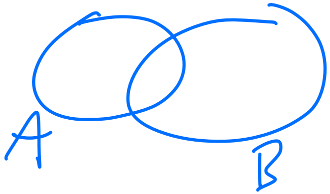
Matematik baskurs, med diskret matematik

SF1671

Föreläsare: Petter Brändén

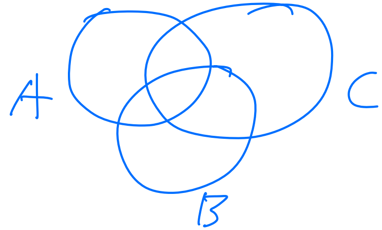
Föreläsning 19

Principen om inklusion/exklusion (PIE)



$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B| \qquad (\star)$$

Tre mängder A, B, C



$$|A\cup B\cup C| = |A\cup (B\cup C)| = \left\{ \begin{array}{l} \text{Applicera } (\star) \\ \text{på } A \text{ och } B\cup C \end{array} \right\} =$$

$$= |A| + \underbrace{|B\cup C|}_{(\star)} - \underbrace{|A\cap (B\cup C)|}_{\text{(Distributiv)}} = |A| + |B| + |C| - |B\cap C|$$

$$- \underbrace{|(A\cap B)\cup (A\cap C)|}_{(\star)} = |A| + |B| + |C| - |B\cap C| - \big(|A\cap B| + |A\cap C| - |A\cap B\cap C|\big)$$

$$= |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

Principen om inklusion/exklusion

Sats. Om $A_1, \ldots, A_n$ är ändliga mängder så är

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_S (-1)^{|S|+1} |A_S|, \quad A_{\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}} = A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k},$$

$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap D| + \ldots) + (|A \cap B \cap C| + \ldots) - |A \cap B \cap C \cap D|$

där summan är över alla icke-tomma delmängder till $\{1, \ldots, n\}$.

Sats. Om $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathcal{U}$ är ändliga mängder så är

$$|\mathcal{U} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| = \sum_S (-1)^{|S|} |A_S|,$$

där summan är över alla delmängder till $\{1, \ldots, n\}$ och $A_\varnothing = \mathcal{U}$.

Principen om inklusion/exklusion

Sats. Om $A_1, \ldots, A_n$ är ändliga mängder så är

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_S (-1)^{|S|+1} |A_S|, \quad A_{\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}} = A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k},$$

där summan är över alla icke-tomma delmängder till $\{1, \ldots, n\}$.

Exempel. 200 studenter svarade på en enkät om deltagande i föreläsningar (F), övningar (O) och seminarier (S) under föregående vecka.

Alla svarade

$|F| = 172, |O| = 130, |S| = 150,$
$|F \cap S| = 142, |F \cap O| = 125, |S \cap O| = 123$
$|F \cap S \cap O| = 120$

Hur många deltog inte i något av momenten?

$\mathcal{U} = \{$alla studenter som tillfrågades$\}$

Söker $|\mathcal{U} \setminus (F \cup O \cup S)|$.

PIE säger att $|\mathcal{U} \setminus (F \cup O \cup S)| = |\mathcal{U}| - |F| - |O| - |S| + |F \cap O| + |F \cap S| + |O \cap S| - |F \cap S \cap O|$

$= 200 - 172 - 130 - 150 + 142 + 125 + 123 - 120$

$= 18$

Exempel.
Hundra identiska kulor ska fördelas i fyra olika lådor så att ingen låda är tom och ingen låda innehåller fler än trettio kulor. På hur många olika sätt kan detta göras?

$\mathcal{U}$ = mängden av alla fördelningar, men utan villkoret att ingen innehåller fler än 30.

$$|\mathcal{U}| = \binom{100-1}{4-1} = \binom{99}{3}, \quad A_1, A_2, A_3, A_4 \subseteq \mathcal{U}$$

A_i = mängden av alla fördelningar i $\mathcal{U}$ s.a. låda i får fler än 30 kulor.

Söker $|\mathcal{U} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)|$ $\quad$ PIE

$|A_1|$: Lägg först 30 kulor i låda ett. Sedan fördela övriga $(100-30)$ kulor i lådorna så att alla får minst en.

$$|A_i| = \binom{70-1}{4-1} = \binom{69}{3}$$

$|A_1 \cap A_2|$: Lägg först 30 kulor i låda I och 30 kulor i låda två och sedan fördela övriga $(100-60)$ kulor i lådorna så att alla får minst en.

$$|A_i \cap A_j| = \binom{39}{3}$$

På samma sätt $\quad |A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{100-3\cdot 30-1}{4-1} = \binom{9}{3}$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$, Finns inga sådana

$$|\mathcal{U} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| = |\mathcal{U}| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|)$$

$$+ \underbrace{(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots)}_{\binom{4}{2} \text{ termer}} - \underbrace{(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots)}_{\binom{4}{3} = 4 \text{ termer}}$$

$$= \binom{99}{3} - 4\cdot\binom{69}{3} + \binom{4}{2}\cdot\binom{39}{3} - 4\cdot\binom{9}{3}$$

Hattproblemet. n personer med hatt går på fest och lämnar hattarna på hatthyllan vid ankomst. Om de tar en hatt på måfå när de lämnar festen, vad är då sannolikheten att ingen får sin egen hatt?

Hattproblemet. n personer med hatt går på fest och lämnar hattarna på hatthyllan vid ankomst. Om de tar en hatt på måfå när de lämnar festen, vad är då sannolikheten att ingen får sin egen hatt?

förbjude

person	1	2	3	4	5	6	7	8
hatt vid utgång	3	2	5	7	8	6	4	1

permutation

$\mathcal{U}$ = mängden av permutationer av $\{1, 2, \dots, n\}$

$A_i = \{\pi \in \mathcal{U} \mid i$ får sin egen hatt i π. $\}$

Söker
$$\frac{|\mathcal{U} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)|}{|\mathcal{U}|}$$

Tillämpa PIE

$|\mathcal{U}| = n!$

$|A_i| = ?$

Dvs de händelser då i får sin egna hatt. Plats i är bestämd. Övriga "hattar" fördelas godtyckligt.

$|A_i| = (n-1)!$

$|A_i \cap A_j| = ?$ Två platser är bestämda. Resten väljs godtyckligt.

$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$

$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$ eftersom k bestämda & $(n-k)$ väljs godtyckligt.

Hur många sådana termer finns? $\binom{n}{k}$ "k mängder av n möjliga"

$\boxed{\text{PIE}}$

$$|U \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = \underbrace{|U|}_{=n!} - (\underbrace{|A_1| + |A_2| + \dots}_{\binom{n}{1} \text{ termer}}) + (\underbrace{|A_1 \cap A_2| + \dots}_{\binom{n}{2} \text{ termer}}) - (\underbrace{|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots}_{\binom{n}{3} \text{ termer}}) \pm \dots$$

där varje term $|A_i| = (n-1)!$, $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = (n-3)!$

$$= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \binom{n}{4}(n-4)! - \dots$$

Typisk term $\binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!\cancel{(n-k)!}}\cancel{(n-k)!} = \frac{n!}{k!}$

Sannolikheten är:

$$\frac{|\mathcal{U} \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)|}{n!} = \frac{n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} - \dots}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

T.ex: $n=3$ $\quad 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \text{(gäller för alla } x\text{)}$$

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n$$

När n går mot oändligheten så går sannolikheten mot e^{-1}

Stirlingtalen

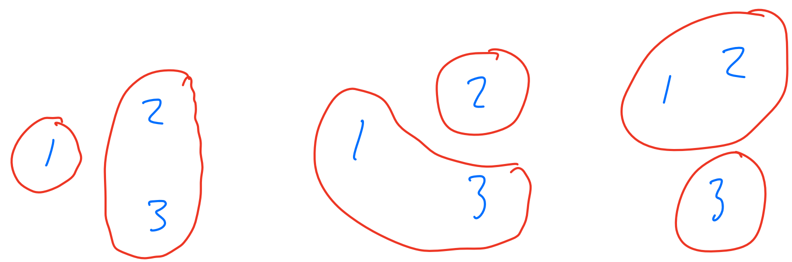
- På hur många olika sätt kan jag dela upp $\{1, 2, \ldots, n\}$ i k icke-tomma högar? Högarna är inte numrerade
- Svar. Stirlingtalet $S(n, k)$.

$S(n,1) = 1$ Lägga $\{1,2,\ldots,n\}$ i en hög.

$S(n,n) = 1$ Lägga $\{1,2,\ldots,n\}$ i n st högar

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots, \{n\}$

$S(3,2) = 3$



Stirlings triangel (Som Pascals triangel)

- **Sats.** $S(n,1) = S(n,n) = 1$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$ och

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k), \text{ för } 1 < k \leq n.$$

skillnaden från Pascal

n \ k	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	3	1	0	0
4	1	7	6	1	0
5	1	15	25	10	1

$25 = S(5,3)$

Stirlings triangel

- Sats. $S(n,1) = S(n,n) = 1$ för $n = 1,2,3,\ldots$ och

  $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$, för $1 < k \leq n$.

- Bevis. $S(n,k)$ = # sätt att fördela $\{1,\ldots,n\}$ i k högar.

Två fall:

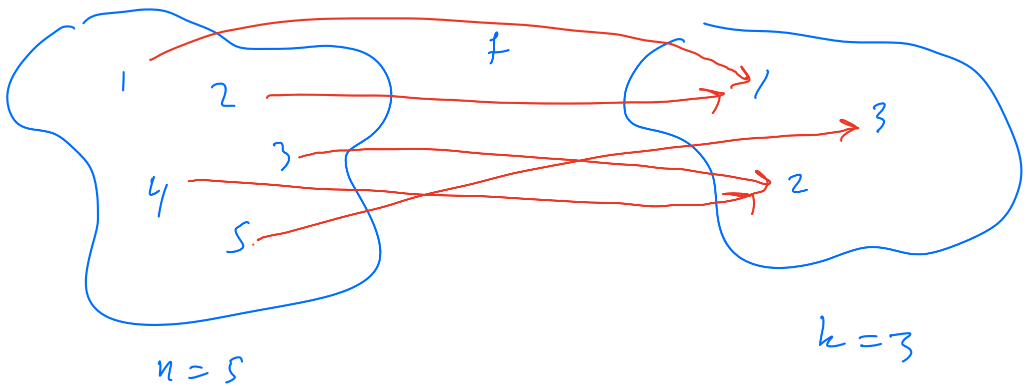
1). n är ensam i sin hög. $\{1,2,\ldots,n-1\}$ fördelas i $(k-1)$ högar. Dvs $S(n-1,k-1)$

2). n är inte ensam. Tag en partition av $\{1,2,\ldots,n-1\}$ i k högar. Välj en av högarna och placera n i den högen.

Dvs $\underbrace{k}_{\text{val av hög}} \cdot \underbrace{S(n-1,k)}_{\text{val av partition}}$

Exempel. Antalet surjektioner $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$ är $k! \cdot S(n, k)$.

Alla $\{1,2,\ldots,k\}$ är "träffade"



$\{1,2\}$ $\{5\}$ $\{3,4\}$ partition av $\{1,2,3,4,5\}$ i k högar/block.

$f=1$ $f=3$ $f=2$

En surjektion är samma sak som att fördela talen $\{1,2,\ldots,n\}$ i k st. numrerade lådor (så att ingen låda är tom)

Vi får en godtycklig surjektion genom att

(1). Först välja en partition ← $S(n,k)$ sätt

(2) Sedan ordna "högarna" så de blir numrerade.

$k!$ sätt