m & \text{stycken av } m\text{:e slaget} \end{array}$$

är

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$$

Exempel. Hur många olika ord med 4 bokstäver kan bildas ur ordet STOLLE?

Tex SELL, LOTS

Fall 1: Högst ett L

ordnat val av 4 ur $\{S, T, O, L, E\}$ utan upprepning

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5!$

Fall 2: Precis två L:

$\underset{1}{\_\_} \quad \underset{2}{\overset{L}{\_\_}} \quad \underset{3}{\_\_} \quad \underset{4}{\overset{L}{\_\_}}$

Välj platser för L: $\binom{4}{2}$ sätt

Resten blir ett ordnat val av 2 ur $\{S, T, O, E\}$

$4 \cdot 3$

Svar:

$5! + \binom{4}{2} \cdot 4 \cdot 3$

$= 120 + 6 \cdot 12$

$= 192$

Exempel. Låt $\mathcal{M}$ vara mängden av alla ord som kan bildas genom att kasta om bokstäverna i ordet RAGGARGRANEN $= A^3 E^1 G^3 R^3 N^2$

(a) Bestäm $|\mathcal{M}|$.

Svar: $\binom{12}{3,1,3,3,2} = \frac{12!}{6^3 \cdot 2}$

Exempel. Låt $\mathcal{M}$ vara mängden av alla ord som kan bildas genom att kasta om bokstäverna i ordet RAGGARGRANEN

(a) Bestäm $|\mathcal{M}|$.

(b) Hur många ord i $\mathcal{M}$ innehåller ordet GRENAR?

<u>Tex</u> RAG<u>GRENAR</u>GAN

- Välj plats för GRENAR på.
  7 val av plats.
- Återstår antal ord som vi kan forma av AAGGNR $\binom{6}{2,2,1,1}$

$\therefore \quad 7 \cdot \frac{6!}{4}$

Exempel. Låt $\mathcal{M}$ vara mängden av alla ord som kan bildas genom att kasta om bokstäverna i ordet RAGGARGRANEN

(a) Bestäm $|\mathcal{M}|$. Kom ihåg $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$

(b) Hur många ord i $\mathcal{M}$ innehåller ordet GRENAR?

(c) Hur många ord i $\mathcal{M}$ innehåller varken ordet GRENAR eller ordet NARRA? Tex så är inte ordet GRENAKRRAAGGN tillåtet.

Låt $S = \{$ord som innehåller GRENAR$\}$

$T = \{$ —||— NARRA$\}$

Vi söker $|M \setminus (S \cup T)| = |M| - |S \cup T| = |M| - |S| - |T| + |S \cap T|$

Vet $|M|$ & $|S|$. $|T| = 8 \cdot \binom{7}{1,1,1,1,3} = 8!/3!$

$|S \cap T| = ?$ Enda sättet är att de förekommer som GRENARRA

$$|S \cap T| = \underbrace{5}_{\text{val av vilken plats GRENARRA är på}} \cdot \binom{4}{2,1,1} = \frac{5!}{2}$$

$$\boxed{\text{Svar: } \frac{12!}{6^3 \cdot 2} - \frac{7!}{4} - \frac{8!}{3!} + \frac{5!}{2}}$$