

Tarea 3, Métodos numéricos para la ciencia e ingeniería

Farid Borbar

8 de Octubre, 2015

1 Introducción y Marco Teórico

Se buscó implementar el método de Runge-Kuta para poder resolver problemas que consisten en ecuaciones diferenciales ordinarias, obteniendo una aproximación discreta para las funciones. En particular se estudiaron el Oscilador de Van der Pool y el Sistema de Lorentz, ambos son problemas clásicos dentro de lo que se llama Teoría del Caos y su importancia radicó en que sentaron las bases para el estudio de sistemas, que si bien son deterministas, son de muy difícil estudio debido a su susceptibilidad al cambio provocado por un cambio en las condiciones iniciales.

La ecuación de Van der Pool corresponde se deriva de:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu(x^2 - a^2)\frac{dx}{dt} \quad (1)$$

Donde considerando un cambio de variable, que explicaremos más adelante, se obtiene:

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -y - \mu^*(y^2 - 1)\frac{dy}{ds} \quad (2)$$

Que corresponde a la ecuación de Van der Pool en su máxima expresión.

Y la ecuación con la que se describe el Sistema de Lorentz está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{ds} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{ds} &= xy - \beta z \end{aligned}$$

Este sistema corresponde a la linealización de una EDO de tercer orden. Análogamente se buscó linealizar las ecuaciones de Van der Pool para lograr integrarlas con el método de Runge-Kuta de orden 3 que implementamos nosotros mismos, una vez hecho esto se procedió a trabajar con el Atractor de Lorentz mediante el método Runge-Kuta de orden 4 propio de *python*.

2 Procedimiento

2.1 Oscilador de Van der Pool

Inicialmente se tenía la Ec.(1), que, como se mencionó anteriormente, se trabajó mediante cambios de variable para llegar a la expresión conocida de Ec.(2). El cambio utilizado fue $y = x/a$ y $s = \sqrt[2]{k}$. Se implementó esto para pasar de una función de $x(t)$ a una de $y(s)$ donde las derivaciones de la regla de la cadena permitieran limpiar la ecuación original.

Posteriormente la EDO de segundo orden se linealizó, obteniendo un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{ds} &= z \\ \frac{dz}{ds} &= -y - \mu(x^2 - a^2)z\end{aligned}$$

Y fue este sistema el que operamos mediante el método de Runge-Kuta orden 3 que implementamos nosotros. La implementación del método consistió en definir una función vectorial (*funcionvectorial*), la cual tomara como argumentos y y z , y nos devolviera el sistema previo. Ya con esto, se procedió a calcular los elementos que requiere Runge-Kuta 3, es decir, las constantes $K1, K2$ y $K3$, todas las cuales son dependientes de *funcionvectorial*, y con ellos se puede obtener la iteración para aproximar un valor de la función evaluada en el siguiente punto: $y(s + \text{paso})$ en este caso.

En nuestro caso se consideró $\mu = 1.871$ (puesto que ese es mi RUT), y se tomó las condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0, y = 0.1$ y $\frac{dz}{ds} = 0, z = 4$.

2.2 Sistema de Lorentz

Para estudiar este sistema, se consideraron los valores de las constantes $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y $\rho = 28$. Al tomar estos valores particulares el sistema de Lorentz tiene la solución conocida del Atractor de Lorentz. Además se consideraron las condiciones iniciales ($x = 5, y = 5, z = z$) totalmente arbitrarias.

Bajo esta predeterminación es que se procedió a implementar el método de Runge-Kuta 4 *scipy.integrate.ode* de *python*.

Posteriormente se graficaron las soluciones en 3-D.

3 Resultados y Analisis

En los gráficos 1,2,3,4,5,6 y 7 se muestran los resultados de implementar nuestro método para Runge-Kuta 3 para calcular $Y(s)$, graficarla, y también graficar $Z = \frac{dy}{ds}$ respecto Y , variando el parámetro μ y las condiciones iniciales.

Se puede observar que el parámetro μ condiciona las amplitudes de oscilación inicial para Y vs s y genera mayor vorticidad en el centro para Y vs Z . El cambio en las condiciones iniciales afecta al punto de partida de la oscilación.

Análogamente en las figuras 8 y 9 se muestran los gráficos tridimensionales del atractor de Lorentz, para el cual se implementó el método de Runge-Kuta 4.

Se variaron los tiempos de integración y se eligieron condiciones iniciales arbitrarias para ambos.

Se ve que aplicar el método por un lapso de tiempo mayor genera más "vueltas" en los vórtices y más cercanas al centro del mismo.

4 Conclusiones

Se corroboró la efectividad del método de Runge-Kuta 3 implementado por nosotros, el cual no mostro problemas a la hora de aproximar la función deseada. Sin embargo, si mostró funcionar de manera más lenta que el método Runge-Kuta 4, lo cual era de esperarse.

Respecto el analisis de los sistemas trabajados, se concluye que la modificación de las condiciones iniciales en un sistema determinista caótico efectivamente arroja soluciones que pueden ser drásticamente diferentes, basta con observar los cambios en los gráficos.

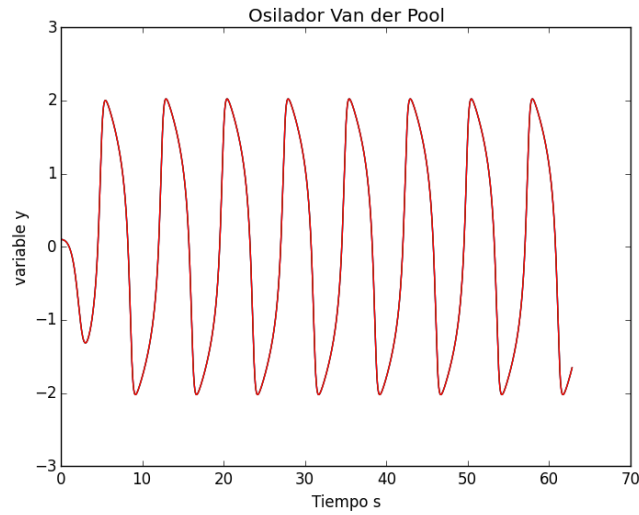


Figure 1: Gráfico de la función Y respecto el parámetro temporal s , para $\mu = 1.871$ y condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0$; $y = 0.1$.

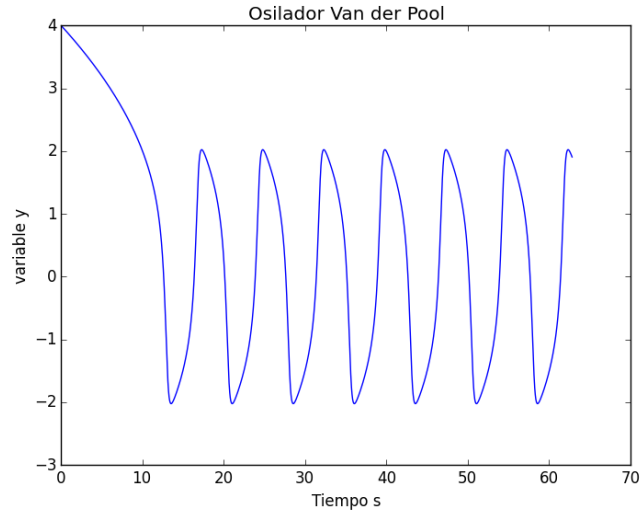


Figure 2: Gráfico de la función Y respecto el parámetro temporal s , para $\mu = 1.871$ y condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0; y = 4$.

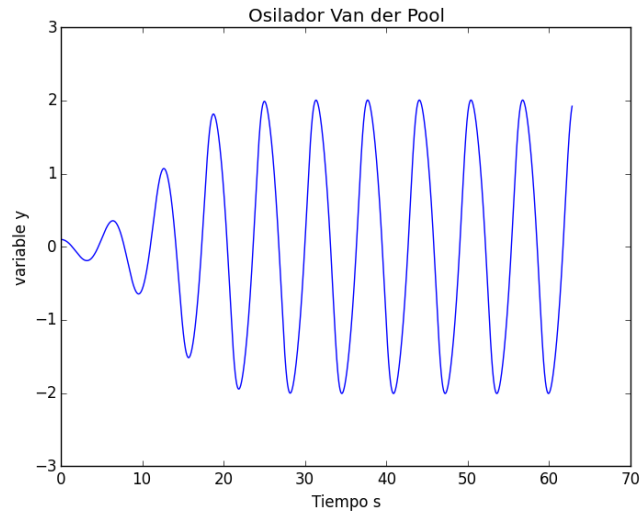


Figure 3: Gráfico de la función Y respecto el parámetro temporal s , para $\mu = 0.4$ y condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0; y = 0.1$.

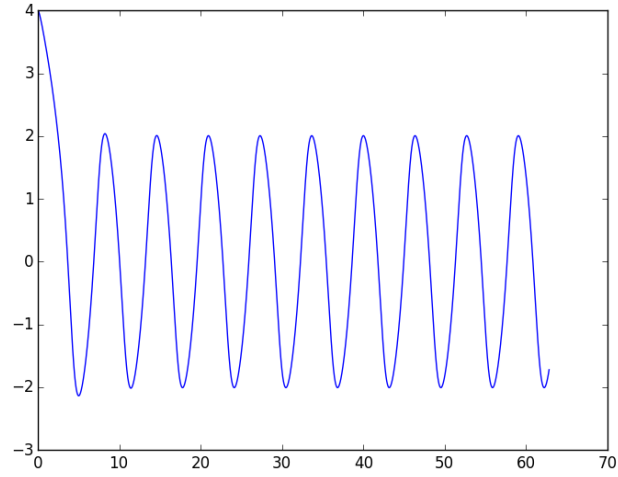


Figure 4: Gráfico de la función Y respecto el parámetro temporal s , para $\mu = 0.4$ y condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0; y = 4$.

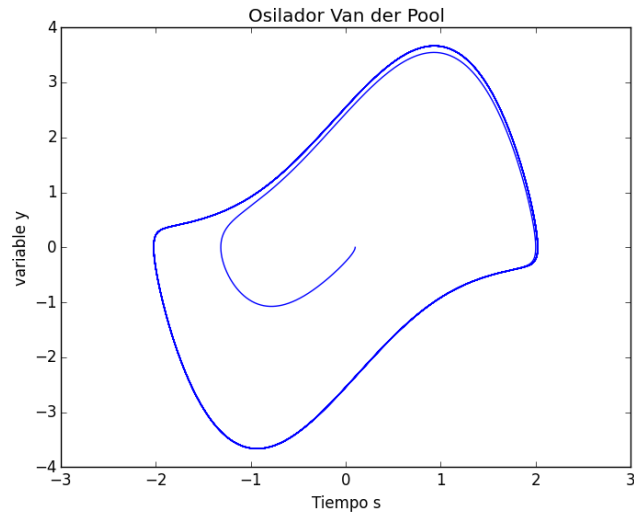


Figure 5: Gráfico de la función $Z = \frac{dy}{ds}$ respecto la función Y , para $\mu = 1.871$ y condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0; y = 1$.

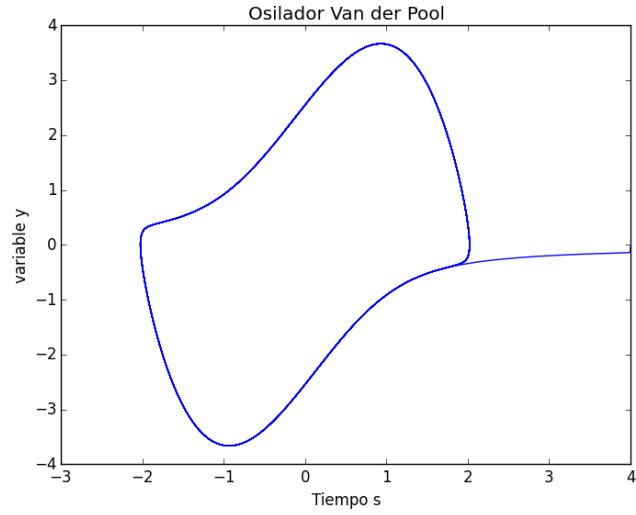


Figure 6: Gráfico de la función $Z = \frac{dy}{ds}$ respecto la función Y , para $\mu = 1.871$ y condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0; y = 4$.

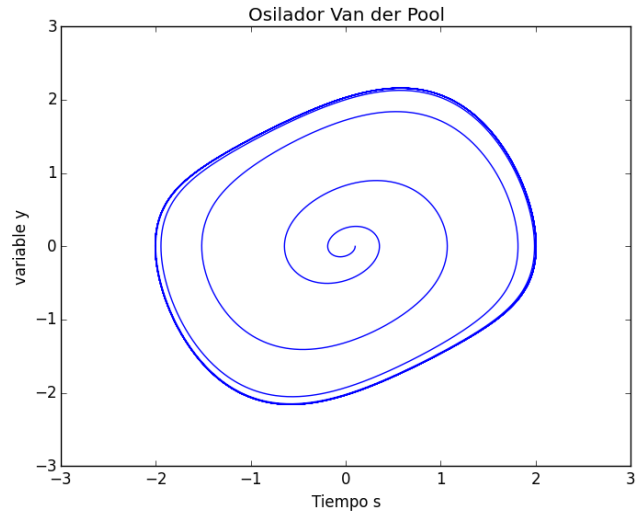


Figure 7: Gráfico de la función $Z = \frac{dy}{ds}$ respecto la función Y , para $\mu = 0.4$ y condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0; y = 1$.

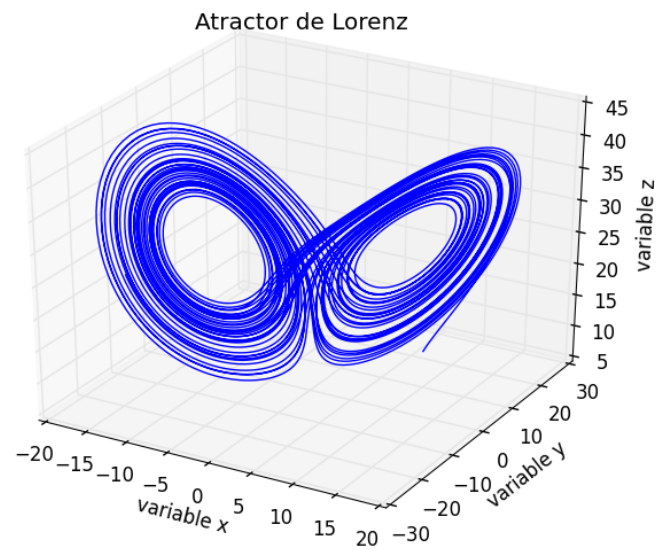


Figure 8: Gráfico tridimensional Atractor de Lorenz. Se calculo para un intervalo de tiempo de 50[s] con condiciones iniciales $(x = 5, y = 5, z = 5)$.

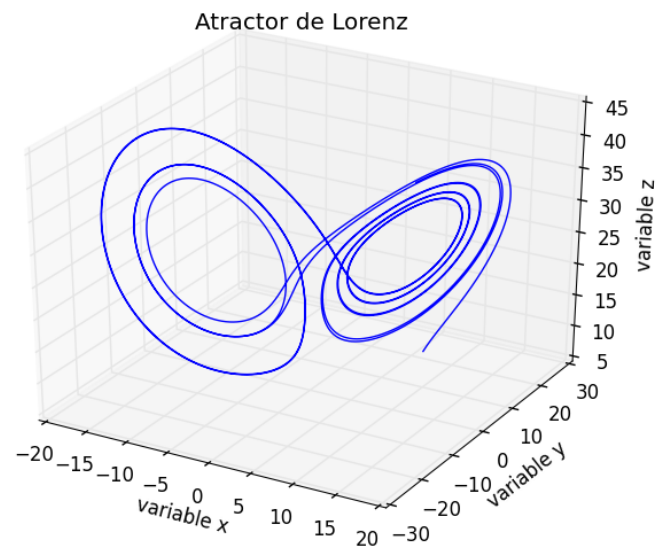


Figure 9: Gráfico tridimensional Atractor de Lorenz. Se calculo para un intervalo de tiempo de 10[s] con condiciones iniciales $(x = 5, y = 5, z = 5)$.