Tarea 3, Métodos numéricos para la ciencia e ingeniería

Farid Borbar

8 de Octubre,2015

1 Introducción y Marco Teórico

Se buscó implementar el método de Runge-Kuta para poder resolver problemas que consisten en ecuaciones diferenciales ordinarias, obteniendo una aproximación discreta para las funciónes. En particular se estudiaron el Oscilador de Van der Pool y el Sistema de Lorentz, ambos son problemas clásicos dentro de lo que se llamo Teoría del Caos y su importancia radicó en que sentaron las bases para el estudio de sistemas, que si bien son deterministas, son de muy dificil estudio debido a su susceptibilidad al cambio provocado por un cambio en las condiciones iniciales.
La ecuación de Van der Pool corresponde se deriva de:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu(x^2 - a^2)\frac{dx}{dt} \tag{1}$$

Donde considerando un cambio de variable, que explicaremos más adelante, se obtiene:

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -y - \mu^*(y^2 - 1)\frac{dy}{ds} \tag{2}$$

Que corresponde a la ecuación de Van der Pool en su máxima expresión.
Y las ecuacíon con la que se describe el Sistema de Lorentz está dada por:

$$\frac{dx}{ds} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{ds} = x(\rho - z) - y$$
$$\frac{dz}{ds} = xy - \beta z$$

Este sistema corresponde a la linealización de una EDO de tercer orden. Analogamente se buscó linealizar las ecuaciones de Van der Pool para lograr integrarlas con el método de Runge-Kuta de orden 3 que implementamos nosotros mismos, una vez hecho esto se procedio a trabajar con el Atractor de Lorentz mediante le método Runge-Kuta de orden 4 propio de *python*.

2 Procedimiento

2.1 Oscilador de Van der Pool

Inicialmente se tenía la Ec.(1), que, como se mencionó anteriomente, se trabajo mediante cambios de variable para llegar a la expreción conocida de Ec.(2). El cambio utilizado fue $y = x/a$ y $s = \sqrt[2]{k}$. Se implementó esto para pasar de una función de $x(t)$ a una de $y(s)$ donde las derivaciones de la regla de la cadena permitieran limpiar la ecuación original.
Posteriormente la EDO de segundo orden se linealizón, obteniendo un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{dy}{ds} = z$$
$$\frac{dz}{ds} = -y - \mu(x^2 - a^2)z$$

Y fue este sistema el que operamos mediante el método de Runge-Kuta orden 3 que implementamos nosotros. La implementación del método consistió en difinir una función vectorial ($funcionectorial$), la cual tomara como argumentos y y z, y nos devolviera el sistema previo. Ya con esto, se procedio a calcular los elementos que requiere Runge-Kuta 3, es decir, las constantes $K1$,$K2$ y $K3$, todas las cuales son dependientes de $funcionvectorial$, y con ellos se puede obtener la iteración para aproximar un valor de la función evaluada en el siguiente punto: $y(s + paso)$ en este caso.
En nuestro caso se consideró $\mu = 1.871$ (puesto que ese es mi RUT), y se tomo las condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0, y = 0.1$ y $\frac{dy}{ds} = 0, y = 4$.

2.2 Sistema de Lorentz

Para estudiar este sistema, se consideraron los valores de las constantes $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y $\rho = 28$. Al tomar estos valores particulares el sistema de Lorentz tiene la solución conosida del Atractor de Lorentz. Ademas se consideraron las condiciones iniciales ($x = 5, y = 5, z = z$) totalmente arbitrarias.
Bajo esta predeterminación es que se procedio a implementar el método de Runge-Kuta 4 *scipy.integrate.ode* de *python*.
Posteriormente se graficaron las soluciones en 3-D.

3 Resultados y Analisis

En los gráficos 1,2,3,4,5,6 y 7 se muestran los resultados de implementar nuestro método para Runge-Kuta 3 para calcular $Y(s)$, graficarla, y también graficar $Z = \frac{dy}{ds}$ respecto Y, variando el parámetro μ y las condiciones iniciales.
Se puede observar que el parámetro μ condiciona las amplitudes de oscilación inicial para $Yvss$ y genera mayor vorticidad en el centro para $YvsZ$. El cambio en las condiciones iniciales afecta al punto de partida de la oscilación.

Análogamente en las figuras 8 y 9 se muestran los gráficos tridimencionales del atractor de lorentz, para el cual se implemento el método de Runge-Kuta 4.

Se variaron los tiempos de integración y se elijieron condiciones iniciales arbitrarias para ambos.
Se ve que aplicar el método por un lapso de tiempo mayor genera más "vueltas" en los vortices y más cercanas al centro del mismo.

4 Concluciones

Se corroboró la efectividad del método de Runge-Kuta 3 implementado por nosotros, el cual no mostro problemas a la hora de aproximar la función deseada. Sin embargo, si mostró funcionar de manera más lenta que el método Runge-Kuta 4, lo cual era de esperarce.
Respecto el analicis de los sistemas trabajados, se concluye que la modificación de las condiciones iniciales en un sistema determinista caítico efectivamente arroja soluciones que pueden ser drásticamente diferentes, basta con observar los cambios en los gráficos.

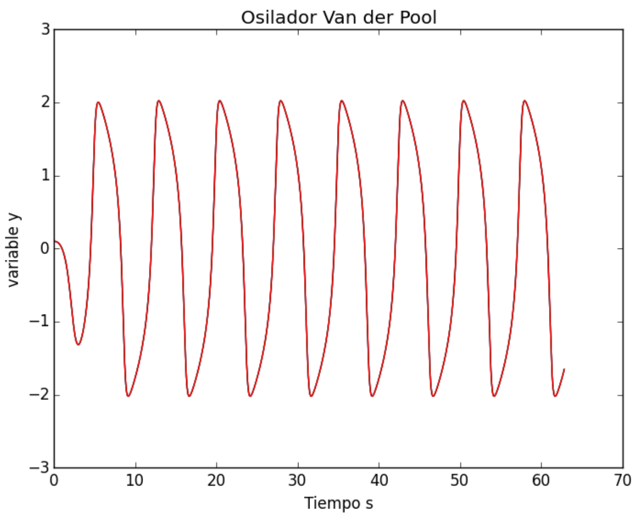

Figure 1: Gráfico de la funciíon Y respecto el parámetro temporal s, para $\mu = 1.871$ y condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0; y = 0.1$.

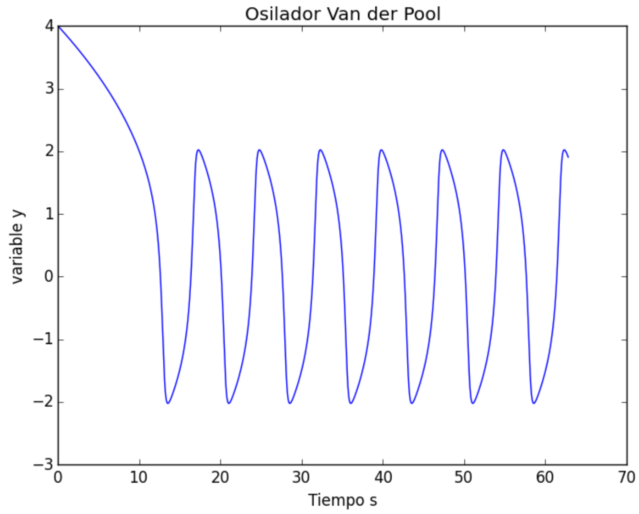

Figure 2: Gráfico de la funciíon Y respecto el parámetro temporal s, para $\mu = 1.871$ y condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0; y = 4$.

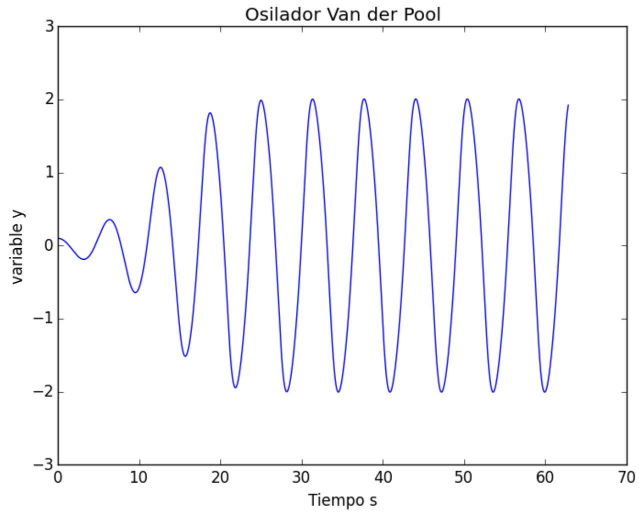

Figure 3: Gráfico de la funciíon Y respecto el parámetro temporal s, para $\mu = 0.4$ y condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0; y = 0.1$.

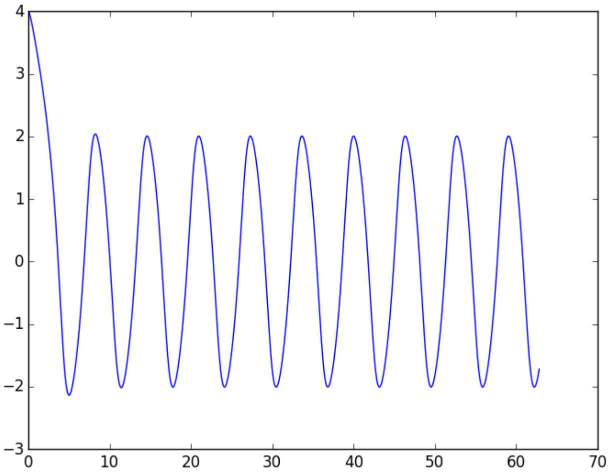

Figure 4: Gráfico de la funciíon Y respecto el parámetro temporal s, para $\mu = 0.4$ y condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0; y = 4$.

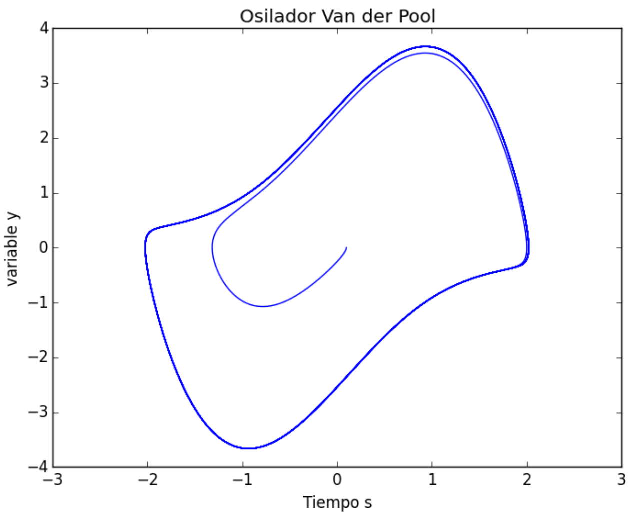

Figure 5: Gráfico de la funciíon $Z = \frac{dy}{ds}$ respecto la función Y, para $\mu = 1.871$ y condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0; y = 1$.

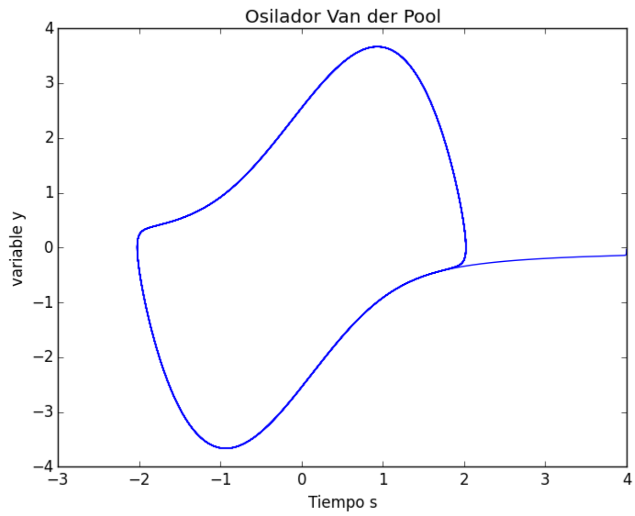

Figure 6: Gráfico de la funciíon $Z = \frac{dy}{ds}$ respecto la función Y, para $\mu = 1.871$ y condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0; y = 4$.

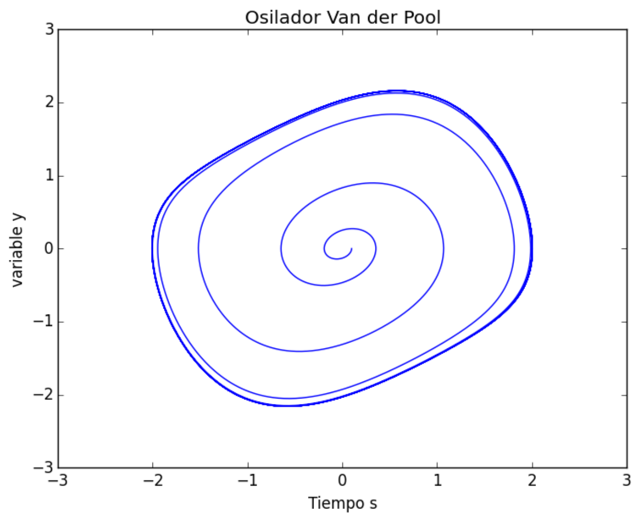

Figure 7: Gráfico de la funciíon $Z = \frac{dy}{ds}$ respecto la función Y, para $\mu = 0.4$ y condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0; y = 1$.

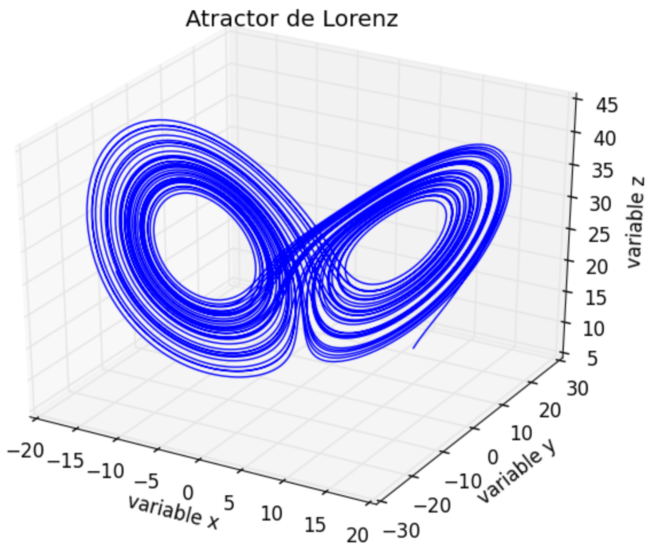

Figure 8: Gráfico tridimencional Atractor de Lorentz. Se calculo para un intervalo de tiempo de $50[s]$ con condiciones iniciales $(x = 5, y = 5, z = 5)$.

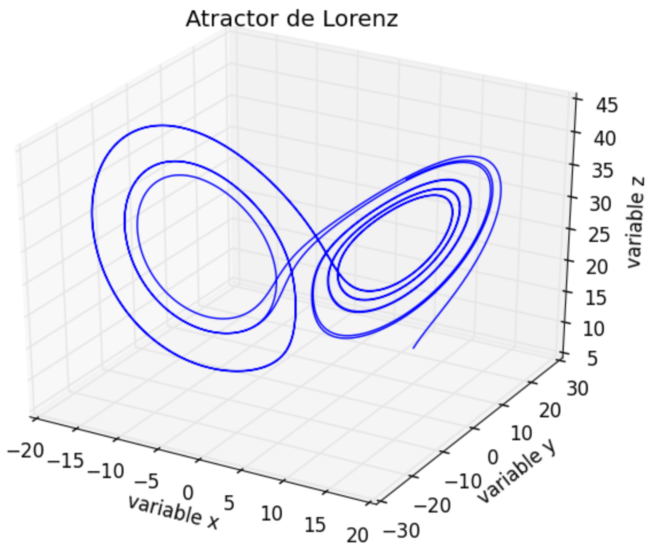

Figure 9: Gráfico tridimencional Atractor de Lorentz. Se calculo para un intervalo de tiempo de $10[s]$ con condiciones iniciales ($x = 5, y = 5, z = 5$).