Matematik baskurs, med diskret matematik

SF1671

Föreläsare: Petter Brändén

Föreläsning 1

Kursupplägg

- Kurshemsida med all info på Canvas.

Kursupplägg

- Kurshemsida med all info på Canvas.
- Föreläsningar: Digitala på Zoom.
- Övningar: Fysiska på Campus och digitala på Zoom. Läraren går igenom exempel, ni räknar själva och får tillfälle att ställa frågor.

Kursupplägg

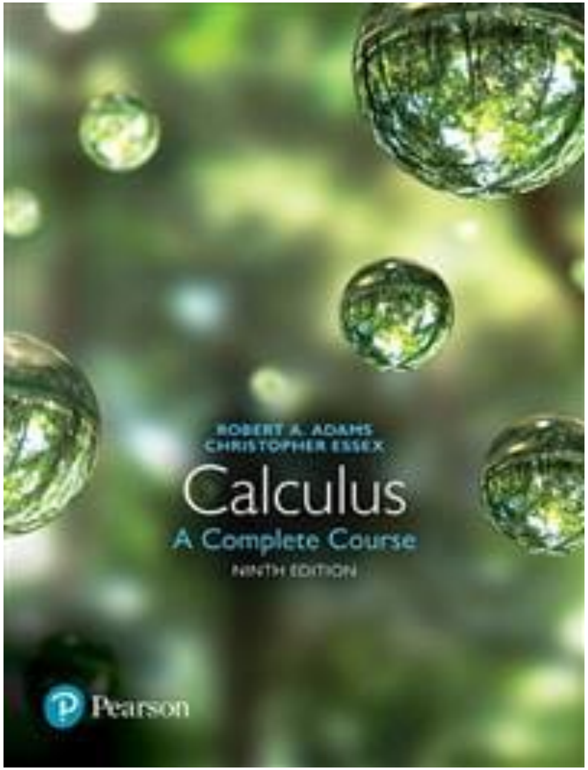
- Kurshemsida med all info på Canvas.
- Föreläsningar: Digitala på Zoom.
- Övningar: Fysiska på Campus och digitala på Zoom. Läraren går igenom exempel, ni räknar själva och får tillfälle att ställa frågor.
- Seminarier:
  - 4 seminarier.
  - Inlämningsuppgift. Vardera ger ett bonus på tentan.
  - Frivillig diskussion i grupp.

Kursupplägg

- Kurshemsida med all info på Canvas.
- Föreläsningar: Digitala på Zoom.
- Övningar: Fysiska på Campus och digitala på Zoom. Läraren går igenom exempel, ni räknar själva och får tillfälle att ställa frågor.
- Seminarier:
  - 4 seminarier.
  - Inlämningsuppgift. Vardera ger ett bonus på tentan.
  - Frivillig diskussion i grupp.
- Supplemental Instruction (SI): Extra hjälp med övningar (fristående från kursen).
- Tentamen: Skriftlig tentamen 27/10 och omtenta 22/12.

Kurslitteratur

- R. A. Adams and C. Essex, **Calculus, A Complete Course**, nionde eller tionde upplagan (Pearson).
- K. Eriksson och H. Gavel, **Diskret matematik och diskreta modeller**, andra upplagan (Studentlitteratur).

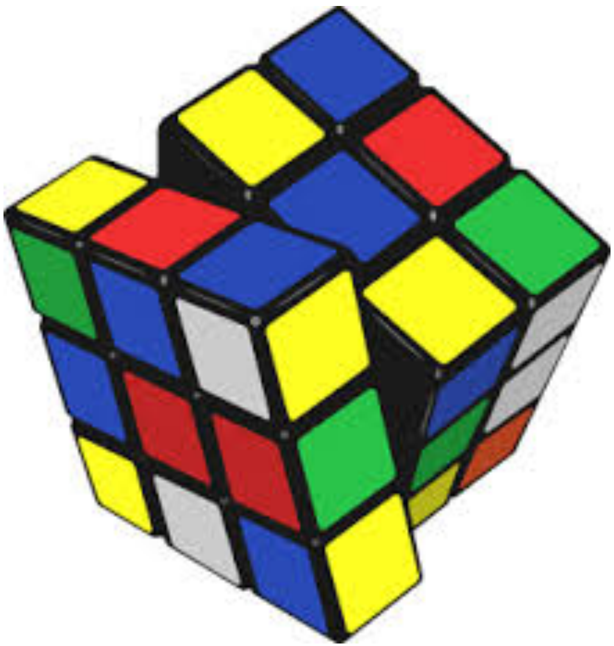


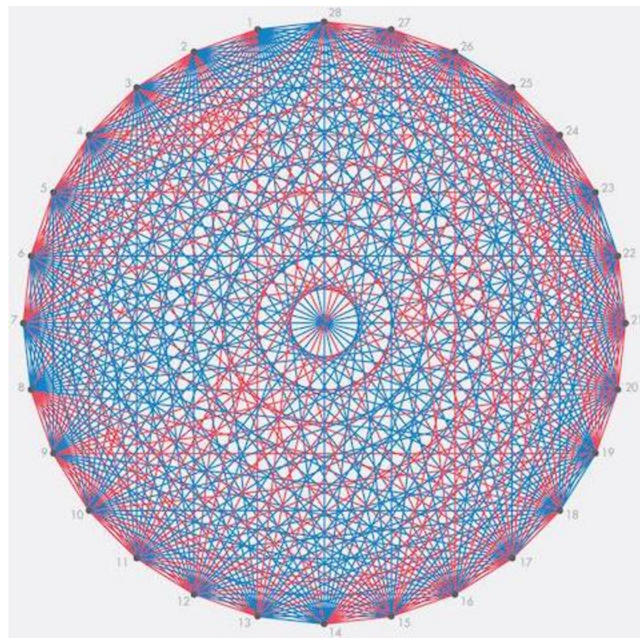
Innehåll

- Två delar basmatte och diskret matematik.

Innehåll

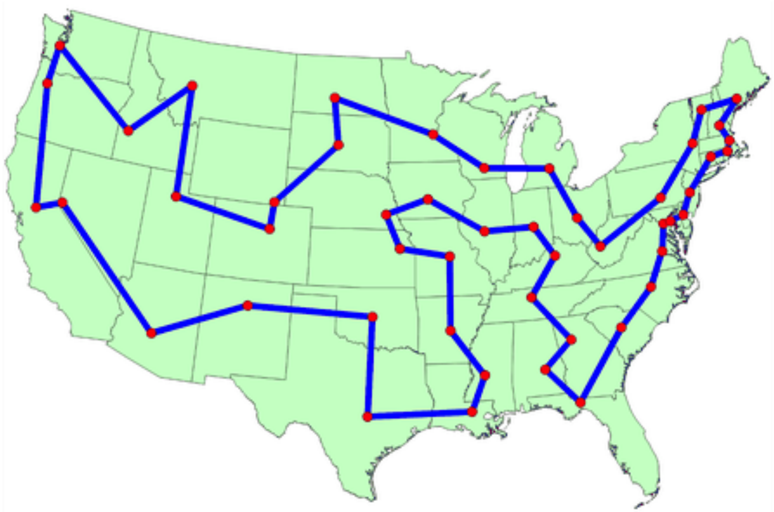
- Två delar basmatte och diskret matematik.
- Diskret matematik:
- Diskret som i motsatsen till kontinuerlig.
- Matematisk grund för datalogi.





Diskret matematik

- På hur många olika sätt kan jag utföra en uppgift?
- Vad är sannolikheten att få *Royal Straight Flush* på given i poker?
- Analysera nätverk. Hur ska en lastbilschaufför som ska besöka flera ställen hitta en optimal rutt (minst kostsam)?



Mängder

- $S = \{a, b, c\}$, $\quad b \in S$, $\quad b$ är ett **element** i S $\quad$ (b **tillhör** S).

Mängder

- $S = \{a, b, c\}$, $b \in S$, b är ett **element** i S (b **tillhör** S).
- **Naturliga tal**: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **Heltal**: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **Rationella tal**: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ och } b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

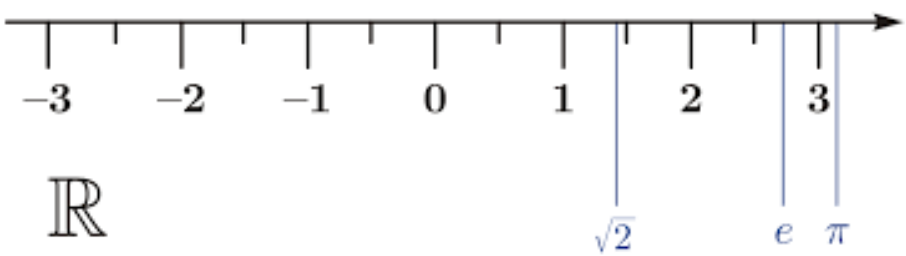
$$2/3, \; -1, 44444\cdots, 1/5 - 12 + 8/3, \ldots$$

Mängder

- $S = \{a, b, c\}, \quad b \in S, \quad b$ är ett **element** i S $\quad$ (b **tillhör** S).
- **Naturliga tal**: $\quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- **Heltal**: $\quad \mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- **Rationella tal**: $\quad \mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ och } b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

$$2/3, \; -1,44444\cdots, 1/5 - 12 + 8/3, \dots$$

- **Reella tal**: $\quad$ Gränsvärden av rationella tal. T.ex. $e = 2,71828\dots$.



Olikheter

- Låt a och b vara reella tal.

a är till vänster om b på tallinjen.

- Vi skriver $a < b$ om $b - a$ är positivt. (a är **mindre än** b)
- Vi skriver $a \leq b$ om $b - a$ är positivt eller noll.

Olikheter

- Låt a och b vara reella tal.
- Vi skriver $a < b$ om $b - a$ är positivt. (a är **mindre än** b)
- Vi skriver $a \leq b$ om $b - a$ är positivt eller noll.
- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ för alla $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{ty } (b + c) - (a + c) = b - a.$$

Olikheter

- Låt a och b vara reella tal.
- Vi skriver $a < b$ om $b - a$ är positivt. (a är **mindre än** b)
- Vi skriver $a \leq b$ om $b - a$ är positivt eller noll.
- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ för alla $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{ty } (b + c) - (a + c) = b - a.$$

Räkneregler för olikheter.

- $a < b$ och $c > 0 \quad \Rightarrow \quad ac < bc$
- $a < b$ och $c < 0 \quad \Rightarrow \quad ac > bc$
- $0 < a < b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Exempel. Lös olikheten $3x^2 \geq 5x + 2$.

Addera $-(5x+2)$ på båda sidor av $\geq$.

Får: $3x^2 - (5x+2) \geq 5x + 2 - (5x+2)$

dvs $3x^2 - 5x - 2 \geq 0$ (Hitta rötterna till vänsterledet)

$x^2 - \frac{5x}{3} - \frac{2}{3} = 0$, $x = \frac{5}{2\cdot 3} \pm \sqrt{\frac{5^2}{2^2\cdot 3^2} + \frac{2}{3}}$

$= \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25 + 2\cdot 4\cdot 3}{2^2\cdot 3^2}}$

$= \frac{5}{6} \pm \frac{1}{6}\sqrt{25+24} = \frac{5}{6} \pm \frac{7}{6}$

$= 2, -\frac{1}{3}$

Så $x^2 - \frac{5x}{3} - \frac{2}{3} = (x-2)(x+\frac{1}{3})$

Reducerat problemet till att lösa

$(x-2)(x+\frac{1}{3}) \geq 0$ | Två kritiska punkter $x = 2, -\frac{1}{3}$

		$-1/3$		2	
$x-2$	$-$		$-$		$+$
$x+1/3$	$-$		$+$		$+$
$(x-2)(x+1/3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

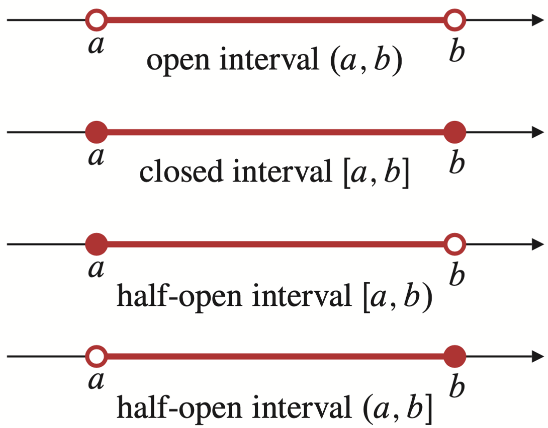
$(x-2)(x+\frac{1}{3})$ är ≥ 0 precis då $x \leq -\frac{1}{3}$ eller $x \geq 2$

Svar: $x \leq -\frac{1}{3}$ eller $x \geq 2$

Intervall $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

mängdbyggare. Ofta har man : istället

- Öppet intervall $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
- Slutet intervall $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
- Halvöppet intervall $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.
- Obegränsat intervall $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq b\}$.



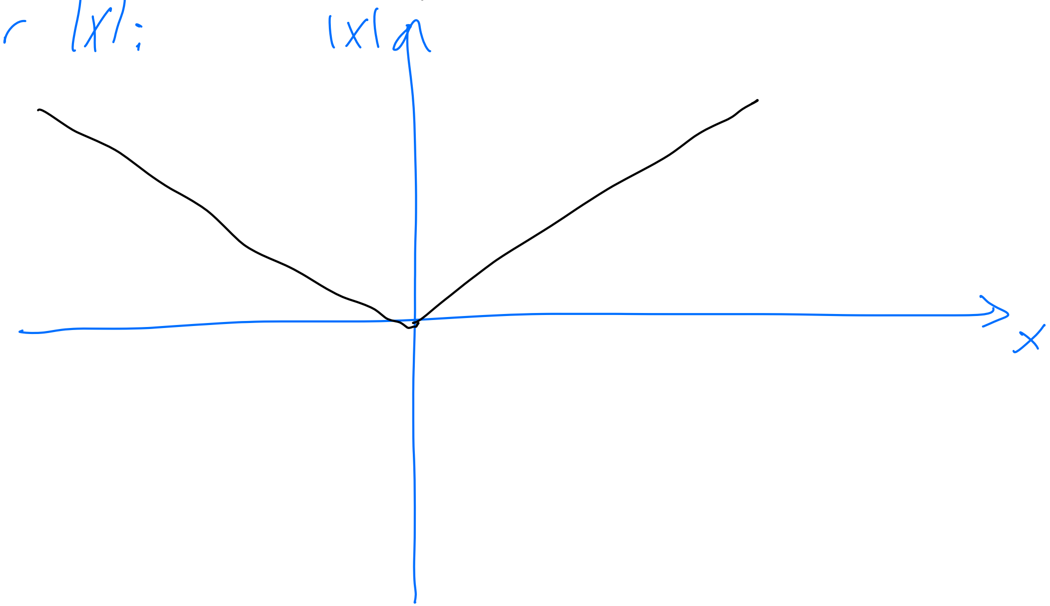
Absolutbelopp

- **Absolutbeloppet** av ett reellt tal x är

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0, \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}.$$

= "storleken på x"

Grafen för $|x|$:



Absolutbelopp

- **Absolutbeloppet** av ett reellt tal x är
$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0, \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}.$$
- Alternativ definition $|x| = \sqrt{x^2}$.

Absolutbelopp

- **Absolutbeloppet** av ett reellt tal x är

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0, \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}.$$

- Alternativ definition $|x| = \sqrt{x^2}$.
- För reella tal a och b gäller

$$|ab| = |a| \cdot |b| \text{ och } \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|} \text{ om } a \neq 0.$$

Exempel: Lös $|3x+4| = 2$.

Alternativ lösning:
Samma som att lösa
$(3x+4)^2 = |3x+4|^2 = 2^2 = 4$

Dividera med 3: $\left|x+\frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3}$

$|\ |$ växlar tecken då $x+\frac{4}{3}=0$ dvs $x = -\frac{4}{3}$:

Två fall:

Fall 1: $x \le -\frac{4}{3}$:

$\left|x+\frac{4}{3}\right| = -\left(x+\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3} \iff$

$-x-\frac{4}{3} = \frac{2}{3} \iff$

$x = -\frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{6}{3} - 2$

$\boxed{x = -2}$

Kolla gärna att lösningen ligger i korrekt intervall!

Fall 2: $x > -\frac{4}{3}$

$\left|x+\frac{4}{3}\right| = x+\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

$\iff x = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$

$\boxed{x = -\frac{2}{3}}$

Absolutbelopp

- **Triangelolikheten**: $|a+b| \leq |a| + |b|$ $\iff$ $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$

Bevis. $|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Absolutbelopp

- **Triangelolikheten**: $|a+b| \leq |a| + |b|$

Bevis. $|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$= |a|^2 + 2ab + |b|^2$

Absolutbelopp

- **Triangelolikheten**: $|a+b| \leq |a| + |b|$

Bevis. $|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

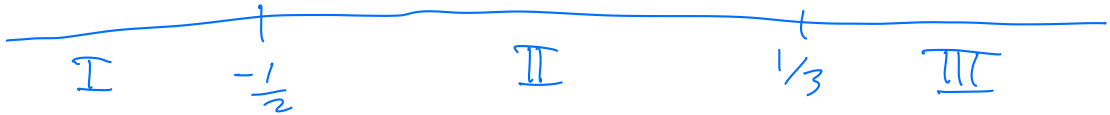
$= |a|^2 + 2ab + |b|^2$

$\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$

$= (|a| + |b|)^2$

Exempel: Lös $|2x+1|+|3x-1|=4$.

kritisk punkt $x=-\frac{1}{2}$ $x=\frac{1}{3}$ Tre fall:



$\mathrm{I}=(-\infty,-\frac{1}{2})$, $\mathrm{II}=[-\frac{1}{2},\frac{1}{3}]$, $\mathrm{III}=(\frac{1}{3},\infty)$

I: $|2x+1|+|3x-1| = -(2x+1)-(3x-1) = 4 \iff$

$-5x-1+1=4 \iff -5x=4 \iff x=-\frac{4}{5}$

II: $|2x+1|+|3x-1| = 2x+1-(3x-1) = 4 \iff$

$-x=2$ $\cancel{x=-2}$ ligger ej i II (falsk lösning)

III: $2x+1+3x-1=4 \iff$

$5x=4 \iff x=4/5$ ligger i III

Svar:
$x=-\frac{4}{5},\ \frac{4}{5}$

Exempel.

Implikationer

- I matematik används ett formellt språk bestående av t.ex **påståenden**, **variabler** och **implikationer**.
- Betrakta följande påståenden A och B

$$A: \quad x \in \mathbb{Q} \qquad \text{och} \qquad B: \quad x \in \mathbb{Z}.$$

Implikationer

- I matematik används ett formellt språk bestående av t.ex **påståenden**, **variabler** och **implikationer**.
- Betrakta följande påståenden A och B

$$A: \quad x \in \mathbb{Q} \qquad \text{och} \qquad B: \quad x \in \mathbb{Z}.$$

- Om B är sann, så är A också sann. Vi skriver då $B \Rightarrow A$ och säger $\underbrace{B \text{ **implicerar** } A}_{}$.

betyder "Om B är sann, så är A sann"

Implikationer

- I matematik används ett formellt språk bestående av t.ex **påståenden**, **variabler** och **implikationer**.
- Betrakta följande påståenden A och B

$$A: \quad x \in \mathbb{Q} \qquad \text{och} \qquad B: \quad x \in \mathbb{Z}.$$

- Om B är sann, så är A också sann. Vi skriver då $B \Rightarrow A$ och säger B **implicerar** A.
- Betrakta följande påståenden C och D om reella tal x

$$C: \quad x \geq 0 \text{ och } x^2 = 9 \qquad \text{och} \qquad D: \quad 3x = 9.$$

Implikationer

- I matematik används ett formellt språk bestående av t.ex **påståenden**, **variabler** och **implikationer**.
- Betrakta följande påståenden A och B

$$A: \quad x \in \mathbb{Q} \qquad \text{och} \qquad B: \quad x \in \mathbb{Z}.$$

- Om B är sann, så är A också sann. Vi skriver då $B \Rightarrow A$ och säger B **implicerar** A.
- Betrakta följande påståenden C och D om reella tal x

$$C: \quad x \geq 0 \text{ och } x^2 = 9 \qquad \text{och} \qquad D: \quad 3x = 9.$$

- Vi har $C \Rightarrow D$ och $D \Rightarrow C$. Detta förhållande brukar skrivas $C \Leftrightarrow D$ och vi säger att C är **ekvivalent** med D.

Sanna precis samtidigt

Implikationer

- I matematik används ett formellt språk bestående av t.ex **påståenden**, **variabler** och **implikationer**.
- Betrakta följande påståenden A och B

$$A: \quad x \in \mathbb{Q} \qquad \text{och} \qquad B: \quad x \in \mathbb{Z}.$$

- Om B är sann, så är A också sann. Vi skriver då $B \Rightarrow A$ och säger B **implicerar** A.
- Betrakta följande påståenden C och D om reella tal x

$$C: \quad x \geq 0 \text{ och } x^2 = 9 \qquad \text{och} \qquad D: \quad 3x = 9.$$

- Vi har $C \Rightarrow D$ och $D \Rightarrow C$. Detta förhållande brukar skrivas $C \Leftrightarrow D$ och vi säger att C är **ekvivalent** med D.
- Implikation och ekvivalens är inte samma sak

Exempel. Lös (a): $3x - 4 \leq 6$, (b): $(x^2+4)/x > x$.

$x \in \mathbb{R}$

(a): $3x - 4 \leq 6 \iff 3x - 4 + 4 \leq 6 + 4$

regel för addition vid olikheter

$\iff 3x \leq 10 \iff x \leq \frac{10}{3}$

division med positivt tal.

(b): $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

Fall 1) $x > 0$: $(x^2+4)/x > x \iff x^2 + 4 > x^2$ (mult. med x)

$\iff 4 > 0$ Alltid sant

subtr. x^2 från båda sidor

Betyder: $x > 0$ löser olikheten.

Fall 2) $x < 0$: Mult. med x på båda sidor. (< byter riktning)

$(x^2+4)/x > x \iff x^2 + 4 < x^2 \iff 4 < 0$. Aldrig sant

så i fall 2 finns ingen lösning.

Svar: Alla $x > 0$.

Exempel. Lös
$$\frac{-x^2}{x-4} < x.$$

$x \neq 4$

$$\iff \frac{-x^2}{x-4} - x < 0 \iff \frac{-x^2 - x(x-4)}{x-4} < 0$$

$$\iff \frac{-2x^2+4x}{x-4} < 0 \iff \frac{-2x(x-2)}{(x-4)} < 0$$

		0		2		4	
$-2x$	$+$		$-$		$-$		$-$
$(x-2)$	$-$		$-$		$+$		$+$
$(x-4)$	$-$		$-$		$-$		$+$
$\frac{-2x(x-2)}{x-4}$	$+$	0	$-$	0	$+$	odef.	$-$

Svar: $x \in (0,2)$ eller $x \in (4,\infty)$