ملخص لمفاهيم أساسية لحساب المثلثات في الوحدتين الاولى و الثانية

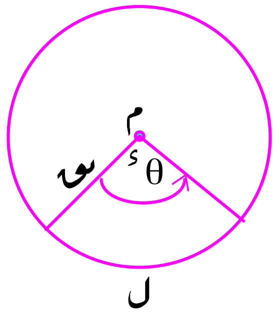
للصف الثاني عشر رياضيات متقدمة

اعداد الأستاذ / وليد نادي

أولا : القياس الدائرى لزاوية مركزية

$$\theta^{\text{ء}} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$$

$$\text{ل} = \theta^{\text{ء}} \times \text{نق}$$

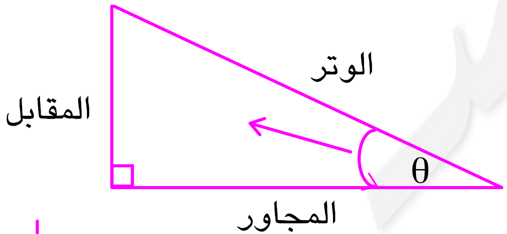


العلاقة بين التقدير الستينى والدائرى

$$\theta^{\text{ء}} = \text{س}^{\circ} \times \frac{\pi}{{}^{\circ}180}$$

$$\text{س}^{\circ} = \theta^{\text{ء}} \times \frac{{}^{\circ}180}{\pi}$$

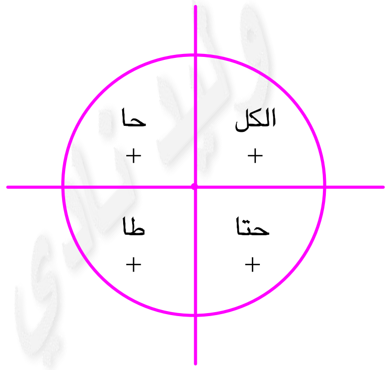
ثانيًا : الدوال المثلثية للزاوية الحادة



$$\text{حا } \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \qquad \text{قتا } \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$$

$$\text{حتا } \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \qquad \text{قا } \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$$

$$\text{طا } \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \qquad \text{ظتا } \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$



علاقات فيثاغورث :

إذا كان ∠ أ و ب فى وضعها القياسى

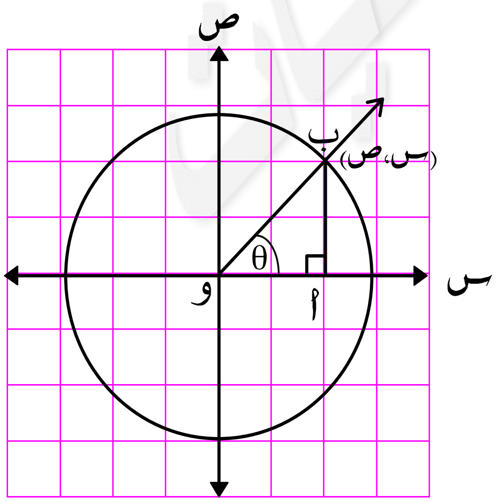
، $\text{ق}(\angle \text{ أ و ب}) = \theta$

فإن : $\text{حا } \theta = \text{ص}$ ، $\text{حتا } \theta = \text{س}$

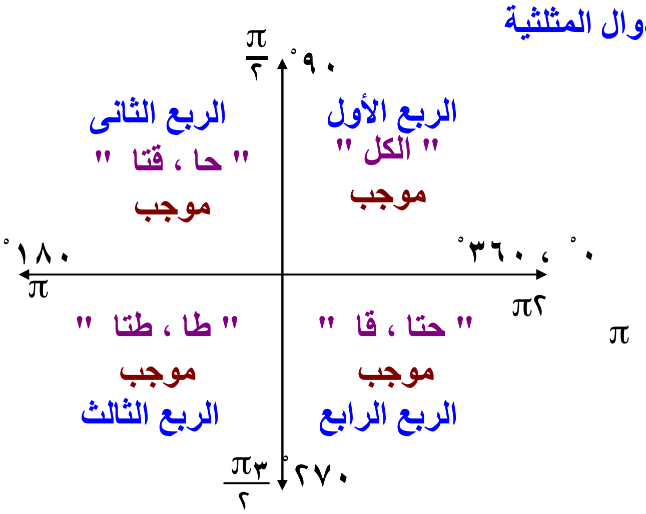
$\because \text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1$ $\quad \therefore \boxed{\text{حا}^2 \theta + \text{حتا}^2 \theta = 1}$

ومنها

$\therefore \boxed{\text{حا}^2 \theta = 1 - \text{حتا}^2 \theta}$ | $\therefore \boxed{\text{حتا}^2 \theta = 1 - \text{حا}^2 \theta}$



إشارات الدوال المثلثية



(١) فى الربع الأول : جميع الدوال موجبة
(٢) فى الربع الثانى : حا ، قتا موجبتين فقط
(٣) فى الربع الثالث : طا ، طتا موجبتين فقط
(٤) فى الربع الرابع : حتا ، قا موجبتين فقط

ملاحظة :
يجب قبل تحديد إشارة الدالة المثلثية
تحديد الربع الذى تقع فيه الزاوية

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

الدالة \ الزاوية	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠° ، صفر°
جا	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	١	صفر	ـ ١	صفر
جتا	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	صفر	ـ ١	صفر	١
ظا	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	١	$\sqrt{3}$	غير معرف	صفر	غير معرف	صفر

بعض خواص الدوال المثلثية

الدوال المثلثية للزاويتين المتكاملتين هـ ، ١٨٠° ـ هـ

(١) جا (١٨٠° ـ هـ) = جا هـ
(٢) جتا (١٨٠° ـ هـ) = ـ جتا هـ
(٣) ظا (١٨٠° ـ هـ) = ـ ظا هـ

الدوال المثلثية للزاويتين هـ ، ١٨٠° + هـ

١) جا (١٨٠° + هـ) = ـ جا هـ
(٢) جتا (١٨٠° + هـ) = ـ جتا هـ
(٣) ظا (١٨٠° + هـ) = ظا هـ

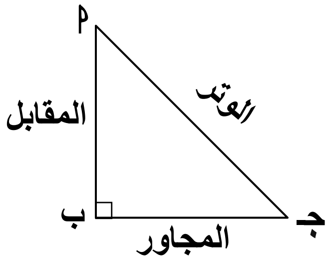
الدوال المثلثية للزاويتين هـ ، ٣٦٠° ـ هـ أو هـ ، ـ هـ

١) جا (ـ هـ) = ـ جا هـ
(٢) جتا (ـ هـ) = جتا هـ
(٣) ظا (ـ هـ) = ـ ظا هـ

ملاحظات : (١) لإيجاد دالة أي زاوية و معرفة قيمتها لابد من تحديد الربع أولا ثم إختيار زاوية مناسبة من الزوايا : ٣٠° أ؛ ٤٥ أ؛ ٦٠°

(٢) زاويا الربع الثاني هي : ١٥٠° = ١٨٠ ـ ٣٠ ، ١٣٥° = ١٨٠ ـ ٤٥ ، ١٢٠° = ١٨٠ ـ ٦٠
(٣) زوايا الربع الثالث هي : ٢١٠° = ١٨٠ + ٣٠ ، ٢٢٥° = ١٨٠ + ٤٥ ، ٢٤٠° = ١٨٠ + ٦٠
(٤) زوايا الربع الرابع هي : ٣٣٠° = ٣٦٠ ـ ٣٠ ، ٣١٥° = ٣٦٠ ـ ٤٥ ، ٣٠٠° = ٣٦٠ ـ ٦٠

الدوال المثلثية للزوايا الحادة



فى أى $\triangle$ أ ب حـ قائم في ب يكون :

جا جـ $= \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$ $\left(\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}\right)$

،، جتا جـ $= \frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$ $\left(\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}\right)$

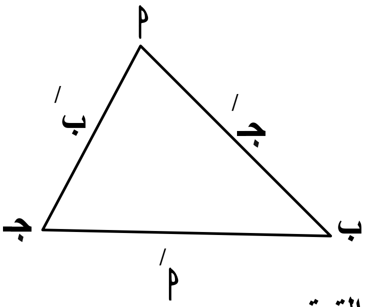
،، ظا جـ $= \frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$ $\left(\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}\right)$

ملاحظة هامة : يجب مراعاة الربع الذى تقع فيه الزاوية وبالتالى تراعى إشارات الدوال المثلثية

العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية

لأى زاوية هـ يكون : جتا^2 هـ + جا^2 هـ = ١ ، ظا هـ $= \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$

قانون الجيب (قاعدة الجيب)



فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها

أى أنه : في أي مثلث أ ب حـ يكون : $\frac{\text{أ}'}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}}$

حيث الرموز : أ ، ب ، جـ تعبر عن قياسات زوايا المثلث أ ب حـ

، أ/ ، ب/ ، جـ/ تعبر عن أطوال الأضلاع $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ؛ $\overline{\text{أ ب}}$ على الترتيب

ملاحظات :

* محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه = أ/ + ب/ + جـ/
* مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × الارتفاع
* مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

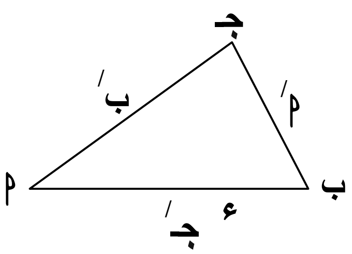
= $\frac{1}{2}$ × أ/ ب/ جا حـ = $\frac{1}{2}$ × ب/ جـ/ جا أ = $\frac{1}{2}$ × أ/ جـ/ جاب

* محيط الدائرة = ٢ π نق ، مساحة الدائرة = π نق^2

ملاحظة هامة : تستخدم كل من قاعدة الجيب إذا علم:

- قياسا زاويتين وطول ضلع
- قياسا زاويتين وطول محيط المثلث

قانون جيب التمام (قاعدة جيب التمام)



فى $\triangle$ أ ب حـ يكون :

$(\text{أ}')^2 = (\text{ب}')^2 + (\text{جـ}')^2 - ٢$ ب/ جـ/ جتا أ

$(\text{ب}')^2 = (\text{أ}')^2 + (\text{جـ}')^2 - ٢$ أ/ جـ/ جتا ب

$(\text{جـ}')^2 = (\text{أ}')^2 + (\text{ب}')^2 - ٢$ أ/ ب/ جتا جـ

$أ^2 = ب^2 + جـ^2 - 2 ب جـ$ جتا أ ← ومنها ← جتا أ $= \frac{ب^2 + جـ^2 - أ^2}{2 ب جـ}$

$ب^2 = أ^2 + جـ^2 - 2 أ جـ$ جتا ب ← ومنها ← جتا ب $= \frac{أ^2 + جـ^2 - ب^2}{2 أ جـ}$

$جـ^2 = أ^2 + ب^2 - 2 أ ب$ جتا جـ ← ومنها ← جتا جـ $= \frac{أ^2 + ب^2 - جـ^2}{2 أ ب}$

تستخدم هذه الصورة من قانون جيب التمام إذا علم طولا ضلعين فى مثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما

تستخدم هذه الصورة من قانون جيب التمام إذا علمت أطوال أضلاع مثلث أو النسبة بينها

ملاحظات :

* لإيجاد قياس إحدى زوايا مثلث يفضل إستخدام قانون جيب التمام لأنه يحدد نوع الزاوية فإذا كانت حتا أ موجبة كانت ∠ أ حادة أما إذا كانت جتا أ سالبة كانت ∠ أ منفرجة

* أكبر زوايا المثلث قياساً تقابل أكبر الأضلاع طولاً ، أصغرها قياساً تقابل أصغر الأضلاع طولاً

* إذا كان : أ : ب : حـ = ٣ : ٤ : ٥ نفرض أن : أ = ٣ ل ، ب = ٤ ل ، حـ = ٥ ل ثم نعوض فى قانون جيب التمام لإيجاد قياسات زوايا Δ أ ب جـ

حـــل المثلث

حل المثلث يعنى إيجاد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه المجهولة إذا علم ثلاثة عناصر من عناصره الستة (إحداها على الأقل ضلع)

الحالة الأولى : حل المثلث إذا علم فيه قياسا زاويتين وطول ضلع

فى Δ أ ب جـ إذا علم : ق (∠ أ) ، ق(∠ ب) ، أ

نوجد أولاً : ق(∠ جـ) حيث : ق(∠ جـ) = ١٨٠° – [ق (∠ أ) + ق(∠ ب)]

ثانياً نستخدم قانون الجيب لإيجاد كلا من : ب ، جـ

الحالة الثانية : حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

فى Δ أ ب حـ إذا علم : أ ، ب ، ق(∠ جـ)

نوجد أولاً : جـ حيث : $جـ^2 = أ^2 + ب^2 - 2 أ ب$ جتا جـ

ثانياً : نوجد ق (∠ أ) حيث : جتا أ $= \frac{ب^2 + جـ^2 - أ^2}{2 ب جـ}$

ثالثاً : نوجد ق(∠ ب) حيث : ق(∠ ب) = ١٨٠° – [ق (∠ أ) + ق(∠ جـ)]

الحالة الثالثة : حل المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة

Δ أ ب حـ إذا علم : أ ، ب ، جـ

: نوجد ق (∠ أ) حيث : جتا أ $= \frac{ب^2 + جـ^2 - أ^2}{2 ب جـ}$

ثانياً : نوجد ق(∠ ب) حيث : جتا ب $= \frac{أ^2 + جـ^2 - ب^2}{2 أ جـ}$

: نوجد ق(∠ جـ) حيث : ق(∠ جـ) = ١٨٠° – [ق (∠ أ) + ق(∠ ب)]

الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسا زاويتين

[١] إذا كان : ٲ ، ب قياسا زاويتين فإن :

(١) حتا (ٲ − ب) = حتا ٲ حتا ب + حا ٲ حا ب

(٢) حتا (ٲ + ب) = حتا ٲ حتا ب − حا ٲ حا ب

[٢] إذا كان : ٲ ، ب قياسا زاويتين فإن :

حا (ٲ − ب) = حا ٲ حتا ب − حتا ٲ حا ب

، حا (ٲ + ب) = حا ٲ حتا ب + حتا ٲ حا ب

[٣] طا (ٲ + ب) = $\dfrac{\text{طا ٲ + طا ب}}{\text{١ − طا ٲ طا ب}}$ ، طا (ٲ − ب) = $\dfrac{\text{طا ٲ − طا ب}}{\text{١ + طا ٲ طا ب}}$

الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية

إذا كان : ٲ قياس زاوية معلومة فإن :

(١) حا ٢ ٲ = ٢ حا ٲ حتا ٲ لكل ٲ $\in$ ح

(٢) حتا ٢ ٲ = حتا^{٢} ٲ − حا^{٢} ٲ لكل ٲ $\in$ ح

= ٢ حتا^{٢} ٲ − ١ = ١ − ٢ حا^{٢} ٲ

(٣) طا ٢ ٲ = $\dfrac{\text{٢طا ٲ}}{\text{١ − طا}^{٢}\text{ ٲ}}$ حيث طا ٲ معرفة ، طا^{٢} ٲ $\neq$ ١

خرائط مفاهيم

حساب المثلثات

مع تحياتى أ/ وليد نادى٩٢٤٥١٧٨٣

كلمة شكر للأستاذ الكبير / أحمد الشنتوري المُعد ألاصلي لخرائط المفاهيم والملخصات و كل اعماله التي انتشرت في مصر و الكثير من الدول العربية

قانون الجيب

في أي مثلث أ ب حـ يكون :

$$\frac{\text{أ}'}{\text{حا أ}} = \frac{\text{ب}'}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حـ}'}{\text{حا حـ}} = ٢ \text{ نق}$$

يستخدم إذا علم :

* قياسا زاويتين و ضلع
* قياسا زاويتين و نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث
* قياسا زاويتين و طول محيط المثلث

ملاحظات

محيط المثلث = أ/ + ب/ + حـ/

مساحة المثلث = ½ × طول القاعدة × الارتفاع

مساحة المثلث = ½ × أ/ ب/ حا حـ
= ½ × ب/ حـ/ حا أ
= ½ × أ/ حـ/ حا ب

مساحة الدائرة = ط نق٢

محيط الدائرة = ٢ ط نق

$$\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}} = \text{إحدى النسب}$$

قانون جيب التمام

في أي مثلث أ ب حـ يكون :

$$\text{أ}'^{٢} = \text{ب}'^{٢} + \text{حـ}'^{٢} - ٢ \text{ ب}' \text{ حـ}' \text{ حتا أ}$$

$$\text{حتا أ} = \frac{\text{ب}'^{٢} + \text{حـ}'^{٢} - \text{أ}'^{٢}}{٢ \text{ ب}' \text{ حـ}'}$$

$$\text{ب}'^{٢} = \text{أ}'^{٢} + \text{حـ}'^{٢} - ٢ \text{ أ}' \text{ حـ}' \text{ حتا ب}$$

$$\text{حتا ب} = \frac{\text{أ}'^{٢} + \text{حـ}'^{٢} - \text{ب}'^{٢}}{٢ \text{ أ}' \text{ حـ}'}$$

$$\text{حـ}'^{٢} = \text{أ}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - ٢ \text{ أ}' \text{ ب}' \text{ حتا حـ}$$

$$\text{حتا حـ} = \frac{\text{أ}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - \text{حـ}'^{٢}}{٢ \text{ أ}' \text{ ب}'}$$

تستخدم هذه الصورة إذا علم فى Δ أ ب حـ طولا ضلعين وقياس المحصورة بينهما

تستخدم هذه الصورة إذا علم أطوال أضلاع Δ أ ب حـ أو النسب بينها

ملاحظات

أكبر زوايا المثلث قياساً تقابل أكبر الأضلاع طولاً ، و أصغرها قياساً تقابل أصغر الأضلاع طولاً

يستخدم لإيجاد قياس زاوية فى مثلث ما لم يذكر أن المثلث حاد الزوايا

حل المثلث

الحالة الأولى
حل المثلث إذا علم فيه قياسا زاويتين و طول ضلع

فى ∆ أ ب حـ إذا علم :
ق (∠ أ) ، ق (∠ ب) ، أ/
(١) نوجد ق (∠ حـ) " خواص المثلث "
(٢) نوجد ب/ ، حـ/ " قانون الجيب "

الحالة الثانية
حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين و قياس الزاوية المحصورة بينهما

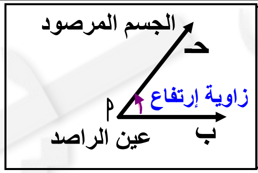
فى ∆ أ ب حـ إذا علم : أ/ ، ب/ ، ق (∠ حـ)
(١) نوجد حـ/ " قانون جيب التمام "
(٢) نوجد ق (∠ أ) " قانون جيب التمام "
(٣) نوجد ق (∠ ب) " خواص المثلث "

الحالة الثالثة
حل المثلث إذا علم فيه أطوال أضلاعه الثلاثة

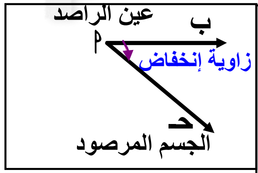
فى ∆ أ ب حـ إذا علم : أ/ ، ب/ ، حـ/
(١) نوجد (∠ أ) " قانون جيب التمام "
(٢) نوجد ق (∠ ب) " قانون جيب التمام "
(٣) نوجد ق (∠ حـ) " خواص المثلث "

زوايا الإرتفاع و الإنخفاض

زاوية الإرتفاع
إذا نظر راصد عند أ إلى جسم ما لم يذكر أن المثلث حاد الزوايا عند حـ أعلى مستوى النظر فإن : ∠ ب أ حـ تسمى زاوية إرتفاع



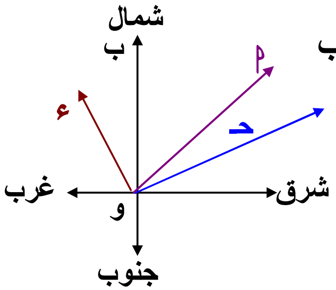
زاوية الإنخفاض
إذا نظر راصد عند أ إلى جسم ما لم يذكر أن المثلث حاد الزوايا عند حـ أسفل مستوى النظر فإن : ∠ ب أ حـ تسمى زاوية إنخفاض



ملاحظات
المسافة = السرعة × الزمن

تحديد موضع جسم مرصود بالنسبة لنقطة رصد معلومة :
(١) نرسم نقطة الأصل لمحاور الإتجاهات الأصلية عند نقطة الرصد
(٢) نرسم من نقطة الرصد شعاعاً إلى موضع الجسم المرصود بالنسبة لنقطة الرصد و يكون إحدى الحالات التالية :

(١) و أ يعين الشمال الشرقى (٤٥ °)
(٢) و ب يعين الشمال
(٣) و حـ يعين مثلاً ٣٠ ° شمال الشرق ، بالتالى ٦٠ ° شرق الشمال
(٤) و ء يعين مثلاً ٤٠ ° : غرب الشمال ، بالتالى ٥٠ ° شمال الغرب



الدوال المثلثية

للزاوية الحادة

إذا كانت ∠ هـ هى زاوية حادة فى مثلث قائم الزاوية فإن :

(١) حا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

(٢) حتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

(٣) طا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

(١) حا هـ قتا هـ = ١

(٢) حتا هـ قا هـ = ١

(٣) طا هـ طتا هـ = ١

إشارات الدوال المثلثية

(١) فى الربع الأول : جميع الدوال موجبة

(٢) فى الربع الثانى : حا هـ ، قتا هـ موجبتين فقط

(٣) فى الربع الثالث : طا هـ ، طتا هـ موجبتين فقط

(٤) فى الربع الرابع : حتا هـ ، قا هـ موجبتين فقط

لمجموع قياسا زاويتين

إذا كان : أ ، ب قياسا زاويتين فإن :

(١) حا (أ + ب) = حا أ حتا ب + حتا أ حا ب

(٢) حتا (أ + ب) = حتا أ حتا ب − حا أ حا ب

(٣) طا (أ + ب) = $\frac{\text{طا أ + طا ب}}{\text{١ − طا أ طا ب}}$

لفرق قياسا زاويتين

إذا كان : أ ، ب قياسا زاويتين فإن :

(١) حا (أ − ب) = حا أ حتا ب − حتا أ حا ب

(٢) حتا (أ − ب) = حتا أ حتا ب + حا أ حا ب

(٣) طا (أ − ب) = $\frac{\text{طا أ − طا ب}}{\text{١ + طا أ طا ب}}$

لضعف قياس الزاوية

إذا كان : أ قياس زاوية معلومة فإن :

(١) حا ٢ أ = ٢ حا أ حتا أ

(٢) حتا ٢ أ = حتا^{٢} أ − حا^{٢} أ

= ٢ حتا^{٢} أ − ١

= ١ − ٢ حا^{٢} أ

(٣) طا ٢ أ = $\frac{\text{٢ طا أ}}{\text{١ − طا}^{٢}\text{ أ}}$

ملاحظات

(١) حا أ = $\sqrt{\frac{\text{١ − حتا ٢ أ}}{\text{٢}}}$

(٢) حتا أ = $\sqrt{\frac{\text{١ + حتا ٢ أ}}{\text{٢}}}$

(١) حا أ = ٢ حا $\frac{1}{2}$ أ حتا $\frac{1}{2}$ أ

(٢) حتا أ = حتا^{٢} $\frac{1}{2}$ أ − حا^{٢} $\frac{1}{2}$ أ

= ٢ حتا^{٢} $\frac{1}{2}$ أ − ١

= ١ − ٢ حا^{٢} $\frac{1}{2}$ أ

(٣) طا أ = $\frac{\text{٢ طا } \frac{1}{2} \text{ أ}}{\text{١ − طا}^{٢} \frac{1}{2} \text{ أ}}$

(١) حا ٤ أ = ٢ حا ٢ أ حتا ٢ أ

(٢) حتا ٤ أ = حتا^{٢} ٢ أ − حا^{٢} ٢ أ

= ٢ حتا^{٢} ٢ أ − ١

= ١ − ٢ حا^{٢} ٢ أ

(٣) طا ٤ أ = $\frac{\text{٢ طا ٢ أ}}{\text{١ − طا}^{٢}\text{ ٢ أ}}$