

الرياضيات المتقدمة

الوحدة الأولى

# حساب المثلثات

الجزء الثالث

## ٥-٢ الدوال المثلثية العكسية

تمارين الكتاب ومسائل كتاب الأنشطة

ويتضمن

١	حل تمارين كتاب الطالب ٥-٢	١
٧	حل تمارين كتاب النشاط ٥-٢	٢

إعداد

أسعد مصطفى

[www.asadmath.com](http://www.asadmath.com)

Instagram : [asad.k.mustafa](#)

(١) اكتب قيمة كل ممّا يأتي بالدرجات:

- أ جتا<sup>-١</sup> ١      ب جتا<sup>-١</sup>  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$       ج ظا<sup>-١</sup>  $\sqrt{3}$   
 د جتا<sup>-١</sup> (١-)      ه ظا<sup>-١</sup>  $(\sqrt{3}-)$       و جتا<sup>-١</sup>  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\right)$

(٢) اكتب قيمة كل ممّا يأتي بدلالة  $\pi$ :

- أ جتا<sup>-١</sup> (٠)      ب ظا<sup>-١</sup> (١)      ج جتا<sup>-١</sup>  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$   
 د ظا<sup>-١</sup>  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\right)$       ه جتا<sup>-١</sup>  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\right)$       و جتا<sup>-١</sup>  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\right)$

(٣) إذا علمت أن ه = جتا<sup>-١</sup>  $\left(\frac{2}{5}\right)$ ، فأوجد قيمة كل ممّا يأتي:

- أ جا<sup>٢</sup> ه      ب ظا<sup>٢</sup> ه

(٤) إذا علمت أن الدالة د (س) = -٤ + ٣ جا س معرفة على المجال  $\frac{\pi}{4} \leq س \leq \frac{\pi}{2}$ ، فأوجد:

- أ مدى الدالة د (س).      ب د<sup>-١</sup> (س).

(٥) الدالة د (س) = ٤ - ٢ جتا س معرفة على المجال  $٠ \leq س \leq \pi$ :

- أ أوجد مدى الدالة د (س)، وارسم بيان الدالة ص = د (س).  
 ب فسّر سبب وجود دالة عكسية للدالة د (س)، وأوجد د<sup>-١</sup> (س).  
 ج ارسم بيان الدالة ص = د<sup>-١</sup> (س) في المستوى الإحداثي نفسه للدالة في الجزئية (أ).

(٦) الدالة د (س) = ٥ - ٢ جا س معرفة على المجال  $\frac{\pi}{4} \leq س \leq \pi$ :

- أ أوجد أكبر قيمة لـ ر بحيث تكون للدالة د (س) دالة عكسية.  
 ب عند قيمة ر في الجزئية (أ)، أوجد د<sup>-١</sup> (س)، ثم حدد مجالها.

(٧) إذا علمت أن الدالة د (س) = -٥ + ٤ جتا  $\left(\frac{س}{2}\right)$  معرفة على المجال  $٠ \leq س \leq ٢\pi$ ، فأوجد:

- أ مدى الدالة د (س).  
 ب د<sup>-١</sup> (س)، وحدد مداها.

## تعاريف ٢-٥ الدوال (مثلثية) (عكسية)

المطلوب: كتابة بالدراجات  
الزاوية لـ  $\sin^{-1}$   $\cos^{-1}$   $\tan^{-1}$

$$\sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

يمكن في الخبائث استخدام كسرات صالحة

٢-٥

$$\sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos^{-1} 1 = 0$$

$$\cos^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\cos^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\cos^{-1} 1 = 0$$

$$\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

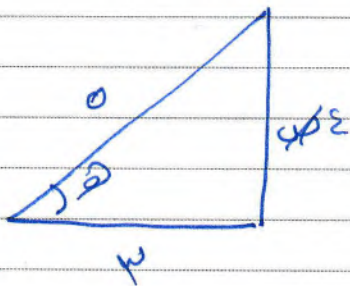
$$\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$$



3

ه = جتا' (3/5) لَرَجِد ١ جَاه ٥ ظَاه



ه هِي لَرَجِد لَرَجِد جَاهَا = 3/5 = الجابه  
لَوَر

كُتِبَ خِيَمَة صَد مَد مِثْلَ عَفْوَس

$${}^c(5) + {}^c(4) = {}^c(3)$$

$$17 = 16 + 1 = 17$$

$$17 = 17$$

$${}^c(3) = {}^c(4) = 17$$

$${}^c(3) = {}^c(4) = 17$$

٤) اِذَا عَلِمْتُمْ أَنَّ  ${}^c(3) = {}^c(4) = 17$  جَاه ٥ ظَاه  
لَرَجِد ١ جَاه ٥ ظَاه  
٥) دَا' (3/5)

$$1 - = (1) 3 + 4 - = 1 -$$

$$1 - = (1) 3 + 4 - = 1 -$$

$$1 - > 1 - > 1 -$$

مَع مِلَاطَة بِنَا بِنَا عَمُوِي بِالْمِثْلَة (3/5)  
وَعَمُوِي بِنَا بِنَا عَمُوِي

٥) لَإِيَاد دَا' (3/5) نَبْعَ لَظُوت

$$1 - = (1) 3 + 4 - = 1 -$$

$$1 - = (1) 3 + 4 - = 1 -$$

$$1 - = (1) 3 + 4 - = 1 -$$

١ - ظَاه

$$1 - = (1) 3 + 4 - = 1 -$$

$$1 - = (1) 3 + 4 - = 1 -$$

$$1 - = (1) 3 + 4 - = 1 -$$

$$1 - = (1) 3 + 4 - = 1 -$$



⑥ ددر = ۴ - ۲ = ۲

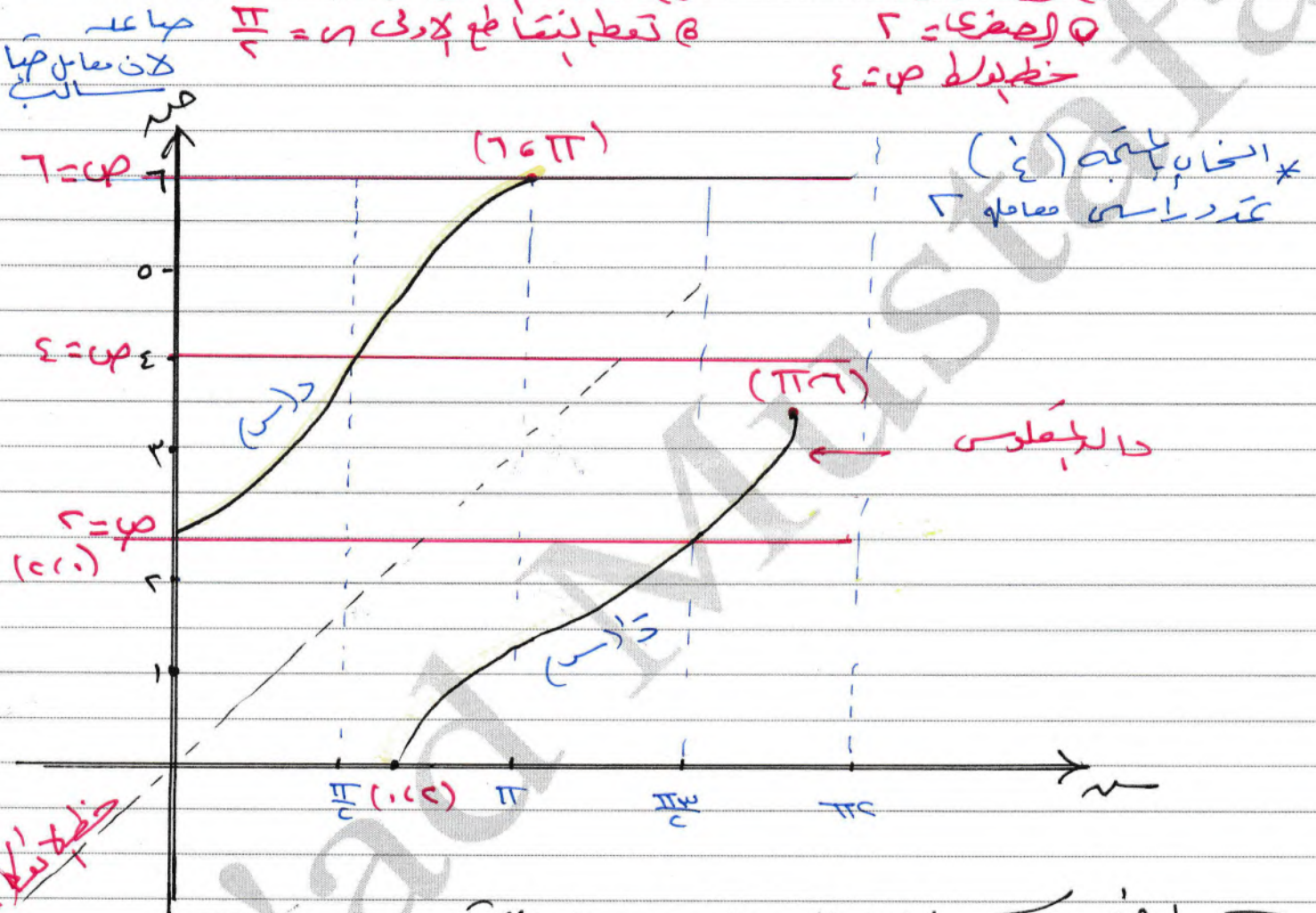
① برای  $\text{بقیة اعظم}$   $9 = (1-)\epsilon$   $7 = (1-)\epsilon$   
 بقیة اصغر  $9 = (1-)\epsilon$   $7 = (1-)\epsilon$   
 خطی  $\epsilon$   $\epsilon = 9$

$$C = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{\lambda} \right) \quad \text{⑥}$$

7- لفظ

۵) ارضیات: ۲

خط اول و ص = ۴



(ب) واضح کریں ان کے خلاف اس کے لئے لفظ  $\pi \geq 1$

حرم واحد لواحد و بالتالي عليه اياد دالة عليه لا في صفة

ج) ہم جسم بابت اقلیت و نقص پر کم سے کم غور و نظر کریں

محال، کمالہ د (س) ہمدی (دالہ داس)

$$7 \geq 0 \Rightarrow c \Leftarrow$$

ایجاد  $\delta(r)$  قمری و  $\delta(r)$  دایره  $\delta(r) = \delta(r)$  جتا  $\delta(r) = \delta(r)$



د (ر) = 0-0 جاسی مشرقہ ۱  $\frac{\pi}{c}$   $\pi \geq 0 \geq r$   
 اور البر صحتی ر کی تکرار والی علیہ

ب) جذبی د (ر)

$$\begin{aligned} \text{الغظ} & \quad v = (1-0) \quad 0-0 \\ \text{الصف} & \quad w = (1) \quad 0-0 \end{aligned}$$

$$\boxed{v \geq w \geq 3} \quad \text{جذبی}$$

$$v = (r) \quad \text{جذبی}$$

$$v = 0-0 \text{ جاسی}$$

$$0-0 \text{ جاسی} = 0$$

$$0-0 \text{ جاسی} = 1$$

$$r = 0-0 \text{ جاسی} = 1 \quad \text{نہ ناکرنا جاسی}$$

$$r = \frac{\pi}{c} \quad \text{وہی}$$

ب) البر صحتی ر کی تکرار والی د (ر) والی علیہ ۱۱۲  
 و تکرار ایجاد علیہ (ر) بالاسم

$$د (ر) = 0-0 \text{ جاسی}$$

$$4 = 0-0 \text{ جاسی}$$

$$5 = 0-0 \text{ جاسی}$$

$$0-0 \text{ جاسی} = 1$$

$$0-0 \text{ جاسی} = 0$$

$$0-0 \text{ جاسی} = 0$$

$$0-0 \text{ جاسی} = 0$$

$$0-0 \text{ جاسی} = 0$$

و جاکا هر مدی لکال د (ر)  
 و جمع

$$v \geq 0 \geq 3$$



6

$$\pi/2 \geq \gamma > 0$$

$$d(u) = -o + e + \frac{1}{2} \quad (u)$$

$$\begin{aligned} \text{لفته لفظی} & \quad 1 - o + e = (1) \\ \text{لفته لفظی} & \quad 4 - o + e = (1) \end{aligned}$$

$$1 - \gamma > 0 \Rightarrow \gamma < 1$$

$$e = -o + e + \frac{1}{2} \quad (e)$$

$$e = -o + e + \frac{1}{2}$$

$$e + o = \frac{1}{2}$$

$$\frac{o+e}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{o+e}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{o+e}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{o+e}{2} = \frac{1}{2}$$

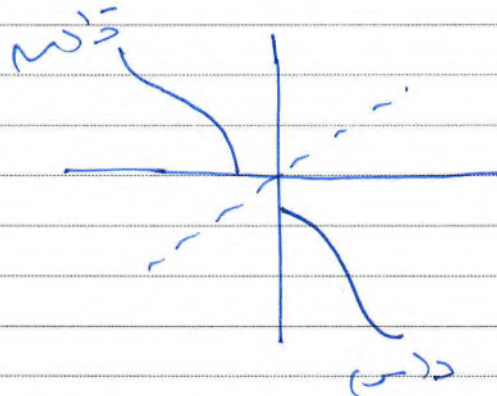
$$\frac{o+e}{2} = \frac{1}{2}$$

محاکا ہدفی می دلس

$$1 - \gamma > 0 \Rightarrow \gamma < 1$$

دماھا و نفس محال دلس

$$\pi/2 \geq \gamma > 0$$



دماھا

## ٥-٢ الدوال المثلثية العكسية Inverse trigonometric functions

### تمارين ٥-٢

#### مساعدة

مجال جا<sup>-١</sup>س هو:  
 $1 \geq s \geq -1$   
 ومداها هو:  
 $\frac{\pi}{2} \geq \text{جا}^{-1} s \geq -\frac{\pi}{2}$   
 مجال جتا<sup>-١</sup>س هو:  
 $1 \geq s \geq -1$   
 ومداها هو:  
 $0 \leq \text{جتا}^{-1} s \leq \pi$   
 مجال ظا<sup>-١</sup>س هو: ع  
 ومداها هو:  
 $\frac{\pi}{2} > \text{ظا}^{-1} s > -\frac{\pi}{2}$

(١) اكتب بالدرجات زاوية الأساس لكل ممّا يأتي:

- أ جتا<sup>-١</sup> $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  ب ظا<sup>-١</sup>١
- الزاوية التي قيمتها  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  الزاوية التي قيمتها ١
- $60^\circ$   $90^\circ$
- ج جتا<sup>-١</sup>(٠) د ظا<sup>-١</sup> $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- الزاوية التي قيمتها ٠ الزاوية التي قيمتها  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- $90^\circ$   $30^\circ$
- هـ ظا<sup>-١</sup> $(\sqrt{3}-)$  و جتا<sup>-١</sup>(١-)
- الزاوية التي قيمتها  $\sqrt{3}-$  الزاوية التي قيمتها ١-
- $60^\circ$   $90^\circ$
- ز ظا<sup>-١</sup>(١-) ح جتا<sup>-١</sup>(١-)
- الزاوية التي قيمتها ١- الزاوية التي قيمتها ١-
- $45^\circ$   $180^\circ$

(٢) اكتب زاوية الأساس لكل ممّا يأتي بدلالة  $\pi$ :

- أ جتا<sup>-١</sup> $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  ب جتا<sup>-١</sup>(٠,٥-)
- الزاوية التي قيمتها  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  الزاوية التي قيمتها ٠,٥-
- $\frac{\pi}{4}$   $\frac{\pi}{6}$
- ج جتا<sup>-١</sup>(٠,٥-) د ظا<sup>-١</sup> $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- الزاوية التي قيمتها ٠,٥- الزاوية التي قيمتها  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\frac{\pi}{3}$   $\frac{\pi}{4}$
- هـ جتا<sup>-١</sup> $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  و ظا<sup>-١</sup> $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- الزاوية التي قيمتها  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  الزاوية التي قيمتها  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\frac{\pi}{3}$   $\frac{\pi}{4}$



# 8

(٣) أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ)  $\text{جا}^{-1}(\sin 0,5)$

جا  $(0,5)$

الاصحاح ٥٥

ب)  $\text{جتا}^{-1}(\cos(-1))$

=  $\text{جتا}^{-1}(\cos \pi)$

=  $1 -$

ج)  $\text{ظا}^{-1}(\tan(\sqrt{3}))$

ظا  $(\frac{\pi}{3})$

=  $\sqrt{3}$

د)  $\text{جتا}^{-1}(\cos(0))$

جتا  $(\frac{\pi}{2})$

=  $0$

## أ. حول الانتباه اذا كانت الزاوية < ٩٠

(٤) أوجد كلاً مما يأتي:

أ)  $\text{جتا}^{-1}(\cos(\frac{\pi}{2}))$

=  $\text{جتا}^{-1}(0)$

=  $(\frac{\pi}{2})$

ب)  $\text{جا}^{-1}(\sin(\frac{\pi}{6}))$

جا  $(\frac{\pi}{6})$

=  $(\frac{\pi}{6})$

الانتباه أن  
المعادلة تقطع  
نوعاً من

ج)  $\text{ظا}^{-1}(\tan(\frac{\pi}{6}))$

ظا  $(\frac{\pi}{6})$

=  $(\frac{\pi}{6})$

د)  $\text{جتا}^{-1}(\cos(\pi/2))$

جتا  $(1)$

صفر

أرجو الانتباه  
للزاوية

(٥) أوجد مجال ومدى كل دالة من الدوال الآتية:

أ)  $\text{ص} = \text{ظا}^{-1}(\sin 3)$

مجال الدالة ص = ظا  $\sin 3$  : مجال الدالة ظا  $(\sin 3)$  هو ح

مدى الدالة ص = ظا  $\sin 3$  هو  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  و ص  $\sin 3$

مدى الدالة ظا  $\sin 3$  هو  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  و ص  $\sin 3$  و ص  $\sin 3$  و ص  $\sin 3$

ب)  $\text{ص} = \text{جتا}^{-1}(\sin 2)$

مجال الدالة ص = جتا  $\sin 2$  هو  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  و ص  $\sin 2$  و ص  $\sin 2$  و ص  $\sin 2$

مدى الدالة ص = جتا  $\sin 2$  هو  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  و ص  $\sin 2$  و ص  $\sin 2$  و ص  $\sin 2$

كثير لمعك

أ مدى الدالة د(س).

$0 = (1)c + 4$  (مغفل)  
 $1 = (-1)c + 4$  (اصغري)  
 $0 \geq 4 \geq 1$  (مباري)

رکعتِ اقصیٰ  $(1)^{n-1} = 2-1 = 1$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$$

أوجد أكبر قيمة لـ  $k$  عندما تكون للدالة  $f(x) = x^2 + kx + 1$  دالة عكسية. مختبري ٣  $\geq$  ٨٨ ٧

الفقرة اخطأنا فخذ عنتها عسى عسى - باسم فقله

$$u = 0 - 9 \text{ جاسی}$$

5-2-5-5

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$$

$$\frac{5-0}{5} = 1 \text{ جلد}$$

$$\frac{1}{s-2} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-3}$$

$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \right)$

$$v \geq 0 \rightarrow w \quad \text{LdL} \quad \frac{v=0}{v} \frac{1}{\frac{1}{v}} = (v) \frac{1}{v}$$

نفسِ مریءِ عالم  
(دس)