Matematik baskurs, med diskret matematik

SF1671

Föreläsare: Petter Brändén

Föreläsning 20

Stirlingtal: $S(n,k)$. Antalet sätt som jag dela upp $\{1,2,\dots,n\}$ i k icke-tomma högar. (högarna ej numrerade).

(Om numrerade så får vi $k!\,S(n,k)$
$= \#$ surjektion $f:\{1,\dots,n\} \longrightarrow \{1,\dots,k\}$)

Stirlings triangel: $1 < k \le n$

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k\,S(n-1,k)$$

$n \backslash k$	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	3	1	0	0
4	1	7	6	1	0
5	1	15	25	10	1

$S(5,3)$

Exempel. På hur många sätt kan en familj med 5 personer fördela sig på 3 olika hotellrum, så att inget rum är tomt?

(rum 1, rum 2, rum 3)

$$f: \{1,2,3,4,5\} \longrightarrow \{1,2,3\}$$

surjektion.

$$3!\, S(5,3) = 3\cdot 2\cdot 25 = 6\cdot 25 = 150$$

Exempel. 15 hankatter och 15 honkatter ska fördelas i 4 burar (onumrerade, ingen får vara tom). På hur många sätt kan detta göras om vi förbjuder alla grupper av formen $\{x, y\}$, där x är en hane och y är en hona?

Antag att burarna är numrerade.

PIE?

Låt $\mathcal{U}$ vara fördelningarna i burar, men utan restriktioner.

$|\mathcal{U}| = 4!\,S(30, 4)$ (Surjektioner)

$A_i = \{$ fördelningarna s.a. bur i är av den förbjudna formen $\{x, y\}$ $\}$

Vi söker $|\mathcal{U} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)|$

$|A_i| = 15 \cdot 15 \cdot 3!\,S(28, 3)$

val av förbjuden hankatt

förbjuden honkatt

Resten av katterna ska fördelas i 3 burar.

$$|A_i \cap A_j| = 15 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 2!\, S(26,2)$$

hane i bur i | hona i bur i | hane i j | hona i j

resten av katterna.

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 15 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 1$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

PIE ger $|\mathcal{U} \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_4)| = 4!\, S(30,4) - 4 \cdot 15^2\, 3!\, S(28,3)$
$+ \binom{4}{2} \cdot 15^2 \cdot 14^2 \cdot 2 \cdot S(26,2) - \binom{4}{3} 15^2 \cdot 14^2 \cdot 13^2 = (\star)$

Slutligen får vi dela med $4!$ eftersom vi ska ha onumrerade burar

Svar: $(\star)/4!$

Olika typer av val

Ordnat val av k st ur $\{1,2,\dots,n\}$: $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)$

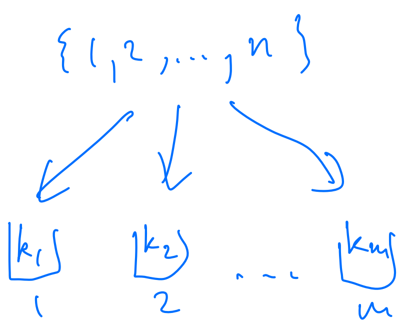
$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Tex: Hur många köer av längd k finns?

Oordnat val av k st ur $\{1,2,\dots,n\}$: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Tex: Antal delmängder av storlek k ur $\{1,2,\dots,n\}$?

Fördela $\{1,2,\dots,n\}$ i m st. olika lådor så att låda i får k_i st.



$$\binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_m} = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_m!}$$

Multinomialtal

Olika typer av val

Fördela n st identiska kulor i k st. olika lådor (ingen låda tom)

$\binom{n-1}{k-1}$ $\Longleftrightarrow$ Antal lösningar till $x_1+x_2+\dots+x_k=n$, $x_i \geq 1$ heltal.

I stället tillåter tomma lådor

$x_1+x_2+\dots+x_k=n$, $x_i \geq 0$ $\binom{n+k-1}{k-1}$

Multimängd t.ex $\{1,2,1,1,2,4,5,5,7,4\}$

Antalet multimängder av storlek n med element tagna från $\{1,2,\dots,k\}$. $\binom{n+k-1}{k-1}$

Lägga $\{1,2,\dots,n\}$ i k st onumrerade icke-tomma högar: $S(n,k)$

numrerade högar $k!\,S(n,k)$

Antalet funktioner $f:\{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,k\}$ är k^n. $(= \underbrace{k\cdot k\cdot\ldots\cdot k}_{n \text{ ggr}})$

Tentauppgifter

$\log_3(x) =$ det tal y s.a. $3^y = x$

Vad är $\log_3(\frac{1}{6}) + \log_3(2)$?

$\log_3(xy) = \log_3(x) + \log_3(y)$

$\log_3(x/y) = \log_3(x) - \log_3(y)$

Sf

$$\log_3\left(\frac{1}{6}\right) + \log_3(2) = \log_3(1) - \log_3(\overset{2\cdot 3}{6}) + \log_3(2)$$

$$= 0 - \cancel{\log_3(2)} - \log_3(3) + \cancel{\log_3(2)}$$

$$= -\log_3(3) = -1$$

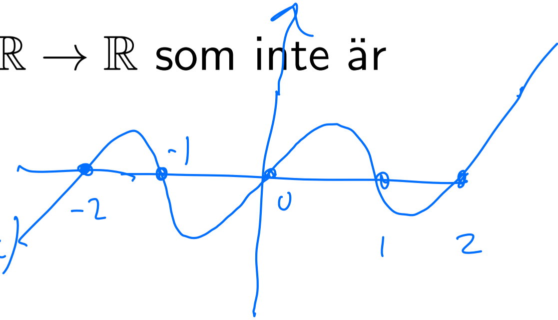
Tentauppgifter

Ge exempel på en udda surjektiv funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som inte är injektiv.

Udda $f(-x) = -f(x)$

injektiv $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Surjektiv "alla är träffade"



$$f(x) = x \cdot (x-1)(x-2)(x+1)(x+2)$$

$$f(-x) = -x(-x-1)(-x-2)(-x+1)(-x+2)$$

$$= -x(x+1)(x+2)(x-1)(x-2) = -f(x)$$

Tentauppgifter

Bestäm $3! \cdot S(5,3)$.

Stirlings triangel

Tentauppgifter

Ekvivalensrel. Reflexiv xRx
Symmetrisk $xRy \Rightarrow yRx$
transitiv $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Är relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}$ som definieras genom $a\mathcal{R}b$ om $a^2 - b^2 \leq 7$ en ekvivalensrelation?

$0R9$? $0^2 - 9^2 \leq 7$ Ja

$9R0$? $9^2 - 0^2 < 7$ Nej

$0R9$ men $9 \not R 0$
Så den är inte symmetrisk.

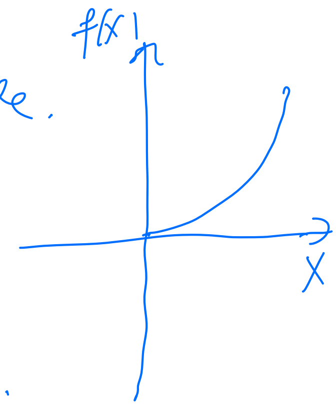
Är relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}$ som definieras genom $a\mathcal{R}b$ om $a + b \equiv 0 \pmod 7$ en ekvivalensrelation?

Reflexiv? $a=1$ aRa?

$a+a=1+1=2 \not\equiv 0 \pmod 7$ Så $1 \not R 1$ så ej reflexiv.

Är funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$ en surjektion?

Nej! Bara jämna tal är träffade.



Är funktionen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ en injektion?

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (Ja ty växande)

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^2 \neq x_2^2$, Ja ty $x_1, x_2 \geq 0$.

Tentauppgifter

En vanlig kortlek är helt slumpässigt blandad. Vad är sannolikheten att klöver kung inte ligger direkt ovanpå klöver ess och att ruter kung inte ligger direkt ovanpå ruter ess? händer samtidigt.

Två händelser sker samtidigt.

$A = \{$ klöver kung ligger på klöver ess $\}$

$B = \{$ ruter –||– ruter –||– $\}$

Vi letar efter $P[(A \cup B)^c] = P[$ varken A eller B inträffar $]$

Gynnsamma utfall $= |(A \cup B)^c| = |\Omega \setminus (A \cup B)| = \{PIE\} =$

$= |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|$

$= 52! - 51! - 51! + 50!$

De två korten sitter ihop

ordnat val

$\Omega =$ Alla utfall $= 52!$

Svar: $\dfrac{52! - 2 \cdot 51! + 50!}{52!} = 1 - \dfrac{2}{52} + \dfrac{1}{52 \cdot 51}$

Tentauppgifter

x är inverterbart om det finns $y \in \mathbb{Z}_{220}$ s.a. $xy = 1 \iff \boxed{sgd(x, 220) = 1}$

Hur många inverterbara element finns i $\mathbb{Z}_{220}$?

Antalet element x s.a $sgd(x, 220) = 1$.

$220 = 2 \cdot 110 = 2 \cdot 11 \cdot 10 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$

Vi är ute efter antalet tal i $\{1, 2, \ldots, 220\} = \mathcal{U}$
som inte är delbara med någon av $2, 5$ eller 11

$A = \{x \in \mathcal{U} \mid 2 \text{ delar } x\}$, $B = \{x \in \mathcal{U} \mid 5 \text{ delar } x\}$

$C = \{x \in \mathcal{U} \mid 11 \text{ delar } x\}$

PIE

Ute efter $|\mathcal{U} \setminus (A \cup B \cup C)| = |\mathcal{U}| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$

$|\mathcal{U}| = 220$, $|A| = \frac{220}{2} = 110$, $|B| = \frac{220}{5} = 44$, $|C| = \frac{220}{11}$

$|A \cap B| = |\{\text{delbara med } 10\}| = \frac{220}{10} = 22$, $|A \cap C| = |\{\text{delbara med } 22\}| = \frac{220}{22} = 10$

$|B \cap C| = \frac{220}{55} = 4$, $|A \cap B \cap C| = \frac{220}{110} = 2$

$\therefore$ Svar: $220 - 110 - 44 - 20 + 22 + 10 + 4 - 2 = 80$