سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

رؤية عُمان 2040
نستمر بثقة
Moving Forward with confidence

الرياضيات المتقدمة

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الثاني

دليل المعلّم

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445هـ - 2023م

سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات المتقدمة

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الثاني

دليل المعلّم

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445 هـ - 2023 م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS
مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.

تُشكِّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء
تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمَّت مواءمتها من دليل المعلّم – الرياضيات للصف الثاني عشر – من سلسلة
كامبريدج Cambridge International AS & A Level Mathematics Digital Teacher's Resource
للمؤلفين جوليا فلتشر، وإيلين دورسيت، وكولين ناي.

تمَّت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة
جامعة كامبريدج.

تمَّت مواءمة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ٣٦ / ٢٠٢٣ واللجان المنبثقة عنه

المغفور لـه

السلطان قابوس بن سعيد

-طيّب اللّه ثراه-

حضرة صاحب الجلالة

السلطان هيثم بن طارق المُعظَّم

-حفظه اللّه ورعاه-

سلطنة عُمان

(المحافظات والولايات)

النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يا رَبَّنا احْفَظْ لَنا جَلالَةَ السُّلْطان
وَالشَّعْبَ في الأَوْطان بِالْعِزِّ وَالأَمان
وَلْيَدُمْ مُؤَيَّدًا عاهِلًا مُمَجَّدًا

بِالنُّفوسِ يُفْتَدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ
فارْتَقي هامَ السَّماء وَامْلَئي الْكَوْنَ ضِياء

وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخاء

تقديم

الحمد للّٰه رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مكوّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقررات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلاب، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسوم. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

أتمنّى لأبنائنا الطلاب النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه اللّٰه ورعاه.

واللّٰه ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

المُقدِّمة

صُمّم هذا الدليل ليساعد المعلّمين على استخدام المواد التعليمية لتدريس منهج الرياضيات المتقدمة للصف الثاني عشر.

اعتمدنا في إعداد هذا الدليل على مصادر عالية الجودة لتشجيع الطلبة على تعلّم الطرائق المعتمدة لحل التمارين، ولمساعدتهم على فهم عميق للموضوع. تعدّ مهارة التواصل الرياضي مهمة ليس فقط لهدف تعلّم المادة، ولكن لمساعدة الطلبة على تطوير المهارات التي يحتاجون إليها للتعاون، والتفكير والتحليل، واتخاذ القرارات المناسبة في بيئة العمل وفي مناحي الحياة المختلفة.

في هذا الدليل نتناول كل موضوع من حيث اقتراح أفكار للتعليم، وبحث كيفية دعم بعض الطلبة وتحدي الآخرين من حيث الاستعانة بمصادر متنوّعة.

في الواقع أنت تعرف الطلبة الذين تدرسهم حقّ المعرفة، لذا فإنه يمكنك وضع مخطط التدريس الخاص بك باختيار المناسب ممّا نقدمه لك في هذا الدليل، أو من مصادرك الخاصة.

لقد وضعنا في هذا الدليل شروحات وتوجيهات وكثيرًا من الأفكار العملية لكيفية استخدام مصادر إضافية في غرفة الصف. كما أننا سلّطنا الضوء على أمثلة وأسئلة وتمارين وأنشطة 'استكشف' الموجودة في كتاب الطالب فضلًا عن الملاحظات المدوّنة لكيفية استخدامها في معالجة سوء الفهم، وأخطاء شائعة معينة.

تتضمن معظم وحدات الدليل، شرائح عرض إلكتروني (باوربوينت) يمكنك أن تستخدمها كما هي أو تعدّلها لإدارة المناقشة الصفية. بعض هذه الشرائح مبني على أمثلة من كتاب الطالب، وبعضها الآخر مكمّل لها. في بعض الوحدات تتوافر مصادر إضافية مثل بطاقات الفرز أو "أوراق ملء الفراغ" وغيرها. يمكنك أن توائم هذه الأنشطة لتستخدمها في موضوعات أخرى.

هدفنا أن تعمد هذه المصادر إلى توفير الوقت، وأن ترسّخ معرفتك في هذا الدليل، وتعزيز الثقة في قدراتك لتزوّد الطلبة بأفضل الخبرات.

نأمل أن يحقق هذا الدليل لك وللطلبة المزيد من المنفعة والاستمتاع.

الوحدة الخامسة

المزيد من التفاضل Further Differentiation

مخطط توزيع الدروس

الدرس	الموضوع	عدد الحصص	الأهداف التعليمية	المفردات
٥–١	قاعدة مشتقة ضرب دالتين	٣	٥–١ يجد مشتقة ضرب دالتين، ومشتقة قسمة دالتين مكوناتها مضروبة بالثوابت، والجمع والطرح للدوال في صيغة د(س) = $س^ن$ (لأي عدد نسبي ن). ٥–٢ يحدّد النقاط الحرجة لدوال في صورة ضرب أو قسمة دالتين في صيغة د(س) = $س^ن$ (لأي عدد نسبي ن) مع الضرب بالثوابت، والجمع والطرح، ويحدّد طبيعة (نوع) النقطة الحرجة، ويستخدم معلومات عن النقطة الحرجة لرسم المنحنيات مستخدمًا المشتقة الأولى.	مشتقة ضرب دالتين
٥–٢	قاعدة مشتقة قسمة دالتين	٢	٥–١ يجد مشتقة ضرب دالتين، ومشتقة قسمة دالتين مكوناتها مضروبة بالثوابت، والجمع والطرح للدوال في صيغة د(س) = $س^ن$ (لأي عدد نسبي ن). ٥–٢ يحدّد النقاط الحرجة لدوال في صورة ضرب أو قسمة دالتين في صيغة د(س) = $س^ن$ (لأي عدد نسبي ن) مع الضرب بالثوابت، والجمع والطرح، ويحدّد طبيعة (نوع) النقطة الحرجة، ويستخدم معلومات عن النقطة الحرجة لرسم المنحنيات مستخدمًا المشتقة الأولى.	مشتقة قسمة دالتين
٥–٣	مشتقات الدوال الأسيّة	٢	٥–٣ يجد مشتقات الدوال الأسيّة (أساسها هـ)، والدوال اللوغاريتمية الطبيعية مع الضرب بالثوابت، والجمع والطرح، والضرب والقسمة للدوال والدوال المركبة.	
٥–٤ (PPT)	مشتقات الدوال اللوغاريتمية الطبيعية	٢	٥–٣ يجد مشتقات الدوال الأسيّة (أساسها هـ)، والدوال اللوغاريتمية الطبيعية مع الضرب بالثوابت، والجمع والطرح، والضرب والقسمة للدوال والدوال المركبة.	
٥–٥	مشتقات الدوال المثلثيّة	٥	٥–٤ يجد مشتقات جاس، جتاس مع الضرب بالثوابت، والجمع والطرح، والضرب والقسمة للدوال والدوال المركبة.	مقلوبات الدوال المثلثية
	تمارين مراجعة نهاية الوحدة الخامسة	٢		

٥-١ قاعدة مشتقة ضرب دالتين

ملاحظات للمعلّمين

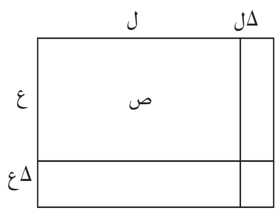
في هذه الوحدة سيوسع الطلبة طرق التفاضل التي تعلّموها في الفصل الدراسي الأوّل، ويطوّرون تقنيات لاشتقاق عدد من الدوال. قد يتجاهل بعض الطلبة قاعدة السلسلة في الاشتقاق، لذا من المفيد إعادة التذكير بها في هذه الوحدة. من المهم أن يبحث الطلبة عن المواقف التي سيستخدمون فيها قاعدة السلسلة بالتوازي مع الأساليب الجديدة التي سيتعلمونها.

يجب أن يدرك الطلبة أن قاعدة مشتقة ضرب دالتين يشار إليها عادة باسم "قاعدة الضرب". نبّههم على أن القاعدة متماثلة، وبالتالي يمكن كتابتها واستخدامها في صورة $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ ل + $\frac{\text{ءل}}{\text{ءس}}$ ع أو ع $\frac{\text{ءل}}{\text{ءس}}$ + ل $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ عند إيجاد مشتقة ل × ع حيث ع، ل دالتين بدلالة س.

أفكار للتعليم

يمكنك في البداية أن تذكر وتستخدم قاعدة مشتقة ضرب دالتين الواردة في النتيجة ١ في الصفحة ١٩ من كتاب الطالب عبر مثال ما، كما يمكنك اشتقاقها من المبادئ الأولية من خلال شرح الخطوات الموضحة في الصفحة ١٩ من كتاب الطالب والعمل بها.

وبدلًا من ذلك، يمكنك استخلاص القاعدة أولًا، حتى يتمكن المتعلمون من القيام بتقدير القاعدة وبنيتها قبل تطبيقها في المثال.



أُعطِي في الدرس ٥-١ طريقة ممكنة للاشتقاق يمكن تمثيلها باستخدام مستطيل مساحته ص، وطوله ل، وعرضه ع، حيث ص، ع، ل دوال بدلالة س. زيادة قليلة في س (Δس) تؤدي إلى زيادة قليلة في ص، ع، ل (Δص، Δع، Δل) على الترتيب.

يتضمن التمرين ١ من تمارين ٥-١ مجموعة من الأسئلة ليتدرّب عليها الطلبة باستخدام قاعدة مشتقة ضرب دالتين (إضافة إلى قاعدة السلسلة). تبدأ التمارين من ٢ إلى ٨ بقاعدة مشتقة ضرب دالتين لإيجاد المشتقة، ثم تطبيقها في مواقف متنوعة مشابهة لتلك التي واجهها الطلبة في الوحدة الرابعة عند إيجاد الميل، والمماس، والعمودي، والنقاط الحرجة.

دعم الطلبة

سيتم مساعدة الطلبة بشكل كبير في هذه الوحدة إذا حددوا عملهم بوضوح مع استخدام دقيق ومتسق للصيغة المطلوبة. عليهم أيضًا التأكد من استخدام القاعدة الصحيحة، أي قاعدة مشتقة ضرب دالتين التي سيتعلّمونها في هذا الدرس. أحد الأخطاء الشائعة هنا هو نسيان استخدام قاعدة السلسلة مع قاعدة مشتقة ضرب دالتين.

قد يحتاج بعض الطلبة إلى المزيد من الوقت للتمييز بين ضرب دالتين ويرمز إليه بـ د(س) × ع(س)، وتركيب دالتين ويرمز إليه بـ د(ع(س))، ومن ثم استخدام قاعدة مشتقة ضرب دالتين أو قاعدة السلسلة. يمكنك مساعدتهم بأن تعرض عليهم مجموعة كبيرة من الدوال ليصنفوها بناءً على ذلك في مجموعتَين.

تحدّي الطلبة

قد يستمتع الطلبة الذين يرغبون في التحدي بتنفيذ إحدى المهمتَين الآتيتَين أو الاثنتين معًا:

- تطوير صيغة لإيجاد مشتقة ضرب ثلاث دوال، مثل: ص = ع ل ط.
- إثبات مشتقة ضرب دالتين.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٥-١

٥-٢ قاعدة مشتقة قسمة دالتين

ملاحظات للمعلِّمين

في هذا الدرس، سيتطرق الطلبة إلى طريقة اشتقاق قسمة دالتَين.

يجب أن يدرك الطلبة أن قاعدة مشتقة قسمة دالتين يشار إليها عادة باسم "قاعدة القسمة". نبّههم أيضًا إلى أن القاعدة غير متماثلة، وبالتالي يجب كتابة المصطلحات بالترتيب الصحيح، أي:

$\dfrac{ل \dfrac{ءع}{ءس} - ع \dfrac{ءل}{ءس}}{ل^٢}$ عند إيجاد مشتقة $\dfrac{ع}{ل}$ حيث ع، ل دالتين بدلالة س.

كما في قاعدة مشتقة ضرب دالتين، على الطلبة البحث عن مواقف حيث يمكن استخدام مزيج من قاعدة السلسلة، وقاعدة مشتقة قسمة دالتين.

مثال: عندما يُطلب إليك إيجاد مشتقة ص = $\dfrac{(٢س - ١) \times (س - ٣)^٣}{س - ١}$

أفكار للتعليم

يمكنك البدء بالمثالَين ٤، ٥، ثم توجيه الطلبة إلى العمل على المهمات الموجودة في نشاط استكشف ١ في ثنائيات أو مجموعات صغيرة. بعد تنفيذ ذلك، سيتمكنون من تقييم الطريقة الفعّالة بشكل أفضل، الأمر الذي قد يوفر لهم فرصة ليختاروا طريقة الحل لاحقًا.

يبدأ التمرين ١ من تمارين ٥-٢ بتمارين مباشرة لاستخدام قاعدة مشتقة قسمة دالتين، دون استخدام قاعدة السلسلة. يتطلب التمرين ٦ استخدام كل من قاعدة السلسلة، وقاعدة مشتقة قسمة دالتين معًا. جميع التمارين من ٢ إلى ٥، إضافة إلى التمرينين ٧، ٨ تتطلب إيجاد الميل عن طريق الاشتقاق باستخدام قاعدة مشتقة قسمة دالتين، ثم تطبيقها على الميل أو المماس أو العمودي.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ١

تم اختيار الأمثلة بحيث يجد الطلبة مشتقات الدوال بطرق مختلفة. سيستخدمون قاعدة مشتقة ضرب دالتين، ثم مقارنة النتيجة عند استخدام قاعدة مشتقة قسمة دالتين المستخدمة في المثالَين ٤، ٥:

في مثال ٤ الطريقتان تعطيان النتيجة نفسها: $\dfrac{ءص}{ءس} = \dfrac{٢(س^٢ + س + ٥)}{(٢س + ١)^٢}$

في مثال ٥ الطريقتان تعطيان النتيجة نفسها: $\dfrac{ءص}{ءس} = \dfrac{(س + ٢)^٢(٥س - ٨)}{٢(س - ١)^{\frac{٣}{٢}}}$

دعم الطلبة

سيتم مساعدة الطلبة بشكل كبير في هذه الدرس، كما في الدرس السابق، إذا حدّدوا عملهم بوضوح مع استخدام دقيق ومتسق للصيغة المطلوبة. عليهم أيضًا التأكد من استخدام قاعدة مشتقة قسمة دالتين بشكل صحيح. من الأخطاء الشائعة هنا هي نسيان استخدام قاعدة السلسلة مع قاعدة مشتقة قسمة دالتين، أو نسيان تربيع المقام، أو عدم كتابة الأقواس في البسط، الأمر الذي يؤدي إلى إشارات غير صحيحة.

تحدّي الطلبة

بدءًا من ع = ص ل، حيث ع، ص، ل دوال بدلالة س، يمكن للطلبة استخدام قاعدة مشتقة ضرب دالتين لإثبات قاعدة مشتقة قسمة دالتين.

مصادر أخرى مفيدة

أسئلة مختارة من 14 Further Calculus: Exercise 14E . http://www.cambridge.org/links/mctd6443 صفحة ٢٨٠ (CIMT) تتطلّب استخدام قاعدة القسمة. أسئلة تدريبية إضافية حول قاعدة الضرب، وقاعدة القسمة Product and quotient rules . http://www.cambridge.org/links/mctd6441 (STEM)

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٥-٢

٥-٣ مشتقات الدوال الأسيّة

ملاحظات للمعلِّمين

توجد طرق متعددة وممكنة يمكن اتباعها في هذا الدرس، حيث يمكنك أن:

- تعتمد ميل الأوتار.
- تجد ميل مماس المنحنى للدوال، مثل $ص = ٢^{س}$، $ص = ٣^{س}$ باستخدام الرسم، وتسأل: ما الدالة التي تكون دالة ميل المماس لمنحناها مساوية لها؟
- تبرهن مشتقة الدالة الأسيّة.

أفكار للتعليم

الموقع To the limit https://undergroundmathematics.org/calculus-trig-log/to-the-limi (Underground Mathematics)، نشاط بياني يعتمد على ميل الأوتار. قد يكون هذا النشاط بداية جيدة للطلبة ليعملوا ضمن ثنائيات باستخدام جيوجبرا، فتؤدي إلى النتيجة المرجوّة (الحالة الخاصة المذكورة أعلاه في النقطة الثانية من فقرة ملاحظات للمعلّمين)، وهي أن مشتقة الدالة $ص = هـ^{س}$ هي نفسها $هـ^{س}$. الخطوة التالية هي اشتقاق دوال تتضمن هـ، وتتطلب أيضًا استخدام قاعدة السلسلة، وقاعدة مشتقة ضرب دالتين، وقاعدة مشتقة قسمة دالتين (انظر مثال ٦). يمكن توسعة فكرة الحل بأن يحاول الطلبة في الجزئية (ج) استخدام قاعدة مشتقة قسمة دالتين.

يتضمن التمرين ١ من تمارين ٥-٣ عددًا من الدوال المختلفة يتطلّب حلّها استخدام قاعدة السلسلة، ويتطلب التمرين ٤ قاعدة السلسلة مع قاعدة مشتقة ضرب دالتين أو قاعدة قسمة دالتين، وما يتبقى من التمارين تستخدم الاشتقاق في تطبيقات متنوعة.

دعم الطلبة

أحد الأخطاء الشائعة هو أن يكتب الطلبة مشتقة $ص = هـ^{س}$ على النحو $س هـ^{س-١}$ باتباع قاعدة مشتقة القوة. يمكنك أن تشدد على أن هـ هو عدد، وليس بمتغير، عارضًا عليهم مجموعة من الدوال المختارة، وطالبًا إليهم تصنيفها، وإيجاد مشتقاتها.

تحدّي الطلبة

تُعدّ برهنة مشتقة $ص = هـ^{س}$ تحديًا للطلبة. إن هذا البرهان باستخدام النهايات وجداول القيم موضّح في كتاب الطالب، لذا يمكن للطلبة مناقشته ثم التحقق من عملهم.

مصادر أخرى مفيدة

باستخدام الرابط:

https://undergroundmathematics.org/chain-rule/can-you-find-chain-rule-edition (Underground Mathematics)

يمكن البحث في قاعدة السلسلة The chain rule، والتكامل بالتعويض integration by substitution.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٥-٣

٤-٥ مشتقات الدوال اللوغاريتمية الطبيعية

ملاحظات للمعلّمين

بعد اشتقاق الدالة ص = هـ^س في الدرس السابق، سيوجّه الطلبة اهتمامهم إلى اشتقاق دالتها العكسيّة، وهي دالة اللوغاريتم الطبيعي.

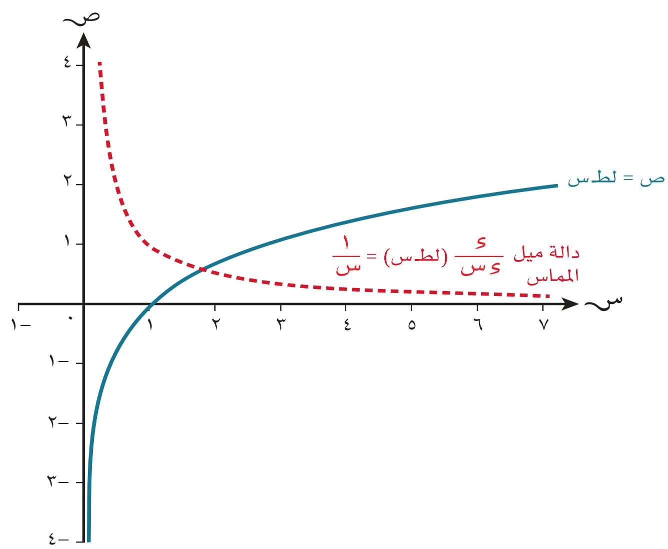
أفكار للتعليم

يمكن أن يستخدم الطلبة استكشف ٢ بالتفكير في ميل المماس للدالة ص = لطـس. يمكنك أيضًا تشجيعهم على استخدام معارفهم في اللوغاريتمات، والأسس لكتابة عبارة مكافئة بدلالة هـ^س، ثم إجراء الاشتقاق. العمل موضّح في بداية هذا الدرس في كتاب الطالب.
الخطوة اللاحقة هي اشتقاق الدوال المركبة اللوغاريتمية باستخدام قاعدة السلسلة. يقدّم المثال ٨ طريقة بديلة باستخدام قوانين وخواص اللوغاريتمات، ومعالجة الدوال وتبسيطها. من المهم أن يكون الطلبة مرنين في اختيار الطرق المناسبة للحل، بحيث يستخدمون مرّة أخرى قاعدة مشتقة ضرب دالتين، وقاعدة مشتقة قسمة دالتين مع قاعدة السلسلة.
يوفر التمرينان ١، ٣ من تمارين ٥-٤ أنواعًا مختلفة من الدوال إذ يتضمنان تطبيقات على المشتقة. يُعدّ التمرين ٢ مثيرًا للاهتمام، ويمكن حلّه باستخدام قوانين وخواص اللوغاريتمات أو قاعدة السلسلة.
في التمارين من ٤ إلى ١٢، يستخدم الطلبة مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي، بالتوازي مع قوانين اللوغاريتمات، للعثور على مشتقات الضرب والقسمة للدوال، ومشتقات الدوال المركبة.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ٢

في الوحدة الرابعة (التفاضل) استقصى الطلبة ميل المماسات لمنحنيات الدوال بالربط بين التمثيل البياني للدالة مع التمثيل البياني لدالة ميل مماس منحنى الدالة الخاصة بها، وكذلك رسم التمثيل البياني لمنحنى ميل مماس الدالة. قد ترغب في العودة إلى مثال أو اثنين قبل أن تطلب إلى الطلبة رسم دالة ميل المماس للمنحنى ص = لطـس. ويمكن للطلبة نسخ منحنى الدالة ص = لطـس باستخدام اللوح الأبيض، ثم رسم دالة ميل مماس المنحنى تحته. يمكن للطلبة النظر إلى رسوم زملائهم في المجموعات الصغيرة، ومناقشة أوجه التشابه والاختلاف بينها.



دعم الطلبة

من أكثر الأخطاء الشائعة التي يقع فيها بعض الطلبة هي نسيان استخدام قاعدة السلسلة عند إيجاد مشتقة ص = لطـ (أ س). يمكنك أن تستخدم التمرين ٢ من تمارين ٥-٤ لتبدأ مناقشة مفيدة مع كل الطلبة في الفصل، ثم الطلب إليهم شرح السبب في أن مشتقة لطـ أ س هي دائمًا $\frac{١}{س}$ مهما كانت قيمة أ.

تحدّي الطلبة

يُعدّ التمرين ١٢ الوارد في تمارين ٥-٤ من تمارين التحدي حيث يبدأ بتعريف س كدالة بدلالة ص، ويسأل عن $\frac{دص}{دس}$.

مصادر أخرى مفيدة

يتضمن المصدر https://web.ma.utexas.edu/users/m408n/CurrentWeb/LM3-6-2.php نصًا وفيديو توضيحيًا يشرحان كيفية إيجاد مشتقة الدالة ص = لطـ س (كذلك مشتقة الدالة ص = $لو_{أ}$ س).

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٥-٤

٥-٥ مشتقات الدوال المثلثيّة

ملاحظات للمعلِّمين

في هذا الدرس، يستحضر الطلبة معلوماتهم عن الدوال المثلثيّة، والمشتقات. إن فهم التمثيلات البيانية للدوال المثلثيّة يساعدهم على تمييز دوال ميل المماس لمنحنى كل من ص = جاس، ص = جتاس.

أفكار للتعليم

في بداية الدرس، يمكنك استخدام نشاط استكشف ٣ حيث يعرض التمثيل البياني للدوال، ولدوال ميل المماس ليقوم الطلبة بتحليلها.

يمكنك أن تتحدى الطلبة لاستخدام معلوماتهم في حساب المثلثات، والتفاضل ليجدوا مشتقة ظاس (قد تقدم مساعدة مثل: ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ كبداية للحل). يمكن اشتقاق ظتاس بطريقة مشابهة، وكذلك قاس، قتاس باعتبارها دوال المقلوب (انظر التمرين ٨ من تمارين ٥-٥ في كتاب الطالب، والجزئية أ من التمرين ٤ من تمارين مراجعة نهاية الوحدة الخامسة في كتاب النشاط). يقدم المثالان ١٠، ١١ أمثلة على اشتقاق الجيب، وجيب التمام، ويؤكد المثال ١٠ على استخدام قاعدة السلسلة.

تتضمن التمارين من ١ إلى ٤ من تمارين ٥-٥ اشتقاق عدد واسع من الدوال المثلثيّة، وتُعدّ جميع التمارين من ٥ إلى ١٥ تطبيقات على اشتقاق دوال مثلثية.

إرشادات حول أنشطة استكشف

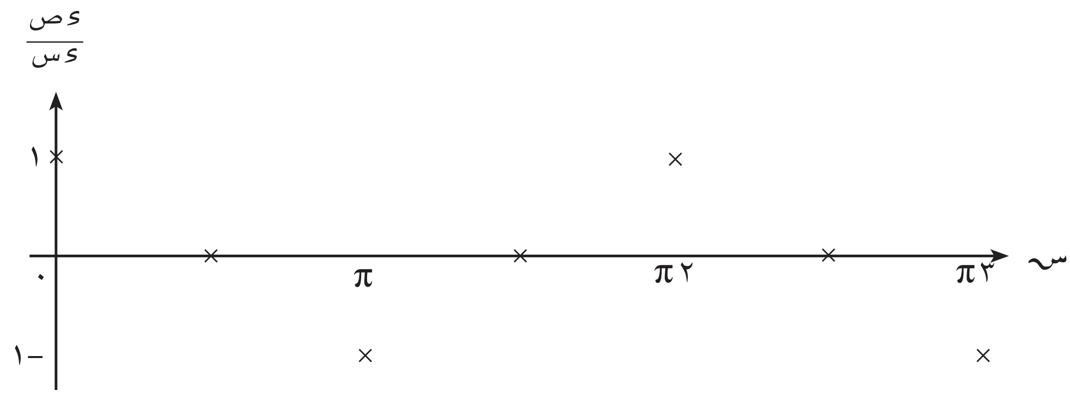
استكشف ٣

في استكشف ٣، يتم عرض منحنيي الدالتين ص = جاس، ص = جتاس على الطلبة، بالإضافة إلى منحنيي دالتَي مماس المنحنى لكل دالة منهما، ويطلب إليهم التعليق على الشكل، وتسمية دالتَي مماس المنحنى.

بدلًا من ذلك، يمكنك أن تطلب إليهم رسم منحنى الدالة ص = جاس، ومعرفة ما إذا كان بإمكانهم رسم منحنى دالة ميل المماس للمنحنى على التمثيل البياني نفسه.

نقطة البداية الجيدة هنا هي مناقشة قيم س التي يكون الميل عندها صفرًا. يكون الميل صفرًا عند س = $\frac{\pi}{٢}$، س = $\frac{٣\pi}{٢}$، س = $\frac{٥\pi}{٢}$، ...، الأمر الذي يعني أن منحنى دالة المماس للمنحنى يمر بالنقاط $\left(\frac{\pi}{٢}، ٠\right)$، $\left(\frac{٣\pi}{٢}، ٠\right)$، $\left(\frac{٥\pi}{٢}، ٠\right)$، والتي يمكن الآن تحديدها ورسمها.

من هنا، يمكنك أيضًا أن تطلب إلى الطلبة استخدام مسطرة أو أي حافة مستقيمة لتقدر قيم س، عندما يكون ميل الدالة ص = جاس يساوي ١، وميل الدالة ص = جاس يساوي -١. ستسمح النتائج الصحيحة لهم برسم نقاط دالة ميل المماس للمنحنى عند (٠، ١)، (٢π، ١)، ...، (π، -١)، (٣π، -١)، ...



النتائج هي: $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (جاس) = جتاس، $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (جتاس) = –جاس

استكشف ٤

١) المشتقات التي حصلت عليها كل من وداد ومريم غير متطابقة مع إجابة المعلّمة.

فاطمة لم تخطئ لأن: $\frac{\text{جاس + س جتاس}}{\text{١ – جتا}^{٢}\text{س}} \equiv$ قتاس (١ + س ظتاس)

لإثبات ذلك، يمكن بداية استبدال المقام في $\frac{\text{جاس + س جتاس}}{\text{١ – جتا}^{٢}\text{س}}$ بـ جا^{٢}س

$\frac{\text{جاس + س جتاس}}{\text{١ – جتا}^{٢}\text{س}} \equiv \frac{\text{جاس + س جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$ **اكتب في صورة مجموع لكسرَين**

$\equiv \frac{\text{جاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س}} + \frac{\text{س جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$ **بسّط الكسر الأوّل، واكتب الكسر الثاني في صورة ناتج ضرب ثلاثة حدود**

$\equiv \frac{\text{١}}{\text{جاس}} + \text{س} \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} \times \frac{\text{١}}{\text{جاس}}$ **حدّد مقلوبات الدوال**

$\equiv$ قتاس + س ظتاس قتاس **حلِّل إلى العوامل بأخذ العامل المشترك**

$\equiv$ قتاس (١ + س ظتاس)

٢) الإجابة هي د(س) = ظتاس، هـ(س) = قتاس، ع(س) = قاس.

إليك إحدى الطرق التي يمكن استخدامها لإثبات أن: $\frac{\text{جاس – جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س}} \equiv$ ظتاس (قاس – قتاس)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جاس – جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$ **اكتب في صورة فرق بين كسرَين.**

$= \frac{\text{جاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س}} - \frac{\text{جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$ **اكتب جا^{٢}س في صورة جاس × جاس**

$= \frac{\text{جاس}}{\text{جاس} \times \text{جاس}} - \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس} \times \text{جاس}}$ **بسّط الكسر الأوّل، واكتب الكسر الثاني في صورة حاصل ضرب لكسرَين**

$= \frac{\text{١}}{\text{جاس}} - \frac{\text{١}}{\text{جاس}} \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ **اضرب الكسر الأوّل بـ $\frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}}$**

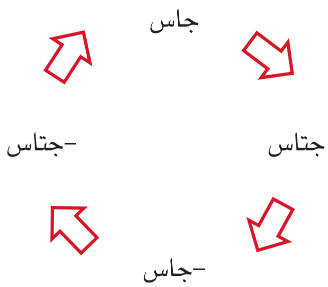
$= \frac{١}{\text{جاس}} \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}} - \frac{١}{\text{جاس}} \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ **حلل بأخذ $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ كعامل مشترك**

$= \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} \left(\frac{١}{\text{جتاس}} - \frac{١}{\text{جاس}} \right)$ **حدّد مقلوبات الدوال المثلثية**

$=$ ظتاس(قاس − قتاس)

دعم الطلبة

تحدث العديد من الأخطاء عندما لا يكون الطلبة متأكدين من صحة مشتقات الدوال المثلثية، ومكان وجود إشارة السالب. يعد المخطط المجاور طريقة مفيدة لتذكر ذلك.



تحدّي الطلبة

يوجد في الموقع (Underground Mathematics) Similar derivatives،
https://undergroundmathematics.org/calculus-trig-log/similar-derivatives
نشاط يتحدى الطلبة، حيث عليهم إيجاد مشتقة كل من ظاهـ، ظتاهـ، قاهـ، والتفكير فيما سيحصل عندما تزداد الزاوية هـ بمقدار صغير. توجد تمارين تقود الطلبة إلى التبرير والبرهان الهندسي.

مصادر أخرى مفيدة

يوفّر الموقع (Underground Mathematics) Trig gradient match،
https://undergroundmathematics.org/calculus-trig-log/trig-gradient-match
سلسلة من التمثيلات البيانية يمكن المزاوجة بينها لتمثل الدالة، ومشتقتها.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٥−٥

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الخامسة.

الوحدة الخامسة

المزيد من التفاضل

العرض التوضيحي الإلكتروني ٥

الرياضيّات المتقدمة للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الثاني

مشتقة لط س

نحتاج إلى إيجاد مشتقة لط س

ص = لط س تعني أن $هـ^{ص}$ = س

الرياضيّات المتقدمة للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الثاني

مشتقة لطـ س

نحتاج إلى إيجاد مشتقة لطـ س

ص = لطـ س تعني أن $هـ^{ص}$ = س

أوجد المشتقة بالنسبة إلى ص

هذا يعني أن $هـ^{ص} = \frac{ءس}{ءص}$

الرياضيّات المتقدمة للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الثاني

مشتقة لطـ س

يمكن أن نعود ونعوّض في $هـ^{ص}$

∴ $هـ^{ص} = \frac{ءس}{ءص}$ تصبح س $= \frac{ءس}{ءص}$

مشتقة لط س

يمكن أن نعود ونعوّض في $هـ^{ص} = س$

$\therefore$ $هـ^{ص} = \frac{ءس}{ءص}$ تصبح $س = \frac{ءس}{ءص}$

الآن أعد ترتيب $س = \frac{ءس}{ءص}$ لتحصل على $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{س}$

الرياضيّات المتقدمة للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الثاني

مشتقة لط س

ينتج عن ذلك أن:

$$\frac{ء}{ءس}(لط\ س) = \frac{١}{س}$$

الرياضيّات المتقدمة للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الثاني

مشتقة لطـ (د (س))

لتكن الدّالة ص = لطـ (د (س))

افترض أن ص = لطـ ع، حيث ع = د (س)

الرياضيّات المتقدمة للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الثاني

مشتقة لطـ (د (س))

لتكن الدّالة ص = لطـ (د (س))

افترض أن ص = لطـ ع، حيث ع = د (س)

وعليه، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{1}{\text{ع}}$ و $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \text{د}'(\text{س})$

الرياضيّات المتقدمة للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الثاني

مشتقة لطـ (د (س))

لتكن الدّالة ص = لطـ (د(س))

افترض أن ص = لطـ ع، حيث ع = د (س)

وعليه، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{١}{\text{ع}}$ و $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \text{د}'(\text{س})$

باستخدام قاعدة السلسلة: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

الرياضيّات المتقدمة للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الثاني

مشتقة لطـ (د (س))

لتكن الدّالة ص = لطـ (د(س))

افترض أن ص = لطـ ع، حيث ع = د (س)

وعليه، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{١}{\text{ع}}$ و $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \text{د}'(\text{س})$

باستخدام قاعدة السلسلة: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$= \frac{١}{\text{ع}} \times \text{د}'(\text{س})$

الرياضيّات المتقدمة للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الثاني

مشتقة لطـ (د (س))

لتكن الدّالة ص = لطـ (د(س))

افترض أن ص = لطـع، حيث ع = د (س)

وعليه، $\frac{ءص}{ءع} = \frac{١}{ع}$ و $\frac{ءع}{ءس} = د'(س)$

باستخدام قاعدة السلسلة: $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

$= \frac{١}{ع} \times د'(س)$

$= \frac{د'(س)}{د (س)}$

الرياضيّات المتقدمة للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الثاني

مشتقة لطـ (د (س))

نتوصل من ذلك إلى النتيجة:

$$\frac{ء}{ءس} (لطـ (د (س))) = \frac{د'(س)}{د (س)}$$

إجابات تمارين الوحدة الخامسة - كتاب الطالب: المزيد من التفاضل

إجابات معرفة قبلية

١) أ $١٥س^{٢} + \frac{٦}{س^{٣}} + \frac{١}{\sqrt{س}}$

ب $\frac{٥}{٢}س^{٤} - ٤س - \frac{١}{٢س^{٢}}$

٢) أ $١٢(٣س - ٥)^{٣}$

ب $\frac{٤}{(٢س - ١)^{\frac{٢}{٣}}}$

٣) $ص = \frac{١}{٥}س - \frac{١٦}{٥}$

٤) (٠، ٢) نقطة عظمى، (٢، −٢) نقطة صغرى.

تمارين ٥-١

١) أ $(٦س - ٢)(س - ٢)^{٤}$

ب $٥(٢س + ١)^{٢}(٨س + ١)$

ج $\frac{٣س + ٤}{٢\sqrt{س + ٢}}$ د $\frac{٣س + ٩}{٢\sqrt{س + ٥}}$

هـ $\frac{س^{٢}(٧س - ٣)}{\sqrt{٢س - ١}}$ و $\frac{(١٣س^{٢} + ٢)(س^{٢} + ٢)^{٢}}{٢\sqrt{س}}$

ز $(س - ٣)(س + ٢)^{٤}(٧س - ١١)$

ح $(٢س - ١)^{٤}(٣٦س + ٣٧)$

ط $٢(٣س^{٢} + ١)(١٥س^{٢} - ٣٠س + ١)$

٢) $-١٫٥$

٣) $١٦س + ص = ٣٢$

٤) $م = ٥$

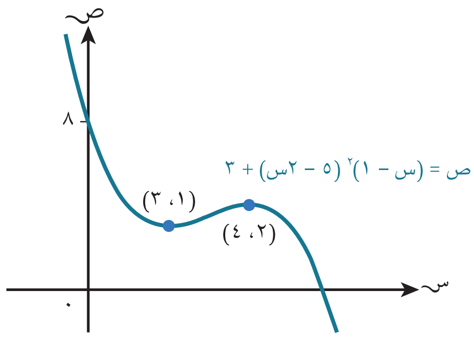
٥) $-١، \frac{٣}{٥}، ٣$

٦) $-\frac{١}{٣}$

٧) أ (١، ٣)، (٢، ٤)

ب ٢ وحدة مربعة

ج نقطة صغرى (١، ٣)؛ نقطة عظمى (٢، ٤).

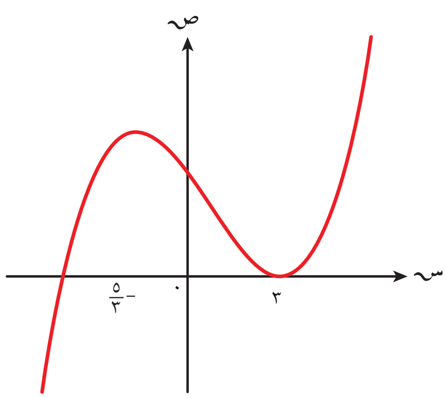


٨) أ $س = ٣$ أو $س = -\frac{٥}{٣}$

ب $س = -\frac{٥}{٣}$ نقطة عظمى

$س = ٣$ نقطة صغرى

ج



تمارين ٥-٢

١) أ $-\frac{١١}{(س - ٤)^{٢}}$ ب $\frac{١}{(٢ - س)^{٢}}$

ج $\frac{٢(س^{٢} - س + ٣)}{(٢س - ١)^{٢}}$ د $\frac{١١}{(٢ - ٥س)^{٢}}$

هـ $-\frac{٢(٨س + ١)}{(س + ٤)^{٣}}$ و $-\frac{٢٠س^{٣}}{(س^{٢} - ١)^{٣}}$

ز $\frac{١٣س^{٢} + ٣٠س - ٣٥}{(س^{٢} + ٢س + ٥)^{٢}}$

ح $-\frac{٢(س + ٤)(٢س^{٢} + ١٢س - ١)}{(س^{٢} + ١)^{٤}}$

٢) $م = \frac{١}{٤}$

٣) (−٦، −٧)، (١، ٠)

٤) (٢، ١)، (٨، −٥)

٥) ص = ٩س − ٤

٦) أ $\frac{-٥س - ١}{٢\sqrt{س}\,(٥س - ١)^{٢}}$

ب $\frac{س + ٤}{(٢س + ٣)^{\frac{٣}{٢}}}$

ج $-\frac{س(س^{٢} + ١)}{(س^{٢} - ١)^{\frac{٣}{٢}}}$

د $\frac{٥\,(س - ١)^{٢}(٥س + ١٣)}{٢\,(س + ٢)^{\frac{٣}{٢}}}$

٧) ٣

٨) ٣ص = س + ٧

تمارين ٥-٣

١) أ $٥\,هـ^{٥س}$ ب $-٤\,هـ^{-٤س}$

ج $١٢هـ^{٦س}$ د $-١٥هـ^{-٥س}$

هـ $٢هـ^{\frac{س}{٢}}$ و $٢هـ^{٢س - ٧}$

ز $٢س\,هـ^{س^{٢} - ٢}$ ح $٢ + \frac{٣هـ^{\sqrt{س}}}{٢\sqrt{س}}$

ط $\frac{٥\sqrt{هـ^{س}}}{٢} + ٢هـ^{-٢س}$ ي $٦هـ^{٣س}$

ك $٣هـ^{٢س} - هـ^{-٢س}$ ل $١٠س\,هـ^{س^{٢}} - ١٠$

٢) ص = −س + ٢

٣) ٠٫٠٢٨٣ جرام لكل سنة

٤) أ $س\,هـ^{س} + هـ^{س}$ ب $٣س^{٢}هـ^{٣س} + ٢س\,هـ^{٣س}$

ج $هـ^{-٢س}(٥ - ١٠س)$ د $\frac{هـ^{س}(٢س + ١)}{\sqrt{س}}$

هـ $\frac{هـ^{٦س}(٦س - ١)}{س^{٢}}$

و $-\frac{هـ^{-٢س}(٤س + ١)}{٢س\sqrt{س}}$

ز $\frac{٣هـ^{س}}{(هـ^{س} + ٢)^{٢}}$

ح $٣س\,هـ^{٣س} + ٣\,هـ^{٦س} + هـ^{٣س}$

ط $\frac{٢س^{٢}هـ^{س} + ٥س\,هـ^{س} + ٢س\,هـ^{٢س} - هـ^{س} - ٢}{(هـ^{س} + ٢)^{٢}}$

٥) $-\frac{٤}{٩}$

٦) $\left(-١، -\frac{١}{هـ}\right)$

٧) ص = ٣س + ٣، (−١، ٠)

٨) $(٣، -هـ^{٣})$ نقطة صغرى

٩) $(١، هـ^{٢})$ نقطة صغرى

١٠) أ س = ٠ قيمة صغرى، س = ٢ قيمة عظمى

ب برهان

١١) $س = ١ - \frac{١}{\sqrt{٢}}$، $س = ١ + \frac{١}{\sqrt{٢}}$

١٢) $\left(\frac{١}{٢}، ٢\right)$

تمارين ٥-٤

١) أ $\frac{١}{س}$ ب $\frac{١}{س}$

ج $\frac{٢}{٢س + ١}$ د $\frac{٢س}{س^{٢} + ١}$

هـ $\frac{٤}{٢س - ١}$ و $\frac{١}{٢(س - ٣)}$

ز $\frac{٥}{س + ٣}$ ح $٣ - \frac{١}{س}$

ط $٥ - \frac{٢}{٢س - ١}$ ي $\frac{١}{س\,لطس}$

ك $\frac{١}{\sqrt{س}\,(\sqrt{س} - ٢)}$ ل $\frac{١ + ٥س}{س\,(٥س + لطس)}$

٢) تبرير ممكن: لطـ ٣س = لطـ ٣ + لطـ س،

ولطـ ٧س = لطـ ٧ + لطـ س

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{لطـ ٣س}) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{لطـ ٣} + \text{لطـ س}) = ٠ + \frac{١}{\text{س}}$،

و $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{لطـ ٧س}) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{لطـ ٧} + \text{لطـ س}) = ٠ + \frac{١}{\text{س}}$

٣) أ ١ + لطـ س

ب $\text{٢س}^{٢}(١ + \text{٣لطـ س})$

ج $\frac{\text{٢س}}{\text{٢س} + ١} + \text{لطـ}(\text{٢س} + ١)$

د ٣(١ + لطـ ٢س)

هـ $\frac{١}{\text{لطـ س}} + \text{لطـ}(\text{لطـ س})$

و $\frac{١ - \text{لطـ ٥س}}{\text{س}^{٢}}$

ز $-\frac{٢}{\text{س} \times (\text{لطـ س})^{٢}}$

ح $\frac{\text{٣س} - (\text{٣س} - ٢)\,\text{لطـ}(\text{٣س} - ٢)}{\text{س}^{٢}(\text{٣س} - ٢)}$

ط $\frac{٢(\text{٤س} - ١) - ٤(\text{٢س} + ١)\,\text{لطـ}(\text{٢س} + ١)}{(\text{٢س} + ١)(\text{٤س} - ١)^{٢}}$

٤) $\frac{٢}{٧}$

٥) −٨

٦) ٢ + ٤ لطـ ١٠، ٣ + ٢ لطـ ١٠

٧) $\left(\frac{١}{\sqrt{\text{هـ}}}، -\frac{١}{\text{٢هـ}}\right)$، نقطة صغرى.

٨) $\left(\text{هـ}، \frac{١}{\text{هـ}}\right)$، نقطة عظمى.

٩) ص = ٥س − ٥

١٠) أ $\frac{٥}{٢(\text{٥س} - ١)}$ ب $-\frac{٣}{\text{٣س} + ٢}$

ج $\frac{١}{\text{س}} + \frac{٥}{\text{س} + ١}$ د $\frac{٢}{\text{٢س} + ٣} - \frac{١}{\text{س} - ١}$

هـ $\frac{٣}{\text{٣س} - ١} - \frac{٢}{\text{س}}$

و $\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س} - ٢} - \frac{١}{\text{س} + ٤}$

ز $\frac{١}{\text{س} - ٣} - \frac{١}{\text{س} + ٤} - \frac{١}{\text{س} - ١}$

ح $-\frac{٢}{\text{س} + ١} - \frac{١}{\text{س} - ٢}$

ط $\frac{١}{\text{س} + ٢} + \frac{٢}{\text{٢س} - ١} - \frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س} + ٥}$

١١) أ $\frac{\text{٤س}}{\text{٢س}^{٢} - ١}$

ب $\frac{\text{٩س}^{٢} + ٢}{\text{٣س}^{٣} + \text{٢س}}$

ج $\frac{\text{٢س} - ٤}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٥)}$

١٢) −٥

تمارين ٥-٥

١) أ جتا س ب ٢جتا س − ٣جا س

ج $-\text{٢جا س} - \text{قا}^{٢}\text{س}$ د ٦جتا ٢س

هـ $\text{٢٠قا}^{٢}\,\text{٥س}$

و −٢(٣جا٣س + جتا٢س)

ز $\text{٣قا}^{٢}(\text{٣س} + ٢)$ ح $\text{٢جتا}\left(\text{٢س} + \frac{\pi}{٣}\right)$

ط $-\text{٦جا}\left(\text{٣س} - \frac{\pi}{٦}\right)$

٢) أ $\text{٣جا}^{٢}\text{س جتا س}$ ب −٣٠جتا٣س جا٣س

ج ٢جا س (١ + جتا س)

د $\text{٤جا س}\,(٣ - \text{جتا س})^{٣}$

هـ $\text{١٢جا}^{٢}\left(\text{٢س} + \frac{\pi}{٦}\right)\text{جتا}\left(\text{٢س} + \frac{\pi}{٦}\right)$

و $-\text{١٢جتا}^{٢}\text{س جا س} + \text{٨ظا}\left(\text{٢س} - \frac{\pi}{٤}\right)\text{قا}^{٢}\left(\text{٢س} - \frac{\pi}{٤}\right)$

٣) أ س جتا س + جا س

ب ٥ (جتا٣س − ٣س جا٣س)

ج س^{٢}قا^{٢} س + ٢س ظاس

د جتا^{٢} ٢س (جتا٢س −٦س جا٢س)

هـ ١٥ظا٣س قا٣س

و $\frac{\text{جتا س + س جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}$ = (١ + س ظاس) قاس

ز $\frac{\text{س قا}^{٢}\text{س − ظا س}}{\text{س}^{٢}}$

ح $\frac{\text{١ + ٢جتا س}}{\text{(٢ + جتاس)}^{٢}}$

ط $\frac{\text{(٣س − ١) جتا س − ٣جا س}}{\text{(٣س − ١)}^{٢}}$

ي − $\frac{\text{٦جتا ٢س}}{\text{جا}^{٤}\text{ ٢س}}$ = −٦ ظتا٢س قتا^{٣} ٢س

ك $\frac{\text{٣جا٢س − ٦س جتا ٢ س}}{\text{جا}^{٢}\text{ ٢س}}$

= ٣قتا٢ س (١ − ٢س ظتا٢ س)

ل − $\frac{\text{٢}}{\text{(جاس − جتاس)}^{٢}}$

٤) أ جتاس هـ$^{\text{جاس}}$

ب −٢جا٢س هـ$^{\text{جتا٢س}}$

ج ٣قا^{٢} ٣س هـ$^{\text{ظا ٣س}}$

د (جتاس +جا س) هـ$^{\text{(جاس − جتاس)}}$

هـ (جتا س − جا س) هـ$^{\text{س}}$

و (٢جتا٢س + جا٢ س) هـ$^{\text{س}}$

ز هـ$^{\text{س}}$(جتا س − ٣جا س)

ح س^{٢} (٣ − س جا س) هـ$^{\text{جتاس}}$

ط −ظا س

ي س ظتاس + لطـ(جا س)

ك − $\frac{\text{٢(جا٢ س + جتا٢ س)}}{\text{هـ}^{\text{٢س + ١}}}$

ل $\frac{\text{(١ − ٢س) جا٢ س + ٢س جتا٢ س}}{\text{هـ}^{\text{٢س}}}$

٥) ١

٦) ٢$\sqrt{٣}$ − ٦

٧) برهان (راجع الحلول التفصيلية)

٨) أ ظاس قاس

ب − ظتاس قتاس

ج − قتا^{٢} س

٩) برهان

١٠) ص = −١٣٫٣ س + ١٢٫٩

١١) ٠٫٤٦٤، ٢٫٠٣

١٢) س = $\frac{\pi}{٤}$، قيمة عظمى

١٣) س = $\frac{\pi}{٨}$

١٤) س = $\frac{\pi}{١٢}$ قيمة صغرى، س = $\frac{٥\pi}{١٢}$ قيمة عظمى.

١٥) س =$\frac{\pi}{٦}$ قيمة عظمى، س = $\frac{٥\pi}{٦}$ قيمة صغرى،

س = $\frac{٧\pi}{٦}$ قيمة عظمى، س = $\frac{١١\pi}{٦}$ قيمة صغرى.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الخامسة

١) أ ٤   ب $\frac{٢}{٢٥}$

٢) أ ٥   ب -٣

٣) $ص = ٨,٦٦س - ٢,٥٣$

٤) أ $-\frac{١}{\sqrt{١ - س}\,(س + ١)^{\frac{٣}{٢}}}$

ب $س = \frac{١}{٢}$

٥) أ $س = \frac{٢\pi}{٣}$

ب $س = ٢,٤٣$

٦) أ $(١،\ ١)$

ب $(-١،\ -١)$، $(١،\ -١)$

٧) $\frac{١}{٢}$

٨) أ برهان

ب $ل = ٨١$

٩) $س = ٠,٨٨٤$، $س = ٢,٤٥$

١٠) $ص = س + \frac{٢ - \pi}{٤}$ أو $ص = س + \frac{\pi - ٢}{٤}$

إجابات تمارين كتاب النشاط - الوحدة الخامسة: المزيد من التفاضل

الإجابات لا تتضمن إجابات تفصيلية للتمارين التي تحتاج إلى براهين.

تمارين ٥-١

١) أ (١) $٣(س + ١)^{٣}(س - ٢)^{٤}(٣س - ١)$

(٢) $(س - ٣)^{٦}(س + ٥)^{٣}(١١س + ٢٣)$

ب (١) $(٢س - ١)^{٣}(١ - ٣س)^{٢}(-٤٢س + ١٧)$

(٢) $(١ - س)^{٤}(٤س + ١)(-٢٨س + ٣)$

٢) أ $\frac{٣س + ٢}{٢\sqrt{س + ١}}$ ب $\frac{٣(٢ - س)}{\sqrt{٣ - س}}$

ج $\frac{٢س(٣ - ٥س)}{\sqrt{٣ - ٤س}}$ د $-\frac{٩س + ١٤}{\sqrt{٢س + ٥}}$

هـ $\frac{(١٥س - ١٩)(٣س + ٥)}{٢\sqrt{س - ٢}}$

و $\frac{(٣٥س - ٤)(٥س - ٤)^{٢}}{٢\sqrt{س}}$

٣) $ص = ٦٤س - ٤٨$

٤) $(-١،\ -١)$

٥) ٣٦ سم^{٢}، ٤,٢٤ سم

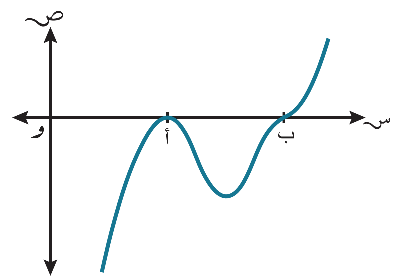
٦) $س = ٣،\ -\frac{١}{٣}،\ \frac{٧}{٤}$

٧) $ح = ٥١,٨$، $س = ٦,٤$

٨) $أ = ٤$، $ب = ٥$

٩) أ $\frac{ك أ + ل ب}{ل + ك}$

ب



ج ك عدد فردي

تمارين ٥-٢

١) أ ١) $\frac{٢}{(س + ١)^{٢}}$

٢) $\frac{-٥}{(س - ٣)^{٢}}$

ب ١) $\frac{س(٢س + ١)^{-\frac{١}{٢}} - (٢س + ١)^{\frac{١}{٢}}}{س^{٢}}$

٢) $\frac{٢س(س - ١)^{\frac{١}{٢}} - \frac{١}{٢}س^{٢}(س - ١)^{-\frac{١}{٢}}}{س - ١}$

ج ١) $\frac{٢(س^{٢} - س - ٢)}{(س^{٢} + ٢)^{٢}}$

٢) $-\frac{س^{٢} + ٢س + ٤}{(س + ١)^{٢}}$

٢) أ $\frac{س + ٢}{٢(س + ١)^{\frac{٣}{٢}}}$

ب $\frac{١٠ - س}{٢س^{٢}\sqrt{س - ٥}}$

ج $-\frac{٣س + ٤}{٤س^{٢}\sqrt{٣س - ٢}}$

٣) (٠، ٠)، (١، ١)

٤) أ = -١

٥) ١٤ص = ٨س - ٣٧

٦) $(٢(\sqrt{٢} - ١)، ٢(١ + \sqrt{٢}))$، $(-٢(١ + \sqrt{٢})، -٢(\sqrt{٢} - ١))$

٧) $\frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{(س + ١)^{٢}}$

٨) أ = ٣، ب = ٤، ل = $\frac{٣}{٢}$

تمارين ٥-٣

١) أ $٣هـ^{٣س}$

ب $\frac{٣}{٢}هـ^{\frac{س}{٢}}$

ج $\frac{٢هـ^{\sqrt{س}}}{\sqrt{س}}$

د $\frac{-٢هـ^{\frac{٢}{س}}}{س^{٢}}$

هـ $٣هـ^{٣س - ٢}$

و $٦س(هـ^{٣س^{٢} + ١})$

ز $-٦هـ^{-س^{٣}}س^{٢}$

ح $٤هـ^{٢س}(هـ^{٢س} + ٢)$

ط $-\frac{هـ^{س}}{(هـ^{س} + ٢)}$

ي $-\frac{٦هـ^{٤س}}{\sqrt{١ - ٣هـ^{٤س}}}$

ك $٩هـ^{س^{٣}}(هـ^{س^{٣}} + ١)^{٢}س^{٢}$

ل $-\frac{هـ^{س}(٤س + ١)}{\sqrt{١ - ٤س}}$

م $\frac{-هـ^{س}س^{٢} - ٢هـ^{س} + ٢س - ٢هـ^{٢س}}{(هـ^{س} + ١)^{٢}}$

ن $\frac{١}{٢}هـ^{٥س - \sqrt{س}}\left(٥ - \frac{١}{٢\sqrt{س}}\right)$

س $هـ^{٣س}(-٨هـ^{س} + ٥هـ^{٢س} + ٣)$

٢) $\frac{٥}{٢}$

٣) أ ص = هـ(٢س - ١)، ص = $-\frac{١}{هـ}$

ب $\frac{١}{٢}\left(١ - \frac{١}{هـ^{٢}}\right)$

٤) س = لطـ ٣

٥) ص = ٣س - لطـ ٤ + ٢

٦) $(٦س^{٢} + ٤س + ٣)هـ^{٢س}$

$= ل(س) \times هـ^{٢س}$

٧) س = $-\frac{١}{٢}$، ٢

٨) أ ٢٤٥ سنة　　ب −٠,١٩٨ جم/ سنة

٩) أ ٤,٤٨ م^{٢}/دقيقة　　ب ٧ دقائق

١٠) س + ٩ص = ٨١ + لط ٣

تمارين ٥-٤

١) أ $\frac{١}{س}$　　ب $\frac{٢}{٢س - ١}$

ج $\frac{-٢}{١ - ٢س}$　　د $\frac{٢}{س}$

هـ $\frac{ب}{أ + ب س}$　　و $\frac{-١}{س}$

ز $\frac{-٣}{٣س + ١}$

ح $\frac{٢}{٢س + ١} - \frac{٣}{٣س - ١}$

ط $-\frac{٦}{س}$　　ي $\frac{١}{س} + \frac{١}{س + ١}$

ك $\frac{٢}{س} + \frac{١}{س - ١}$　　ل $\frac{١}{س - ١} + \frac{١}{س + ٢}$

م $\frac{١ - لط ٣س}{س^{٢}}$

ن $\frac{س - ٢س لط ٢س}{س^{٤}} = \frac{١ - ٢ لط ٢س}{س^{٣}}$

٢) س − ص = ١ − لط ٢

٣) أ ٢س لط س + س

ب $\frac{١ - ٢ لط س}{س^{٣}}$

ج $\frac{هـ^{س}(١ - ٢س هـ^{س})}{(س^{٢}هـ^{س} + ١)^{٢}}$

د $(١ + ٢س^{٢})هـ^{س^{٢}}$

٤) برهان

٥) $٣ - \frac{١}{٢ لط ٣}$

تمارين ٥-٥

١) أ − جتا س　　ب جا س

ج ٤جتا ٤س　　د −٦جا ٣س

هـ $\frac{١}{٢}$ π جتا $\frac{١}{٢}$ π س　　و −٣π جا ٣π س

ز −٢جا(٢س − ١)　　ح ١٥جتا(٣س + $\frac{١}{٤}$π)

ط ٥جا($\frac{π}{٢}$ − ٥س)　　ي ٢ جتا($\frac{١}{٤}$π − ٢س)

ك ٢جا($\frac{π}{٢}$ + ٢س)　　ل π جتا($\frac{π}{٢}$(١ + ٢س))

٢) أ ٢جا س جتا س　　ب −٢جتا س جا س

ج −٣جتا^{٢}س جا س　　د ٥جا $\frac{١}{٢}$س جتا $\frac{١}{٢}$ س

هـ −٨جتا^{٣} ٢س جا٢س　　و ٢س جتا س^{٢}

ز −٢٤س^{٢}جا٢س^{٣}

ح جا($\frac{١}{٢}$س + $\frac{١}{٣}$π) جتا($\frac{١}{٢}$س + $\frac{١}{٣}$π)

ط −٦π جتا^{٢} ٢π س جا٢π س

ي ٦س جا^{٢}س^{٢} جتاس^{٢}

ك صفر　　ل − جتا$\frac{١}{٢}$س جا$\frac{١}{٢}$س

٣) أ برهان

ب ١) ٢ظتا ٢ س　　٢) −٣ظا٣س

٣) ٢ ظتا س　　٤) −٦ ظا٢س

٤) أ جتا س هـ$^{جا س}$　　ب −٣ جا ٣س هـ$^{جتا ٣س}$

ج ١٠جا س جتا س هـ$^{جا^{٢}س}$

٥) المماس: ٤س − ص + ١ − π = ٠

العمودي: ٤س + ١٦ص − π − ١٦ = ٠

٦) س = $\frac{π}{٣}$، $\frac{٢π}{٣}$، $\frac{٤π}{٣}$، $\frac{٥π}{٣}$

٧) أ قا^{٢}س = ظا^{٢}س + ١

ب س = ظا ص

$\frac{ءس}{ءص}$ = قا^{٢}ص

استخدم الجزئية (أ): $\frac{ءس}{ءص}$ = ظا^{٢}ص + ١

وحيث س = ظا ص

فيكون $\frac{ءس}{ءص}$ = س^٢ + ١

وهذا يؤدي إلى $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{س^٢ + ١}$

ج ص − $\frac{\pi}{٣}$ = −$\frac{٤}{٣}$ $\left(س - \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الخامسة

١) أ ع$'$(س) = ٣ + $\frac{١}{س}$ > ٠

∵ ع$'$(س) ≠ صفر

أي أنه لا توجد نقاط حرجة للدالة

∴ يوجد دالة عكسية لـ ع(س)

ب −$\frac{١}{٩}$

٢) أ العمود الأول (الأول = ٧,٧٥ م، الثاني = ٧,٤١ م).

ب ع = هـ^{س} + هـ$^{-٢س}$،

$\frac{ءع}{ءس}$ = هـ^{س} − ٢هـ$^{-٢س}$

حل المعادلة هـ^{س} − ٢هـ$^{-٢س}$ = ٠

هـ^{٣س} − ٢ = ٠

٣س = لطـ ٢

س = $\frac{١}{٣}$ لطـ ٢

عوّض س = $\frac{١}{٣}$ لطـ ٢ في المشتقة الثانية، وتحقّق

وبيّن أن قيمتها موجبة.

ج $\sqrt[٣]{٢}$ + $\frac{١}{\sqrt[٣]{٤}}$

٣) (٦س − ٦)هـ$^{٣س^٢ - ٦س}$

٤) أ قتا س = $\frac{١}{جاس}$

استخدم قاعدة مشتقة قسمة دالتين:

ل = جاس، $\frac{ءل}{ءس}$ = جتاس

ع = ١، $\frac{ءع}{ءس}$ = ٠

$\frac{ء}{ءس}$ (قتاس) = $\frac{جاس × ٠ - ١ × جتاس}{جا^٢س}$

= − $\frac{١}{جاس}$ × $\frac{جتاس}{جاس}$

= − قتاس ظتاس

ب $\left(\frac{٥\pi}{٦}، ٢\right)$

٥) أ س = π ب س = ٢π

٦) أ س = ٠,٩٩٥ ب س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

الوحدة الخامسة: حلول تمارين كتاب الطالب

المزيد من التفاضل

تمارين ٥-١

١) ب) $\text{ص} = ٥\text{س}\,(٢\text{س} + ١)^{٣}$

$$\frac{\text{ىص}}{\text{ىس}} = ٥\text{س}\ \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}\left((٢\text{س} + ١)^{٣}\right) + (٢\text{س} + ١)^{٣}\ \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}\,(٥\text{س})$$

$$= ٥\text{س}\left(٣(٢\text{س} + ١)^{٢}(٢)\right) + (٢\text{س} + ١)^{٣}\,(٥)$$

$$= ٣٠\text{س}(٢\text{س} + ١)^{٢} + ٥(٢\text{س} + ١)^{٣}$$

$$= (٢\text{س} + ١)^{٢}\left(٣٠\text{س} + ٥(٢\text{س} + ١)\right)$$

$$= (٢\text{س} + ١)^{٢}\left(٣٠\text{س} + ١٠\text{س} + ٥\right)$$

$$= (٢\text{س} + ١)^{٢}\left(٤٠\text{س} + ٥\right)$$

$$= ٥(٢\text{س} + ١)^{٢}\left(٨\text{س} + ١\right)$$

ح) $\text{ص} = (٢\text{س} - ١)^{٥}(٣\text{س} + ٤)$

$$\frac{\text{ى}}{\text{ىس}}\left((٢\text{س} - ١)^{٥}(٣\text{س} + ٤)\right) = (٢\text{س} - ١)^{٥} \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(٣\text{س} + ٤) + (٣\text{س} + ٤) \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(٢\text{س} - ١)^{٥}$$

$$= (٢\text{س} - ١)^{٥} \times ٣ + (٣\text{س} + ٤) \times ٥(٢\text{س} - ١)^{٤} \times ٢$$

$$= ٣(٢\text{س} - ١)^{٥} + ١٠(٣\text{س} + ٤)(٢\text{س} - ١)^{٤}$$

$$= (٢\text{س} - ١)^{٤}\left(٣(٢\text{س} - ١) + ١٠(٣\text{س} + ٤)\right)$$

$$= (٢\text{س} - ١)^{٤}\left(٦\text{س} - ٣ + ٣٠\text{س} + ٤٠\right)$$

$$= (٢\text{س} - ١)^{٤}\left(٣٦\text{س} + ٣٧\right)$$

٢) $\text{ص} = \text{س}^{٢}(\text{س} + ٤)^{\frac{١}{٢}}$

$$\frac{\text{ىص}}{\text{ىس}} = \text{س}^{٢}\ \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}\left((\text{س} + ٤)^{\frac{١}{٢}}\right) + (\text{س} + ٤)^{\frac{١}{٢}}\ \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}\,(\text{س}^{٢})$$

$$= \text{س}^{٢}\left(\frac{١}{٢}(\text{س} + ٤)^{-\frac{١}{٢}}\right) + (\text{س} + ٤)^{\frac{١}{٢}}\,(٢\text{س})$$

$$= \frac{\text{س}^{٢}}{٢\sqrt{(\text{س} + ٤)}} + ٢\text{س}\sqrt{(\text{س} + ٤)}$$

$$= \frac{\text{س}^{٢} + ٤\text{س}(\text{س} + ٤)}{٢\sqrt{(\text{س} + ٤)}}$$

$$= \frac{٥\text{س}^{٢} + ١٦\text{س}}{٢\sqrt{\text{س} + ٤}}$$

عند س = −٣:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٥(−٣)^{٢} + ١٦(−٣)}{٢\sqrt{(−٣) + ٤}}$$

$$= \frac{٤٥ − ٤٨}{٢\sqrt{١}} = −\frac{٣}{٢} = −١,٥$$

٣) $\text{ص} = (٢ − \text{س})^{٣}(\text{س} + ١)^{٤}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (٢ − \text{س})^{٣}(٤(\text{س} + ١)^{٣}) + (\text{س} + ١)^{٤}(٣(٢ − \text{س})^{٢}(−١))$$

$$= ٤(٢ − \text{س})^{٣}(\text{س} + ١)^{٣} + −٣(\text{س} + ١)^{٤}(٢ − \text{س})^{٢}$$

عند س = ١:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤(١)^{٣}(٢)^{٣} − ٣(٢)^{٤}(١)^{٢}$$

$$= ٣٢ − ٤٨$$

$$= −١٦$$

عند س = ١، $\text{ص} = (٢ − ١)^{٣}(١ + ١)^{٤} = ١٦$

وتكون معادلة المماس:

$$\text{ص} − ١٦ = −١٦(\text{س} − ١)$$

$$\text{ص} − ١٦ − ١٦\text{س} + ١٦$$

$$١٦\text{س} + \text{ص} = ٣٢$$

لم يطلب التمرين ٣ استخدام صيغة محددة. في هذه الحالة من الأفضل كتابة معادلة المستقيم بالصيغة أ س + ب ص = جـ

٤) $\text{ص} = (\text{س} + ٢)(\text{س} − ١)^{٣}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{س} + ٢)(٣(\text{س} − ١)^{٢}) + (\text{س} − ١)^{٣}((١))$$

$$= ٣(\text{س} + ٢)(\text{س} − ١)^{٢} + (\text{س} − ١)^{٣}$$

عندما يتقاطع المنحنى مع محور الصادات يكون س = ٠

عند س = ٠:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣(٢)(−١)^{٢} + (−١)^{٣}$$

$$= ٦ − ١$$

$$= ٥$$

٥) $ص = (٣ - س)^{٣}(س + ١)^{٢}$

$$\frac{ءص}{ءس} = (٣ - س)^{٣}(٢(س + ١)) + (س + ١)^{٢}(٣(٣ - س)^{٢}(-١))$$

$$= ٢(٣ - س)^{٣}(س + ١) - ٣(س + ١)^{٢}(٣ - س)^{٢}$$

$$= (س + ١)(٣ - س)^{٢}(٢(٣ - س) - ٣(س + ١))$$

$$= (س + ١)(٣ - س)^{٢}(٦ - ٢س - ٣س - ٣)$$

$$= (س + ١)(٣ - س)^{٢}(٣ - ٥س)$$

عندما $\frac{ءص}{ءس} = ٠$:

$س = -١،\ ٣،\ \frac{٣}{٥}$

عندما يُطلب إليك إيجاد نقاط التحوّل (الحرجة) اجعل كثيرة الحدود صفرًا، وحل المعادلة الناتجة. حلل كثيرة الحدود إلى العوامل، لذا من المهم التدرّب على التحليل إلى العوامل عندما تتعامل مع الاشتقاق.

٦) $ص = (س + ٢)\sqrt{١ - ٢س} = (س + ٢)(١ - ٢س)^{\frac{١}{٢}}$

$$\frac{ءص}{ءس} = (س + ٢)\left[\frac{١}{٢}(١ - ٢س)^{-\frac{١}{٢}}(-٢)\right] + \left[(١)\right](١ - ٢س)^{\frac{١}{٢}}$$

$$= -(س + ٢)(١ - ٢س)^{-\frac{١}{٢}} + (١ - ٢س)^{\frac{١}{٢}}$$

$$= \frac{-(س + ٢)}{\sqrt{١ - ٢س}} + \sqrt{١ - ٢س}$$

$$= \frac{-(س + ٢) + (١ - ٢س)}{\sqrt{١ - ٢س}}$$

$$= \frac{-س - ٢ + ١ - ٢س}{\sqrt{١ - ٢س}}$$

$$= \frac{-١ - ٣س}{\sqrt{١ - ٢س}}$$

عندما $\frac{ءص}{ءس} = ٠$:

يكون $-١ - ٣س = ٠$

$٣س = -١$

$س = -\frac{١}{٣}$

تذكر أن الكسر يساوي صفرًا عندما يكون البسط صفرًا.

٧) أ ص = (س − ١)^{٢}(٥ − ٢س) + ٣

لتكن ل = (س − ١)^{٢}، $\frac{\text{دل}}{\text{دس}}$ = ٢(س − ١)

لتكن ع = ٥ − ٢س، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ = −٢

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = (س − ١)^{٢}(−٢) + ٢(س − ١)(٥ − ٢س)

= ٢(س − ١)(−س + ١ + ٥ − ٢س)

= ٢(س − ١)(٦ − ٣س)

عند النقاط الحرجة: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠

= ٢(س − ١)(٦ − ٣س) = ٠

س = ٢ أو س = ١

عند س = ١، ص = ٣

عند س = ٢، ص = ٤

النقطتان أ(١، ٣)، ب(٢، ٤)

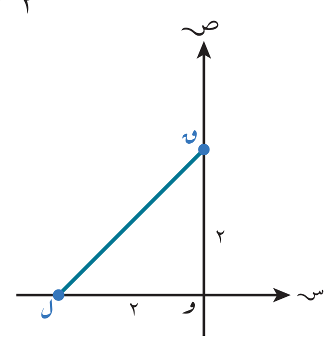
ب ميل **ل ن** = $\frac{٤ - ٣}{٢ - ١}$ = ١

معادلة المستقيم **ل ن** هي ص = س + جـ، ويمر بالنقطة (١، ٣)، ∴ جـ = ٢

ص = س + ٢ يقطع المحورين في النقطتين **ل**(−٢، ٠)، **ن**(٠، ٢)

∴ تقع كل من النقطتين **ل**، **ن** على بعد وحدتين من نقطة الأصل **و**

مساحة المثلث **ل و ن** = $\frac{١}{٢}$ (٢ × ٢) = ٢ وحدة مربّعة.



جـ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢(٢س − ١)(٦ − ٣س)

= −٦س^{٢} + ١٨س − ١٢

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ = −١٢س + ١٨ :

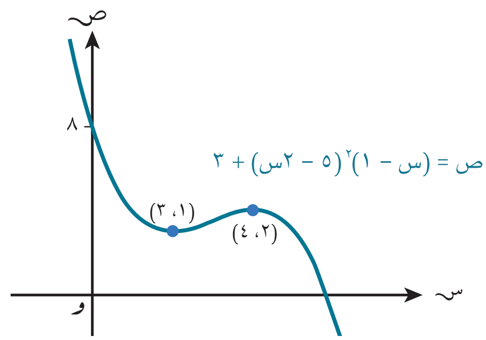
عند س = ١، $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ > ٠

عند س = ٢، $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ < ٠

للمنحنى نقطة صغرى عند (١، ٣)، ونقطة عظمى عند (٢، ٤).

على منحنى الدالة $ص = (س - ١)^{٢}(٥ - ٢س) + ٣$

عند $س = ٠$، $ص = ٨$



٨) أ $ص = (س - ٣)^{٢}(س + ٤)$

$$\frac{دص}{دس} = (س - ٣)^{٢}(١) + ٢(س - ٣)(س + ٤)$$

$$(س - ٣)^{٢} + ٢(س - ٣)(س + ٤) = ٠$$

$$(س - ٣)\left((س - ٣) + ٢(س + ٤)\right) = ٠$$

$$(س - ٣)(٣س + ٥) = ٠$$

$$س = ٣ \text{ أو } س = -\frac{٥}{٣}$$

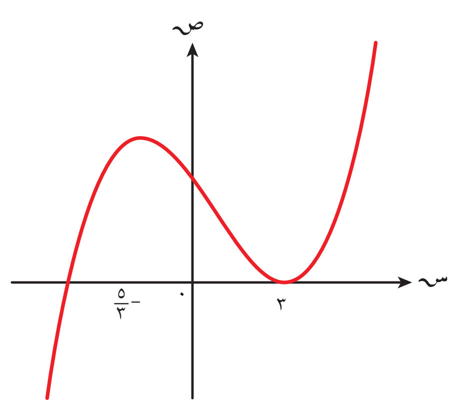
ب $$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = (س - ٣)(٣) + (٣س + ٥)(١)$$

$$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٦س - ٤$$

تكون المشتقة الثانية سالبة عندما $س = -\frac{٥}{٣}$، وعليه فإن هذه النقطة عظمى.

تكون المشتقة الثانية موجبة عندما س =٣، وعليه فإن هذه النقطة صغرى.

ج



تمارين ٥-٢

١) ج) $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢} - ٣}{٢\text{س} - ١}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(٢\text{س} - ١)\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س}^{٢} - ٣) - (\text{س}^{٢} - ٣)\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}((٢\text{س} - ١))}{(٢\text{س} - ١)^{٢}}$$

$$= \frac{(٢\text{س} - ١)(٢\text{س}) - (\text{س}^{٢} - ٣)(٢)}{(٢\text{س} - ١)^{٢}}$$

$$= \frac{٤\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٢\text{س}^{٢} + ٦}{(٢\text{س} - ١)^{٢}}$$

$$= \frac{٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٦}{(٢\text{س} - ١)^{٢}}$$

$$= \frac{٢(\text{س}^{٢} - \text{س} + ٣)}{(٢\text{س} - ١)^{٢}}$$

و) $\text{ص} = \frac{٥\text{س}^{٤}}{(\text{س}^{٢} - ١)^{٢}}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س}^{٢} - ١)^{٢}\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(٥\text{س}^{٤}) - ٥\text{س}^{٤}\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}((\text{س}^{٢} - ١)^{٢})}{(\text{س}^{٢} - ١)^{٤}}$$

$$= \frac{(\text{س}^{٢} - ١)^{٢}(٢٠\text{س}^{٣}) - ٥\text{س}^{٤}(٢(\text{س}^{٢} - ١)(٢\text{س}))}{(\text{س}^{٢} - ١)^{٤}}$$

$$= \frac{٢٠\text{س}^{٣}(\text{س}^{٢} - ١)((\text{س}^{٢} - ١) - \text{س}^{٢})}{(\text{س}^{٢} - ١)^{٤}}$$

$$= \frac{٢٠\text{س}^{٣}(\text{س}^{٢} - ١)(-١)}{(\text{س}^{٢} - ١)^{٤}}$$

$$= \frac{-٢٠\text{س}^{٣}}{(\text{س}^{٢} - ١)^{٣}}$$

٢) $\text{ص} = \frac{\text{س} - ٥}{\text{س} + ٤}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} + ٤)(١) - (\text{س} - ٥)(١)}{(\text{س} + ٤)^{٢}}$$

$$= \frac{\text{س} + ٤ - \text{س} + ٥}{(\text{س} + ٤)^{٢}}$$

$$= \frac{٩}{(\text{س} + ٤)^{٢}}$$

عندما س = ٢:

يكون $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٩}{(٢ + ٤)^{٢}}$

$= \frac{٩}{٦^{٢}}$

$= \frac{٩}{٣٦}$

$= \frac{١}{٤}$

٣) عندما يُطلب إليك أن تجد نقاطًا على المنحنى بحيث يكون المماس عندها موازيًا لمستقيم معطى، اجعل ميل المستقيم مساويًا $\frac{ءص}{ءس}$.

يكون ميل مماس المنحنى موازيًا لمحور السينات عندما يكون ميل المنحنى عند نقطة التماس صفرًا.

$ص = \frac{(س - ١)^{٢}}{٢س + ٥}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{(٢س + ٥)\,(٢(س - ١)) - (س - ١)^{٢}\,(٢)}{(٢س + ٥)^{٢}}$

$= \frac{٢(٢س + ٥)(س - ١) - ٢(س - ١)^{٢}}{(٢س + ٥)^{٢}}$

$= \frac{٢(٢س^{٢} + ٣س - ٥) - ٢(س^{٢} - ٢س + ١)}{(٢س + ٥)^{٢}}$

$= \frac{٤س^{٢} + ٦س - ١٠ - ٢س^{٢} + ٤س - ٢}{(٢س + ٥)^{٢}}$

$= \frac{٢س^{٢} + ١٠س - ١٢}{(٢س + ٥)^{٢}}$

عندما $\frac{ءص}{ءس} = ٠$، يكون:

$= \frac{٢س^{٢} + ١٠س - ١٢}{(٢س + ٥)^{٢}} = ٠$

$٢س^{٢} + ١٠س - ١٢ = ٠$

$س^{٢} + ٥س - ٦ = ٠$

$(س + ٦)(س - ١) = ٠$

$\text{س} = ١$ أو $\text{س} = -٦$

$\text{ص} = ٠$، $\text{ص} = \frac{(-٦ - ١)^{٢}}{٢(-٦) + ٥} = \frac{٤٩}{-٧} = -٧$

النقطتان هما (١، ٠)، (−٦، −٧)

٤) $\text{ص} = \frac{١ - ٢\text{س}}{\text{س} - ٥}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{س} - ٥)(-٢) - (١ - ٢\text{س})(١)}{(\text{س} - ٥)^{٢}}$$

$$= \frac{-٢\text{س} + ١٠ - ١ + ٢\text{س}}{(\text{س} - ٥)^{٢}}$$

$$= \frac{٩}{(\text{س} - ٥)^{٢}}$$

الميل ١ عندما $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١$، ويكون:

$$\frac{٩}{(\text{س} - ٥)^{٢}} = ١$$

$$(\text{س} - ٥)^{٢} = ٩$$

$$\text{س} - ٥ = \pm ٣$$

$\text{س} = ٢$ أو $\text{س} = ٨$

$\text{ص} = \frac{١ - ٢(٢)}{(٢) - ٥} = ١$، $\text{ص} = \frac{١ - ٢(٨)}{(٨) - ٥} = -٥$

النقطتان هما (٢، ١)، (٨، −٥)

٥) $\text{ص} = \frac{\text{س} - ٤}{٢\text{س} + ١}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(٢\text{س} + ١)(١) - (\text{س} - ٤)(٢)}{(٢\text{س} + ١)^{٢}}$$

$$= \frac{٢\text{س} + ١ - ٢\text{س} + ٨}{(٢\text{س} + ١)^{٢}}$$

$$= \frac{٩}{(٢\text{س} + ١)^{٢}}$$

يقطع المنحنى محور الصادات عندما $\text{س} = ٠$

عندما $\text{س} = ٠$، يكون:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٩}{(٢(٠) + ١)^{٢}} = ٩$$

عند هذه النقطة $\text{ص} = \frac{٠ - ٤}{٠ + ١} = -٤$، وهو المقطع الصادي.

معادلة المماس: $\text{ص} = ٩\text{س} - ٤$

٦) ب $\text{ص} = \frac{\text{س} - ١}{\sqrt{٢\text{س} + ٣}} = \frac{\text{س} - ١}{(٢\text{س} + ٣)^{\frac{١}{٢}}}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} =$$

$$\frac{(٢\text{س}+٣)^{\frac{١}{٢}}(١) - (\text{س} - ١)\left(\frac{١}{٢}(٢\text{س}+٣)^{-\frac{١}{٢}}(٢)\right)}{٢\text{س} + ٣}$$

$$= \frac{\sqrt{٢\text{س} + ٣} - \frac{\text{س} - ١}{\sqrt{٢\text{س} + ٣}}}{٢\text{س} + ٣}$$

$$= \frac{(٢\text{س} + ٣) - (\text{س} - ١)}{(٢\text{س} + ٣)\sqrt{٢\text{س} + ٣}}$$

$$= \frac{\text{س} + ٤}{(٢\text{س} + ٣)^{\frac{٣}{٢}}}$$

ج) $ص = \frac{٣ - س^{٢}}{\sqrt{س^{٢} - ١}} = \frac{٣ - س^{٢}}{(س^{٢} - ١)^{\frac{١}{٢}}}$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{(س^{٢} - ١)^{\frac{١}{٢}}(-٢س) - (٣ - س^{٢})\left(\frac{١}{٢}(س^{٢} - ١)^{-\frac{١}{٢}}(٢س)\right)}{س^{٢} - ١}$$

$$= \frac{-٢س\sqrt{س^{٢} - ١} - \frac{٢س(٣ - س^{٢})}{٢\sqrt{س^{٢} - ١}}}{س^{٢} - ١}$$

$$= \frac{-٤س(س^{٢} - ١) - ٢س(٣ - س^{٢})}{٢(س^{٢} - ١)^{\frac{٣}{٢}}}$$

$$= \frac{-٤س^{٣} + ٤س - ٦س + ٢س^{٣}}{٢(س^{٢} - ١)^{\frac{٣}{٢}}}$$

$$= \frac{-٢س - ٢س^{٣}}{٢(س^{٢} - ١)^{\frac{٣}{٢}}}$$

$$= \frac{-س(١ + س^{٢})}{(س^{٢} - ١)^{\frac{٣}{٢}}}$$

استخدم قياسات مختلفة من الأقواس عندما تكتب أقواسًا داخل أقواس أخرى. في حل التمرين ٧ استخدمنا الأقواس الكبيرة لتتضمن حدودًا داخل أقواس صغيرة.

٧) $ص = \frac{س + ١}{\sqrt{س - ١}} = \frac{س + ١}{(س - ١)^{\frac{١}{٢}}}$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{(س - ١)^{\frac{١}{٢}}(١) - (س + ١)\left(\frac{١}{٢}(س - ١)^{-\frac{١}{٢}}\right)}{س - ١}$$

$$= \frac{\sqrt{س - ١} - \frac{س + ١}{٢\sqrt{س - ١}}}{س - ١}$$

$$= \frac{٢(س - ١) - (س + ١)}{٢(س - ١)^{\frac{٣}{٢}}}$$

$$= \frac{س - ٣}{٢(س - ١)^{\frac{٣}{٢}}}$$

عندما $\frac{دص}{دس} = ٠$، يكون:

$$= \frac{\text{س} - ٣}{٢\,(\text{س} - ١)^{\frac{٣}{٢}}} = ٠$$

$$\text{س} - ٣ = ٠$$

$$\text{س} = ٣$$

٨) $$\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢} + ١}{\sqrt{\text{س} + ٢}} = \frac{\text{س}^{٢} + ١}{(\text{س} + ٢)^{\frac{١}{٢}}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{س}+٢)^{\frac{١}{٢}}(٢\text{س}) - (\text{س}^{٢} + ١)\left[\frac{١}{٢}(\text{س}+٢)^{-\frac{١}{٢}}\right]}{\text{س}+٢}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢\text{س}\sqrt{\text{س}+٢} - \frac{(\text{س}^{٢} + ١)}{٢\sqrt{\text{س}+٢}}}{\text{س} + ٢}$$

$$= \frac{٤\text{س}(\text{س}+٢) - (\text{س}^{٢} + ١)}{٢\,(\text{س}+٢)^{\frac{٣}{٢}}}$$

$$= \frac{٤\text{س}^{٢} + ٨\text{س} - \text{س}^{٢} - ١}{٢\,(\text{س}+٢)^{\frac{٣}{٢}}}$$

عندما س = −١ : يكون

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٣(-١)^{٢} + ٨(-١) - ١}{٢\,(-١ + ٢)^{\frac{٣}{٢}}}$$

$$= \frac{٣ - ٨ - ١}{٢} = -٣$$

ميل العمودي $= \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$

معادلة العمودي هي:

$$\text{ص} - ٢ = \frac{١}{٣}(\text{س} - (-١))$$

$$٣\text{ص} - ٦ = \text{س} + ١$$

$$٣\text{ص} = \text{س} + ٧$$

$$\text{س} - ٣\text{ص} + ٧ = ٠$$

تذكّر أن العمودي عند نقطة على المنحنى يكون عموديًا على المماس عند النقطة نفسها.

تمارين ٥-٣

١) هـ $ص = ٤هـ^{\frac{س}{٢}}$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٤هـ^{\frac{س}{٢}} \times \frac{ء}{ءس}\left(\frac{س}{٢}\right)$$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٤هـ^{\frac{س}{٢}} \times \frac{١}{٢} = ٢هـ^{\frac{س}{٢}}$$

ك $ص = \frac{٣هـ^{٢س} + هـ^{-٢س}}{٢}$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}\left(٣هـ^{٢س} \frac{ء}{ءس}(٢س) + هـ^{-٢س} \frac{ء}{ءس}(-٢س)\right)$$

$$= \frac{١}{٢}\left(٣هـ^{٢س} \times ٢ + هـ^{-٢س} \times -٢\right)$$

$$= \frac{٦هـ^{٢س} - ٢هـ^{-٢س}}{٢}$$

$$= ٣هـ^{٢س} - هـ^{-٢س}$$

٢) $\frac{ءص}{ءس} = ٠ - هـ^{٢-س}(-١) = هـ^{٢-س}$

عند ص = ٠، س = ٢: يكون

$$\frac{ءص}{ءس} = هـ^{٢-٢} = هـ^{٠} = ١$$

ميل العمودي $= -\frac{١}{١} = -١$

معادلة العمودي هي:

$ص - ٠ = -١(س - ٢)$

$ص = -س + ٢$

يمكن أن تستخدم الصورة ص = م س + جـ. لا يوجد أسلوب محدّد، لذا تحقق دائمًا من الصورة النهائية للإجابة المطلوبة.

٣) $م = ٣٠٠هـ^{-٠,٠٠٠١٢ن}$

$$\frac{ءم}{ءن} = ٣٠٠هـ^{-٠,٠٠٠١٢ن} \times (-٠,٠٠٠١٢) = -٠,٠٣٦ هـ^{-٠,٠٠٠١٢ن}$$

عند ن = ٢٠٠٠:

$$\frac{ءم}{ءن} = -٠,٠٣٦ هـ^{-٠,٠٠٠١٢ \times ٢٠٠٠} = -٠,٠٢٨٣$$

معدل التناقص = ٠,٠٢٨٣ جم لكل سنة

٤) ج ص = ٥س $هـ^{-٢س}$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٥س \frac{ء}{ءس}(هـ^{-٢س}) + هـ^{-٢س} \frac{ء}{ءس}(٥س)$$

$$= ٥س هـ^{-٢س}(-٢) + هـ^{-٢س}(٥)$$

$$= (٥ - ١٠س)\, هـ^{-٢س}$$

ز ص = $\frac{هـ^{س} - ١}{هـ^{س} + ٢}$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{(هـ^{س} + ٢)\frac{ء}{ءس}(هـ^{س} - ١) - (هـ^{س} - ١)\frac{ء}{ءس}(هـ^{س} + ٢)}{(هـ^{س} + ٢)^{٢}}$$

$$= \frac{(هـ^{س} + ٢)(هـ^{س}) - (هـ^{س} - ١)(هـ^{س})}{(هـ^{س} + ٢)^{٢}}$$

$$= \frac{هـ^{٢س} + ٢هـ^{س} - هـ^{٢س} + هـ^{س}}{(هـ^{س} + ٢)^{٢}}$$

$$= \frac{٣هـ^{س}}{(هـ^{س} + ٢)^{٢}}$$

٥) للإجابة عن التمرين ٥ يمكنك أن تستخدم قاعدة مشتقة قسمة دالتين. إذا كان بسط الكسر عددًا ك، فطريقة الحل الأسهل هي استخدام سالب القوة.

$$ص = \frac{٨}{٥ + هـ^{٢س}} = ٨(٥ + هـ^{٢س})^{-١}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = -٨(٥ + هـ^{٢س})^{-٢}(٢هـ^{٢س})$$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-١٦هـ^{٢س}}{(٥ + هـ^{٢س})^{٢}}$$

عندما س = ٠ يكون:

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-١٦هـ^{٠}}{(٥ + هـ^{٠})^{٢}}$$

$$= \frac{-١٦}{٦^{٢}}$$

$$= -\frac{١٦}{٣٦}$$

$$= -\frac{٤}{٩}$$

٦) ص = س$هـ^{س}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = س$هـ^{س}$ + $هـ^{س}$(١) = س$هـ^{س}$ + $هـ^{س}$

= (س + ١)$هـ^{س}$

توجد النقاط الحرجة عندما تكون $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠:

(س + ١)$هـ^{س}$ = ٠

$هـ^{س}$ > ٠، لذا س + ١ = ٠

س = −١

ص = س$هـ^{س}$ = (−١)$هـ^{-١}$ = $-\frac{١}{هـ}$

إحداثيات النقطة الحرجة هي:

$\left(-١، -\frac{١}{هـ}\right)$

٧) ص = ٢$هـ^{٢س}$ + $هـ^{-س}$

يقطع المنحنى محور الصادات عند س = ٠، فيكون:

ص = ٢$هـ^{٠}$ + $هـ^{٠}$ = ٢ + ١ = ٣ إحداثيات **ل** (٠، ٣).

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٢$هـ^{٢س}$(٢) + $هـ^{-س}$(−١)

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٤$هـ^{٢س}$ − $هـ^{-س}$

عند النقطة ل يكون:

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٤$هـ^{٠}$ − $هـ^{٠}$ = ٤ − ١ = ٣

معادلة المماس هي:

ص − ٣ = ٣ (س − ٠)

ص − ٣ = ٣س

ص = ٣س + ٣

يقطع المماس محور السينات عندما ص = ٠، فيكون:

٣س + ٣ = ٠

٣س = −٣

س = −١

وعليه يقطع المماس محور السينات في (−١، ٠).

٨) ص = (س − ٤)هـ^س^

$\frac{ءص}{ءس}$ = (س − ٤)هـ^س^ + هـ^س^ (١)

= (س − ٤ + ١)هـ^س^

= (س − ٣)هـ^س^

توجد النقاط الحرجة عندما تكون $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠:

(س − ٣)هـ^س^ = ٠

هـ^س^ > ٠، لذا يكون س − ٣ = ٠

س = ٣

ص = (٣ − ٤)هـ^٣^ = −هـ^٣^

إحداثيات النقطة الحرجة هي (٣، −هـ^٣^)

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = $\frac{ء}{ءس}$ ((س − ٣)هـ^س^)

= (س − ٣)هـ^س^ + هـ^س^(١)

= (س − ٣ + ١)هـ^س^

= (س − ٢)هـ^س^

عند س = ٣ يكون:

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = (٣ − ٢)هـ^٣^ = هـ^٣^ > ٠

فتكون هذه نقطة قيمة صغرى.

تذكر أن المشتقة الثانية تبيّن معدل تغير الميل. عند النقطة الصغرى تكون المشتقة الثانية موجبة، ويكون الميل متزايدًا. بمعنى أن الميل تغير من سالب إلى موجب عند النقطة الحرجة، وعليه فهي نقطة صغرى.

٩) $ص = \frac{هـ^{٢س}}{س^٢}$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{س^٢ هـ^{٢س}(٢) - هـ^{٢س}(٢س)}{س^٤}$$

$$= \frac{٢س^٢ هـ^{٢س} - ٢س هـ^{٢س}}{س^٤}$$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ءص}{ءس} = ٠$:

$$\frac{٢س^٢ هـ^{٢س} - ٢س هـ^{٢س}}{س^٤} = ٠$$

$$= ٢س^٢ هـ^{٢س} - ٢س هـ^{٢س} = ٠$$

$$٢س هـ^{٢س} (س - ١) = ٠$$

$س = ٠$ أو $س - ١ = ٠$

لكن $س \neq ٠$ لأن معادلة المنحنى غير معرّفة عندما $س = ٠$

وعليه $س = ١$

$$ص = \frac{هـ^٢}{١} = هـ^٢$$

فتكون $(١، هـ^٢)$ نقطة حرجة.

$$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = \frac{ء}{ءس}\left(\frac{٢س^٢ هـ^{٢س} - ٢س هـ^{٢س}}{س^٤}\right)$$

$$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = \frac{ء}{ءس}\left((٢س^{-٢} - ٢س^{-٣})\ هـ^{٢س}\right)$$

$$= (٢س^{-٢} - ٢س^{-٣}) + هـ^{٢س}\ (٢) + هـ^{٢س}(-٤س^{-٣} + ٦س^{-٤})$$

$$= ٤\ هـ^{٢س}\ (س^{-٢} - س^{-٣}) + ٢\ هـ^{٢س}\ (-٢س^{-٣} + ٣س^{-٤})$$

عندما $س = ١$ تكون:

$$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٤هـ^٢(٠) + ٢هـ^٢(-٢ + ٣) = ٢هـ^٢ > ٠$$

وعليه فهي نقطة صغرى.

١٠) أ ص = س^{٢}هـ$^{-س}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = س^{٢}هـ$^{-س}$(−١) + هـ$^{-س}$(٢س)

= س هـ$^{-س}$(٢ − س)

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ فيكون:

س = ٠ أو س = ٢

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = $\frac{ء}{ءس}$ (س هـ$^{-س}$(٢ − س))

= س هـ$^{-س}$(−١) + س(٢ − س) هـ$^{-س}$(−١) + هـ$^{-س}$(٢ − س)

= هـ$^{-س}$(−س − س (٢ − س) + ٢ − س)

= هـ$^{-س}$(س^{٢} − ٤س + ٢)

عندما س = ٠ يكون:

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = هـ^{٠}(٠ − ٠ + ٢) = ٢ > ٠

وعليه توجد نقطة صغرى عند س = ٠

عندما س = ٢ يكون:

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = هـ$^{-٢}$(٢^{٢} − ٤(٢) + ٢) = −٢هـ$^{-٢}$ < ٠

وعليه توجد نقطة عظمى عند س = ٢

ب استخدم عبارة المشتقة $\frac{ءص}{ءس}$ في الجزئية (أ).

ميل المماس عند س = ١ هو: ١ هـ$^{-١}$ (٢ − ١) = هـ$^{-١}$ = $\frac{١}{هـ}$

ميل العمودي = −$\frac{١}{\frac{١}{هـ}}$ = −هـ

س = ١ تعطي ص = ١ هـ$^{-١}$ = هـ$^{-١}$ = $\frac{١}{هـ}$

معادلة العمودي عند (١، $\frac{١}{هـ}$) هي:

ص − $\frac{١}{هـ}$ = −هـ(س − ١)

هـص − ١ = −هـ^{٢}س + هـ^{٢}

هـ^{٢}س + هـص = ١ + هـ^{٢}

قد تعتقد أنه من الأفضل استخدام الكسور العشرية بدلًا من "هـ" في مثل هذه المسائل. يجب أن ترفض ذلك؛ لأن الكسور العشرية تعطي إجابات تقريبية.

١١) $ص = س^٢ هـ^{-٢س}$

$\frac{ءص}{ءس} = س^٢ هـ^{-٢س}(-٢) + هـ^{-٢س}(٢س)$

$= ٢س هـ^{-٢س}(١ - س)$

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٢س هـ^{-٢س}(-١) + ٢س(١ - س) هـ^{-٢س}(-٢) + هـ^{-٢س}(١ - س)(٢)$

$= ٢هـ^{-٢س}(-س - ٢س(١ - س) + ١ - س)$

$= ٢هـ^{-٢س}(٢س^٢ - ٤س + ١)$

عندما $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٠$ يكون: $٢س^٢ - ٤س + ١ = ٠$

$س = \frac{-(-٤) \pm \sqrt{(-٤)^٢ - ٤(٢)(١)}}{٢(٢)}$

$= \frac{٤ \pm \sqrt{٨}}{٤}$

$= ١ \pm \frac{\sqrt{٤}\sqrt{٢}}{٤}$

$= ١ \pm \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

$= ١ \pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$

١٢) $ص = \frac{هـ^{٢س-١}}{س}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{س هـ^{٢س-١}(٢) - هـ^{٢س-١}(١)}{س^٢} = \frac{٢س هـ^{٢س-١} - هـ^{٢س-١}}{س^٢}$

عندما $\frac{ءص}{ءس} = ٠$ يكون:

$= \frac{٢س هـ^{٢س-١} - هـ^{٢س-١}}{س^٢}$

$= ٢س هـ^{٢س-١} - هـ^{٢س-١} = ٠$

$= هـ^{٢س-١}(٢س - ١) = ٠$

$٢س - ١ = ٠$ لأن $هـ^{٢س-١} \neq ٠$

$س = \frac{١}{٢}$

$ص = \frac{هـ^{٢س-١}}{س} = \frac{هـ^{٢(\frac{١}{٢})-١}}{(\frac{١}{٢})} = ٢هـ^٠ = ٢$

إحداثيات النقطة الحرجة هي $(\frac{١}{٢}، ٢)$

تمارين ٥-٤

١) أ $\frac{ء}{ءس}(\text{لط}\,٣س) = \frac{١}{٣س} \times \frac{ء}{ءس}(٣س)$

$= \frac{٣}{٣س}$

$= \frac{١}{س}$

ب $\frac{ء}{ءس}(\text{لط}\,٧س) = \frac{١}{٧س} \times \frac{ء}{ءس}(٧س)$

$= \frac{٧}{٧س}$

$= \frac{١}{س}$

ج $\frac{ء}{ءس}(\text{لط}\,(٢س + ١)) = \frac{١}{٢س + ١} \times \frac{ء}{ءس}(٢س + ١)$

$= \frac{٢}{٢س + ١}$

د $\frac{ء}{ءس}(٥ + \text{لط}(س^{٢} + ١)) = \frac{ء}{ءس}(٥) + \frac{ء}{ءس}(\text{لط}(س^{٢} + ١))$

$= ٠ + \frac{١}{س^{٢} + ١} \times \frac{ء}{ءس}(س^{٢} + ١)$

$= \frac{١}{س^{٢} + ١} \times ٢س$

$= \frac{٢س}{س^{٢} + ١}$

هـ $\frac{ء}{ءس}(\text{لط}(٢س - ١)^{٢}) = \frac{١}{(٢س - ١)^{٢}} \times \frac{ء}{ءس}((٢س - ١)^{٢})$

$= \frac{٢ \times ٢(٢س - ١)}{(٢س - ١)^{٢}}$

$= \frac{٤(٢س - ١)}{(٢س - ١)^{٢}}$

$= \frac{٤}{٢س - ١}$

و $\frac{د}{دس}\left(لطـ\sqrt{س - ٣}\right) = \frac{د}{دس}\left(لطـ(س - ٣)^{\frac{١}{٢}}\right)$

$= \frac{١}{\sqrt{س - ٣}} \times \frac{د}{دس}\left((س - ٣)^{\frac{١}{٢}}\right)$

$= \frac{١}{\sqrt{س - ٣}} \times \frac{١}{٢}(س - ٣)^{-\frac{١}{٢}}$

$= \frac{١}{\sqrt{س - ٣}} \times \frac{١}{٢\sqrt{س - ٣}}$

$= \frac{١}{٢(س - ٣)}$

ز $\frac{د}{دس}\left(لطـ(س + ٣)^{٥}\right) = \frac{١}{(س + ٣)^{٥}} \times \frac{د}{دس}\left((س + ٣)^{٥}\right)$

$= \frac{١}{(س + ٣)^{٥}} \times ٥(س + ٣)^{٤}$

$= \frac{٥}{س + ٣}$

ح $\frac{د}{دس}\left(٣س + لطـ\left(\frac{٢}{س}\right)\right) = \frac{د}{دس}\left(٣س + لطـ(٢س^{-١})\right)$

$= ٣ + \frac{١}{٢س^{-١}} \times \frac{د}{دس}(٢س^{-١})$

$= ٣ + \frac{س}{٢} \times -٢س^{-٢}$

$= ٣ + \frac{س}{٢} \times \frac{-٢}{س^{٢}}$

$= ٣ - \frac{١}{س}$

ط $\frac{د}{دس}\left(٥س + لطـ\left(\frac{٢}{١ - ٢س}\right)\right) = \frac{د}{دس}\left(٥س + لطـ(٢(١ - ٢س)^{-١})\right)$

$= ٥ + \frac{١}{٢(١ - ٢س)^{-١}} \times \frac{د}{دس}\left(٢(١ - ٢س)^{-١}\right)$

$= ٥ + \frac{١ - ٢س}{٢} \times ٢ \times -١ \times -٢(١ - ٢س)^{-٢}$

$= ٥ + \frac{١ - ٢س}{٢} \times \frac{٤}{(١ - ٢س)^{٢}}$

$= ٥ + \frac{٢}{١ - ٢س} = ٥ - \frac{٢}{٢س - ١}$

ي $\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{لط}(\text{لط س})\right) = \frac{١}{\text{لط س}} \times \frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{لط س})$

$= \frac{١}{\text{لط س}} \times \frac{١}{\text{س}}$

$= \frac{١}{\text{س لط س}}$

ك $\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{لط}(٢ - \sqrt{\text{س}})^{٢}\right) = \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{لط}(٢ - \text{س}^{\frac{١}{٢}})^{٢}\right)$

$= \frac{١}{(٢ - \sqrt{\text{س}})^{٢}} \times \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left((٢ - \text{س}^{\frac{١}{٢}})^{٢}\right)$

$= \frac{١}{(٢ - \sqrt{\text{س}})^{٢}} \times ٢ \times (٢ - \text{س}^{\frac{١}{٢}}) \times -\frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{١}{٢}}$

$= \frac{١}{(٢ - \sqrt{\text{س}})^{٢}} \times \frac{-(٢ - \sqrt{\text{س}})}{\sqrt{\text{س}}}$

$= \frac{-١}{\sqrt{\text{س}}(٢ - \sqrt{\text{س}})}$

$= \frac{١}{\sqrt{\text{س}}(\sqrt{\text{س}} - ٢)}$

ل $\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{لط}(٥\text{س} + \text{لط س})\right) = \frac{١}{٥\text{س} + \text{لط س}} \times \frac{\text{د}}{\text{دس}}(٥\text{س} + \text{لط س})$

$= \frac{١}{٥\text{س} + \text{لط س}} \times \left(٥ + \frac{١}{\text{س}}\right)$

$= \frac{١}{٥\text{س} + \text{لط س}} \times \left(\frac{٥\text{س} + ١}{\text{س}}\right)$

$= \frac{٥\text{س} + ١}{\text{س}(٥\text{س} + \text{لط س})}$

٢) **أ** $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{لط كس}) = \frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{لط ك} + \text{لط س})$

$= \frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{لط ك}) + \frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{لط س})$

$= ٠ + \frac{١}{\text{س}}$

$= \frac{١}{\text{س}}$ لأي عدد ثابت ك.

٣) أ $\frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{س لطس}) = \text{س} \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{لطس}) + \text{لطس} \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{س})$

$= \text{س} \times \frac{\text{١}}{\text{س}} + \text{لطس} \times \text{١}$

$= \text{١} + \text{لطس}$

ب $\frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{٢س}^{\text{٣}}\text{ لطس}) = \text{٢س}^{\text{٣}} \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{لطس}) + \text{لطس} \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{٢س}^{\text{٣}})$

$= \text{٢س}^{\text{٣}} \times \frac{\text{١}}{\text{س}} + \text{لطس} \times \text{٦س}^{\text{٢}}$

$= \text{٢س}^{\text{٢}} + \text{٦س}^{\text{٢}}\text{ لطس}$

$= \text{٢س}^{\text{٢}}\ (\text{١} + \text{٣لطس})$

ج $\frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{س لط}(\text{٢س} + \text{١})) = \text{س} \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{لط}(\text{٢س} + \text{١})) + \text{لط}(\text{٢س} + \text{١}) \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{س})$

$= \text{س} \times \frac{\text{١}}{\text{٢س} + \text{١}} \times \text{٢} + \text{لط}(\text{٢س} + \text{١}) \times \text{١}$

$= \frac{\text{٢س}}{\text{٢س} + \text{١}} + \text{لط}(\text{٢س} + \text{١})$

د $\frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{٣س لط ٢س}) = \text{٣س} \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{لط٢س}) + \text{لط}(\text{٢س}) \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{٣س})$

$= \text{٣س} \times \frac{\text{١}}{\text{٢س}} \times \text{٢} + \text{لط٢س} \times \text{٣}$

$= \text{٣} + \text{٣لط٢س}$

$= \text{٣}(\text{١} + \text{لط ٢س})$

هـ $\frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{س لط}(\text{لطس})) = \text{س} \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{لط}(\text{لطس})) + \text{لط}(\text{لطس}) \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{س})$

$= \text{س} \times \frac{\text{١}}{\text{لطس}} \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{لطس}) + \text{لط}(\text{لطس})$

$= \frac{\text{س}}{\text{لطس}} \times \frac{\text{١}}{\text{س}} + \text{لط}(\text{لطس})$

$= \frac{\text{١}}{\text{لطس}} + \text{لط}(\text{لطس})$

و) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{لطـ٥س}}{\text{س}}\right) = \frac{\text{س} \times \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{لطـ٥س}) - \text{لطـ٥س}\ \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}$

$= \frac{\text{س} \times \frac{١}{\text{٥س}}(٥) - \text{لطـ٥س}}{\text{س}^{٢}}$

$= \frac{١ - \text{لطـ٥س}}{\text{س}^{٢}}$

ز) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{٢}{\text{لطـس}}\right) = \frac{\text{لطـس} \times \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(٢) - ٢\ \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\ \text{لطـس}}{\text{لطـ}^{٢}\text{س}}$

$= \frac{\text{لطـس} \times ٠ - \frac{٢}{\text{س}}}{\text{لطـ}^{٢}\text{س}}$

$= -\frac{٢}{\text{س لطـ}^{٢}\text{س}}$

ح) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{لطـ}(\text{٣س} - ٢)}{\text{س}}\right) = \frac{\text{س} \times \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{لطـ}(\text{٣س} - ٢)) - \text{لطـ}(\text{٣س} - ٢)\ \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}$

$= \frac{\text{س} \times \frac{٣}{\text{٣س} - ٢} - \text{لطـ}(\text{٣س} - ٢)}{\text{س}^{٢}}$

$= \frac{\text{٣س}}{\text{س}^{٢}(\text{٣س} - ٢)} - \frac{\text{لطـ}(\text{٣س} - ٢)}{\text{س}^{٢}}$

$= \frac{\text{٣س} - (\text{٣س} - ٢)\ \text{لطـ}(\text{٣س} - ٢)}{\text{س}^{٢}(\text{٣س} - ٢)}$

ط) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{لطـ}(\text{٢س} + ١)}{\text{٤س} - ١}\right) = \frac{(\text{٤س} - ١) \times \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{لطـ}(\text{٢س} + ١)) - \text{لطـ}(\text{٢س} + ١)\ \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{٤س} - ١)}{(\text{٤س} - ١)^{٢}}$

$= \frac{(\text{٤س} - ١) \times \frac{٢}{\text{٢س} + ١} - \text{٤لطـ}(\text{٢س} + ١)}{(\text{٤س} - ١)^{٢}}$

$= \frac{\frac{٢(\text{٤س} - ١)}{\text{٢س} + ١} - \text{٤لطـ}(\text{٢س} + ١)}{(\text{٤س} - ١)^{٢}}$

$$= \frac{٢(٤س - ١)}{(٢س + ١)\,(٤س - ١)^٢} - \frac{٤لطـ(٢س + ١)}{(٤س - ١)^٢}$$

$$= \frac{٢(٤س - ١) - ٤(٢س + ١)\ لطـ(٢س + ١)}{(٢س + ١)\,(٤س - ١)^٢}$$

---

٤) $ص = لطـ\ (٢س - ٣)$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢س - ٣} \times ٢ = \frac{٢}{٢س - ٣}$$

عندما $س = ٥$ يكون:

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢}{٢(٥) - ٣} = \frac{٢}{٧}$$

٥) $ص = هـ^{٢س} - ٥\ لطـ(٢س + ١)$

$$\frac{ءص}{ءس} = هـ^{٢س} \times ٢ - \frac{٥}{٢س + ١} \times ٢$$

$$= ٢هـ^{٢س} - \frac{١٠}{٢س + ١}$$

عند $س = ٠$ يكون:

$$\frac{ءص}{ءس} = ٢هـ^{٠} - \frac{١٠}{١} = ٢ - ١٠ = -٨$$

٦) $ص = س^٢\ لطـ\ ٥س$

$$\frac{ءص}{ءس} = س^٢ \left(\frac{١}{س}\right) + ٢س\ لطـ٥س$$

$$= س + ٢س\ لطـ٥س$$

عند $س = ٢$ يكون:

$$\frac{ءص}{ءس} = ٢ + ٢ \times ٢\ لطـ\ ١٠ = ٢ + ٤\ لطـ\ ١٠$$

$$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = \frac{ء}{ءس}\ (س + ٢س\ لطـ٥س)$$

$$= ١ + ٢س \left(\frac{١}{س}\right) + ٢\ لطـ٥س$$

$$= ٣ + ٢\ لطـ٥س$$

عند $س = ٢$ يكون:

$$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٣ + ٢\ لطـ\ ١٠$$

٧) $ص = س^٢\ لطـ\ س$

$$\frac{ءص}{ءس} = س^٢ \left(\frac{١}{س}\right) + ٢س\ لطـ\ س$$

$$= س + ٢س\ لطـ\ س$$

توجد نقطة حرجة عندما $\frac{ءص}{ءس} = ٠$، ويكون:

$$س + ٢س\ لطـ\ س = ٠$$

$$س\ (١ + ٢\ لطـ\ س) = ٠$$

$$لطـ\ س = -\frac{١}{٢} \quad أو \quad س = ٠$$

إما $س = هـ^{-\frac{١}{٢}}$

أو $س = ٠$ مرفوض؛ لأن لطـ الصفر غير موجود.

عندما $س = هـ^{-\frac{١}{٢}}$

$$ص = (هـ^{-\frac{١}{٢}})^٢\ لطـ(هـ^{-\frac{١}{٢}})$$

$$= -\frac{١}{٢}\ هـ^{-١} = -\frac{١}{٢هـ}$$

النقطة الحرجة هي:

$$\left(هـ^{-\frac{١}{٢}}،\ -\frac{١}{٢هـ}\right)$$

$$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = \frac{ء}{ءس}\ (س + ٢س\ لطـ\ س)$$

$$= ١ + ٢س \left(\frac{١}{س}\right) + ٢\ لطـ\ س$$

$$= ٣ + ٢\ لطـ\ س$$

عند $س = هـ^{-\frac{١}{٢}}$:

$$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٣ + ٢\ لطـ\left(هـ^{-\frac{١}{٢}}\right) = ٣ + ٢\left(-\frac{١}{٢}\right) = ٢ > ٠$$

وعليه فإن هذه نقطة صغرى.

٨) $\text{ص} = \frac{\text{لطـس}}{\text{س}}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{س}\left(\frac{١}{\text{س}}\right) - \text{لطـس}}{\text{س}^{٢}}$$

$$= \frac{١ - \text{لطـس}}{\text{س}^{٢}}$$

توجد نقطة حرجة عندما $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$ فيكون:

$$\frac{١ - \text{لطـس}}{\text{س}^{٢}} = ٠$$

$$١ - \text{لطـس} = ٠$$

$$\text{لطـس} = ١$$

$$\text{س} = \text{هـ}^{١} = \text{هـ}$$

عند س = هـ فإن: $\text{ص} = \frac{\text{لطـهـ}}{\text{هـ}} = \frac{١}{\text{هـ}}$

النقطة الحرجة هي $\left(\text{هـ}، \frac{١}{\text{هـ}}\right)$

$$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\frac{١ - \text{لطـس}}{\text{س}^{٢}}\right) = \frac{\text{س}^{٢}\left(-\frac{١}{\text{س}}\right) - (١ - \text{لطـس})(٢\text{س})}{\text{س}^{٤}}$$

$$= \frac{-\text{س} - ٢\text{س}(١ - \text{لطـس})}{\text{س}^{٤}}$$

عند س = هـ يكون:

$$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = \frac{-\text{هـ} - ٢\text{هـ}(١ - \text{لطـهـ})}{\text{هـ}^{٤}} = -\frac{١}{\text{هـ}^{٣}} < ٠$$

وعليه فهي نقطة عظمى.

إذا احتجت إلى أن تشتق الدالة مرتين، فتمهّل واجعل الحل مرتبًا. العبارة المبسطة تجعل الاشتقاق سهلًا.

٩) عند س = ١ يكون: $\text{ص} = \text{لطـ}(٥ - ٤) = \text{لطـ}\ ١ = ٠$

النقطة هي (١، ٠)

$$\text{ص} = \text{لطـ}(٥\text{س} - ٤)$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٥\text{س} - ٤} \times ٥$$

$$= \frac{٥}{٥\text{س} - ٤}$$

عند س = ١ يكون:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٥}{٥(١) - ٤} = ٥$$

معادلة المماس هي: ص − ٠ = ٥(س − ١)

ص = ٥س − ٥

١٠) أ $\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{لط}\sqrt{٥\text{س} - ١}\right) = \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\frac{١}{٢}\text{لط}\,(٥\text{س} - ١)\right)$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{لط}\,(٥\text{س} - ١)\right)$$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٥\text{س} - ١} \times \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(٥\text{س} - ١\right)$$

$$= \frac{١}{٢(٥\text{س} - ١)} \times ٥$$

$$= \frac{٥}{٢(٥\text{س} - ١)}$$

ب $\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{لط}\left(\frac{١}{٣\text{س} + ٢}\right)\right) = \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{لط}\,١ - \text{لط}\,(٣\text{س} + ٢)\right)$

$$= \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{لط}\,١\right) - \frac{\text{د}}{\text{دس}}\,\text{لط}\,(٣\text{س} + ٢)$$

$$= ٠ - \frac{١}{٣\text{س} + ٢} \times ٣$$

$$= - \frac{٣}{٣\text{س} + ٢}$$

ج $\frac{\text{د}}{\text{دس}}\,\text{لط}\left(\text{س}(\text{س} + ١)^{٥}\right) = \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{لطس} + ٥\text{لط}(\text{س} + ١)\right)$

$$= \frac{\text{د}}{\text{دس}}\,\text{لطس} + ٥\,\frac{\text{د}}{\text{دس}}\,\text{لط}(\text{س} + ١)$$

$$= \frac{١}{\text{س}} + ٥ \times \frac{١}{\text{س} + ١} \times ١$$

$$= \frac{١}{\text{س}} + \frac{٥}{\text{س} + ١}$$

د $\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{لط}\left(\frac{٢\text{س} + ٣}{\text{س} - ١}\right)\right) = \frac{\text{د}}{\text{دس}}\,\text{لط}(٢\text{س} + ٣) - \frac{\text{د}}{\text{دس}}\,\text{لط}(\text{س} - ١)$

$$= \frac{١}{٢\text{س} + ٣} \times ٢ - \frac{١}{\text{س} - ١} \times ١$$

$$= \frac{٢}{٢\text{س} + ٣} - \frac{١}{\text{س} - ١}$$

هـ $\frac{ى}{ى س}\left(لط\left(\frac{١ - ٣س}{س^{٢}}\right)\right) = \frac{ى}{ى س} لط(١ - ٣س) - \frac{ى}{ى س} لط(س^{٢})$

$$= \frac{١}{١ - ٣س} \times -٣ - \frac{١}{س^{٢}} \times ٢س$$

$$= -\frac{٣}{١ - ٣س} - \frac{٢}{س}$$

$$= \frac{٣}{٣س - ١} - \frac{٢}{س}$$

و $\frac{ى}{ى س}\left(لط\left(\frac{س(س - ٢)}{س + ٤}\right)\right) = \frac{ى}{ى س} لط(س) + \frac{ى}{ى س} لط(س - ٢) - \frac{ى}{ى س} لط(س - ٤)$

$$= \frac{١}{س} \times ١ + \frac{١}{س - ٢} \times ١ - \frac{١}{س - ٤} \times ١$$

$$= \frac{١}{س} + \frac{١}{س - ٢} - \frac{١}{س - ٤}$$

ز $\frac{ى}{ى س}\left(لط\left(\frac{٣ - س}{(س + ٤)(س - ١)}\right)\right) = \frac{ى}{ى س}\left(لط(٣ - س) - لط(س + ٤) - لط(س - ١)\right)$

$$= \frac{ى}{ى س}\left(لط(٣ - س)\right) - \frac{ى}{ى س}\left(لط(س + ٤)\right) - \frac{ى}{ى س}\left(لط(س - ١)\right)$$

$$= \frac{١}{٣ - س} \times (-١) - \frac{١}{س + ٤} \times ١ - \frac{١}{س - ١} \times ١$$

$$= \frac{١}{س - ٣} - \frac{١}{س + ٤} - \frac{١}{س - ١}$$

ح $\frac{ى}{ى س}\left(لط\left(\frac{٨}{(س + ١)^{٢}(س - ٢)}\right)\right) = \frac{ى}{ى س} لط(٨) - \frac{ى}{ى س} لط(س + ١)^{٢} - \frac{ى}{ى س} لط(س - ٢)$

$$= ٠ - \frac{١}{(س + ١)^{٢}} \times ٢(س + ١) - \frac{١}{س - ٢} \times ١$$

$$= -\frac{٢}{س + ١} - \frac{١}{س - ٢}$$

ط $\frac{ى}{ى س}\left(لط\left(\frac{(س + ٢)(٢س - ١)}{س(س + ٥)}\right)\right) = \frac{ى}{ى س} لط(س + ٢) + \frac{ى}{ى س} لط(٢س - ١) - \frac{ى}{ى س} لط(س) - \frac{ى}{ى س} لط(س + ٥)$

$$= \frac{١}{س + ٢} \times ١ + \frac{١}{٢س - ١} \times ٢ - \frac{١}{س} \times ١ - \frac{١}{س + ٥} \times ١$$

$$= \frac{١}{س + ٢} + \frac{٢}{٢س - ١} - \frac{١}{س} - \frac{١}{س + ٥}$$

١١) أ

$$\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{٢س}^{٢} - ١$$

$$\text{ص} = \text{لطـ}\,(\text{٢س}^{٢} - ١)$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{٢س}^{٢} - ١}\,(\text{٤س})$$

$$= \frac{\text{٤س}}{\text{٢س}^{٢} - ١}$$

ب

$$\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{٣س}^{٣} + \text{٢س}$$

$$\text{ص} = \text{لطـ}(\text{٣س}^{٣} + \text{٢س})$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{٣س}^{٣} + \text{٢س}}\,(\text{٩س}^{٢} + ٢)$$

$$= \frac{\text{٩س}^{٢} + ٢}{\text{٣س}^{٣} + \text{٢س}}$$

ج

$$\text{هـ}^{\text{ص}} = (\text{س} + ١)(\text{س} - ٥)$$

$$\text{ص} = \text{لطـ}((\text{س} + ١)(\text{س} - ٥))$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{س} + ١} + \frac{١}{\text{س} - ٥}$$

$$= \frac{\text{س} - ٥ + \text{س} + ١}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٥)}$$

$$= \frac{\text{٢س} - ٤}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٥)}$$

١٢)

$$\text{س} = \frac{١}{٥}\,(\text{هـ}^{\text{ص}(\text{٢س} - ٣)} + ٤)$$

$$\text{٥س} = \text{هـ}^{\text{ص}(\text{٢س} - ٣)} + ٤$$

$$\text{هـ}^{\text{ص}(\text{٢س} - ٣)} = \text{٥س} - ٤$$

$$\text{ص}(\text{٢س} - ٣) = \text{لطـ}(\text{٥س} - ٤)$$

$$\text{ص} = \frac{\text{لطـ}\,(\text{٥س} - ٤)}{\text{٢س} - ٣}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٥(\text{٢س} - ٣) - ٢(\text{٥س} - ٤)\text{لطـ}(\text{٥س} - ٤)}{(\text{٢س} - ٣)^{٢}(\text{٥س} - ٤)}$$

عندما س = ١ يكون:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٥(-١) - ٢(١)\text{لطـ}(١)}{(-١)^{٢}(١)}$$

$$= -\frac{٥}{١} = -٥$$

تمارين ٥-٥

١) أ $\frac{ى}{ىس}$ (٢ + جاس) = $\frac{ى}{ىس}$ (٢) + $\frac{ى}{ىس}$ (جاس) = جتاس

ب $\frac{ى}{ىس}$ (٢جاس + ٣جتاس) = ٢ $\frac{ى}{ىس}$ (جاس) + ٣ $\frac{ى}{ىس}$ (جتاس) = ٢جتاس − ٣جاس

ج $\frac{ى}{ىس}$ (٢جتاس − ظاس) = ٢ $\frac{ى}{ىس}$ (جتاس) − $\frac{ى}{ىس}$ (ظاس) = −٢جاس − قا^{٢}س

د $\frac{ى}{ىس}$ (٣جا٢س) = ٣ $\frac{ى}{ىس}$ (جا٢س)

= ٣ × ٢جتا٢س

= ٦جتا٢س

هـ $\frac{ى}{ىس}$ (٤ظا٥س) = ٤ $\frac{ى}{ىس}$ (ظا٥س)

= ٤ × ٥ قا^{٢}٥س

= ٢٠ قا^{٢}٥س

و $\frac{ى}{ىس}$ (٢جتا٣س − جا٢س) = ٢ $\frac{ى}{ىس}$ (جتا٣س) − $\frac{ى}{ىس}$ (جا٢س)

= −٢ × ٣ جا٣س − ٢جتا٢س

= −٦ جا٣س − ٢جتا٢س

= −٢(٣جا٣س + جتا٢س)

ز $\frac{ى}{ىس}$ (ظا(٣س + ٢)) = ٣ قا^{٢}(٣س + ٢)

ح $\frac{ى}{ىس}$ $\left(\text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{\pi}{٣}\right)\right)$ = ٢ × جتا $\left(٢\text{س} + \frac{\pi}{٣}\right)$

= ٢جتا $\left(٢\text{س} + \frac{\pi}{٣}\right)$

ط $\frac{ى}{ىس}$ = $\left(٢\text{جتا}\left(٣\text{س} - \frac{\pi}{٦}\right)\right)$ = ٢ × ٣ × −جا $\left(٣\text{س} - \frac{\pi}{٦}\right)$

= −٦جا $\left(٣\text{س} - \frac{\pi}{٦}\right)$

٢) الرمز مثل جا^{٢}س، قا^{٢}س يدل على الاختصار لكنه يخفي ما ستشتقه. إذا لم تكن متأكدًا من ذلك، فاكتب ما يخفيه رمز الاختصار. حلّ الجزئية ٢ب يبيّن ذلك.

أ $\frac{ى}{ىس}$ (جا^{٣}س) = ٣ × جا^{٢}س × جتاس = ٣جا^{٢}س جتاس

ب **الطريقة ١:**

$\frac{ى}{ىس}$ (٥جتا^{٢}٣س) = ٥ × ٢ جتا٣س × $\frac{ى}{ىس}$ (جتا٣س)

= ١٠ جتا٣س × −٣ جا٣س

= −٣٠جتا٣س جا٣س

الطريقة ٢: (باستخدام قاعدة مشتقة ضرب دالتين)

ص = ٥جتا^{٢}٣س = ٥جتا٣س × جتا٣س

لتكن ل = ٥جتا٣س، ع = جتا٣س، أي ص = ل × ع

$\frac{\text{ءل}}{\text{ءس}} = \text{ل}\ \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} + \text{ع}\ \frac{\text{ءل}}{\text{ءس}}$

= ٥جتا٣س × (−٣جا٣س) + جتا٣س × (−١٥جا٣س)

= −١٥جا٣س جتا٣س − ١٥جتا٣س جا٣س

= −٣٠جتا٣س جا٣س

ج $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (جا^{٢}س − ٢جتاس) = ٢جاس × جتاس − ٢ × −جاس

= ٢جاس جتاس + ٢ جاس

= ٢جا س (جتا س + ١)

د ص = (٣ − جتا س)^{٤}

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤ (٣ − جتاس)^{٣} × $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (٣ − جتاس)

= ٤(٣ − جتا س)^{٣} × (جا س)

= ٤جاس (٣ − جتاس)^{٣}

هـ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (٢جا^{٣}(٢س + $\frac{\pi}{٦}$))

= ٢ × ٣ جا^{٢}(٢س + $\frac{\pi}{٦}$) جتا (٢س + $\frac{\pi}{٦}$) × ٢

= ١٢جا^{٢}(٢س + $\frac{\pi}{٦}$) جتا (٢س + $\frac{\pi}{٦}$)

و $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (٣جتا^{٤}س + ٢ظا^{٢}(٢س − $\frac{\pi}{٤}$))

= ٣ × ٤ جتا^{٣}س × $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (جتاس) + ٢ × ٢ظا (٢س − $\frac{\pi}{٤}$) × $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ظا (٢س − $\frac{\pi}{٤}$)

= ١٢جتا^{٣}س × (−جاس) + ٤ظا (٢س − $\frac{\pi}{٤}$) × ٢قا^{٢}(٢س − $\frac{\pi}{٤}$)

= −١٢جتا^{٣}س جاس + ٨ ظا (٢س − $\frac{\pi}{٤}$) × قا^{٢}(٢س − $\frac{\pi}{٤}$)

٣)

أ $$\frac{ء}{ء\text{س}}(\text{س جاس}) = \text{س} \times \frac{ء}{ء\text{س}}(\text{جاس}) + \text{جاس} \times \frac{ء}{ء\text{س}}(\text{س})$$

$$= \text{س جتاس} + \text{جاس}$$

ب $$\frac{ء}{ء\text{س}}(\text{٥س جتا ٣س}) = \text{٥س} \times \frac{ء}{ء\text{س}}(\text{جتا٣س}) + \text{جتا٣س} \times \frac{ء}{ء\text{س}}(\text{٥س})$$

$$= \text{٥س} \times -\text{٣جا٣س} + \text{٥جتا٣س}$$

$$= -\text{١٥س جا٣س} + \text{٥جتا٣س}$$

$$= \text{٥(جتا٣س} - \text{٣س جا٣س)}$$

ج $$\frac{ء}{ء\text{س}}(\text{س}^{٢}\ \text{ظاس}) = \text{س}^{٢}\ \frac{ء}{ء\text{س}}(\text{ظاس}) + \text{ظاس}\ \frac{ء}{ء\text{س}}(\text{س}^{٢})$$

$$= \text{س}^{٢}\ \text{قا}^{٢}\text{س} + \text{٢س ظاس}$$

د $$\frac{ء}{ء\text{س}}(\text{س جتا}^{٣}\text{٢س}) = \text{س}\ \frac{ء}{ء\text{س}}(\text{جتا}^{٣}\text{٢س}) + \text{جتا}^{٣}\text{٢س}\ \frac{ء}{ء\text{س}}(\text{س})$$

$$= \text{س} \times (\text{٣} \times \text{٢ جتا}^{٢}\text{٢س} \times -\text{جا٢س}) + \text{جتا}^{٣}\text{٢س}$$

$$= -\text{٦س جتا}^{٢}\text{٢س جا٢س} + \text{جتا}^{٣}\text{٢س}$$

$$= \text{جتا}^{٢}\text{٢س}\ (-\text{٦س جا٢س} + \text{جتا٢س})$$

$$= \text{جتا}^{٢}\text{٢س}\ (\text{جتا٢س} - \text{٦س جا٢س})$$

هـ $$\frac{ء}{ء\text{س}}\left(\frac{\text{٥}}{\text{جتا٣س}}\right) = \frac{\text{جتا٣س} \times \frac{ء}{ء\text{س}}(\text{٥}) - \text{٥} \times \frac{ء}{ء\text{س}}(\text{جتا٣س})}{\text{جتا}^{٢}\text{٣س}}$$

$$= \frac{\text{جتا٣س} \times \text{٠} - \text{٥} \times \text{٣}(-\text{جا٣س})}{\text{جتا}^{٢}\text{٣س}} = \frac{\text{١٥جا٣س}}{\text{جتا}^{٢}\text{٣س}}$$

$$= \text{١٥}\ \frac{\text{جا٣س}}{\text{جتا٣س}} \times \frac{\text{١}}{\text{جتا٣س}}$$

$$= \text{١٥ظا٣س قا٣س}$$

و $$\frac{ء}{ء\text{س}}\left(\frac{\text{س}}{\text{جتاس}}\right) = \frac{\text{جتاس} \times \frac{ء}{ء\text{س}}(\text{س}) - \text{س} \times \frac{ء}{ء\text{س}}(\text{جتاس})}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$$

$$= \frac{\text{جتاس} \times \text{١} - \text{س} \times (-\text{جاس})}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$$

$$= \frac{\text{جتاس} + \text{س جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$$

$$= \frac{\text{جتاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} + \frac{\text{س جاس}}{\text{جتاس}} \times \frac{\text{١}}{\text{جتاس}}$$

$$= \text{قاس} + \text{س ظاس قاس}$$

$$= \text{قاس} \left(\text{١} + \text{س ظاس}\right)$$

ز $$\frac{\text{ى}}{\text{ىس}}\left(\frac{\text{ظاس}}{\text{س}}\right) = \frac{\text{س} \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{ظاس}) - \text{ظاس} \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{س})}{\text{س}^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{س قا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{ظاس}}{\text{س}^{\text{٢}}}$$

ح $$\frac{\text{ى}}{\text{ىس}}\left(\frac{\text{جاس}}{\text{٢} + \text{جتاس}}\right) = \frac{(\text{٢} + \text{جتاس}) \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{جاس}) - \text{جاس} \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{٢} + \text{جتاس})}{(\text{٢} + \text{جتاس})^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{(\text{٢} + \text{جتاس}) \times \text{جتاس} - \text{جاس} \times (-\text{جاس})}{(\text{٢} + \text{جتاس})^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{٢جتاس} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}{(\text{٢} + \text{جتاس})^{\text{٢}}}$$ استخدم $\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{جا}^{\text{٢}}\text{س} = \text{١}$

$$= \frac{\text{١} + \text{٢جتاس}}{(\text{٢} + \text{جتاس})^{\text{٢}}}$$

ط $$\frac{\text{ى}}{\text{ىس}}\left(\frac{\text{جاس}}{\text{٣س} - \text{١}}\right) = \frac{(\text{٣س} - \text{١}) \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{جاس}) - \text{جاس} \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{٣س} - \text{١})}{(\text{٣س} - \text{١})^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{(\text{٣س} - \text{١}) \times \text{جتاس} - \text{٣جاس}}{(\text{٣س} - \text{١})^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{(\text{٣س} - \text{١})\ \text{جتاس} - \text{٣جاس}}{(\text{٣س} - \text{١})^{\text{٢}}}$$

ي $$\frac{\text{ى}}{\text{ىس}}\left(\frac{\text{١}}{\text{جا}^{\text{٣}}\text{٢س}}\right) = \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}\left(\text{جا}^{-\text{٣}}\text{٢س}\right)$$

$$= -\text{٣} \times \text{٢جا}^{-\text{٤}}\text{٢س} \times \text{جتا٢س}$$

$$= \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جا٢س}} \times \frac{-\text{٦}}{\text{جا}^{\text{٣}}\text{٢س}}$$

$$= -\text{٦ ظتا٢س قتا}^{\text{٣}}\text{٢س}$$

ك $\frac{ى}{ى س}\left(\frac{٣س}{جا٢س}\right) = \frac{جا٢س \times \frac{ى}{ى س}(٣س) - ٣س \times \frac{ى}{ى س}(جا٢س)}{جا^{٢}٢س}$

$= \frac{٣جا٢س - ٣س \times ٢جتا٢س}{جا^{٢}٢س}$

$= \frac{٣جا٢س - ٦س جتا٢س}{جا^{٢}٢س}$

$= \frac{٣جا٢س}{جا^{٢}٢س} - \frac{٦س جتا٢س}{جا^{٢}٢س}$

$= \frac{٣}{جا٢س} - \frac{جتا٢س}{جا٢س} \times \frac{٦س}{جا٢س}$

$=$ ٣قتا٢س − ٦س ظتا٢س قتا٢س

$=$ ٣قتا٢س (١ − ٢س ظتا٢س)

$=$ ٣(١ − ٢س ظتا٢س) قتا٢س

ل $\frac{ى}{ى س}\left(\frac{جاس + جتاس}{جاس - جتاس}\right)$

$= \frac{(جاس - جتاس) \times \frac{ى}{ى س}(جاس + جتاس) - (جاس + جتاس) \times \frac{ى}{ى س}(جاس - جتاس)}{(جاس - جتاس)^{٢}}$

$= \frac{(جاس - جتاس)(جتاس - جاس) - (جاس + جتاس)(جتاس + جاس)}{(جاس - جتاس)^{٢}}$

$= \frac{جاس جتاس - جا^{٢}س - جتا^{٢}س + جتاس جاس - جاس جتاس - جا^{٢}س - جتا^{٢}س - جتاس جاس}{(جاس - جتاس)^{٢}}$

$= \frac{-٢جا^{٢}س - ٢جتا^{٢}س}{(جاس - جتاس)^{٢}}$

$= \frac{-٢(جا^{٢}س + جتا^{٢}س)}{(جاس - جتاس)^{٢}}$ استخدم جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١

$= -\frac{٢}{(جاس - جتاس)^{٢}}$

٤) أ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{\text{جاس}}) = \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جاس})$

$= \text{جتاس هـ}^{\text{جاس}}$

ب $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{\text{جتا٢س}}) = \text{هـ}^{\text{جتا٢س}} \times \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جتا٢س})$

$= -\text{٢جا٢س هـ}^{\text{جتا٢س}}$

ج $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{\text{ظا ٣س}}) = \text{هـ}^{\text{ظا ٣س}} \times \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \times (\text{ظا ٣س})$

$= \text{٣ قا}^{\text{٢}}\text{٣س هـ}^{\text{ظا ٣س}}$

د $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{(\text{جاس}-\text{جتاس})}) = \text{هـ}^{(\text{جاس}-\text{جتاس})} \times \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جاس}-\text{جتاس})$

$= (\text{جتاس} + \text{جاس})\ \text{هـ}^{(\text{جاس}-\text{جتاس})}$

هـ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{\text{س}}\text{جتاس}) = \text{هـ}^{\text{س}} \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جتاس}) + \text{جتاس} \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{\text{س}})$

$= -\text{جاس هـ}^{\text{س}} + \text{جتاس هـ}^{\text{س}}$

$= (\text{جتاس} - \text{جاس})\ \text{هـ}^{\text{س}}$

و $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{\text{س}}\text{جا٢س}) = \text{هـ}^{\text{س}} \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جا٢س}) + \text{جا٢س} \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{\text{س}})$

$= \text{٢جتا٢س هـ}^{\text{س}} + \text{جا٢س هـ}^{\text{س}}$

$= (\text{٢جتا٢س} + \text{جا٢س})\ \text{هـ}^{\text{س}}$

ز $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{\text{س}}(\text{٢جتاس} - \text{جاس})) = \text{هـ}^{\text{س}} \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{٢جتاس} - \text{جاس}) + (\text{٢جتاس} - \text{جاس}) \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{\text{س}})$

$= (-\text{٢جاس} - \text{جتاس})\ \text{هـ}^{\text{س}} + (\text{٢جتاس} - \text{جاس})\ \text{هـ}^{\text{س}}$

$= (-\text{٢جاس} - \text{جتاس} + \text{٢جتاس} - \text{جاس})\ \text{هـ}^{\text{س}}$

$= \text{هـ}^{\text{س}}(\text{جتاس} - \text{٣جاس})$

ح $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س}^{\text{٣}}\text{هـ}^{\text{جتاس}}) = \text{س}^{\text{٣}} \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{\text{جتاس}}) + \text{هـ}^{\text{جتاس}} \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س}^{\text{٣}})$

$= -\text{س}^{\text{٣}}(\text{جاس هـ}^{\text{جتاس}}) + \text{٣س}^{\text{٢}}\text{هـ}^{\text{جتاس}}$

$= \text{س}^{\text{٢}}\text{هـ}^{\text{جتاس}}(\text{٣} - \text{س جاس})$

ط
$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{لط}(\text{جتاس})\right) = \frac{١}{\text{جتاس}} \times \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جتاس})$$
$$= \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}$$
$$= -\text{ظاس}$$

ي
$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{س لط}(\text{جاس})\right) = \text{س}\ \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{لط}(\text{جاس})\right) + \text{لط}(\text{جاس})\ \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س})$$
$$= \text{س} \times \frac{١}{\text{جاس}} \times \text{جتاس} + \text{لط}(\text{جاس})$$
$$= \frac{\text{س جتاس}}{\text{جاس}} + \text{لط}(\text{جاس})$$
$$= \text{س ظتاس} + \text{لط}(\text{جاس})$$

ك
$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{جتا٢س}}{\text{هـ}^{\text{٢س+١}}}\right) = \frac{\text{هـ}^{\text{٢س+١}} \times \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جتا٢س}) - \text{جتا٢س} \times \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{\text{٢س+١}})}{(\text{هـ}^{\text{٢س+١}})^{٢}}$$
$$= \frac{\text{هـ}^{\text{٢س+١}} \times (-\text{٢جا٢س}) - \text{جتا٢س} \times \text{٢هـ}^{\text{٢س+١}}}{(\text{هـ}^{\text{٢س+١}})^{٢}}$$
$$= \frac{\text{هـ}^{\text{٢س+١}}\,(-\text{٢جا٢س} - \text{٢جتا٢س})}{(\text{هـ}^{\text{٢س+١}})^{٢}} = -\frac{٢(\text{جا٢س} + \text{جتا٢س})}{\text{هـ}^{\text{٢س+١}}}$$

ل الدالة هي ناتج قسمة، ولكن البسط هو حاصل ضرب س جا٢س، ومشتقتها هي
$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س جا٢س}) = \text{س} \times \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جا٢س}) + \text{جا٢س} \times \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س}) = \text{٢س جتا٢س} + \text{جا ٢س}$$
$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{س جا٢س}}{\text{هـ}^{\text{٢س}}}\right) = \frac{\text{هـ}^{\text{٢س}} \times \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س جا٢س}) - \text{س جا٢س} \times \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{\text{٢س}})}{(\text{هـ}^{\text{٢س}})^{٢}}$$
$$= \frac{\text{هـ}^{\text{٢س}} \times (\text{٢س جتا٢س} + \text{جا٢س}) - \text{س جا٢س} \times \text{٢هـ}^{\text{٢س}}}{(\text{هـ}^{\text{٢س+١}})^{٢}}$$
$$= \frac{\text{هـ}^{\text{٢س}}\,(\text{٢س جتا٢س} + \text{جا٢س} - \text{٢س جا٢س})}{(\text{هـ}^{\text{٢س}})^{٢}}$$
$$= \frac{\text{٢س جتا٢س} + \text{جا٢س} - \text{٢س جا٢س}}{\text{هـ}^{\text{٢س}}}$$
$$= \frac{\text{٢س جتا٢س} + (١ - \text{٢س})\ \text{جا٢س}}{\text{هـ}^{\text{٢س}}}$$
$$= \frac{(١ - \text{٢س})\ \text{جا٢س} + \text{٢س جتا٢س}}{\text{هـ}^{\text{٢س}}}$$

٥) $\text{ص} = \text{٣جا٢س} - \text{٥ظاس}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٣} \times \text{٢جتا٢س} - \text{٥قا}^{\text{٢}}\text{س}$$

$$= \text{٦جتا٢س} - \text{٥قا}^{\text{٢}}\text{س}$$

عندما س = ٠ يكون:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٦جتا٠} - \frac{\text{٥}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{٠}}$$

$$= \text{٦} - \text{٥} = \text{١}$$

٦) $\text{ص} = \text{٢جا٣س} - \text{٤جتاس}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢} \times \text{٣جتا٣س} - \text{٤}(-\text{جاس})$$

$$= \text{٦جتا٣س} + \text{٤جاس}$$

عندما س = $\frac{\pi}{\text{٣}}$ يكون:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٦جتا}\,\pi + \text{٤جا}\left(\frac{\pi}{\text{٣}}\right)$$

$$= -\text{٦} + \text{٤}\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}} = -\text{٦} + \text{٢}\sqrt{\text{٣}}$$

٧) $\text{ص} = \frac{\text{٥}}{\text{٢} - \text{ظاس}} = \text{٥}(\text{٢} - \text{ظاس})^{-\text{١}}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{٥}(\text{٢} - \text{ظاس})^{-\text{٢}}(-\text{قا}^{\text{٢}}\text{س})$$

$$= \frac{\text{٥ قا}^{\text{٢}}\text{س}}{(\text{٢} - \text{ظاس})^{\text{٢}}}$$

مربع أي عدد ليس سالبًا يكون:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{+}{+} = + \text{ موجبًا}$$

لاحظ في حل التمرين ٧ أن الميل دائمًا موجب إذا كان معرّفًا. عند ظاس = ٢ توجد قسمة على الصفر، وهي غير مسموح بها. لذا يكون الميل موجبًا لجميع قيم س عدا عندما ظاس = ٢

٨) **أ** $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{قاس})$

$$= \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\frac{\text{١}}{\text{جتاس}}\right)$$

$$= \frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{جتاس})^{-\text{١}}$$

$$= -(\text{جتاس})^{-\text{٢}}(-\text{جاس})$$

$$= \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{جتاس}} \times \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$$

$$= \text{قاس ظاس}$$

ب $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{ظتاس})$

$$= \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\right)$$

$$= \frac{\text{جاس}(-\text{جاس}) - \text{جتاس}(\text{جتاس})}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}$$

$$= \frac{-\text{جا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}$$

$$= -\frac{(\text{جا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س})}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}$$

$$= -\frac{\text{١}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}$$

$$= -\text{قتا}^{\text{٢}}\text{س}$$

المتطابقات مفيدة عند اشتقاق الدوال المثلثية. إذا وجدت أن إجابتك تختلف عن تلك المعطاة، فجرّب استخدام المتطابقات لتعيد كتابة الإجابة بحيث تشبه الإجابة المعطاة. إذا حفظت المتطابقات، فإنك تدرك الموقع المناسب لاستخدامها.

٩) ص = س جاس

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = س جتاس + جاس

عندما س = $\frac{\pi}{٢}$ يكون:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \left(\frac{\pi}{٢}\right)$ جتا $\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ + جا $\left(\frac{\pi}{٢}\right)$

= ٠ + ١ = ١

ميل العمودي = $-\frac{١}{١}$ = −١

معادلة العمودي هي:

ص − $\frac{\pi}{٢}$ = −١ $\left(\text{س} - \frac{\pi}{٢}\right)$

ص − $\frac{\pi}{٢}$ = −س + $\frac{\pi}{٢}$

ص = −س + π

يقطع العمودي محور السينات عندما ص = ٠

−س + π = ٠

س = π

نقطة التقاطع هي (π، ٠)

١٠) ص = ٥جا٣س − ٢جتاس

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١٥جتا٣س + ٢جاس

عندما س = $\frac{\pi}{٣}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١٥جتا π + ٢جا $\left(\frac{\pi}{٣}\right)$

= −١٥ + ٢ $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ = −١٥ + $\sqrt{٣}$

معادلة المماس هي:

ص − (−١) = (−١٥ + $\sqrt{٣}$) $\left(\text{س} - \frac{\pi}{٣}\right)$

ص = −١٣٫٣ س + ١٢٫٩ لأقرب ٣ أرقام معنوية

١١) ص = ٣جتا٢س + ٤جا٢س + ١

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − ٦ جا٢س + ٨ جتا٢س

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠، فيكون:

−٦جا٢س + ٨ جتا٢س = ٠

٦ جا٢س = ٨ جتا٢س

ظا٢س = $\frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

٢س = ٠٫٩٢٧ أو ٢س = ٤٫٠٦٩

س = ٠٫٤٦٤ س = ٢٫٠٣

تذكّر الوضعية الموجودة على آلتك الحاسبة. تُستخدم هنا فقط وضعية الراديان عند اشتقاق الدوال المثلثية.

١٢) ص = $\text{هـ}^{\text{س}}$ جتاس

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\text{هـ}^{\text{س}}$ (−جاس) + $\text{هـ}^{\text{س}}$ جتاس

= $\text{هـ}^{\text{س}}$ (جتاس − جاس)

توجد نقطة حرجة عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠، فيكون:

$\text{هـ}^{\text{س}}$ (جتاس − جاس) = ٠

$\text{هـ}^{\text{س}}$ > ٠، فيكون جتاس − جاس = ٠

جتاس = جاس

ظاس = ١

س = $\frac{\pi}{٤}$

$\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ($\text{هـ}^{\text{س}}$ (جتاس − جاس))

= $\text{هـ}^{\text{س}}$ (−جاس − جتاس) + $\text{هـ}^{\text{س}}$ (جتاس − جاس)

= $\text{هـ}^{\text{س}}$ (−٢جاس)

= −٢$\text{هـ}^{\text{س}}$ جاس

عندما س = $\frac{\pi}{٤}$ يكون:

$\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢}$ = −٢$\text{هـ}^{\frac{\pi}{٤}}$ جا $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

= −$\sqrt{٢}$ $\text{هـ}^{\frac{\pi}{٤}}$ < ٠

وعليه فإنها نقطة عظمى.

١٣) $\text{ص} = \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{هـ}^{٢\text{س}}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{هـ}^{٢\text{س}}\ \text{جتا}٢\text{س} - ٢\text{هـ}^{٢\text{س}}\ \text{جا}٢\text{س}}{\text{هـ}^{٤\text{س}}}$

توجد نقطة حرجة عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$، ويكون:

$\frac{٢\text{هـ}^{٢\text{س}}\ \text{جتا}٢\text{س} - ٢\text{هـ}^{٢\text{س}}\ \text{جا}٢\text{س}}{\text{هـ}^{٤\text{س}}} = ٠$

$٢\text{هـ}^{٢\text{س}}(\text{جتا}٢\text{س} - \text{جا}٢\text{س}) = ٠$

$\text{جتا}٢\text{س} - \text{جا}٢\text{س} = ٠$

$\text{جتا}٢\text{س} = \text{جا}٢\text{س}$

$\text{ظا}٢\text{س} = ١$

$٢\text{س} = \frac{\pi}{٤}$

$\text{س} = \frac{\pi}{٨}$

---

١٤) أوجد المشتقة الأولى للدالة ص باستخدام قاعدة مشتقة القسمة للدالتين ع = $\text{هـ}^{٣\text{س}}$، ل = جا٣س

$\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}}{\text{جا}٣\text{س}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جا}٣\text{س} \times \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{٣\text{س}}) - \text{هـ}^{٣\text{س}} \times \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جا}٣\text{س})}{\text{جا}^{٢}٣\text{س}}$

$= \frac{٣\text{هـ}^{٣\text{س}}\ \text{جا}٣\text{س} - ٣\text{هـ}^{٣\text{س}}\ \text{جتا}٣\text{س}}{\text{جا}^{٢}٣\text{س}}$

$= \frac{٣\text{هـ}^{٣\text{س}}(\text{جا}٣\text{س} - \text{جتا}٣\text{س})}{\text{جا}^{٢}٣\text{س}}$

عند النقطة الحرجة تكون $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$\frac{٣\text{هـ}^{٣\text{س}}(\text{جا}٣\text{س} - \text{جتا}٣\text{س})}{\text{جا}^{٢}٣\text{س}} = ٠$

$٣\text{هـ}^{٣\text{س}}(\text{جا}٣\text{س} - \text{جتا}٣\text{س}) = ٠$

$٣\text{هـ}^{٣\text{س}}$ لا يمكن أن تساوي صفرًا،

لذا جا٣س − جتا٣س = ٠

جا٣س = جتا٣س

$\frac{\text{جا}٣\text{س}}{\text{جتا}٣\text{س}} = ١$

ظا٣س = ١

$٣\text{س} = \text{ظا}^{-١}(١)$ ومجال ٣س هو $٠ < ٣\text{س} < \frac{٣}{٢}\pi$

$٣\text{س} = \frac{\pi}{٤}$ يعطي $\text{س} = \frac{\pi}{١٢}$

$٣\text{س} = \frac{\pi}{٤} + \pi$ يعطي $\text{س} = \frac{٥\pi}{١٢}$

الآن نبحث عن إشارة دالة المماس لمنحنى الدالة، $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣هـ^{٣س}(جا٣س - جتا٣س)}{جا^{٢}٣س}$، عند نقاط واقعة:

(١) على مسافة صغيرة إلى يمين س = $\frac{\pi}{١٢}$ وعلى مسافة صغيرة إلى يسار س = $\frac{\pi}{١٢}$

(٢) على مسافة صغيرة إلى يمين س = $\frac{٥\pi}{١٢}$ وعلى مسافة صغيرة إلى يسار س = $\frac{٥\pi}{١٢}$

(١)	إلى اليمين	عند النقطة الحرجة	إلى اليسار
س	$\frac{\pi}{١١}$	$\frac{\pi}{١٢}$	$\frac{\pi}{١٣}$
القيمة التقديرية لـ $\frac{ءص}{ءس}$	$\frac{٧,٠٦٦ \times ٠,١٠٠٨}{٠,٥٧١١} < ٠$	٠	$\frac{٢,٠٦٤ \times -٠,٠٨٥٣}{٠,٤٣٩٧} > ٠$
	موجب	صفر	سالب

لمنحنى الدالة ص = $\frac{هـ^{٣س}}{جا٣س}$ نقطة حرجة صغرى عند س = $\frac{\pi}{١٢}$

(٢)	إلى اليمين	عند النقطة الحرجة	إلى اليسار
س	$\frac{٥\pi}{١١}$	$\frac{٥\pi}{١٢}$	$\frac{٥\pi}{١٣}$
القيمة التقديرية لـ $\frac{ءص}{ءس}$	$\frac{٢١٧,٥٨٧ \times -٠,٤٩٤٢}{٠,٨٢٧٤} > ٠$	٠	$\frac{١١٢,٥٦٤ \times ٠,٤١١٤}{٠,٢١٥٩} < ٠$
	سالب	صفر	موجب

لمنحنى الدالة ص = $\frac{هـ^{٣س}}{جا٣س}$ نقطة حرجة عظمى عند س = $\frac{٥\pi}{١٢}$

١٥) ص = جا ٢ س − س

$\frac{ءص}{ءس} = ٢جتا٢س - ١$

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = -٤جا٢س$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ءص}{ءس} = ٠$، فيكون:

$٢جتا٢س - ١ = ٠$

$جتا٢س = \frac{١}{٢}$

$٢س = \frac{\pi}{٣} \leftarrow س = \frac{\pi}{٦}$

عندما $س = \frac{\pi}{٦}$، فإن $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = -٤جا \frac{\pi}{٣} < ٠$

وعليه تكون هذه نقطة صغرى.

أو $٢س = ٢\pi - \frac{\pi}{٣} = \frac{٥\pi}{٣} \Leftarrow س = \frac{٥\pi}{٦}$

عندما $س = \frac{٥\pi}{٦}$، فإن $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = -٤جا \frac{٥\pi}{٦} < ٠$

وعليه تكون هذه نقطة صغرى.

أو $٢س = \frac{\pi}{٣} + ٢\pi = \frac{٧\pi}{٣} \Leftarrow س = \frac{٧\pi}{٦}$

عندما $س = \frac{٧\pi}{٦}$، فإن $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = -٤جا \frac{٧\pi}{٣} > ٠$

وعليه تكون هذه نقطة عظمى.

أو $٢س = \frac{٥\pi}{٣} + ٢\pi = \frac{١١\pi}{٣} \Leftarrow س = \frac{١١\pi}{٦}$

عندما $س = \frac{١١\pi}{٦}$، فإن $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = -٤جا \frac{١١\pi}{٣} < ٠$

وعليه تكون هذه نقطة صغرى.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الخامسة

١) أ $ص = س لط(س - ٣)$

$\frac{ءص}{ءس} = س \left(\frac{١}{س - ٣}\right) + لط(س - ٣)$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{س - ٣} + لط(س - ٣)$

عندما $س = ٤$، فإن:

$= \frac{ءص}{ءس} = \frac{٤}{١} + لط ١ = ٤$

ب $ص = \frac{س - ١}{س + ١}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{(س + ١)(١) - (س - ١)(١)}{(س + ١)^٢}$

$= \frac{س + ١ - س + ١}{(س + ١)^٢} = \frac{٢}{(س + ١)^٢}$

عندما $س = ٤$، فإن:

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢}{(٥)^٢} = \frac{٢}{٢٥}$

٢) أ $ص = ٣جاس + ظا٢س$

$\frac{ءص}{ءس} = ٣جتاس + ٢قا^٢ ٢س$

عندما $س = ٠$، فإن:

$\frac{ءص}{ءس} = ٣جتا٠ + \frac{٢}{جتا^٢ ٠}$

$= ٣ + ٢ = ٥$

ب $ص = \frac{٦}{١ + هـ^{٢س}} = ٦(١ + هـ^{٢س})^{-١}$

$\frac{ءص}{ءس} = -٦(١ + هـ^{٢س})^{-٢}(٢هـ^{٢س})$

$= -\frac{١٢هـ^{٢س}}{(١ + هـ^{٢س})^٢}$

عندما $س = ٠$، فإن:

$\frac{ءص}{ءس} = -\frac{١٢هـ^٠}{(١ + هـ^٠)^٢}$

$= -\frac{١٢}{(٢)^٢} = -٣$

٣) $ص = ٦جاس - ٢جتا٢س$

$\frac{ءص}{ءس} = ٦جتاس + ٤جا٢س$

عندما $س = \frac{\pi}{٦}$، فإن:

$\frac{ءص}{ءس} = ٦جتا \frac{\pi}{٦} + ٤جا \frac{\pi}{٣} = \frac{٦\sqrt{٣}}{٢} + \frac{٤\sqrt{٣}}{٢} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{٢}$

$= ٥\sqrt{٣}$

معادلة المماس هي:

$$\text{ص} - ٢ = ٥\sqrt{٣}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٦}\right)$$

$$\text{ص} = ٥\sqrt{٣}\,\text{س} - ٥\sqrt{٣}\left(\frac{\pi}{٦}\right) + ٢$$

$\text{ص} = ٨{,}٦٦\,\text{س} - ٢{,}٥٣$ لأقرب أرقام معنوية.

٤) أ $\text{ص} = \dfrac{١ - \text{س}}{١ + \text{س}}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(١ + \text{س})(-١) - (١ - \text{س})(١)}{(١ + \text{س})^{٢}}$$

$$= \frac{-١ - \text{س} - ١ + \text{س}}{(١ + \text{س})^{٢}}$$

$$= \frac{٢}{(١ + \text{س})^{٢}}$$

$$\text{ص} = \sqrt{\frac{١ - \text{س}}{١ + \text{س}}} = \left(\frac{١ - \text{س}}{١ + \text{س}}\right)^{\frac{١}{٢}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٢}\left(\frac{١ - \text{س}}{١ + \text{س}}\right)^{-\frac{١}{٢}} \times \left(-\frac{٢}{(١ + \text{س})^{٢}}\right)$$

$$= -\left(\frac{١ + \text{س}}{١ - \text{س}}\right)^{\frac{١}{٢}}\left(\frac{١}{(١ + \text{س})^{٢}}\right)$$

$$= -\frac{(١ + \text{س})^{\frac{١}{٢}}}{(١ - \text{س})^{\frac{١}{٢}}(١ + \text{س})^{٢}}$$

ميل العمودي عند النقطة (س، ص) هو:

$$= -\frac{١}{\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)}$$

$$= \frac{(١ - \text{س})^{\frac{١}{٢}}(١ + \text{س})^{٢}}{(\text{س} + ١)^{\frac{١}{٢}}}$$

$$= (١ - \text{س})^{\frac{١}{٢}}(١ + \text{س})^{٢ - \frac{١}{٢}}$$

$$= (١ - \text{س})^{\frac{١}{٢}}(١ + \text{س})^{\frac{١}{٢}}\,(١ + \text{س})^{١}$$

$$= \big((١ - \text{س})(١ + \text{س})\big)^{\frac{١}{٢}}\,(١ + \text{س})$$

$$= (١ + \text{س})\sqrt{(١ - \text{س}^{٢})}$$

لاحظ عندما توجِد مقلوب الدالة كما تعمل عندما ترفع الدالة للقوة −١. عندها ببساطة نبدل بين بسط ومقام الكسر.

ب لنفرض أن دالة ميل العمودي هي ع(س):

$$\text{ع(س)} = (١ + \text{س})(١ - \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٢}}$$

توجد نقطة عظمى عندما $\dfrac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٠$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{١}{٢}(١ - \text{س}^{٢})^{-\frac{١}{٢}}(-٢\text{س})(١ + \text{س}) + (١ - \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٢}}$$

$$= \frac{-٢\text{س}(١ + \text{س})}{٢\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}} + \sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$$

$$= \frac{-٢\text{س}(١ + \text{س}) + ٢(١ - \text{س}^{٢})}{٢\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}$$

$$= \frac{-٢\text{س} - ٢\text{س}^{٢} + ٢ - ٢\text{س}^{٢}}{٢\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}$$

$$= \frac{-٤\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٢}{٢\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}$$

عندما $\dfrac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٠$ فإن:

$$-٤\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٢ = ٠$$

$$٢\text{س}^{٢} + \text{س} - ١ = ٠$$

$$(٢\text{س} - ١)(\text{س} + ١) = ٠$$

$\text{س} = \dfrac{١}{٢}$ أو $\text{س} = -١$

يتضح من الرسم أن الإحداثي السيني للنقطة ل موجب، لذا فإن الحل س = −١ مرفوض، ويكون الحل المقبول هو س = $\dfrac{١}{٢}$

الإحداثي السيني للنقطة ل = $\dfrac{١}{٢}$

٥) أ $\text{ص} = \text{س} + \text{جاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١ + \text{جتاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢}$

$١ + \text{جتاس} = \frac{١}{٢}$

$\text{جتاس} = -\frac{١}{٢}$

$\text{س} = \frac{٢\pi}{٣}$

ب $\text{ص} = \sqrt{٣}\ \text{جاس} - ٢\text{جتاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \sqrt{٣}\ \text{جتاس} + ٢\text{جاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$\sqrt{٣}\ \text{جتاس} + ٢\text{جاس} = ٠$

$٢\text{جاس} = -\sqrt{٣}\ \text{جتاس}$

$\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\text{ظاس} = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\text{س} = -٠{,}٧١٣٧ + \pi$

$\text{س} = ٢{,}٤٣$

٦) أ $\text{ص} = \text{س} - \text{لطـس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١ - \frac{١}{\text{س}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$١ - \frac{١}{\text{س}} = ٠$

$\text{س} = ١$

$\text{ص} = ١ - \text{لطـ}١ = ١$

يكون الميل صفرًا عند (١، ١)

ب $\text{ص} = \text{لطـ}(\text{س}^٢) - \text{س}^٢$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{س}^٢} \times ٢\text{س} - ٢\text{س}$

$= \frac{٢}{\text{س}} - ٢\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$\frac{٢}{\text{س}} - ٢\text{س} = ٠$

$\text{س}^٢ = ١$

$\text{س} = \pm ١$

عندما $\text{س} = -١$، $\text{ص} = \text{لطـ}(-١)^٢ - (-١)^٢ = -١$

عندما $\text{س} = ١$، $\text{ص} = \text{لطـ}(١)^٢ - (١)^٢ = -١$

يكون الميل صفرًا عند (−١، −١)، (١، −١)

٧) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(١ - \text{س}) \times ١ - (١ + \text{س}) \times (-١)}{(١ - \text{س})^٢}$

$= ٢(١ - \text{س})^{-٢}$

$\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} = -٢ \times ٢(١ - \text{س})^{-٣} \times -١$

$= \frac{٤}{(١ - \text{س})^٣}$

عندما $\text{س} = -١$، $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} = \frac{٤}{(١ - (-١))^٣} = \frac{١}{٢}$

٨) أ $\text{ص} = \text{هـ}^{٢\text{س}}\ \text{جا}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{٢\text{س}} \times \frac{١}{٢}\ \text{جتا}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right) + ٢\text{هـ}^{٢\text{س}}\ \text{جا}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)$

$= \text{هـ}^{٢\text{س}}\left(\frac{١}{٢}\ \text{جتا}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right) + ٢\ \text{جا}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)\right)$

عندما $\text{س} = \frac{\pi}{٢}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\pi}\left(\frac{١}{٢}\ \text{جتا}\left(\frac{\pi}{٤}\right) + ٢\ \text{جا}\left(\frac{\pi}{٤}\right)\right)$

$= \text{هـ}^{\pi} \times \frac{٥}{٢\sqrt{٢}}$

≈ ٤١

ب معادلة المماس هي ص = ٤١س + جـ

على المنحنى عند س = $\frac{\pi}{٢}$، ص = هـ$^{\pi}$ جا$\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = $\frac{هـ^{\pi}}{\sqrt{٢}}$

ص = ٤١س + جـ

$\frac{هـ^{\pi}}{\sqrt{٢}}$ = ٤١ × $\frac{\pi}{٢}$ + جـ تعطي جـ = $\frac{هـ^{\pi}}{\sqrt{٢}}$ − $\frac{٤١\pi}{٢}$

معادلة المماس هي ص = ٤١س + $\frac{هـ^{\pi}}{\sqrt{٢}}$ − $\frac{٤١\pi}{٢}$

عند س = π، ص = ٤١ π + $\frac{هـ^{\pi}}{\sqrt{٢}}$ − $\frac{٤١\pi}{٢}$ = ٨٠,٧٦

∴ ل = ٨١

٩) د(س) = لطـ(جا٢س)

د$'$(س) = $\frac{١}{جا٢س}$ × ٢جتا٢س

= $\frac{٢}{ظا٢س}$

٥د$'$(س) + ٢ = ٠

٥ × $\frac{٢}{ظا٢س}$ + ٢ = ٠

$\frac{١٠}{ظا٢س}$ = −٢

ظا٢س = −٥

٢س = −١,٣٧٣٤ + π = ١,٧٦٨٢ تعطي س = ٠,٨٨٤

٢س = −١,٣٧٣٤ + ٢ π = ٤,٩٠٩٨ تعطي س = ٢,٤٥

١٠) ص = ١ − جا^{٢}س

باستخدام قاعدة السلسلة

$\frac{ءص}{ءس}$ = −٢جاس × جتاس

عند س = $\frac{\pi}{٤}$، $\frac{ءص}{ءس}$ = −٢ جا $\frac{\pi}{٤}$ × جتا $\frac{\pi}{٤}$

= −٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = −١

ميل المماس = −١، ميل العمودي = ١

معادلة العمودي هي ص = س + جـ

على المنحنى: عند س = $\frac{\pi}{٤}$، ص = ١ − جا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$

= ١ − $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

بالنسبة إلى العمودي: $\frac{١}{٢}$ = $\frac{\pi}{٤}$ + جـ،

أي جـ = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{٢ - \pi}{٤}$

معادلة العمودي هي: ص = س + $\frac{٢ - \pi}{٤}$.

الوحدة السادسة

التكامل Integration

مخطط توزيع الدروس

الدرس	الموضوع	عدد الحصص	الأهداف التعليمية	المفردات
٦–١	التكامل كعملية عكسيّة للتفاضل	٤	٦–١ يفهم التكامل على أنه العملية العكسية للتفاضل (الاشتقاق)، ويجد تكامل دوال في الصيغة أس^{ن} (لأي عدد نسبي ن ما عدا −١)، مع الضرب بالثوابت، والجمع والطرح للدوال.	التكامل، التكامل غير المحدود
٦–٢	تكامل عبارات في صورة (أس + ب)^{ن}	١	٦–١ يفهم التكامل على أنه العملية العكسية للتفاضل (الاشتقاق)، ويجد تكامل دوال في الصيغة أس^{ن} (لأي عدد نسبي ن ما عدا −١)، مع الضرب بالثوابت، والجمع والطرح للدوال.	
٦–٣	المزيد من التكامل غير المحدود	١	٦–١ يفهم التكامل على أنه العملية العكسية للتفاضل (الاشتقاق)، ويجد تكامل دوال في الصيغة أس^{ن} (لأي عدد نسبي ن ما عدا −١)، مع الضرب بالثوابت، والجمع والطرح للدوال.	
٦–٤	إيجاد ثابت التكامل	٢	٦–٢ يحسب ثابت التكامل.	
٦–٥	التكامل المحدود	٢	٦–٣ يحسب التكامل المحدود.	التكامل المحدود
٦–٦	المساحة تحت منحنى الدالة	٥	٦–٤ يستخدم التكامل المحدود لإيجاد مساحة لمنطقة محصورة بين منحنى ومستقيمات متوازية مع المحورين، أو بين منحنى ومستقيم، أو بين منحنيَين.	
٦–٧ (PPT)	مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ومستقيم أو بين منحنيَين	٣	٦–٤ يستخدم التكامل المحدود لإيجاد مساحة لمنطقة محصورة بين منحنى ومستقيمات متوازية مع المحورين، أو بين منحنى ومستقيم، أو بين منحنيَين.	
٦–٨	حجوم الأجسام الدورانية	٣	٦–٥ يستخدم التكامل المحدود لإيجاد حجم الجسم الناتج من دوران منطقة محصورة بين منحنى، وأحد المحورَين.	الجسم الدوراني
	تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة	٢		

٦-١ التكامل كعملية عكسيّة للتفاضل

ملاحظات للمعلِّمين

تبدأ هذه الوحدة بتقديم فكرة التكامل على أنها عملية عكسية للتفاضل، وعرضها في سياق تاريخي. لاحظ أن استكشف ١ يؤدي إلى النتيجة المعطاة في الدرس ٦ -١، لذا يفضل تنفيذه في بداية الدرس. من المفيد تكرار التأكيد على الطلبة استخدام الرموز بالطريقة الصحيحة خلال دراسة هذه الوحدة، خصوصًا الحاجة إلى كتابة الثابت "+ جـ" عند إيجاد التكامل غير المحدود.

أفكار للتعليم

يمكنك أن تبدأ بالطلب إلى الطلبة تنفيذ مناقشة الأسئلة المطروحة في نشاط استكشف ١، والعمل ضمن ثنائيات أو في مجموعات صغيرة، ليتوصلوا إلى القاعدة الجبرية للتكامل.

تحتاج الدوال المعطاة في المثالَين ٢، ٣ إلى التعامل الجبري لتهيئتها لإجراء التكامل. توفر تمارين ٦-١ تدريبات على تكامل أنواع مختلفة من الدوال.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ١

من خلال إيجاد $\frac{ءص}{ءس}$ لدوال متنوعة، سيعمل الطلبة عكسيًا حتى يتوصلوا إلى قاعدة عامة للعملية العكسية، وأن يجدوا ص عند معرفة $\frac{ءص}{ءس}$. يؤدي هذا الاستكشاف إلى تقديم ثابت التكامل حيث يوجد عدد لانهائي من الدوال لها المشتقة نفسها، وتقود إلى فكرة أن بعض الدوال لا تتبع القاعدة الموضحة في نتيجة ١ في كتاب الطالب.

دعم الطلبة

قد يخلط بعض الطلبة بين التفاضل والتكامل. يعزز التدريب على التفاضل (كما في الوحدة ٤) ثقة الطلبة قبل الانتقال إلى العملية العكسية. يمكنك أن تستخدم مساعدة للتذكير، مثل: التكامل يزيد الأسّ بينما التفاضل ينقص الأسّ. تحتاج المعالجة الجبرية إلى إعداد مصطلحات لإجراء التكامل، لذا قد تكون تحديًا لبعض الطلبة. قد يعمل بعض الطلبة بشكل صحيح، لكنهم ينسون بعد ذلك إجراء التكامل. سيكون هناك المزيد من التمارين للتدريب على التكامل في الدروس اللاحقة.

تحدّي الطلبة

قد يجد الطلبة متعة في استكشاف ميل المماس لمنحنى الدوال، مع رسوم مشابهة باستخدام برنامج جيوجبرا، مثل ملاحظة ومقارنة كيفية تغير ميل المماس عند نقاط على منحنيات الدوال ص = $هـ^{س}$، و ص = لـط س مع تزايد قيم س.

قد تقترح أيضًا أن يستقصي الطلبة أصل وأهمية **النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل**.

مصادر أخرى مفيدة

المصدران في الرابطين:

https://undergroundmathematics.org/calculus-of-powers

https://undergroundmathematics.org/calculus-meets-functions

يقدمان مساعدة كبيرة للطلبة في فهم أساسيات علم التفاضل والتكامل.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٦-١

٦-٢ تكامل عبارات في صورة $(\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}}$

ملاحظات للمعلِّمين

يتعامل هذا الموضوع مع الصورة العكسية للمشتقات البسيطة الموجودة في الوحدة ٤، والاستفادة من قاعدة السلسلة.

أفكار للتعليم

أفضل طريقة للطلبة لفهم كيفية استخدام قاعدة السلسلة بصورة عكسيّة (إيجاد التكامل) هي أن تبيّن لهم ذلك بتقديم مثال كالموجود في بداية الدرس في كتاب الطالب. يمكنهم أن يحاولوا اقتراح ما سيكون عليه التكامل، ثم التأكد من صحة المعاملات بإجراء الاشتقاق. وإن لم تكن صحيحة فهذا يعطي فرصة لمناقشة مصدر هذه المعاملات.

تتضمن تمارين ٦-٢ تمارين مباشرة حول التكاملات غير المحدودة.

دعم الطلبة

معظم الطلبة يجدون أن التفاضل أسهل من التكامل، لذا يقترح دائمًا إيجاد التفاضل للتأكد من إجاباتهم.

في الجزئيات من (أ) إلى (د) في التمرين ١ من تمارين ٦-٢، المطلوب هو إيجاد تكامل عبارات في صورة $(\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}}$، حيث ن عدد صحيح موجب. التحدي يأتي في الجزئيات من (هـ) إلى (ط) حيث للعبارات الصورة نفسها، ولكن ن ليست عددًا صحيحًا موجبًا. من المرجح أن تمثّل هذه الجزئيات تحدّيًا للطلبة.

تحدّي الطلبة

يمكن طرح أسئلة للطلبة كنوع من التحدّي تُنمّي جانب التفكير لديهم، وتُعزّز من عملية التعلّم.

أمثلة:

١. أوجد $\int (\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩)^{٣} \, \text{ءس}$

الحل: $\int (\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩)^{٣} \, \text{ءس} = \int ((\text{س} - ٣)^{٢})^{٣} \, \text{ءس}$

$$= \int (\text{س} - ٣)^{٦} \, \text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٦ + ١} (\text{س} - ٣)^{٦ + ١} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٧} (\text{س} - ٣)^{٧} + \text{جـ}$$

٢. أوجد $\int \left(\frac{١}{٤\text{س}^{٢} + ١٢\text{س} + ٩} \right)^{-\frac{٧}{٢}} \text{ءس}$

الحل: $\int \left(\frac{١}{٤\text{س}^{٢} + ١٢\text{س} + ٩} \right)^{-\frac{٧}{٢}} \text{ءس} = \int \left(\frac{١}{(٢\text{س} + ٣)^{٢}} \right)^{-\frac{٧}{٢}} \text{ءس}$

$$= \int ((٢\text{س} + ٣)^{-٢})^{-\frac{٧}{٢}} \, \text{ءس}$$

$$= \int (٢\text{س} + ٣)^{٧} \, \text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٢(٧ + ١)} (٢\text{س} + ٣)^{٧ + ١} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{١٦} (٢\text{س} + ٣)^{٨} + \text{جـ}$$

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٦-٢

٦-٣ المزيد من التكامل غير المحدود

ملاحظات للمعلِّمين

في هذا الدرس سيجد الطلبة تكامل المزيد من العبارات الجبرية والدوال المرتبطة، والتي لا تخضع لقاعدة التكامل الواردة في نتيجة ٢، ولكنها ليست مكافئة لمشتقة الدالة.

أفكار للتعليم

أفضل بداية للدرس هي مثال ٥، حيث يوضح نمطًا يستخدمه الطلبة لإيجاد تكاملات للعديد من العبارات الجبرية.

تتضمن تمارين ٦-٣ أسئلة متنوعة ومتدرجة في الأفكار.

لاختتام هذا الدرس، يمكنك أن تعرض إجابة تكامل ما، وتطلب إلى الطلبة طرح السؤال المناسب. تشجعهم هذه الآلية على التفكير بطريقة عكسية، وعلى التحقق من فهمهم لطريقة الحل.

دعم الطلبة

يحتاج الطلبة إلى إبراز التشابه في العبارات الجبرية ليتمكنوا من الحل عكسيًا بدءًا من إيجاد المشتقة، وانتهاء بالتكامل المطلوب.

تحدّي الطلبة

قد يكتب الطلبة ثلاثة أسئلة، ثم يرتبونها من الأسهل إلى الأصعب. يمكنهم أن يتبادلوا الأسئلة مع زملائهم ويناقشوا ترتيب الأسئلة. يساعدهم ذلك على تقويم بنية العبارة الجبرية، وانعكاسه على الأمور التي تجعل التكامل سهلًا أو صعبًا.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٦-٣

٤-٦ إيجاد ثابت التكامل

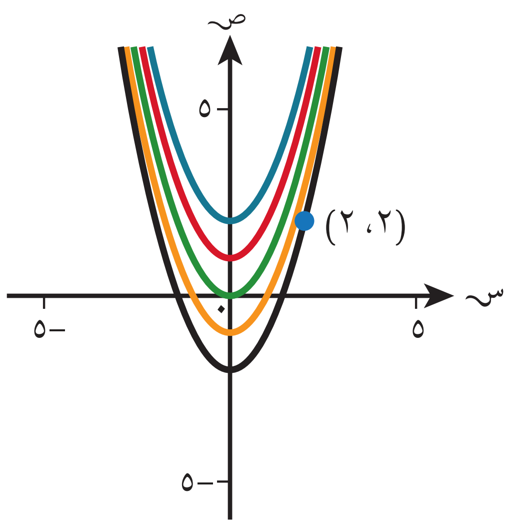
ملاحظات للمعلِّمين

سيتعرف الطلبة على الفكرة الجبرية، وهي أن التكامل ليس عكس التفاضل تمامًا خصوصًا إذا تضمّنت الدالة ثابتًا ما. فغالبًا ما ينسى الطلبة أن تتضمن حلولهم الثابت.

أفكار للتعليم

من المفيد أن توضح للطلبة كيف يمكنك إيجاد مجموعة من المنحنيات عند عدم معرفة نقطة ما على المنحنى.

فمثلًا: $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س تؤدي إلى ص = $س^٢$، ولكن تعطي أيضًا ص = $س^٢$ ± ١، ص = $س^٢$ ± ٢، وإلى عدد لانهائي من الانسحابات إلى أعلى وأسفل المحور الرأسي.



إن معرفة إحداثيات نقطة على المنحنى مثل: (٢، ٢) يسمح لنا بتحديد معادلة معيّنة للمنحنى؛ لأنه يساعدنا على إيجاد ثابت التكامل.

يستخدم مثال ٨ ميل العمودي على مماس المنحنى لإيجاد معادلة المنحنى. تعتبر هذه الطريقة مهمة ليتذكر الطلبة معلوماتهم عن المماس والعمودي عليه، وتعميق العلاقة بينهما، وبين ميل المماس لمنحنى الدالة.

في تمارين ٦-٤ يتكوّن التمرين ١ من عدد من الأسئلة المباشرة لإيجاد معادلة المنحنى بمعلومية $\frac{ءص}{ءس}$، ونقطة على المنحنى. التمارين من ٢ إلى ٢٢ هي مسائل يتطلب الكثير منها أن يطبق الطلبة معرفتهم في التفاضل مثل المماس والعمودي عليه، والدوال المتزايدة والدوال المتناقصة، والنقاط الحرجة.

دعم الطلبة

يحتاج الطلبة إلى التذكير مرارًا بثابت التكامل عند إيجاد التكامل غير المحدود. التمارين التي تطلب إيجاد معادلة المنحنى عند معرفة المشتقة تساعدهم على إبراز الضرورة لتضمينها ثابت التكامل.

تحدّي الطلبة

التمارين من ١٩ إلى ٢٢ من تمارين ٦-٤ هي الأكثر تعقيدًا، ويمكن حلّها من قبل الطلبة المتميّزين.

مصادر أخرى مفيدة

يشجِّع الموقع (NRICH) Integration matcher https://nrich.maths.org/6412 الطلبة على العمل التعاوني حيث يربط بين التمثيلات البيانية وتكاملاتها، ويتضمن بعض الأفكار للمعلمين عند استخدام هذا المصدر، كما يوجد ضمن هذا المصدر رابط لمصادر مشابهة، مثل: (Underground Mathematics) Gradient match https://undergroundmathematics.org/introducing-calculus/gradient-match الذي قد تكون استخدمته عند دراسة التفاضل.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٦-٤

٦-٥ التكامل المحدود

ملاحظات للمعلِّمين

في هذا الدرس يركّز الطلبة على التعويض في "حدَّي التكامل" لإيجاد قيمة التكامل، وذلك لكي يستخدموها مستقبلًا بثقة في الدرسَين ٦-٦، ٦-٧، حيث يُطبّق التكامل المحدود لإيجاد المساحة تحت منحنى، وبين منحنيَين، وبين منحنى ومستقيم، ويُستخدم التكامل المحدود في الدرس ٦-٨ لإيجاد حجوم الأجسام الدورانية.

أفكار للتعليم

يوفّر المثال ٩ أربعة تكاملات محدودة يمكن أن تستخدمها لتقديم فكرة التعويض في "حدَّي التكامل"، وحساب قيمة التكامل. التمارين من ١ إلى ٣ من تمارين ٦-٥ تمثل أسئلة للتدريب، بينما التمارين من ٤ إلى ٦ تبدأ باشتقاق دالة، وتنتهي بحساب التكامل المحدود.

عندما يألف الطلبة عملية التكامل المحدود. يمكنك أن تستخدم المصادر الآتية:

تتضمن الصفحتان ١٠، ١١ من الموقع Differentiation and integration (STEM)

https://www.stem.org.uk/user/login?destination=system/files/elibrary-resources/legacy_files_migrated/35855-Differentiation.pdf

أسئلة تفكير قد يناقشها الطلبة في مجموعات صغيرة، أو يمكن اعتمادها أساسًا لمناقشة جميع الطلبة في الصف. وفي الصفحة ١٠ سيفكر الطلبة في تحويلات هندسية بسيطة لتكاملات محدودة، ويربطون بين الدوال، وتكاملاتها في الصفحة ١١ (للوصول إلى هذا الموقع وإلى موارد العلوم والتكنولوجيا والهندسة والرياضيات الأخرى (STEM)، يجب أولًا إنشاء حساب مجاني ثم استخدامه لتسجيل الدخول).

يتضمّن الموقع Integral chasing (Underground Mathematics)

https://undergroundmathematics.org/calculus-of-powers/integral-chasing

إيجاد تكاملات محدودة بدلالة ثوابت، ومن ثم إيجاد هذه الثوابت. يقترح المعلم على الطلبة العمل ضمن ثنائيات أو في مجموعات صغيرة، ويطلب إلى كل طالب تحديد أخطاء الطالب الآخر.

الموقع Additional Integrals (Underground Mathematics)

https://undergroundmathematics.org/calculus-meets-functions/additional-integrals

هو نشاط يتضمن استخدام التكامل المحدود المعطى لإيجاد تكاملات أخرى. ويمكن تنفيذ ذلك بطرق مختلفة: قد يفرز الطلبة البطاقات، أو يحاولون الرسم على الألواح البيضاء الصغيرة، وتفسير تبريراتهم ضمن مجموعات صغيرة أو مع الصف كاملًا.

دعم الطلبة

بعد أن تعلّم الطلبة إضافة "+ جـ" إلى التكامل، عليهم إدراك عدم حاجتهم إلى الثابت في التكامل المحدود لأنه يتلاشى خلال الحل. اطلب إليهم أن يكتبوا حلولهم بالتفصيل ليقتنعوا بصحة الحل، وقد يحتاج بعضهم إلى التذكير بأي الحدَّين يبدأ التعويض ليتجنبوا الطرح الخطأ.

تحدّي الطلبة

التمرين ١٠ من التمارين المتنوعة Miscellaneous Exercises 12.8 في الرابط:
http://www.cambridge.org/links/mctd6293 هو تمرين تحدٍّ يتطلب من الطلبة إيجاد بعض التكاملات المحدودة من تكاملات أخرى أُعطيت قيمها.

مصادر أخرى مفيدة

يتضمّن الموقع (NRICH) https://nrich.maths.org/4934 Integral sandwich مسألة يتطلب حلها فهم التكامل المحدود.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

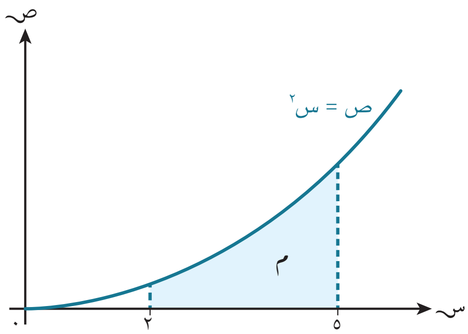
تمارين ٦–٥

٦-١ المساحة تحت منحنى الدالة

ملاحظات للمعلِّمين

بعد حساب التكامل المحدود في الدرس السابق، سيستخدم الطلبة التعويض في حدَّي التكامل، وإيجاد قيمة التكامل لإيجاد المساحة تحت المنحنيات.

فمثلًا في الشكل (١) المجاور: يمكن إيجاد المساحة م التقريبية للمنطقة المحصورة بين المنحنى ص = س^{٢}، والمحور السيني، والمستقيمين س = ٢، س = ٥، بإيجاد سلسلة من المستطيلات (كما في الشكل (٢)) عرض كل منها Δس (وترمز إلى زيادة قليلة في س)، وارتفاع كل منها ص (وترمز إلى ارتفاع الدالة).

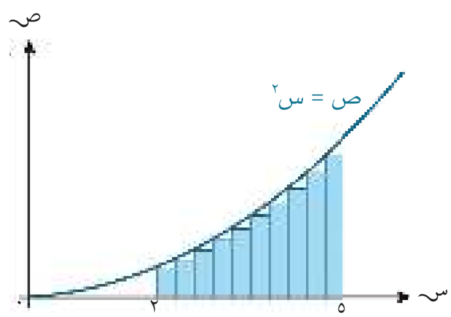


الشكل (١)

∴ المساحة التقريبية م هي: $\sum$ ص Δس، والتي

تمثل مجموع مساحات المستطيلات الداخلية

بين المستقيمين س = ٢، س = ٥.



الشكل (٢)

إذا قمنا بتصغير عرض Δس كل من المستطيلات بأن يصبح أصغر فأصغر، فسنحصل على النتيجة الآتية:

$$م = \underset{\Delta س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \sum ص \Delta س = \int_{٢}^{٥} ص \, ءس.$$

أفكار للتعليم

في هذا الدرس، يساعد التمثيل البياني على فهم المساحة المطلوب حسابها، وحدود التكامل المستخدمة. من المهم أن يحدد الطلبة ما إذا كانت المساحة المطلوبة محصورة بين المنحنى ومحور السينات أو بين المنحنى ومحور الصادات.

يناقش المثالان ١١، ١٢ أوضاعًا حيث يكون جزء من المنطقة أو المنطقة كلها تحت محور السينات. عندها تكون قيمة التكامل لا تساوي مساحة المنطقة.

لتساعد الطلبة على التفكير في مساحة المنطقة تحت المنحنى، يمكنك أن تستخدم الموقع Problem areas (Underground Mathematics)،

https://undergroundmathematics.org/introducing-calculus/problem-areas/suggestion

وقد يناقش الطلبة تخميناتهم ضمن ثنائيات أو في مجموعات صغيرة.

التمارين من ١ إلى ٤ من تمارين ٦-٦ هي تمارين مباشرة لحساب المساحة بالتكامل. التمرين ٥ يعطي حدودًا للمتغير ص، وليس للمتغير س، لذا يحتاج الطلبة إلى اعتماد التمثيل البياني للدالة، ليقرّروا كيفية حساب المساحة المطلوبة. تتضمّن التمارين من ٦ إلى ١٠ مسائل هندسية مشوّقة، كما يتضمّن التمرينان ١١، ١٢ تحويلات هندسية من المساحة بين المنحنى ومحور السينات إلى مساحة بين المنحنى ومحور الصادات، وتقرير أثر تغيير حدود التكامل.

دعم الطلبة

قد يحتاج بعض الطلبة إلى التذكير بالحدّ الذي عليهم أن يعوضوا فيه أولًا ليتجنبوا الخطأ في الطرح. يمكنك أن تعرض تمثيلًا بيانيًا يتضمن مساحات مظللة تقع تحت المنحنى لتوضيح سبب طرح قيمة التكامل مع الحدّ الأدنى من قيمته مع الحدّ الأعلى. يُفضّل أن يكون الطلبة قادرين على رسم التمثيل البياني ليساعدهم على أن يقرروا طريقة الحل. مثلًا، هل نحتاج إلى أن نقسّم المساحة لأن المنحنى قطع محور السينات ضمن المنطقة المطلوبة؟ أو هل المطلوب أن نجد المساحة بين المنحنى ومحور الصادات بدلًا من أن تكون بين المنحنى ومحور السينات؟ إن فهم التمثيل البياني يساعد الطلبة على إيجاد حدود التكامل، واستخدامها.

يمكن مناقشة المسألة الأساسية والسؤال الإضافي في Slippery areas (Underground Mathematics)
https://undergroundmathematics.org/chain-rule/slippery-areas

مع الطلبة أثناء عملهم ضمن ثنائيات أو في مجموعات صغيرة. يتضمن ذلك التفكير في التحويلات الهندسية، وتجهيز خلفية للتكامل بالتعويض لاحقًا.

تحدّي الطلبة

يقدّم الموقع 12 Integration: Activity 10 (CIMT)،
https://www.cimt.org.uk/projects/mepres/alevel/pure_ch12.pdf

عددًا من التمثيلات البيانية، ويسأل الطلبة عمّا تعنيه المساحة ضمن هذا السياق. يؤدي هذا الأمر إلى مناقشات مهمة بين الطلبة والعمل في ثنائيات، وإلى تعميق فهمهم للتكامل في هذا السياق.

مصادر أخرى مفيدة

يتضمّن الموقع 12 Integration: Exercise 12F (CIMT)
https://www.cimt.org.uk/projects/mepres/alevel/pure_ch12.pdf

سلسلة من التمارين التي تستخدم شروطًا على الحدود لإيجاد كميات ماديّة باستخدام التكامل.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٦–٦

٦-٧ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ومستقيم أو بين منحنيَين

ملاحظات للمعلِّمين

بعد حساب المساحة المحصورة بين المنحنى وأحد المحورَين، سيحسب الطلبة المساحة بين منحنى ومستقيم أو بين منحنيين. مرة أخرى التمثيلات البيانية ستكون مفيدة جدًا لفهم العلاقات الهندسية.

أفكار للتعليم

يتكوّن الموقع Integration http://www.cambridge.org/links/mctd6304 (STEM) من مصادر تفاعلية باستخدام Excel لتعرض المساحة تحت منحنى، أو بين منحنى ومستقيم، أو بين منحنيَين.

يعرض مثال ١٦ طريقتَين لإيجاد المساحة بين منحنى ومستقيم: طرح مساحة شبه المنحرف من التكامل، أو طرح الدالتَين ثم إجراء التكامل. يمكنك أن تناقش مثال ١٦ مع الطلبة باستخدام شرائح العرض الإلكترونية (ppt 6). والتي عدلت جزئيًا بحسب المطلوب أولًا، وهو إيجاد نقاط التقاطع (حدود التكامل). يمكنك أيضًا عرض المسألة لمجموعات الطلبة، والطلب إليهم إيجاد طرق لحلها. قد يثير الاهتمام عدد الطرق التي سيجدونها، وسيستفيد الطلبة من شرح طرقهم للفصل كاملًا، وقد تسألهم بعض الأسئلة المحفزة مثل:

- ما الذي يحدث إذا قمت بعملية الطرح بطريقة خاطئة (عكست التعويض في حدود التكامل)؟
- هل تحتاج إلى التعامل مع كل مساحة تحت محور السينات بطريقة منفصلة؟

تتضمن الكثير من تمارين ٦-٧ تمثيلات بيانية تساعد الطلبة على تصوّر التكامل المطلوب. في التمرينَين ٤، ٥، اطلب إلى الطلبة أن يرسموا التمثيلات البيانية لتساعدهم في الحل. وفي التمارين اللاحقة يحتاج الطلبة إلى أن يجدوا نقاط تقاطع التمثيلات البيانية ليتمكنوا من حساب التكامل المطلوب.

دعم الطلبة

يحتاج بعض الطلبة إلى تذكيرهم بأن يطرحوا المساحة تحت المنحنى السفلي من المساحة تحت المنحنى العلوي. يمكنك أن تقنعهم بهذه الفكرة بأن تظلل المساحات المناسبة على الشكل، وقد يحتاجون إلى التدريب على التجزئة باستخدام طريقة فعالة لحساب المساحة، وعرض حلولهم بوضوح مع الترميز الصحيح.

تحدّي الطلبة

يقدّم الموقع Meaningful areas (Underground Mathematics)،

https://undergroundmathematics.org/calculus-of-powers/meaningful-areas

مجموعة من المنحنيات، ويطلب إلى الطلبة القيام باستنتاجات حول المساحات بينها قبل أن يقوموا بالتجزئة باستخدام طرقهم الخاصة لإيجاد المساحة. من الممكن اقتراح استخدام نموذج فكّر- زاوج - شارك، الذي يتضمّن أن يفكر الطلبة منفردين، ويكتب كل منهم ملاحظاته، ثم يناقشون زملاءهم في الثنائيات قبل مشاركتها مع المجموعة الأكبر. تجد في الموقع بعض الأسئلة السريعة لحث الطلبة، وتشجيعهم.

مصادر أخرى مفيدة

يتضمّن الموقع 12 Integration: 12.8 Miscellaneous exercises (CIMT)
https://www.cimt.org.uk/projects/mepres/alevel/pure_ch12.pdf
مجموعة من الأسئلة المفيدة، وبعضها أسئلة تحدٍّ للطلبة حول أوجه تكامل متنوعة، وإيجاد المساحات. يتضمن السؤال ٦ عدة أمثلة على المساحة بين منحنى ومستقيم، وعلى المساحة بين منحنيين.

كما يقدّم الموقع Review questions (Underground Mathematics)،
https://undergroundmathematics.org/calculus-of-powers مجموعة من الأسئلة حول التكامل.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٦–٧

٦-٨ حجوم الأجسام الدورانية

ملاحظات للمعلِّمين

يُستخدم هذا الدرس في براهين القوانين الرياضية. مثلًا، يمكن أن يستخدم الطلبة التكامل في إيجاد حجم الجسم الدوراني لبرهنة الصيغ الرياضية لحجم الكرة أو المخروط.

أفكار للتعليم

تفيد التمثيلات البيانية المتحركة الطلبة في تصوّر طريقة دوران مستقيم أو منحنى حول محور السينات أو محور الصادات، من خلال تجزئة الحجم إلى أشكال أسطوانية أو أقراص. يوجد عدد من الفيديوهات على You Tube تحتوي على حجوم أجسام دورانية متحركة. http://www.cambridge.org/links/mctd6315

يبيّن الموقع Volumes of revolution Excel file with graphs

https://www.stem.org.uk/elibrary/resource/35743 (STEM) دوران مستقيم أو منحنى حول محور السينات، وحساب حجم الجسم الناتج من الدوران.

يتضمن التمرين ١ من تمارين ٦-٨ إيجاد حجم الجسم الناتج من دوران مناطق مظللة حول محور السينات، ويتضمن التمرين ٢ إيجاد الحجم لمناطق مظلّلة يكون الدوران فيها حول محور الصادات. التمارين من ٣ إلى ١٠ هي مسائل تتطلب من الطلبة استذكار الصيغ الرياضية، وتطبيق طرق إيجاد حجوم الأجسام الدورانية. والتمرين ١١ يتضمن حساب الحجم من خلال نماذج رياضية.

دعم الطلبة

يرى الطلبة أن الأشكال أو الرسوم مفيدة، خصوصًا عند تحديد محور الدوران لاختيار الصيغة الصحيحة للدوران حول المحور السيني أو المحور الصادي، ومن ثم تحديد حدود التكامل.

تحدّي الطلبة

التمرين ٣ في الموقع RISP 25: The area's 1: what's the question? Problem 3

http://www.risps.co.uk/risp-25.pdf

مصدر داعم ومهم يمكن استخدامه مع الطلبة الذين أنهوا دراسة هذا الدرس.

مصادر أخرى مفيدة

يمثّل الموقع The right volume (NRICH) http://www.cambridge.org/links/mctd6321

مسألة تتضمن إيجاد منحنى ناتج دورانه حول محور السينات جسم حجمه وحدة واحدة. سؤال مراجعة في الموقع https://undergroundmathematics.org/calculus-of-powers/r6372

(Underground Mathematics)، تمرين مراجعة في الموقع

R5007: What volume is generated when y = ax - x2 is rotated about the x-axis?

(Underground Mathematics)، https://undergroundmathematics.org/calculus-of-powers/r5007

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٦-٨

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة.

الرياضيّات المتقدمة للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الثاني

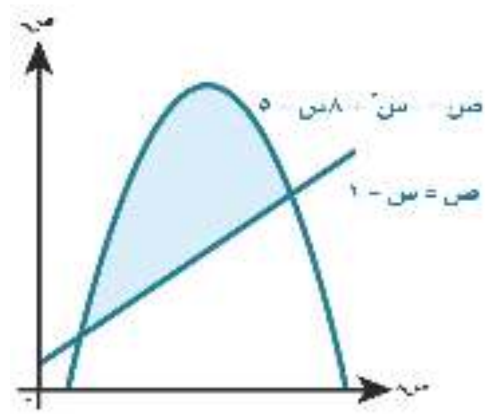
الوحدة السادسة

التكامل

العرض التوضيحي الإلكتروني ٦

الرياضيّات المتقدمة للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الثاني

المساحة بين مستقيم ومنحنى



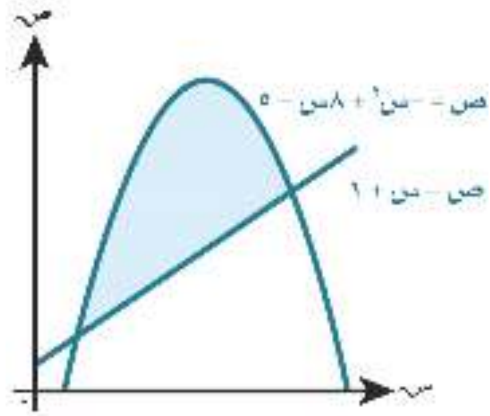
يبيّـن الشكل المنحنى

ص = −س^{٢} + ٨س − ٥،

والمستقيم ص = س + ١

أوجد مساحة المنطقة المظللة.

كيف يمكننا حساب المساحة؟



مساحة المنطقة المظللة = المساحة تحت المنحنى ـ مساحة شبه المنحرف.

نحتاج إلى إيجاد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع بين المستقيم، والمنحنى.

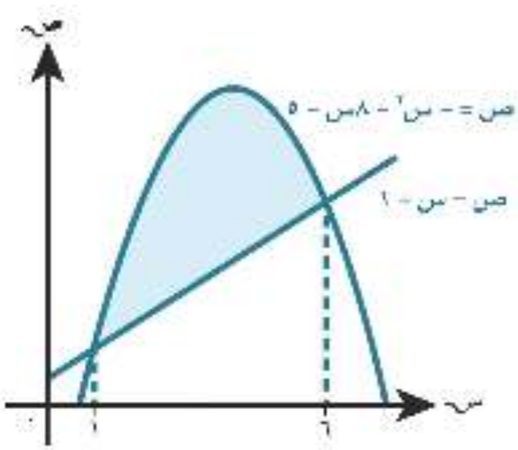
$-س^{٢} + ٨س - ٥ = س + ١$

$س^{٢} - ٧س + ٦ = ٠$

$(س - ٦)(س - ١) = ٠$

$س = ٦$ أو $س = ١$،

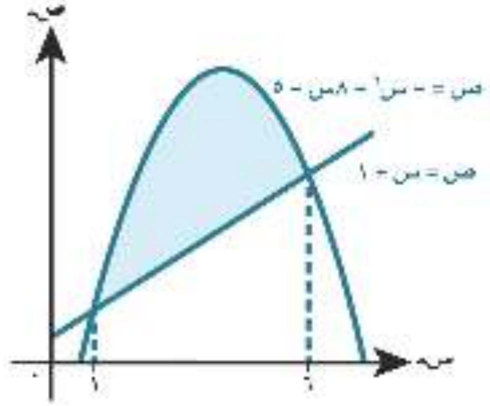
وهي تمثل حدود التكامل.



$\therefore$ المساحة تحت المنحنى = $\int_{١}^{٦} (-س^{٢} + ٨س - ٥)\, ءس$

الرياضيّات المتقدمة للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الثاني

لكي نجد مساحة شبه المنحرف، نحتاج إلى الإحداثيين الصاديين.



س = ١ ⟸ ص = س + ١ ⟸ **ص** = ٢

س = ٦ ⟸ ص = س + ١ ⟸ **ص** = ٧

∴ مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ × (٢ + ٧) × ٥

الرياضيّات المتقدمة للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الثاني

المساحة تحت المنحنى

مساحة شبه المنحرف

مساحة المنطقة المظلّلة = $\int_{١}^{٦}$ (− س^٢ + ٨س − ٥) ءس − $\frac{١}{٢}$ × (٢ + ٧) × ٥

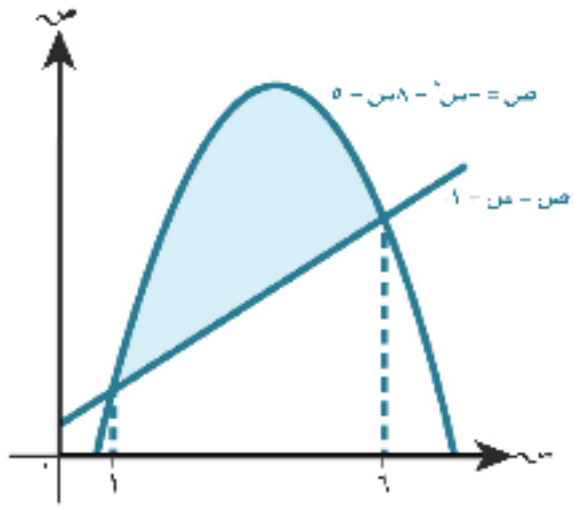
= $\left[-\frac{١}{٣}\right.$ س^٣ + ٤س^٢ − ٥س$\left.\right]_{١}^{٦}$ − $\frac{١}{٢}$ ٢٢

= ($-\frac{١}{٣}$ (٦)^٣ + ٤(٦)^٢ − ٥(٦)) − ($-\frac{١}{٣}$ + ٤ − ٥) − $\frac{١}{٢}$ ٢٢

= ٤٢ − ($-\frac{٤}{٣}$) − $\frac{١}{٢}$ ٢٢

= $\frac{٥}{٦}$ ٢٠ وحدة مربّعة.

هل توجد طريقة أخرى للحل يمكن استخدامها؟



مساحة المنطقة المظللة = المساحة تحت المنحنى − المساحة تحت المستقيم

الرياضيّات المتقدمة للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الثاني

اطرح الدالتَين قبل إجراء التكامل:

مساحة المنطقة المظللة = $\int_{١}^{٦} (-\text{س}^{٢} + ٨\text{س} - ٥)\, \text{ءس} - \int_{١}^{٦} (\text{س} + ١)\, \text{ءس}$

$= \int_{١}^{٦} (-\text{س}^{٢} + ٧\text{س} - ٦)\, \text{ءس}$

$= \left[-\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{٧}{٢}\text{س}^{٢} - ٦\text{س} \right]_{١}^{٦}$

$= \left(-\frac{١}{٣}(٦)^{٣} + \frac{٧}{٢}(٦)^{٢} - ٦(٦)\right) - \left(-\frac{١}{٣} + \frac{٧}{٢} - ٦\right)$

$= ١٨ + \frac{١٧}{٦}$

$= ٢٠ \frac{٥}{٦}$ وحدة مربّعة.

إجابات تمارين كتاب الطالب - الوحدة السادسة: التكامل

إجابات معرفة قبلية

١) أ $١٩-$ ب $١-$

٢) أ $س = -\frac{٢}{٣}$، $س = ٥$ ب $س = ٠$، $س = ٩$

٣) أ $٢٤س^{٧} - ١٣$ ب $١٠س - ٤ + \frac{٥}{\sqrt{س}}$

تمارين ٦-١

١) أ $ص = ٥س^{٣} + جـ$ ب $ص = ٢س^{٧} + جـ$

ج $ص = ٣س^{٤} + جـ$ د $ص = -\frac{٣}{س} + جـ$

هـ $ص = \frac{-١}{٤س^{٢}} + جـ$ و $ص = ٨\sqrt{س} + جـ$

٢) أ $د(س) = س^{٥} - \frac{س^{٤}}{٢} + ٢س + جـ$

ب $د(س) = \frac{س^{٦}}{٢} + \frac{س^{٣}}{٣} - س^{٢} + جـ$

ج $د(س) = ٣س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}} - \frac{٨}{س} + جـ$

د $د(س) = -\frac{٣}{٢س^{٦}} + \frac{٣}{س} - ٤س + جـ$

٣) أ $ص = \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{٥س^{٢}}{٢} + جـ$

ب $ص = \frac{٣س^{٤}}{٢} + \frac{٢س^{٣}}{٣} + جـ$

ج $ص = \frac{س^{٤}}{٤} - ٢س^{٣} - ٨س^{٢} + جـ$

د $ص = \frac{س^{٢}}{٤} - \frac{٥}{٤س^{٢}} + \frac{١}{س} + جـ$

هـ $ص = \frac{٢س^{\frac{٧}{٢}}}{٧} - \frac{١٢س^{\frac{٥}{٢}}}{٥} + ٦س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

و $ص = ٢س^{\frac{٥}{٢}} + ٢س^{\frac{٣}{٢}} + ٢\sqrt{س} + جـ$

٤) أ $٢س^{٦} + جـ$ ب $٥س^{٤} + جـ$

ج $-\frac{٣}{س} + جـ$ د $-\frac{٢}{س^{٢}} + جـ$

هـ $\frac{٤\sqrt{س}}{٣} + جـ$ و $-\frac{١٠}{\sqrt{س}} + جـ$

٥) أ $\frac{س^{٣}}{٣} + \frac{٥س^{٢}}{٢} + ٤س + جـ$

ب $\frac{س^{٣}}{٣} - ٣س^{٢} + ٩س + جـ$

ج $-\frac{٨س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + ٢س^{٢} + س + جـ$

د $\frac{٣س^{\frac{١٠}{٣}}}{١٠} + \frac{٣س^{\frac{٤}{٣}}}{٤} + جـ$

هـ $\frac{س}{٢} + \frac{١}{٢س} + جـ$

و $\frac{س}{٢} - \frac{٣}{٢س^{٢}} + جـ$

ز $\frac{س^{٢}}{٦} + \frac{٤\sqrt{س}}{٣} + جـ$

ح $\frac{٢س^{\frac{٧}{٢}}}{٧} + \frac{٢٠}{\sqrt{س}} + جـ$

ط $٢س^{٢} + \frac{١٢}{س} - \frac{٩}{٤س^{٤}} + جـ$

تمارين ٦-٢

١) أ $\frac{١}{١٨}(٢س - ٧)^{٩} + جـ$

ب $\frac{١}{١٨}(٣س + ١)^{٦} + جـ$

ج $\frac{٢}{٤٥}(٥س - ٢)^{٩} + جـ$

د $-\frac{١}{٤}(١ - ٢س)^{٦} + جـ$

هـ $-\frac{٣}{١٦}(٥ - ٤س)^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

و $\frac{١}{٥}(٢س + ١)^{\frac{٥}{٢}} + جـ$

ز $\frac{٤}{٣}\sqrt{٣س - ٢} + جـ$

ح) $-\frac{٢}{(٢س + ١)^{٢}} + جـ$

ط) $\frac{٥}{٣٢(٧ - ٢س)^{٤}} + جـ$

تمارين ٦-٣

١) أ $٨س(س^{٢} + ٢)^{٣}$ ب $\frac{١}{٨}(س^{٢} + ٢)^{٤} + جـ$

٢) أ $٢٠س(٢س^{٢} - ١)^{٤}$ ب $\frac{١}{٢٠}(٢س^{٢} - ١)^{٥} + جـ$

٣) أ $ك = -٢$ ب $-\frac{٢}{س^{٢} - ٥} + جـ$

٤) أ $\frac{٦س}{(٤ - ٣س^{٢})^{٢}}$

ب $\frac{١}{٨ - ٦س^{٢}} + جـ$

٥) أ $٦(٢س - ٣)(س^{٢} - ٣س + ٥)^{٥}$

ب $\frac{(س^{٢} - ٣س + ٥)^{٦}}{٣} + جـ$

٦) أ $\frac{٤(\sqrt{س} + ٣)^{٧}}{\sqrt{س}}$

ب $\frac{١}{٤}(\sqrt{س} + ٣)^{٨} + جـ$

٧) أ $١٥\sqrt{س}(٢س\sqrt{س} - ١)^{٤}$

ب $\frac{١}{٥}(٢س\sqrt{س} - ١)^{٥} + جـ$

تمارين ٦-٤

١) أ $ص = س^{٣} + س + ٢$ ب $ص = ٢س^{٣} - س^{٢} + ٥$

ج $ص = ١٠ - \frac{٤}{س}$ د $ص = س^{٢} + \frac{٦}{س} - ٤$

هـ $ص = ٤\sqrt{س} - س + ٢$

و $ص = ٢\sqrt{س} - ٢س + \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} - ١$

٢) $ص = \frac{٣}{س} + ٢$

٣) $ص = ٢س^{٣} - ٦س^{٢} + ٥س - ٤$

٤) $ص = ٥س^{٣} + \frac{٣}{س^{٢}} - ٢$

٥) أ $ص = ٢س^{٢}\sqrt{س} + ٢س - ١$

ب $ص = ٤٢س - ٩٧$

٦) $ص = ٢س^{٢} + ٣س - ٧$

٧) $د(س) = ٤ + ٨س - س^{٢}$

٨) $ص = س^{٣} + \frac{١}{٢}س^{٢} - ١٠س + ٣$

٩) $ص = ٢س^{٣} + ٦س^{٢} + ١٠س + ٤$

١٠) $ص = ٢ + ٤س - ٢س^{٢} - س^{٣}$

١١) أ $ك = -٦$

ب $ص = \frac{١}{٢}س^{٢} - ٦س + ٢$

١٢) $د'(س) = ٢س - \frac{٢}{س^{٢}}$، $د(س) = س^{٢} + \frac{٢}{س} - ٤$

١٣) $(-١١، ٤٠٨\frac{١}{٣})$

١٤) $ص = ٩ + ٣س - س^{٢}$

١٥) $ص = ٢س\sqrt{س} - ٦س + ١٠$

١٦) $(١، ٧)$، نقطة عظمى.

١٧) أ $ص = س^{٢} - ٥س + ٢$

ب $س + ص = -١$

ج ن $(١، -٢)$

١٨) أ $ص = \frac{١}{٨}(٢س - ١)^{٤} + ٢$

ب $\text{ص} = \frac{١}{٣}(٢\text{س} + ٥)^{\frac{٣}{٢}} - ٧$

ج $\text{ص} = ٢\sqrt{\text{س} - ٢} + ٥$ د $\text{ص} = \frac{٢}{٣ - ٢\text{س}} + ٦$

١٩) $\text{ص} = ٣(\text{س} - ٥)^{٤} - ١$

٢٠) أ $\text{س} + ٥\text{ص} = ٧$

ب $\text{ص} = ٥\sqrt{٢\text{س} - ٣} - ٤$

٢١) أ لأن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$ عند $\text{س} = ١$، نقطة عظمى.

ب $\text{ص} = ٨\sqrt{٣\text{س} + ١} - ٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٥$

٢٢) $\text{ص} = ٤\sqrt{٢\text{س} - ٥} - ٢$

تمارين ٦-٥

١) أ ٧ ب $\frac{١٦}{٩}$

ج -٦ د ٢١

هـ ٩ و $\frac{٥}{٢}$

٢) أ $\frac{١١}{٢}$ ب ٣

ج $\frac{١٠٧}{٦}$ د $\frac{٤}{١٥}$

هـ $\frac{٣٧}{٨}$ و ١٨

٣) أ ١٠ ب $\frac{٢٦}{٣}$

ج $\frac{٢}{٥}$ د ٤

هـ ٢ و ٨

٤) أ $-\frac{٤\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٥)^{٢}}$ ب $\frac{٤}{٤٥}$

٥) أ $١٥\text{س}^{٢}(\text{س}^{٣} - ٢)^{٤}$

ب $٢\frac{١}{١٥}$

٦) أ $\frac{(\sqrt{\text{س}} + ١)^{٤}}{٤\sqrt{\text{س}}}$

ب $٨٤\frac{٢}{٥}$

تمارين ٦-٦

١) أ $٢١\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة. ب ٨ وحدة مربعة.

ج $٢٠\frac{٥}{٦}$ وحدة مربعة. د $٥\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

٢) برهان.

٣) أ $١١\frac{٥}{٦}$ وحدة مربعة. ب $٤٠\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة.

ج $٤\frac{٣}{٣٢}$ وحدة مربعة. د $٢١\frac{١}{١٢}$ وحدة مربعة.

٤) أ $٤٨\frac{٣}{٤}$ وحدة مربعة. ب ٦ وحدة مربعة.

٥) $٣\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

٦) أ ٩ وحدة مربعة. ب $\text{ل} = ١,٦$

٧) أ برهان.

ب $٣ - \sqrt{٥}$ وحدة مربعة.

٨) $١٨\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

٩) أ $\text{ل}\,(-١، ٠)$ ب ٩٠ وحدة مربعة.

١٠) $١٠\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة.

١١) ٣٤ وحدة مربعة.

١٢) ٢٦ وحدة مربعة.

تمارين ٦-٧

١) $٢٦\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

٢) $١٠\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

٣) $٥٧\frac{١}{٦}$ وحدة مربعة.

٤) أ ٣٦ وحدة مربعة.

ب $١٠\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

ج ٣٦ وحدة مربعة.

٥) $\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

٦) $١\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

٧) أ ص = $\frac{١}{٣}$س + ٢

ب $\frac{١}{٢}(٢\sqrt{٣} - ٣)$ وحدة مربعة.

٨) أ ص = −٣س + ٤٦

ب ٦٤ وحدة مربعة.

٩) أ ص = −٨س + ١٦

ب ١٠٨ وحدة مربعة.

١٠) أ ٢ص = س − ١

ب ٨,٨٣ وحدة مربعة.

تمارين ٦-٨

١) أ $\frac{٧١\pi}{٥}$ وحدة مكعبة. ب $\frac{١٦\pi}{٣}$ وحدة مكعبة.

ج $\frac{١٥\pi}{٨}$ وحدة مكعبة. د $\frac{٢٥\pi}{٤}$ وحدة مكعبة.

٢) أ $\frac{٨١\pi}{٢}$ وحدة مكعبة. ب $\frac{١٢٤\pi}{١٥}$ وحدة مكعبة.

٣) أ = ٦

٤) $\frac{٣٩\pi}{٤}$ وحدة مكعبة.

٥) أ ٢٤π وحدة مكعبة. ب ٢٤π وحدة مكعبة.

٦) $\frac{٣٢\pi}{٥}$ وحدة مكعبة.

٧) أ ل (٢٥، ٠) ب $\frac{٣١٢٥\pi}{٦}$ وحدة مكعبة.

٨) أ ل (٠، ٣) ب ١٦π وحدة مكعبة.

٩) برهان.

١٠) أ $\frac{٥٢\pi}{٣}$ وحدة مكعبة. ب $\frac{١٢٨\pi}{٣}$ وحدة مكعبة.

١١) أ $\frac{١٨٨٨\pi}{٣}$ وحدة مكعبة. ب ١٧١π سم^{٣}.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

١) $د(س) = ٣س^{٤} + ٥س^{٢} - ٧$

٢) $\frac{٢٥}{٣}س^{٣} - ٢٠س - \frac{٤}{س} + جـ$

٣) $ص = ٣٠ - \frac{٦}{س} - \frac{٥}{٢}س^{٢}$

٤) $د(س) = ٦\sqrt{س + ٢} + \frac{٤}{س^{٢}} - ١٠$

٥) $\frac{١٩٤\pi}{٩}$ وحدة مكعبة.

٦) أ $س = ١$

ب $د(س) = ٣س^{٢} - ٦س + ٨$

٧) $١٠\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

٨) $\frac{٤٨٣\pi}{٥}$ وحدة مكعبة.

٩) أ برهان ب $\frac{٩}{٤}$ وحدة مربعة.

١٠) أ ب $(٠، ١)$، ج $(٤، ٣)$

ب $ص = -٣س + ١٥$

ج $\frac{٢\pi}{١٥}$ وحدة مكعبة.

١١) أ برهان ب ١ وحدة مربعة.

ج $\frac{٥\pi}{٣}$ وحدة مكعبة.

١٢) أ $س = \frac{١}{٩}$ ، $س = ٩$

ب $د''(س) = \frac{٣}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} - \frac{٣}{٢}س^{-\frac{٣}{٢}}$

عند $س = \frac{١}{٩}$ قيمة عظمى،

عند $س = ٩$ قيمة صغرى.

ج $د(س) = ٢س^{\frac{٣}{٢}} + ٦س^{\frac{١}{٢}} - ١٠س + ٥$

١٣) أ ب $\left(٤، \frac{٢٠}{٣}\right)$

ب ل، ن لهما المساحة نفسها،

وهي $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

١٤) أ $ص = -٢٤س + ٢٠$ ب $\frac{٩}{٨}$ وحدة مربعة.

إجابات تمارين كتاب النشاط - الوحدة السادسة: التكامل

حلول أسئلة البرهان في كتاب النشاط غير متوفرة.

تمارين ٦-١

١) أ $س^{٤} + جـ$ ب $س^{٦} + جـ$

ج $س^{٢} + جـ$ د $س^{٣} + س^{٥} + جـ$

هـ $س^{١٠} - س^{٨} - س + جـ$

و $-س^{٧} + س^{٣} + س + جـ$

٢) أ (١) $٥س + جـ$ (٢) $\frac{٣}{٤}س^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

ب (١) $٣س^{\frac{٥}{٣}} + جـ$ (٢) $٨س^{\frac{٧}{٤}} + جـ$

ج (١) $س^{\frac{٥}{٤}} + جـ$ (٢) $-س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

د (١) $-\frac{س^{\frac{٧}{٣}}}{٢} + جـ$ (٢) $\frac{٢س^{\frac{٧}{٥}}}{٣} + جـ$

هـ (١) $\frac{٥}{٢}س^{٢} - ٢س^{\frac{٧}{٢}} + جـ$

(٢) $٦س + \frac{س^{٢}}{٦} - ٨س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

و (١) $-س^{-١} + جـ$

(٢) $-\frac{١}{٢}س^{-٢} + جـ$

ز (١) $\frac{٣}{٢}س^{\frac{٢}{٣}} + جـ$

(٢) $\frac{٤}{٣}س^{\frac{٣}{٤}} + جـ$

ح (١) $-١٢س^{\frac{١}{٣}} + جـ$

(٢) $١٠س^{-\frac{١}{٢}} + جـ$

ط (١) $٢س^{\frac{١}{٢}} + \frac{٢س^{-٣}}{٥} + جـ$

(٢) $-\frac{٣س^{-٤}}{٤} + -\frac{٤٢س^{\frac{٥}{٦}}}{٥} + جـ$

٣) $د(س) = \frac{١}{٨}س^{٤} + ٩س^{-\frac{٢}{٣}} + ٢س + جـ$

٤) أ ١) $\frac{٢}{٣}س^{٣} + \frac{٥}{٢}س^{٢} + ٣س + جـ$

٢) $\frac{٣}{٤}س^{٤} - ٢س^{٣} + جـ$

ب ١) $٢س^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٨}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

٢) $\frac{٣}{٥}س^{\frac{١٠}{٣}} + \frac{٩}{٤}س^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

ج ١) $\frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + ٣س^{٢} + \frac{٨}{٣}س^{\frac{٩}{٤}} + جـ$

٢) $\frac{١}{٢}س^{٢} + \frac{١}{٥}س^{٥} - \frac{٤}{٧}س^{\frac{٧}{٢}} + جـ$

د ١) $\frac{١}{٣}س^{٣} - س^{-١} - ٢س + جـ$

٢) $\frac{٤}{٣}س^{٣} + \frac{١}{٣}س^{-٣} + جـ$

٥) أ ١) $-٧س^{-١} + س^{-٢} + جـ$

٢) $-\frac{١}{٤}س^{-٢} - \frac{٥}{٤}س^{-١} + جـ$

ب ١) $-٢س^{-\frac{١}{٢}} + ٣س^{-١} + جـ$

٢) $\frac{٢}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} - ٤س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

٦) أ $أ = \frac{١}{٢}$ ، $ب = -٢$ ب $\frac{١}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} - ٤س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

٧) $\int \left(١٢\sqrt{س} - \frac{٤}{\sqrt{س}}\right) ءس = \int ١٢س^{\frac{١}{٢}} - ٤س^{-\frac{١}{٢}} ءس$

$= \left(\frac{٢}{٣}\right) \times ١٢س^{\frac{٣}{٢}} - (٢) \times ٤س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

$= ٨س \times \sqrt{س} - ٨\sqrt{س} + جـ$

$= ٨\sqrt{س}\,(س - ١) + جـ$

٨) $\frac{١}{١٢}س^{\frac{٣}{٢}} + ٢س^{\frac{١}{٢}} - ٤س^{-\frac{١}{٢}} + جـ$

تمارين ٦-٢

١) أ ١) $(س + ٣)^{٥} + جـ$ ٢) $\frac{١}{٦}(س - ٢)^{٦} + جـ$

ب ١) $\frac{١}{٣٢}(٤س - ٥)^{٨} + جـ$

٢) $٢\left(\frac{١}{٨}س + ١\right)^{٤} + جـ$

ج ١) $-\frac{٨}{٧}\left(٣ - \frac{١}{٢}س\right)^{٧} + جـ$

٢) $-\frac{١}{٩}(٤ - س)^{٩} + جـ$

د ١) $\frac{١}{٣}(٢س - ١)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

٢) $-\frac{٤}{٥}(٢ - ٥س)^{\frac{٧}{٤}} + جـ$

هـ ١) $٤\left(٢ + \frac{س}{٣}\right)^{\frac{٣}{٤}} + جـ$ ٢) $٢(٤ - ٣س)^{-١} + جـ$

٢) أ $\frac{١}{١٤}(٢س + ١)^{٧} + جـ$

ب $\frac{١}{١٥}(٣س - ٥)^{٥} + جـ$

ج $-\frac{١}{٢٨}(١ - ٧س)^{٤} + جـ$

د $\frac{٢}{١١}\left(\frac{١}{٢}س + ١\right)^{١١} + جـ$

هـ $-\frac{١}{١٠}(٥س + ٢)^{-٢} + جـ$

و $\frac{٢}{٣}(١ - ٣س)^{-١} + جـ$

ز $-\frac{١}{٤}(س + ١)^{-٤} + جـ$

ح $-\frac{١}{٨}(٤س + ١)^{-٣} + جـ$

ط $\frac{١}{١٥}(١٠س + ١)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

ي $\sqrt{٢س - ١} + جـ$

ك $\frac{٦}{٥}\left(\frac{١}{٢}س + ٢\right)^{\frac{٥}{٣}} + جـ$

ل $\frac{١٦}{٩}(٢ + ٦س)^{\frac{٣}{٤}} + جـ$

تمارين ٦-٣

١) أ $١٠س(س^{٢} + ٣)^{٤}$ ب $\frac{١}{٥}(س^{٢} + ٣)^{٥} + جـ$

٢) أ $-٣٠س(٢ - ٣س^{٢})^{٤}$ ب $-\frac{١}{٣٠}(٢ - ٣س^{٢})^{٥} + جـ$

٣) أ $ك = -٦$ ب $\frac{٢}{٣ - ٩س^{٢}} + جـ$

٤) أ $\frac{١٢س}{(١ - ٢س^{٢})^{٤}}$ ب $\frac{١}{٤(١ - ٢س^{٢})^{٣}} + جـ$

٥) أ $٨س(س^{٢} - ٤)^{٣}$ ب $\frac{١}{٢}(س^{٢} - ٤)^{٤} + جـ$

٦) أ $\frac{٥(\sqrt{س} + ١)^{٤}}{٢\sqrt{س}}$ ب $\frac{٢}{٥}(\sqrt{س} + ١)^{٥} + جـ$

تمارين ٦-٤

١) أ ١) $ص = \frac{س^{٢}}{٢} + ٥$ ٢) $ص = ٢س^{٣} + ٥$

ب ١) $ص = \frac{-١}{س}$ ٢) $ص = -\frac{١}{س} + ٤$

ج ١) $ص = \frac{٣}{٢}س^{٢} - ٥س + ١٠$

٢) $ص = ٣س - \frac{١}{٢}س^{٤} + \frac{٥}{٢}$

د ١) $ص = ٢س^{\frac{٣}{٢}} - ٥٦$ ٢) $ص = ٢\sqrt{س} + ٤$

٢) $ص = \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{١}{س} + \frac{٣}{٢}$

٣) $د(س) = \frac{٤}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} - ٢س^{\frac{١}{٢}} - \frac{١٤}{٣}$

٤) $\frac{١٤٩}{٣}$

٥) $ص = ٢س^{٢} - ١٦$

٦) أ $س = -٢$

ب قم بإيجاد التكامل لدالة ميل المماس بالنسبة س، ثم عوّض س = ٠، ص = ٢ لإيجاد قيمة جـ.
عوّض س = −٢ في معادلة المنحنى لإيجاد الإحداثي الصادي للنقطة العظمى، وتحقق أنه يساوي $٧\frac{١}{٣}$.

٧) $ص = \frac{١}{س} + \frac{٥}{٢}$

٨) أ ١١٨ سم (مقرّبة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية).

ب ٢٧

٩) ١٩٢

١٠) أ $ص = \frac{(س - ٢)^{٤}}{٤} + \frac{١٥}{٤}$

ب $ص = -\frac{٢}{٣}(٤ - س)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٢٢}{٣}$

ج $ص = \frac{٢}{٣}\sqrt{٣س - ٥} + \frac{١}{٣}$

د $ص = \frac{١}{٢(١ - ٣س)^{٢}}$

١١) $ص = (٢س - ١)^{٣} + ٤$

١٢) أ $ك = ٣$ ب $ص = -\frac{س}{٢} - \frac{٣}{٢}$

١٣) $ص = ٤س^{\frac{٥}{٢}} - ٤س^{\frac{١}{٢}} + ٧$

١٤) ١٠٠ دقيقة

١٥) $ص = س^{٣} - ٢س^{٢} - س + ٨$

تمارين ٦-٥

١) أ ١) ٣٢٠   ٢) ٤٢٠,٢

ب ١) ٠   ٢) ٣٦

ج ١) ٤٦   ٢) ٤٨

د ١) ٢٨,٥   ٢) $\frac{٣٣}{٢}$

هـ ١) $\frac{٧٦}{٣}$ ٢) ٠

و ١) ٣٦   ٢) ٢

ز ١) $\frac{٥}{٢}$ ٢) $-\frac{٢٦}{٣}$

٢) أ ١٤٤   ب $١\frac{١}{٢}$

ج ٢٠   د $٦\frac{٣}{٤}$

هـ ١٦   و ٣

٣) $-٦٠ + ٢٨\sqrt{٢}$

٤) أ = ٢، ب = ١٠

٥) $٢ك + \frac{١}{ك} - ٣$

٦) $٨ - أ^{٤} - أ^{٣}$

٧) أ = ١٦

٨) أ ل = $-\frac{١٠}{٣}$ أو ل = −١

تمارين ٦-٦

١) أ ١) $\frac{٧}{٣}$ وحدة مربعة. ٢) $\frac{١}{٤}$ وحدة مربعة.

ب ١) $\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة. ٢) $\frac{٢٢}{٣}$ وحدة مربعة.

ج ١) $\frac{١١}{٤}$ وحدة مربعة. ٢) $\frac{٧٩}{٦}$ وحدة مربعة.

٢) أ ١) ٤٥ وحدة مربعة. ٢) $\frac{١٧}{٣}$ وحدة مربعة.

ب ١) $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة. ٢) $\frac{٤}{٣}$ وحدة مربعة.

ج ١) $\frac{٢٤٣}{٢}$ وحدة مربعة. ٢) $\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة.

٣) ك = ٩

٤) أ (٠، ٠)، (ك، ٠) ب ك = ٢

٥) ٦ وحدات مربعة.

٦) $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

٧) أ أوجد مشتقة $(٢س^{٢} + ٣)^{\frac{١}{٢}}$ بدلالة س.

$\left(\frac{١}{٢}\right)(٤س)(٢س^{٢} + ٣)^{-\frac{١}{٢}}$ ،

ويساوي $\frac{٢س}{\sqrt{(٢س^{٢} + ٣)}}$، وهو المطلوب.

ب $\sqrt{٣}\,(\sqrt{٧} - ١)$ وحدة مربعة.

٨) ٣٨

٩) أ ٦ ب ٦٧

ج غير ممكن. د ٤٥

هـ ١٧ و غير ممكن.

تمارين ٦-٧

١) $\frac{١}{٦}$ ل$\sqrt{ل}$ وحدة مربعة.

٢) $\frac{أ^{٣}}{٤٨}$ وحدة مربعة.

٣) ١٠٨ وحدة مربعة.

٤) ٣٢ وحدة مربعة.

٥) ١٠٨ وحدة مربعة.

٦) $٤٢\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

٧) $٦\frac{٣}{٤}$ وحدة مربعة.

٨) $١\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

٩) يتقاطع المنحنيان عندما $٩ - س^{٢} = س^{٢} - ٧$ أي

عندما $١٦ = ٢س^{٢}$، فيكون $س = \pm\sqrt{٨}$

$$\therefore \left|\int_{-\sqrt{٨}}^{\sqrt{٨}} \left((٩ - س^{٢}) - (س^{٢} - ٧)\right) دس\right|$$

$$= \left|\int_{-\sqrt{٨}}^{\sqrt{٨}} (١٦ - ٢س^{٢})\, دس\right|$$

$$= \left[١٦س - \frac{٢}{٣}س^{٣}\right]_{-\sqrt{٨}}^{\sqrt{٨}}$$

$$= ١٦\sqrt{٨} - \frac{٢}{٣}٨^{\frac{٣}{٢}} - \left(-١٦\sqrt{٨} + \frac{٢}{٣}٨^{\frac{٣}{٢}}\right)$$

$$= ٣٢\sqrt{٢} - \frac{٣٢}{٣}\sqrt{٢} + ٣٢\sqrt{٢} - \frac{٣٢}{٣}\sqrt{٢}$$

$$= \frac{١٢٨\sqrt{٢}}{٣}$$ وحدة مربعة.

تمارين ٦-٨

١) أ ٥٠٤ π وحدة مكعبة. ب $\frac{٣٤٩٨}{٥}\pi$ وحدة مكعبة.

ج $\frac{١٥}{٢}\pi$ وحدة مكعبة. د $\frac{١٦}{١٥}\pi$ وحدة مكعبة.

٢) أ ٤ π وحدة مكعبة. ب ٩ π وحدة مكعبة.

ج ٣٣٥٥ π وحدة مكعبة. د $\frac{٣}{١٠}\pi$ وحدة مكعبة.

هـ $\frac{٦٤٨}{٥}\pi$ وحدة مكعبة. و $\frac{٩}{٢}\pi$ وحدة مكعبة.

ز ١٥٦ π وحدة مكعبة. ح $\frac{٢}{٣}\pi$ وحدة مكعبة.

٣) $\frac{٢٨٣}{٣٠}\pi$ وحدة مكعبة.

٤) ك = $\frac{١}{٣}$

٥) ٩ π وحدة مكعبة.

٦) $\frac{٦٤}{٥}\pi$ وحدة مكعبة.

٧) برهان.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

١) ص = $\frac{٣}{٢}$س^{٢} − $\frac{٢}{٣}$س$^{\frac{٣}{٢}}$ − $\frac{٥٩}{٣}$

٢) أ −١٢ + ٨$\sqrt{٣}$

ب ١٢ − ٤$\sqrt{٣}$ وحدة مربعة.

٣) أ أ = $\sqrt{٢}$

ب $\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة.

٤) أ أ(−ك، ٠)، ب(ك، ٠)، ج(٠، ك^{٢})

ب $\frac{١}{٣}$ك^{٣} وحدة مربعة.

٥) برهان.

٦) ٤٣٨ $\frac{٦}{٧}$ وحدة مربعة.

٧) أ م = ٣٦ وحدة مربعة.

قيمة التكامل هي ١٨

ب $\frac{١٢٩٦}{٥}\pi$ وحدة مكعبة.

ج $\frac{٨١}{٢}\pi$ وحدة مكعبة.

٨) أ ص + ٦س = ٨

ب نوجِد نقطة تقاطع ص = ٤س^{٣} − ٤س^{٢} − ١٠س + ١٢
مع المستقيم ص = −٦س + ٨

عندما س = −١ يكون الإحداثي الصادي على المنحنى هو: ص = −٤ − ٤ + ١٠ + ١٢ = ١٤

عند س = −١ يكون الإحداثي الصادي على المماس هو: ص = ٦ + ٨ = ١٤

الإحداثيان السيني والصادي متساويان، لذا فإنهما يتقاطعان في النقطة ب.

ج $\frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة.

٩) $\frac{١}{١٢}\pi$ وحدة مكعبة.

١٠) ٣ $\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة.

التكامل

تمارين ٦-١

١) هـ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢س^{٣}}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة: $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}س^{-٣}$

إذا كان $\frac{ءص}{ءس} = س^{ن}$،

فإن $ص = \frac{١}{ن + ١}س^{ن+١} + جـ$

$ص = \frac{١}{-٣ + ١} \times \frac{١}{٢}س^{-٣+١} + جـ$

$ص = -\frac{١}{٤}س^{-٢} + جـ$

$ص = -\frac{١}{٤س^{٢}} + جـ$

و $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٤}{\sqrt{س}}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة: $\frac{ءص}{ءس} = ٤س^{-\frac{١}{٢}}$

إذا كان $\frac{ءص}{ءس} = س^{ن}$، فإن $ص = \frac{١}{ن + ١}س^{ن+١} + جـ$

$ص = \frac{١}{-\frac{١}{٢} + ١} \times ٤س^{-\frac{١}{٢}+١} + جـ$

$ص = \frac{١}{\frac{١}{٢}} \times ٤س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

$ص = ٢ \times ٤س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

$ص = ٨س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

$ص = ٨\sqrt{س} + جـ$

---

٢) د $د'(س) = \frac{٩}{س^{٧}} - \frac{٣}{س^{٢}} - ٤$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة: $د'(س) = ٩س^{-٧} - ٣س^{-٢} - ٤س^{٠}$

إذا كان $د'(س) = س^{ن}$، فإن $ص = \frac{١}{ن + ١}س^{ن+١} + جـ$

$د(س) = -\frac{١}{-٧ + ١} \times ٩س^{-٧+١} - \left(\frac{١}{-٢ + ١} \times ٣س^{-٢+١}\right) - \frac{١}{٠ + ١} \times ٤س^{٠+١} + جـ$

انتبه للإشارة "−"

$د(س) = -\frac{١}{٦} \times ٩س^{-٦} - (-١ \times ٣س^{-١}) - ١ \times ٤س^{١} + جـ$

$د(س) = -\frac{٣}{٢س^{٦}} + \frac{٣}{س} - ٤س + جـ$

٣) هـ $\frac{ءص}{ءس} = \sqrt{س}(س - ٣)^{٢}$

فكّ الأقواس:

$$\frac{ءص}{ءس} = \sqrt{س}(س - ٣)(س - ٣)$$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة:

$$\frac{ءص}{ءس} = \left(س^{\frac{٣}{٢}} - ٣س^{\frac{١}{٢}}\right)(س - ٣)$$

$$\frac{ءص}{ءس} = س^{\frac{٥}{٢}} - ٣س^{\frac{٣}{٢}} - ٣س^{\frac{٣}{٢}} + ٩س^{\frac{١}{٢}}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = س^{\frac{٥}{٢}} - ٦س^{\frac{٣}{٢}} - ٣س^{\frac{٣}{٢}} + ٩س^{\frac{١}{٢}}$$

إذا كانت $د'(س) = س^{ن}$، فإن $ص = \frac{١}{ن + ١}س^{ن+١} + جـ$

$$ص = \frac{١}{\frac{٥}{٢} + ١}س^{\frac{٥}{٢}+١} - \frac{١}{\frac{٣}{٢} + ١} \times ٦س^{\frac{٣}{٢}+١} + \frac{١}{\frac{١}{٢} + ١} \times ٩س^{\frac{١}{٢}+١} + جـ$$

$$ص = \frac{١}{\frac{٧}{٢}}س^{\frac{٧}{٢}} - \frac{١}{\frac{٥}{٢}} \times ٦س^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{\frac{٣}{٢}} \times ٩س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

$$ص = \frac{٢}{٧}س^{\frac{٧}{٢}} - \frac{١٢}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} + ٦س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

و $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٥س^{٢} + ٣س + ١}{\sqrt{س}}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة:

$$\frac{ءص}{ءس} = \left(\frac{٥س^{٢}}{س^{\frac{١}{٢}}} + \frac{٣س}{س^{\frac{١}{٢}}} + \frac{١}{س^{\frac{١}{٢}}}\right)$$

أو $\frac{ءص}{ءس} = ٥س^{\frac{٣}{٢}} + ٣س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}}$

إذا كانت $\frac{ءص}{ءس} = س^{ن}$،

فإن $ص = \frac{١}{ن + ١}س^{ن+١} + جـ$

فيكون $ص = \frac{١}{\frac{٣}{٢} + ١} \times س^{\frac{٣}{٢}+١} + \frac{١}{\frac{١}{٢} + ١} \times ٣س^{\frac{١}{٢}+١} + \frac{١}{-\frac{١}{٢} + ١} \times س^{-\frac{١}{٢}+١} + جـ$

$$ص = \frac{١}{\frac{٥}{٢}} \times ٥س^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{\frac{٣}{٢}} \times ٣س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{\frac{١}{٢}}س^{\frac{١}{٢}} + جـ$$

$ص = ٢س^{\frac{٥}{٢}} + ٢س^{\frac{٣}{٢}} + ٢س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

$ص = ٢س^{\frac{٥}{٢}} + ٢س^{\frac{٣}{٢}} + ٢\sqrt{س} + جـ$

٤) هـ $\int \frac{٢}{٣\sqrt{س}}\, ءس$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة: $\int \frac{٢}{٣} س^{-\frac{١}{٢}}\, ءس$

استخدم $\int ك\, د(س) = ك \int د(س)$ حيث ك عدد ثابت

$= \frac{٢}{٣} \int س^{-\frac{١}{٢}}\, ءس$

$= \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{-\frac{١}{٢} + ١} س^{-\frac{١}{٢}+١} + جـ$

$= \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{\frac{١}{٢}} س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

$= \frac{٤}{٣} \times س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

$= \frac{٤}{٣}\sqrt{س} + جـ$ أو $\frac{٤\sqrt{س}}{٣} + جـ$

و $\int \frac{٥}{س\sqrt{س}}\, ءس$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة: $\int \frac{٥}{س \times س^{\frac{١}{٢}}}\, ءس$ أو $\int \frac{٥}{س^{\frac{٣}{٢}}}\, ءس$ أو $\int ٥ س^{-\frac{٣}{٢}}\, ءس$

استخدم $\int ك\, د(س)دس = ك \int د(س)$ حيث ك عدد ثابت:

$= -٥ \times \frac{١}{-\frac{٣}{٢}} س^{-\frac{٣}{٢}+١} + جـ$

$= -٥ \times \frac{١}{-\frac{١}{٢} + ١} س^{-\frac{١}{٢}} + جـ$

$= -١٠س^{-\frac{١}{٢}} + جـ$

$= -\frac{١٠}{س^{\frac{١}{٢}}} + جـ$

$= -\frac{١٠}{\sqrt{س}} + جـ$

٥) هـ $\int \frac{س^٢ - ١}{٢س^٢} ءس$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة: $\int \left(\frac{س^٢}{٢س^٢} - \frac{١}{٢س^٢}\right) ءس$ أو $\int \left(\frac{١}{٢} س^٠ - \frac{١}{٢}س^{-٢}\right) ءس$

استخدم $\int ك\, د(س) ءس = ك \int د(س)\, ءس$ حيث ك عدد ثابت:

$= \frac{١}{٠ + ١} \times \frac{١}{٢}س^{٠+١} - \left(\frac{١}{-٢ + ١} \times \frac{١}{٢} س^{-٢+١}\right) + جـ$

$= \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٢}س^{-١} + جـ$

$= \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٢س} + جـ$ أو $\frac{س}{٢} + \frac{١}{٢س} + جـ$

ط $\int \left(٢\sqrt{س} - \frac{٣}{س^٢\sqrt{س}}\right)^٢ ءس$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة: $\int \left(٢\sqrt{س} - \frac{٣}{س^٢\sqrt{س}}\right)\left(٢\sqrt{س} - \frac{٣}{س^٢\sqrt{س}}\right) ءس$

$\int \left(٢س^{\frac{١}{٢}} - \frac{٣}{س^{\frac{٥}{٢}}}\right)\left(٢س^{\frac{١}{٢}} - \frac{٣}{س^{\frac{٥}{٢}}}\right) ءس$

$\int \left(٤س - \frac{٦س^{\frac{١}{٢}}}{س^{\frac{٥}{٢}}} - \frac{٦س^{\frac{١}{٢}}}{س^{\frac{٥}{٢}}} + \frac{٩}{س^٥}\right) ءس$

$\int \left(٤س - ٦س^{\frac{١}{٢}} - ٦س^{\frac{١}{٢}} + ٩س^{-٥}\right) ءس$

$\int \left(٤س - ١٢س^{-٢} + ٩س^{-٥}\right) ءس$

استخدم $\int ك\, د(س) ءس = ك \int د(س)\, ءس$ حيث ك عدد ثابت:

$\frac{١}{١+١} \times ٤س^{١+١} - \left(\frac{١}{-٢+١} \times ١٢س^{-٢+١}\right) + \left(\frac{١}{-٥ + ١} \times ٩س^{-٥+١}\right) + جـ$

$= ٢س^٢ + ١٢س^{-١} - \frac{٩}{٤}س^{-٤} + جـ$

$= ٢س^٢ + \frac{١٢}{س} - \frac{٩}{٤س^٤} + جـ$

تمارين ٦-٢

٦) د

$$\int \text{٣}(\text{١} - \text{٢س})^{\text{٥}}\ \text{ءس}$$

$$= \text{٣}\int (\text{١} - \text{٢س})^{\text{٥}}\ \text{ءس}$$

$$= \text{٣}\left(\frac{\text{١}}{-\text{٢}(\text{٥}+\text{١})}(\text{١} - \text{٢س})^{\text{٥}+\text{١}}\right) + \text{جـ}$$

$$= -\frac{\text{١}}{\text{٤}}(\text{١} - \text{٢س})^{\text{٦}} + \text{جـ}$$

٧) ز

$$\int \frac{\text{٢}}{\sqrt{\text{٣س} - \text{٢}}}\ \text{ءس}$$

$$= \text{٢}\int \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٣س} - \text{٢}}}\ \text{ءس}$$

$$= \text{٢}\int (\text{٣س} - \text{٢})^{-\frac{\text{١}}{\text{٢}}}\ \text{ءس}$$

$$= \frac{\text{٢}}{\text{٣}\left(-\frac{\text{١}}{\text{٢}}+\text{١}\right)}(\text{٣س} - \text{٢})^{-\frac{\text{١}}{\text{٢}}+\text{١}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{٤}}{\text{٣}}\sqrt{\text{٣س} - \text{٢}} + \text{جـ}$$

تمارين ٦-٣

١) أ لتكن $\text{ص} = (\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢})^{\text{٤}}$

استخدم قاعدة السلسلة لتحصل على:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{٢س})(\text{٤})(\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢})^{\text{٤}-\text{١}}$$

$$= \text{٨س}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢})^{\text{٣}}$$

ب

$$\int \text{س}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢})^{\text{٣}}\ \text{ءس}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٨}}\int \text{٨س}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢})^{\text{٣}}\ \text{ءس}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٨}}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢})^{\text{٤}} + \text{جـ}$$

٣) أ لتكن $\text{ص} = \dfrac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥}}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة:

$$\text{ص} = (\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥})^{-\text{١}}$$

استخدم قاعدة السلسلة لتحصل على:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{١}(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥})^{-\text{٢}} \times \text{٢س}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{٢س}}{(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥})^{\text{٢}}}$$

قارن المشتقة مع: $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{\text{كس}}{(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥})^{\text{٢}}}$ ،

فيكون، ك = −٢

ب

$$\int \frac{\text{٤س}}{(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥})^{\text{٢}}}\ \text{ءس} = -\text{٢}\int \frac{-\text{٢س}}{(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥})^{\text{٢}}}\ \text{ءس}$$

$$= -\text{٢} \times \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥}} + \text{جـ}$$

$$= -\frac{\text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥}} + \text{جـ}$$

٤) أ لتكن $\text{ص} = \dfrac{\text{١}}{\text{٤} - \text{٣س}^{\text{٢}}}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة:

$$\text{ص} = (\text{٤} - \text{٣س}^{\text{٢}})^{-\text{١}}$$

استخدم قاعدة السلسلة لتحصل على:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{١}(\text{٤} - \text{٣س}^{\text{٢}})^{-\text{٢}} \times -\text{٦س}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٦س}}{(\text{٤} - \text{٣س}^{\text{٢}})^{\text{٢}}}$$

ب

$$\int \frac{\text{٣س}}{(\text{٤} - \text{٣س}^{\text{٢}})^{\text{٢}}}\ \text{ءس} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\int \frac{\text{٦س}}{(\text{٤} - \text{٣س}^{\text{٢}})^{\text{٢}}}\ \text{ءس}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\text{٤} - \text{٣س}^{\text{٢}}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٨} - \text{٦س}^{\text{٢}}} + \text{جـ}$$

٦) أ لتكن $\text{ص} = (\sqrt{\text{س}} + ٣)^{٨}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة:

$\text{ص} = (\text{س}^{\frac{١}{٢}} + ٣)^{٨}$

استخدم قاعدة السلسلة لتحصل على:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٨(\text{س}^{\frac{١}{٢}} + ٣)^{٧} \times \frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{١}{٢}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤\text{س}^{-\frac{١}{٢}}(\text{س}^{\frac{١}{٢}} + ٣)^{٧}$$

$$= \frac{٤(\sqrt{\text{س}} + ٣)^{٧}}{\sqrt{\text{س}}}$$

ب $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{\text{س}} + ٣)^{٧}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس} = \frac{١}{٤}\int \frac{٤(\sqrt{\text{س}} + ٣)^{٧}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$

$$= \frac{١}{٤}(\sqrt{\text{س}} + ٣)^{٨} + \text{جـ}$$

٧) أ لتكن $\text{ص} = (٢\text{س}\sqrt{\text{س}} - ١)^{٥}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة:

$\text{ص} = (٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ١)^{٥}$

استخدم قاعدة السلسلة لتحصل على:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٥(٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ١)^{٤} \times ٣\text{س}^{\frac{١}{٢}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١٥\text{س}^{\frac{١}{٢}}(٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ١)^{٤}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١٥\sqrt{\text{س}}(٢\text{س}\sqrt{\text{س}} - ١)^{٤}$$

ب $\displaystyle\int ٣\sqrt{\text{س}}(٢\text{س}\sqrt{\text{س}} - ١)^{٤}\,\text{دس}$

$$= \frac{١}{٥}\int ١٥\sqrt{\text{س}}\,(٢\text{س}\sqrt{\text{س}} - ١)^{٤}\,\text{دس}$$

$$= \frac{١}{٥}(٢\text{س}\sqrt{\text{س}} - ١)^{٥} + \text{جـ}$$

تمارين ٦-٤

١) د $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{٢\text{س}^{٣} - ٦}{\text{س}^{٢}}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} - ٦\text{س}^{-٢}$$

ناتج التكامل هو:

$$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٦\text{س}^{-١} + \text{جـ}$$

$$= \text{س}^{٢} - \frac{٦}{\text{س}^{١}} + \text{جـ}$$

عند س = ٣، ص = ٧

$$٧ = ٣^{٢} + \frac{٦}{٣} + \text{جـ}$$

$$٧ = ٩ + ٢ + \text{جـ}$$

$$\text{جـ} = -٤$$

∴ معادلة المنحنى هي: $\text{ص} = \text{س}^{٢} + \dfrac{٦}{\text{س}} - ٤$

و $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{(١ - \sqrt{\text{س}})^{٢}}{\sqrt{\text{س}}}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(١ - \text{س}^{\frac{١}{٢}})(١ - \text{س}^{\frac{١}{٢}})}{\text{س}^{\frac{١}{٢}}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١ - ٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{س}}{\text{س}^{\frac{١}{٢}}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{س}^{\frac{١}{٢}}} - ٢ + \text{س}^{\frac{١}{٢}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^{-\frac{١}{٢}} - ٢ + \text{س}^{\frac{١}{٢}}$$

ناتج التكامل هو:

$$\text{ص} = ٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٢\text{س} + \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$$

عند س = ٩، ص = ٥ يكون:

$$٥ = ٢ \times ٩^{\frac{١}{٢}} - ٢ \times ٩ + \frac{٢}{٣} \times ٩^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$$

$\text{٥} = \text{٦} - \text{١٨} + \text{١٨} + \text{جـ}$

$\text{جـ} = -\text{١}$

$\text{ص} = \text{٢}\text{س}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} - \text{٢}\text{س} + \frac{\text{٢}}{\text{٣}}\text{س}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} - \text{١}$ أو

$\text{ص} = \text{٢}\sqrt{\text{س}} - \text{٢}\text{س} + \frac{\text{٢}}{\text{٣}}\text{س}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} - \text{١}$

٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{\text{ك}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{ك}\text{س}^{-\text{٢}}$

ناتج التكامل هو:

$\text{ص} = \text{ك}\text{س}^{-\text{١}} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \frac{\text{ك}}{\text{س}} + \text{جـ}$

عند س = ٦، ص = ٢,٥

$\text{٢,٥} = \frac{\text{ك}}{\text{س}} + \text{جـ}$

$\text{١٥} = \text{ك} + \text{٦جـ}$ .... [١]

عند س = −٣، ص = ١:

$\text{١} = \frac{\text{ك}}{-\text{٣}} + \text{جـ}$

$-\text{٣} = \text{ك} - \text{٣جـ}$ .... [٢]

اطرح المعادلة [٢] من المعادلة [١] لتحصل على:

$\text{١٨} = \text{٩جـ}$

$\text{جـ} = \text{٢}$

عوّض بدَل جـ = ٢ في المعادلة [١] لتحصل على:

$\text{١٥} = \text{ك} + \text{٦} \times \text{٢}$

$\text{ك} = \text{٣}$

∴ معادلة المنحنى هي $\text{ص} = \frac{\text{٣}}{\text{س}} + \text{٢}$

٣) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ك}\text{س}^{\text{٢}} - \text{١٢}\text{س} + \text{٥}$

التكامل يساوي:

$\text{ص} = \frac{\text{ك}}{\text{٣}}\text{س}^{\text{٣}} - \text{٦}\text{س}^{\text{٢}} + \text{٥}\text{س} + \text{جـ}$

عند س = ١، ص = −٣:

$-\text{٣} = = \frac{\text{ك}}{\text{٣}}(\text{١})^{\text{٣}} - \text{٦}(\text{١})^{\text{٢}} + \text{٥}(\text{١}) + \text{جـ}$

$-\text{٩} = \text{ك} - \text{١٨} + \text{١٥} + \text{٣جـ}$

$-\text{٦} = \text{ك} + \text{٣جـ}$ .... [١]

عند س = ٣، ص = ١١:

$\text{١١} = \frac{\text{ك}}{\text{٣}}(\text{٣})^{\text{٣}} - \text{٦}(\text{٣})^{\text{٢}} + \text{٥}(\text{٣}) + \text{جـ}$

$\text{١١} = \text{٩ك} - \text{٥٤} + \text{١٥} + \text{جـ}$

$\text{٥٠} = \text{٩ك} + \text{جـ}$ .... [٢]

اضرب المعادلة [١] في ٩ ثم اطرح منها المعادلة [٢]:

$-\text{١٠٤} = \text{٢٦ جـ}$

$\text{جـ} = -\text{٤}$

عوّض بدَل جـ = −٤ في المعادلة [١] لتحصل على:

$-\text{٦} = \text{ك} - \text{١٢}$

$\text{ك} = \text{٦}$

∴ معادلة المنحنى هي:

$\text{ص} = \text{٢}\text{س}^{\text{٣}} - \text{٦}\text{س}^{\text{٢}} + \text{٥}\text{س} - \text{٤}$

٤) عند س = ١، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٩}$

$\text{٩} = \text{ك}(\text{١})^{\text{٢}} - \frac{\text{٦}}{(\text{١})^{\text{٣}}}$

$\text{ك} = \text{٩} + \text{٦}$

$\text{ك} = \text{١٥}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{١٥}\text{س}^{\text{٢}} - \text{٦}\text{س}^{-\text{٣}}$

أوجد التكامل لتحصل على:

$\text{ص} = \text{٥}\text{س}^{\text{٣}} + \frac{\text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}}} + \text{جـ}$

بالتعويض عند س = ١، ص = ٦، فيكون:

$\text{٦} = \text{٥}(\text{١})^{\text{٣}} + \frac{\text{٣}}{\text{١}^{\text{٢}}} + \text{جـ}$

جـ = ٦ − ٥ − ٣

جـ = −٢

∴ معادلة المنحنى هي: ص = ٥س^{٣} + $\frac{٣}{س^{٢}}$ − ٢

٥) أ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٥س$\sqrt{س}$ + ٢

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة:

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٥س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٢

أوجد التكامل لتحصل على:

ص = $\frac{٥}{\frac{٥}{٢}}$س$^{\frac{٥}{٢}}$ + ٢س + جـ

ص = ٢س$^{\frac{٥}{٢}}$ + ٢س + جـ

عند س = ١، ص = ٣:

٣ = ٢ × ١$^{\frac{٥}{٢}}$ + ٢ × ١ + جـ

جـ = −١

فتكون معادلة المنحنى: ص = ٢س$^{\frac{٥}{٢}}$ + ٢س − ١

أو ص = ٢س$^{٢}\sqrt{س}$ + ٢س − ١

لا توجد صيغة وحيدة "صحيحة" لتعبّر عن إجابتك لأسئلة مشابهة. بصورة عامة، بسّط الكسور، واكتب الحدود في أسس موجبة، وبخاصة الأسس الكسرية، واستبدل الأسس الكسرية البسيطة مثل س$^{\frac{١}{٢}}$ بـ $\sqrt{س}$

ب $\frac{ءص}{ءس}$ = ٥س$\sqrt{س}$ + ٢

عوّض س = ٤ لتجد ميل المنحنى عند النقطة (أي ميل المماس).

حيث إن المماس مستقيم تكون معادلته في الصورة ص = م س + جـ (أو ما يكافئها)، يفضل أن تكتب بدون كسور عادية أو عشرية. استخدم ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$) أيضًا في عملك.

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٥ × ٤ × $\sqrt{٤}$ + ٢ (يؤخذ دائمًا الجذر الموجب)

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٤٢

وحيث إن معادلة المنحنى هي:

ص = ٢س$^{\frac{٥}{٢}}$ + ٢س − ١، فإن الإحداثي الصادي للنقطة عند س = ٤ هو:

ص = ٢ × ٤$^{\frac{٥}{٢}}$ + ٢ × ٤ − ١

ص = ٧١

استخدم ص − ص$_{١}$ = م(س − س$_{١}$)، حيث م = ٤٢، س$_{١}$ = ٤، ص$_{١}$ = ٧١

ص − ٧١ = ٤٢ (س − ٤)

ص − ٧١ = ٤٢س − ١٦٨

ص = ٤٢س − ٩٧

٦) $\frac{ءص}{ءس}$ = كس + ٣

إذا كان ميل العمودي على المماس عند س= ١ هو −$\frac{١}{٧}$، فإن ميل المماس هو ٧

(لأن م$_{١}$ × م$_{٢}$ = −١ (راجع الوحدة الثالثة)

وعليه يكون $\frac{ءص}{ءس}$ = كس + ٣، $\frac{ءص}{ءس}$ = ٧، س = ١

٧ = ك × ١ + ٣

ك = ٤

أوجد التكامل لتحصل على:

ص = ٢س^{٢} + ٣س + جـ

وحيث (١، −٢) تقع على المنحنى، عوّض س = ١، ص = −٢

−٢ = ٢ × ١^{٢} + ٣ × ١ + جـ

∴ جـ = −٧

∴ معادلة المنحنى هي: ص = ٢س^{٢} + ٣س − ٧

٧) توجد القيمة العظمى للدالة عندما يكون د′(س) = ٠

أي أن: ٨ − ٢س = ٠

س = ٤

النقطة العظمى هي (٤، ٢٠)

تكامل د′(س) يعطي:

د(س) = ٨س − س^{٢} + جـ

٢٠ = ٨ × ٤ − ٤^{٢} + جـ

جـ = ٢٠ − ٣٢ + ١٦

= ٤

∴ الدالة هي د(س) = ٤ + ٨س − س^{٢}

٨) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} + س − ١٠

أوجد التكامل لتحصل على:

ص = س^{٣} + $\frac{١}{٢}$س^{٢} − ١٠س + جـ

عوّض س = ٢ وص = −٧ لتحصل على:

−٧ = ٢^{٣} + $\frac{١}{٢}$ × ٢^{٢} − ١٠ × ٢ + جـ

−٧ = ٨ + ٢ − ٢٠ + جـ

جـ = ٣

∴ معادلة المنحنى هي:

ص = س^{٣} + $\frac{١}{٢}$س^{٢} − ١٠س + ٣

٩) $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ١٢س + ١٢

أوجد التكامل لتحصل على:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦س^{٢} + ١٢س + جـ

حيث ميل المنحنى عند النقطة (٠، ٤) هو ١٠:

١٠ = ٦ × ٠^{٢} + ١٢ × ٠ + جـ

جـ = ١٠

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦س^{٢} + ١٢س + ١٠

أوجد التكامل لتحصل على:

ص = ٢س^{٣} + ٦س^{٢} + ١٠س + جـ

وحيث تقع النقطة (٠، ٤) على المنحنى،

عوّض عن س = ٠، ص = ٤ لتحصل على:

٤ = ٢ × ٠^{٣} + ٦ × ٠^{٢} + ١٠ × ٠ + جـ

جـ = ٤

ص = ٢س^{٣} + ٦س^{٢} + ١٠س + ٤

١٠) $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = −٦س − ٤

أوجد التكامل لتحصل على:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٣س^{٢} − ٤س + جـ

للدالة نقطة صغرى عند (−٢، −٦)

∴ للدالة قيمة حرجة عند س = −٢، وتكون عندها المشتقة تساوي الصفر، أي أن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠،

وعليه التعويض يعطي:

٠ = −٣ × (−٢)^{٢} − ٤ × (−٢) + جـ

جـ = ٤

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٣س^{٢} − ٤س + ٤

أوجد التكامل لتحصل على:

ص = − س^{٣} − ٢س^{٢} + ٤س + جـ

حيث إن (−٢، −٦) تقع على المنحنى، عوّض

س = −٢، ص = −٦ لتحصل على:

−٦ = −(−٢)^{٣} − ٢(−٢)^{٢} + ٤ × (−٢) + جـ

جـ = ٢

∴ معادلة المنحنى هي:

ص = ٢ + ٤س − ٢س^{٢} − س^{٣}

١١) أ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ك} + \text{س}$

عند س = ٥، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ك} + ٥$

عند س = ٧، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ك} + ٧$

إذا كان المماسان متعامدَين، فإن:

(ك + ٥) × (ك+٧) = −١ (لأن $\text{م}_١ \times \text{م}_٢ = -١$)

$\text{ك}^٢ + ١٢\text{ك} + ٣٥ = -١$

$\text{ك}^٢ + ١٢\text{ك} + ٣٦ = ٠$

$(\text{ك} + ٦)^٢ = ٠$

ك = −٦

ب $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س} - ٦$

أوجد التكامل لتحصل على:

$\text{ص} = \frac{١}{٢}\text{س}^٢ - ٦\text{س} + \text{جـ}$

وحيث إن المنحنى يمر بالنقطة (١٠، −٨)، عوّض

س = ١٠، ص = −٨ لتحصل على:

$-٨ = \frac{١}{٢}\,١٠^٢ - ٦ \times ١٠ + \text{جـ}$

جـ = ٢

∴ معادلة المنحنى هي:

$\text{ص} = \frac{١}{٢}\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٢$

١٢) $\text{د}''(\text{س}) = ٢ + \frac{٤}{\text{س}^٣}$

أعد كتابة الدالة في الصورة الأسيّة:

$\text{د}''(\text{س}) = ٢ + ٤\text{س}^{-٣}$

أوجد التكامل لتحصل على:

$\text{د}'(\text{س}) = ٢\text{س} - ٢\text{س}^{-٢} + \text{جـ}$

عند النقطة الحرجة س = ١، $\text{د}'(\text{س}) = ٠$

$٠ = ٢ \times ١ - ٢ \times ١^{-٢} + \text{جـ}$

جـ = ٠

∴ $\text{د}'(\text{س}) = ٢\text{س} - \frac{٢}{\text{س}^٢}$

من تكامل $\text{د}'(\text{س}) = ٢\text{س} - \frac{٢}{\text{س}^٢}$، تحصل على:

$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٢ + \frac{٢}{\text{س}} + \text{جـ}$

وحيث (١، −١) تقع على المنحنى، عوّض س = ١،

ص = −١ لتحصل على:

$-١ = ١^٢ + \frac{٢}{١} + \text{جـ}$

جـ = −٤

∴ معادلة المنحنى هي $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٢ + \frac{٢}{\text{س}} - ٤$

١٣) $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} = ٢\text{س} + ٨$

أوجد التكامل لتحصل على:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^٢ + ٨\text{س} + \text{جـ}$

عند (٣، −٤٩) توجد نقطة حرجة صغرى، وعليه

تكون $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

عوّض س = ٣ و $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$٠ = ٣^٢ + ٨ \times ٣ + \text{جـ}$

جـ = −٣٣

وعليه يكون $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^٢ + ٨\text{س} - ٣٣$

عند القيمة العظمى تكون $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

وعليه يكون $\text{س}^٢ + ٨\text{س} - ٣٣ = ٠$

(س − ٣)(س + ١١) = ٠

عند س = ٣ توجد نقطة صغرى، وعند

س = −١١ نقطة عظمى. (يمكن التحقق من طبيعة

كل نقطة حرجة باستخدام اختبار المشتقة الثانية).

لتجد معادلة المنحنى، أوجد تكامل $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

لتحصل على $\text{ص} = \frac{١}{٣}\text{س}^٣ + ٤\text{س}^٢ - ٣٣\text{س} + \text{جـ}$

حيث أن (٣، − ٤٩) تقع على المنحنى، عوّض

س = ٣، ص = −٤٩ لتحصل على:

$-٤٩ = \frac{١}{٣} \times ٣^{٣} + ٤ \times ٣^{٢} - ٣٣ \times ٣ + \text{جـ}$

$-٤٩ = ٩ + ٣٦ - ٩٩ + \text{جـ}$

$\text{جـ} = ٥$

∴ معادلة المنحنى هي:

$\text{ص} = \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢} - ٣٣\text{س} + ٥$

لتجد الإحداثي الصادي للنقطة العظمى عوّض

س = −١١ في $\text{ص} = \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢} - ٣٣\text{س} + ٥$

$\text{ص} = \frac{١}{٣} \times (-١١)^{٣} + ٤ \times (-١١)^{٢} - ٣٣ \times (-١١) + ٥$

$\text{ص} = ٤٠٨\frac{١}{٣}$

∴ إحداثيات النقطة العظمى هي $(-١١، ٤٠٨\frac{١}{٣})$

١٤) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣ - ٢\text{س}$

$\text{ص} = \int \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \,\text{ءس}$

$= \int (٣ - ٢\text{س})\,\text{ءس}$

$= ٣\text{س} - \frac{٢\text{س}^{٢}}{٢} + \text{جـ}$

$= ٣\text{س} - \text{س}^{٢} + \text{جـ}$

عند التعويض س = ١، ص = ١١، نحصل على:

$١١ = ٣ \times ١ - ١^{٢} + \text{جـ}$

$\text{جـ} = ١١ - ٣ + ١ = ٩$

معادلة المنحنى هي $\text{ص} = ٩ + ٣\text{س} - \text{س}^{٢}$

١٥) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\sqrt{\text{س}} - ٦$

أعد كتابة المشتقة في الصورة الأسيّة:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٦$

أوجد التكامل لتحصل على:

$\text{ص} = ٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ٦\text{س} + \text{جـ}$

أو $\text{ص} = ٢\text{س}\sqrt{\text{س}} - ٦\text{س} + \text{جـ}$

عوّض س = ١، ص = ٦ لتحصل على:

$٦ = ٢ \times (١)^{\frac{٣}{٢}} - ٦ \times ١ + \text{جـ}$

∴ $\text{جـ} = ١٠$

معادلة المنحنى هي $\text{ص} = ٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ٦\text{س} + ١٠$

١٦) $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٢ - \frac{١٢}{\text{س}^{٣}}$

عوض س = ١ في $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ لتحصل على:

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٢ - \frac{١٢}{١^{٣}} = -١٠$

وعليه تكون النقطة الحرجة نقطة عظمى.

الآن أوجد معادلة المنحنى لتجد الإحداثي الصادي للنقطة الحرجة:

أعد كتابة المشتقة الثانية في الصورة الأسيّة:

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٢ - ١٢\text{س}^{-٣}$

أوجد التكامل لتحصل على:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} + ٦\text{س}^{-٢} + \text{جـ}$

$= ٢\text{س} + \frac{٦}{\text{س}^{٢}} + \text{جـ}$

عند النقطة الحرجة حيث س = ١، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$٠ = ٢ \times ١ + \frac{٦}{١^{٢}} + \text{جـ}$

$\text{جـ} = -٨$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} + \frac{٦}{\text{س}^{٢}} - ٨ = ٢\text{س} + ٦\text{س}^{-٢} - ٨$

أوجد التكامل لتحصل على:

$\text{ص} = \text{س}^{٢} - ٦\text{س}^{-١} - ٨\text{س} + \text{جـ}$

أو $\text{ص} = \text{س}^{٢} - \frac{٦}{\text{س}} - (٨\text{س}) + \text{جـ}$

وحيث أن (٢، ٥) تقع على المنحنى:

$٥ = ٢^{٢} - \frac{٦}{٢} - ٨ \times ٢ + \text{جـ}$

$\text{جـ} = ٢٠$

∴ معادلة المنحنى هي:

$\text{ص} = \text{س}^{٢} - \frac{٦}{\text{س}} - ٨\text{س} + ٢٠$

عندما س = ١ يكون الإحداثي الصادي:

$\text{ص} = ١^{٢} - \frac{٦}{١} - ٨ \times ١ + ٢٠$

ص = ٧،

وعليه (١، ٧) نقطة عظمى.

١٧) أ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} - ٥$

أوجد التكامل لتحصل على:

$\text{ص} = \text{س}^{٢} - ٥\text{س} + \text{جـ}$

عوض س = ٣، ص = −٤ لتحصل على:

$-٤ = ٣^{٢} - ٥ \times ٣ + \text{جـ}$

جـ = ٢،

وتكون معادلة المنحنى:

$\text{ص} = \text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٢$ .... (١)

ب ميل المماس عند س = ٣ هو:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢ \times ٣ - ٥ = ١$،

فيكون ميل العمودي على المماس عند س = ٣

هو −١. (لأن $\text{م}_{١} \times \text{م}_{٢} = -١$)

استخدم $\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}(\text{س} - \text{س}_{١})$، م = −١،

$\text{س}_{١} = ٣$، $\text{ص}_{١} = -٤$

ص − (−٤) = −١(س − ٣)

ص + ٤ = −س + ٣

س + ص = −١ .... (٢)

ج لتجد إحداثيات النقطة ن، حل المعادلتين (١)، (٢) آنيًا.

أوجد ص بدلالة س المعادلة (٢):

ص = −١ − س

عوّض بدل ص في المعادلة (١) لتحصل على:

$-١ - \text{س} = \text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٢$

$\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣ = ٠$

(س − ٣) (س − ١) = ٠

س = ٣، وهي معطاة في السؤال، أو س = ١

عوّض س= ١ في المعادلة (٢) لتحصل على:

١ + ص = −١

ص = −٢

∴ إحداثيات النقطة ن هي (١، −٢)

١٨) ب $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt{٢\text{س}+٥}$ ، ل(٢، ٢)

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٢\text{س} + ٥)^{\frac{١}{٢}}$

$\text{ص} = \frac{١}{٢\left(\frac{٣}{٢}\right)} (٢\text{س} + ٥)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \frac{١}{٣}(٢\text{س} + ٥)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

عوّض س = ٢، ص = ٢ لتجد جـ:

$٢ = \frac{١}{٣}(٢ \times ٢ + ٥)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

٢ = ٩ + جـ

جـ = −٧

$\text{ص} = \frac{١}{٣}(٢\text{س} + ٥)^{\frac{٣}{٢}} - ٧$

١٩) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ك}(\text{س} - ٥)^{٣}$

عند س = ٤، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ك}(٤ - ٥)^{٣}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{ك}$

ميل المماس هو −ك،

فيكون ميل العمودي على المماس هو:

$\frac{١}{\text{ك}}$ (لأن $\text{م}_{١} \times \text{م}_{٢} = -١$)

$\frac{١}{\text{ك}} = \frac{١}{١٢}$

ك = ١٢،

فيكون $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١٢(\text{س} - ٥)^{٣}$

يمكن استخدام ميل العمودي المعطى لإيجاد ميل المماس، ومن ثم التعويض عنه في المشتقة وعن س = ٤، ونجد قيمة ك.

أوجد التكامل لتحصل على:

$ص = \frac{١٢}{٤}(س - ٥)^{٤} + جـ$

$ص = ٣(س - ٥)^{٤} + جـ$

عوّض س = ٤، ص = ٢

$٢ = ٣(٤ - ٥)^{٤} + جـ$

$جـ = -١$

∴ معادلة المنحنى هي: $ص = ٣(س - ٥)^{٤} - ١$

٢٠) أ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٥}{\sqrt{٢س - ٣}}$

عند س = ٢

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٥}{\sqrt{٢ \times ٢ - ٣}}$

$\frac{ءص}{ءس} = ٥$

أي أن ميل المماس هو ٥،

فيكون ميل العمودي هو $-\frac{١}{٥}$ (لأن $م_١ \times م_٢ = -١$).

لتجد معادلة العمودي استخدم

$ص - ص_١ = (س - س_١)$، $س_١ = ٢$، $ص_١ = ١$، $م = ٥$،

فيكون: $ص - ١ = -\frac{١}{٥}(س - ٢)$

$٥ص - ٥ = -س + ٢$

$س + ٥ص = ٧$

ب $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٥}{\sqrt{٢س - ٣}}$

أعد كتابة المشتقة في الصورة الأسيّة:

$\frac{ءص}{ءس} = ٥(٢س - ٣)^{-\frac{١}{٢}}$

من التكامل تحصل على:

$ص = \frac{٥}{٢\left(-\frac{١}{٢} + ١\right)}(٢س - ٣)^{-\frac{١}{٢}+١} + جـ$

$ص = ٥(٢س - ٣)^{\frac{١}{٢}} + جـ$،

$ص = ٥\sqrt{٢س - ٣} + جـ$

وحيث إن المنحنى يمر في ل(٢، ١)

عوّض س = ٢، ص = ١ لتجد جـ:

$١ = ٥(٢ \times ٢ - ٣)^{\frac{١}{٢}} + جـ$

$جـ = -٤$

$ص = ٥\sqrt{(٢س - ٣)} - ٤$

٢١) أ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١٢}{\sqrt{٣س + ١}} - ٤س - ٢$

عند إيجاد المشتقة الأولى، ومن ثم التعويض بـ س = ١ والحصول على أن المشتقة تساوي صفر، فيمكن القول إن للمنحنى نقطة حرجة عند س = ١

عوِّض عن س = ١ في المشتقة:

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١٢}{\sqrt{٣ \times ١ + ١}} - ٤ \times ١ - ٢$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١٢}{٢} - ٤ - ٢$

$= ٦ - ٤ - ٢ = ٠$

وعليه، عند س = ١ توجد نقطة حرجة.

لتحدد طبيعة النقطة الحرجة أوجد $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$.

أعد كتابة $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١٢}{\sqrt{٣س + ١}} - ٤س - ٢$ في الصورة الأسيّة.

$\frac{ءص}{ءس} = ١٢(٣س + ١)^{-\frac{١}{٢}} - ٤س - ٢$

أوجد المشتقة الثانية:

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = \frac{١}{٢} \times ١٢(٣س + ١)^{-\frac{٣}{٢}} \times ٣ - ٤$

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = -١٨(٣س + ١)^{-\frac{٣}{٢}} - ٤$

عوّض س = ١ لتحصل على:

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = -١٨(٣ \times ١ + ١)^{-\frac{٣}{٢}} - ٤$

$= -\frac{١٨}{٨} - ٤$

$= -\frac{٢٥}{٤}$، وهي كمية سالبة،

لذا فإنه توجد نقطة عظمى عند س = ١

(ب) أوجد تكامل $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١٢(٣\text{س} + ١)^{-\frac{١}{٢}} - ٤\text{س} - ٢$

$\text{ص} = \frac{١٢}{٣\left(-\frac{١}{٢}+١\right)}(٣\text{س} + ١)^{\frac{١}{٢}} - ٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ص} = ٨(٣\text{س} + ١)^{\frac{١}{٢}} - ٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + \text{جـ}$

عوّض س = ٠، ص = ١٣ لتجد قيمة جـ:

$١٣ = ٨(٣ \times ٠ + ١)^{\frac{١}{٢}} - ٢ \times ٠^{٢} - ٢ \times ٠ + \text{جـ}$

$١٣ = ٨ + \text{جـ}$

$\text{جـ} = ٥$

فتكون معادلة المنحنى:

$\text{ص} = ٨\sqrt{٣\text{س}+١} - ٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٥$

٢٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٤}{\sqrt{٢\text{س}+\text{ك}}}$

بما أن معادلة العمودي على المماس عند النقطة ل

هي س + ٤ص = ١١، فأعد ترتيب المعادلة لتحصل

على: ٤ص = −س + ١١

$\text{ص} = -\frac{١}{٤}\text{س} + \frac{١١}{٤}$

فيكون ميل العمودي على المماس عند النقطة **ل** هو $-\frac{١}{٤}$

ويكون ميل المماس عند **ل** هو ٤ (حيث $\text{م}_{١} \times \text{م}_{٢} = -١$)،

فيكون $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤$ عند **ل**(٣، ٢)

$٤ = \frac{٤}{\sqrt{٢ \times ٣ + \text{ك}}}$

$٤\sqrt{٦ + \text{ك}} = ٤$

$\sqrt{٦ + \text{ك}} = ١$ ، بتربيع الطرفين:

$\text{ك} = -٥$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٤}{\sqrt{٢\text{س} - ٥}}$

أعد كتابة المشتقة في الصورة الأسيّة:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤(٢\text{س} - ٥)^{-\frac{١}{٢}}$

أوجد التكامل لتحصل على:

$\text{ص} = \frac{٤}{٢\left(-\frac{١}{٢}+١\right)}(٢\text{س} - ٥)^{-\frac{١}{٢}+١} + \text{جـ}$

$\text{ص} = ٤(٢\text{س} - ٥)^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$

لنجد قيمة جـ عوض س = ٣، ص = ٢:

$٢ = ٤(٢ \times ٣ - ٥)^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$

$\text{جـ} = -٢$

معادلة المنحنى هي $\text{ص} = ٤\sqrt{٢\text{س} - ٥} - ٢$

تمارين ٦-٥

١) ج

$$\int_{-١}^{١} (٢\text{س} - ٣)\,\text{ءس} = \left[\text{س}^{٢} - ٣\text{س}\right]_{-١}^{١}$$

$$= \left(١^{٢} - ٣(١)\right) - \left((-١)^{٢} - ٣(-١)\right)$$

$$= -٢ - ٤$$

$$= -٦$$

هـ

$$\int_{-١}^{٢} (٤\text{س}^{٢} - ٢\text{س})\,\text{ءس} = \left[\frac{٤}{٣}\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢}\right]_{-١}^{٢}$$

$$= \left(\frac{٤}{٣} \times ٢^{٣} - ٢^{٢}\right) - \left(\frac{٤}{٣} \times (-١)^{٣} - (-١)^{٢}\right)$$

$$= \frac{٢٠}{٣} - \left(-\frac{٧}{٣}\right)$$

$$= \frac{٢٠}{٣} + \frac{٧}{٣}$$

$$= ٩$$

٢) ب

$$\int_{-٢}^{-١} \left(\frac{٨ - \text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}}\right)\text{ءس}$$

$$= \int_{-٢}^{-١} (٨\text{س}^{-٢} - ١)\,\text{ءس}$$

$$= \left[\frac{٨}{-١}\text{س}^{-١} - \text{س}\right]_{-٢}^{-١}$$

$$= \left[-٨\text{س}^{-١} - \text{س}\right]_{-٢}^{-١}$$

$$= \left(-٨(-١)^{-١} - (-١)\right) - \left(-٨(-٢)^{-١} - (-٢)\right)$$

$$= (٨ + ١) - (٤ + ٢)$$

$$= ٣$$

هـ

$$\int_{١}^{٢} \frac{(٣ - \text{س})(٨ + \text{س})}{\text{س}^{٤}}\,\text{ءس}$$

$$= \int_{١}^{٢} \left(\frac{٢٤ + ٣\text{س} - ٨\text{س} - \text{س}^{٢}}{\text{س}^{٤}}\right)\text{ءس}$$

$$= \int_{١}^{٢} \left(\frac{٢٤ - ٥\text{س} - \text{س}^{٢}}{\text{س}^{٤}}\right)\text{ءس}$$

$$= \int_{١}^{٢} \left(\frac{٢٤}{\text{س}^{٤}} - \frac{٥\text{س}}{\text{س}^{٤}} - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٤}}\right)\text{ءس}$$

$$= \int_{١}^{٢} \left(٢٤\text{س}^{-٤} - ٥\text{س}^{-٣} - \text{س}^{-٢}\right)\text{ءس}$$

$$= \left[\frac{٢٤}{-٣}\text{س}^{-٣} - \frac{٥}{-٢}\text{س}^{-٢} - \frac{١}{-١}\text{س}^{-١}\right]_{١}^{٢}$$

$$= \left[-٨\text{س}^{-٣} + \frac{٥}{٢}\text{س}^{-٢} + \text{س}^{-١}\right]_{١}^{٢}$$

$$= \left(-٨(٢)^{-٣} + \frac{٥}{٢}(٢)^{-٢} + (٢)^{-١}\right)$$

$$- \left(-٨(١)^{-٣} + \frac{٥}{٢}(١)^{-٢} + (١)^{-١}\right)$$

$$= \left(-١ + \frac{٥}{٨} + \frac{١}{٢}\right) - \left(-٨ + \frac{٥}{٢} + ١\right)$$

$$= \frac{١}{٨} + \frac{٩}{٢}$$

$$= \frac{٣٧}{٨}$$

٣) ب

$$\int_{٠}^{٤} \sqrt{٢\text{س} + ١}\,\text{ءس}$$

$$= \int_{٠}^{٤} (٢\text{س} + ١)^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$$

$$= \left[\frac{١}{٢ \times \frac{٣}{٢}}(٢\text{س} + ١)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٤}$$

$$= \left(\frac{١}{٣}(٢(٤) + ١)^{\frac{٣}{٢}}\right) - \left(\frac{١}{٣}(٢(٠) + ١)^{\frac{٣}{٢}}\right)$$

$$= ٩ - \frac{١}{٣}$$

$$= \frac{٢٦}{٣}$$

و

$$\int_{-٢}^{٢} \frac{٤}{\sqrt{٥ - ٢\text{س}}}\,\text{ءس}$$

$$= \int_{-٢}^{٢} ٤(٥ - ٢\text{س})^{-\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$$

$$= \left[\frac{٤}{-٢ \times \frac{١}{٢}}(٥ - ٢\text{س})^{\frac{١}{٢}}\right]_{-٢}^{٢}$$

$$= \left[-٤(٥ - ٢\text{س})^{\frac{١}{٢}}\right]_{-٢}^{٢}$$

$$= \left(-٤(٥ - ٢(٢))^{\frac{١}{٢}}\right) - \left(-٤(٥ - ٢(-٢))^{\frac{١}{٢}}\right)$$

$$= (-٤) - (-١٢)$$

$$= ٨$$

٤) أ $\text{ص} = \frac{٢}{\text{س}^{٢} + ٥}$

تذكّر القاعدة:

$\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}}\, \text{ءس} = \frac{١}{\text{أ}(\text{ن} + ١)} (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}+١} + \text{جـ}$،

حيث جـ عدد ثابت، ن $\neq -١$، أ $\neq ٠$ تصلح فقط لقوى الدوال الخطيّة.

اكتب العلاقة في الصورة الأسيّة:

$\text{ص} = ٢(\text{س}^{٢} + ٥)^{-١}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -١ \times ٢(\text{س}^{٢} + ٥)^{-٢} \times ٢\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٤\text{س}(\text{س}^{٢} + ٥)^{-٢}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{٤\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٥)^{٢}}$

ب $\int_{٠}^{٢} \frac{٢\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٥)^{٢}}\, \text{ءس} = -\frac{١}{٢} \int_{٠}^{٢} \frac{-٤\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٥)^{٢}}\, \text{ءس}$

$= -\frac{١}{٢} \left[\frac{٢}{\text{س}^{٢} + ٥}\right]_{٠}^{٢}$

$= \left(-\frac{١}{٢}\left(\frac{٢}{٢^{٢} + ٥}\right)\right) - \left(-\frac{١}{٢}\left(\frac{٢}{٠^{٢} + ٥}\right)\right)$

$= -\frac{١}{٩} + \frac{١}{٥}$

$= \frac{٤}{٤٥}$

٥) أ $\text{ص} = (\text{س}^{٣} - ٢)^{٥}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥(\text{س}^{٣} - ٢)^{٤} \times ٣\text{س}^{٢}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١٥\text{س}^{٢}(\text{س}^{٣} - ٢)^{٤}$

ب $\int_{٠}^{١} \text{س}^{٢}(\text{س}^{٣} - ٢)^{٤}\, \text{ءس}$

$= \frac{١}{١٥} \int_{٠}^{١} ١٥\text{س}^{٢}(\text{س}^{٣} - ٢)^{٤}\, \text{ءس}$

$= \frac{١}{١٥} \left[(\text{س}^{٣} - ٢)^{٥}\right]_{٠}^{١}$

$= \frac{١}{١٥}(١^{٣} - ٢)^{٥} - \frac{١}{١٥}(٠^{٣} - ٢)^{٥}$

$= -\frac{١}{١٥} + \frac{٣٢}{١٥}$

$= ٢\frac{١}{١٥}$

٦) أ المعطى $\text{ص} = \frac{(\sqrt{\text{س}} + ١)^{٥}}{١٠}$

اكتب الدالة في صورة أسيّة:

$\text{ص} = \frac{١}{١٠} \times (\text{س}^{\frac{١}{٢}} + ١)^{٥}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{١٠} \times ٥(\text{س}^{\frac{١}{٢}} + ١)^{٤} \times \frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٤}\text{س}^{-\frac{١}{٢}}(\text{س}^{\frac{١}{٢}} + ١)^{٤} = \frac{(\sqrt{\text{س}} + ١)^{٤}}{٤\sqrt{\text{س}}}$

ب $\int_{١}^{٤} \frac{(\sqrt{\text{س}} + ١)^{٤}}{\sqrt{\text{س}}}\, \text{ءس} = ٤\int_{١}^{٤} \frac{(\sqrt{\text{س}} + ١)^{٤}}{٤\sqrt{\text{س}}}\, \text{ءس}$

$= ٤ \times \left[\frac{١}{١٠}(\text{س}^{\frac{١}{٢}} + ١)^{٥}\right]_{١}^{٤}$

$= \left(\frac{٤}{١٠}(٤^{\frac{١}{٢}} + ١)^{٥}\right) - \left(\frac{٤}{١٠}(١^{\frac{١}{٢}} + ١)^{٥}\right)$

$= \frac{٤٨٦}{٥} - \frac{٦٤}{٥}$

$= ٨٤\frac{٢}{٥}$

تمارين ٦-٦

١) أ مساحة المنطقة المظللة = $\int_{أ}^{ب}$ ص ءس

$= \int_{٠}^{٤} (س^٣ - ٨س^٢ + ١٦س)$ ءس

$= \left[\frac{١}{٤}س^٤ - \frac{٨}{٣}س^٣ + ٨س^٢\right]_{٠}^{٤} = \left(\frac{١}{٤}(٤)^٤ - \frac{٨}{٣}(٤)^٣ + ٨(٤)^٢\right) - \left(\frac{١}{٤}(٠)^٤ - \frac{٨}{٣}(٠)^٣ + ٨(٠)^٢\right)$

$= \left(٦٤ - \frac{٥١٢}{٣} + ١٢٨\right) - (٠)$

$= ٢١\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

ج مساحة المنطقة المظللة = $\int_{أ}^{ب}$ ص ءس

$= \int_{٠}^{٥}$ س(س − ٥) ءس

$= \int_{٠}^{٥} (س^٢ - ٥س)$ ءس

$= \left[\frac{١}{٣}س^٣ - \frac{٥}{٢}س^٢\right]_{٠}^{٥}$

$= \left(\frac{١}{٣}(٥)^٣ - \frac{٥}{٢}(٥)^٢\right) - \left(\frac{١}{٣}(٠)^٣ - \frac{٥}{٢}(٠)^٢\right)$

$= -\frac{١٢٥}{٦}$

حصلنا على قيمة سالبة؛ لأن المساحة المطلوبة تقع تحت محور السينات، لذا اكتب إجابتك كقيمة موجبة.

المساحة = $٢٠\frac{٥}{٦}$ وحدة مربعة.

في حل الجزئية (ج)، يمكنك استخدام المُطلق لحساب مساحة المنطقة المظللة؛ لأنها تقع تحت محور السينات.

٢) المساحة = $\int_{أ}^{ب}$ ص ءس

مساحة المنطقة ر$_١$ = $\int_{٠}^{٢}$ س(س − ٢)(س − ٤) ءس

$= \int_{٠}^{٢} (س^٣ - ٦س^٢ + ٨س)$ ءس

$= \left[\frac{١}{٤}س^٤ - ٢س^٣ + ٤س^٢\right]_{٠}^{٢}$

$= \left(\frac{١}{٤}(٢)^٤ - ٢(٢)^٣ + ٤(٢)^٢\right) - \left(\frac{١}{٤}(٠)^٤ - ٢(٠)^٣ + ٤(٠)^٢\right)$

$= ٤ - ٠$

= ٤ وحدات مربعة.

مساحة المنطقة $\text{ر}_{٢}$ = $\int_{٢}^{٤} \text{س}(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٤)\, \text{ءس}$

= $\int_{٢}^{٤} (\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢} + ٨\text{س})\, \text{ءس}$

= $\left[\frac{١}{٤}\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢}\right]_{٢}^{٤}$

= $\left(\frac{١}{٤}(٤)^{٤} - ٢(٤)^{٣} + ٤(٤)^{٢}\right) - \left(\frac{١}{٤}(٢)^{٤} - ٢(٢)^{٣} + ٤(٢)^{٢}\right)$

= ٠ − ٤

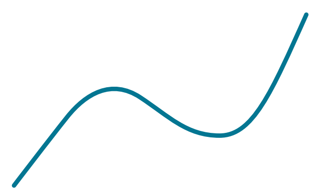
= −٤ الكمية سالبة لأن المنطقة تحت محور السينات.

لذا فالمساحة ٤ وحدات مربعة. مساحة المنطقتَين المظللتَين هي نفسها.

٣) ج المساحة = $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ص}\, \text{ءس}$

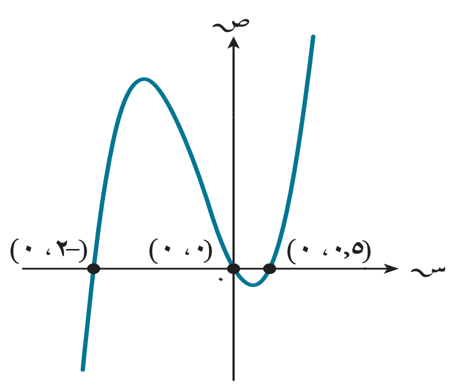
ص = س (٢س − ١)(س + ٢)

عند فك الأقواس تجد أن معامل $\text{س}^{٣}$ موجب، لذا فإن شكل المنحنى هو:



نجد نقاط التقاطع مع محور السينات بحلّ المعادلة س (٢س − ١)(س + ٢) = ٠،

فتكون س = ٠، س = $\frac{١}{٢}$ ، س = −٢



المساحة $\text{م}_{١}$ = $\int_{-٢}^{٠} \text{س}(٢\text{س} - ١)(\text{س} + ٢)\, \text{ءس}$

= $\int_{-٢}^{٠} (٢\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س})\, \text{ءس}$

$= \left[\frac{1}{2}س^4 + س^3 - س^2\right]_{-2}^{0}$

$= \left(\frac{1}{2}(0)^4 + (0)^3 + (0)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(-2)^4 + (-2)^3 - (-2)^2\right)$

$= 0 - (-4)$

$= 4$

∴ المساحة $م_1$ = ٤ وحدات مربعة.

المساحة $م_2 = \left|\int_{0}^{0.5} س(2س - 1)(س + 2)\, ءس\right|$

$= \left|\int_{0}^{0.5} (2س^3 + 2س^2 - 2س)\, ءس\right|$

$= \left|\left[\frac{1}{2}س^4 + س^3 - س^2\right]_{0}^{0.5}\right|$

$= \left|\left(\frac{1}{2}(0.5)^4 + (0.5)^3 + (0.5)^2\right)\right|$

$= \left|-\left(\frac{1}{2}(0)^4 + (0)^3 - (0)^2\right)\right|$

$= \left|-\frac{3}{32} - 0\right|$

$= \left|-\frac{3}{32}\right|$

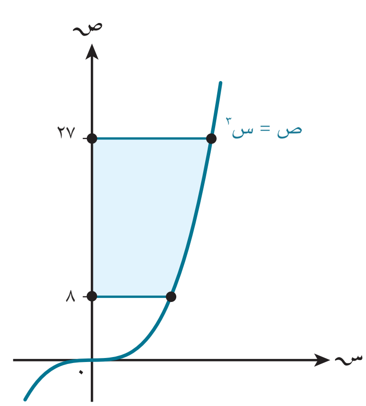
∴ المساحة $م_2 = \frac{3}{32}$ وحدة مربعة.

∴ المساحة الكليّة $(م_1 + م_2) = 4\frac{3}{32}$ وحدة مربعة.

٤) أ المساحة $= \int_{أ}^{ب} س\, ءص$

$ص = س^3$

$س = ص^{\frac{1}{3}}$



∴ المساحة $= \int_{8}^{27} ص^{\frac{1}{3}}\, ءص$

$= \left[\frac{3}{4}ص^{\frac{4}{3}}\right]_{8}^{27}$

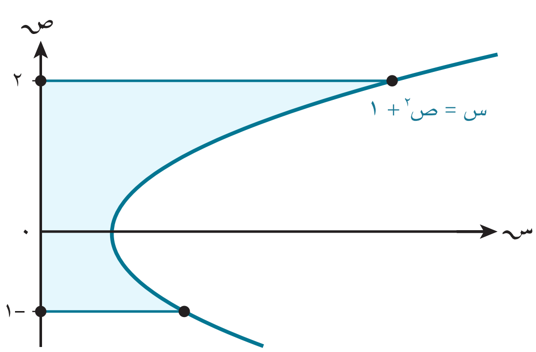
$= \left(\frac{3}{4} \times 27^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}(8)^{\frac{4}{3}}\right)$

$= \frac{243}{4} - 12$

$= 48\frac{3}{4}$ وحدة مربعة.

ب $س = ص^2 + 1$

المساحة $= \int_{أ}^{ب} س\, ءص$



$= \int_{-1}^{2} (ص^2 + 1)\, ءص$

$= \left[\frac{1}{3}ص^3 + ص\right]_{-1}^{2}$

$= \left(\frac{1}{3}(2)^3 + 2\right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)\right)$

$= \frac{14}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right)$

= ٦ وحدات مربعة.

٥) $ص = \sqrt{2س + 1}$

اكتب الدالة في الصورة الأسيّة:

$ص = (2س + 1)^{\frac{1}{2}}$

أوجد س بدلالة ص:

$ص^2 = 2س + 1$

$2س = ص^2 - 1$

$س = \frac{١}{٢}ص^{٢} - \frac{١}{٢}$

$\therefore$ المساحة $= \int_{أ}^{ب} س\, ءص$

المساحة $= \int_{١}^{٣} \left(\frac{١}{٢}ص^{٢} - \frac{١}{٢}\right) ءص$

$= \left[\frac{١}{٦}ص^{٣} - \frac{١}{٢}ص\right]_{١}^{٣}$

$= \left(\frac{١}{٦}(٣)^{٣} - \frac{١}{٢}(٣)\right) - \left(\frac{١}{٦}(١)^{٣} - \frac{١}{٢}(١)\right)$

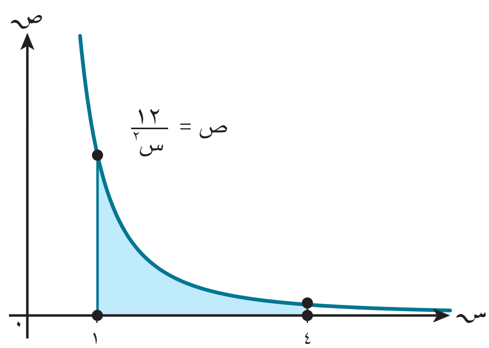
$= ٣ - \left(-\frac{١}{٣}\right)$

$= ٣\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

٦) أ $ص = \frac{١٢}{س^{٢}}$

اكتب الدالة في الصورة الأسيّة:

$ص = ١٢س^{-٢}$



$\therefore$ المساحة $= \int_{أ}^{ب} ص\, ءس$

$= \int_{١}^{٤} ١٢س^{-٢} ءس$

$= \left[\frac{١٢}{-١}س^{-١}\right]_{١}^{٤}$

$= \left[-١٢\, س^{-١}\right]_{١}^{٤}$

$= \left(-١٢(٤)^{-١}\right) - \left(-١٢(١)^{-١}\right)$

$= -٣ - (-١٢)$

$= ٩$ وحدات مربعة.

ب $\int_{١}^{ل} ١٢س^{-٢}\, ءس = \int_{ل}^{٤} ١٢س^{-٢}\, ءس$

$= \left[-١٢س^{-١}\right]^{ل} = \left[١٢س^{-١}\right]_{ل}^{٤}$

$= \left(-١٢(ل)^{-١}\right) - \left(-١٢(١)^{-١}\right)$

$= \left(-١٢(٤)^{-١}\right) - \left(-١٢(ل)^{-١}\right)$

$= -\frac{١٢}{ل} - (-١٢) = -\frac{١٢}{٤} + \frac{١٢}{ل}$

$-\frac{١٢}{ل} + ١٢ = -٣ + \frac{١٢}{ل}$

$\frac{١٢}{ل} + \frac{١٢}{ل} = ١٢ + ٣$

$\frac{٢٤}{ل} = ١٥$

$ل = ١,٦$

٧) أ لتكن $ص = \sqrt{س^{٢} + ٥}$

اكتب الدالة في الصورة الأسيّة:

$ص = (س^{٢} + ٥)^{\frac{١}{٢}}$

استخدم قاعدة السلسلة لتحصل على:

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}(س^{٢} + ٥)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢س$

$\frac{ءص}{ءس} = س(س^{٢} + ٥)^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{(س^{٢} + ٥)^{\frac{١}{٢}}}$

$\therefore \frac{ء}{ءس}\left(\sqrt{س^{٢} + ٥}\right) = \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ٥}}$

ب المساحة $= \int_{أ}^{ب} ص\, ءس$

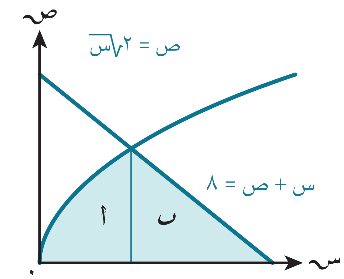
$\therefore$ المساحة $=$

$\int_{٠}^{٢} \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ٥}}\, ءس = \left[\sqrt{س^{٢} + ٥}\right]_{٠}^{٢}$

$= \left(\sqrt{٢^{٢} + ٥}\right) - \left(\sqrt{٠^{٢} + ٥}\right)$

$= ٣ - \sqrt{٥}$ وحدة مربعة.

٨)



المستقيم س + ص = ٨ (أو ص = ٨ − س) يقطع محور السينات عند س = ٨

أوجد نقاط تقاطع المستقيم مع المنحنى.

$٢\sqrt{س} = ٨ - س$

$س + ٢\sqrt{س} - ٨ = ٠$

لتكن أ = $\sqrt{س}$ فيكون:

$أ^{٢} + ٢أ - ٨ = ٠$

$(أ + ٤)(أ - ٢) = ٠$

أ = −٤ و أ = ٢

إذا كان $\sqrt{س}$ = −٤ فلا يوجد حل.

إذا كان $\sqrt{س}$ = ٢ فيكون س = ٤

إذا كان س = ٤، فأوجد الإحداثي الصادي بالتعويض في المعادلة س + ص = ٨

يكون ص = ٤

يتقاطع المستقيم والمنحنى في النقطة (٤، ٤).

المساحة المطلوبة

= مساحة المنطقة أ + مساحة المنطقة ب

استخدم قاعدة مساحة المثلث

= $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

مساحة المنطقة ب = $\frac{١}{٢} \times ٤ \times ٤ = ٨$

المساحة = $\int_{أ}^{ب} ص\,ءس$

مساحة المنطقة أ = $\int_{٠}^{٤} ٢س^{\frac{١}{٢}}\,ءس$

مساحة المنطقة أ = $\left[\frac{٤}{٣}س^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٤}$

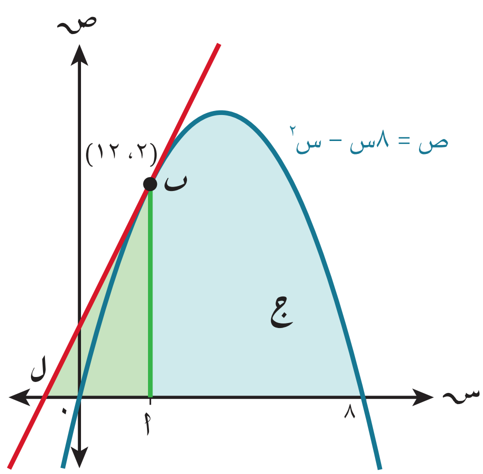
مساحة المنطقة أ = $\left(\frac{٤}{٣}(٤)^{\frac{٣}{٢}}\right) - \left(\frac{٤}{٣}(٠)^{\frac{٣}{٢}}\right)$

مساحة المنطقة أ = $\frac{٣٢}{٣}$

مساحة المنطقة أ + ب = ٨ + $\frac{٣٢}{٣}$

مساحة المنطقة المظللة = ١٨ $\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

٩) أ



ص = ٨س − $س^{٢}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٨ − ٢س

عند س = ٢ يكون ميل المماس: ٨ − ٢(٢) = ٤

استخدم ص − $ص_{١}$ = م(س − $س_{١}$)، م = ٤،

س = ٢، ص = ١٢:

ص − ١٢ = ٤(س − ٢)

ص − ١٢ = ٤س − ٨

ص = ٤س + ٤

معادلة المماس هي ص = ٤س + ٤

لتجد أين يقطع المماس محور السينات، عوّض

ص = ٠

ص = ٤س + ٤

٠ = ٤س + ٤

س = −١

ب المنطقة المظللة =

مساحة Δ ل أ ب + مساحة المنطقة ج

استخدم القاعدة الآتية:

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع:

مساحة Δ ل أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ١٢ أو ١٨

مساحة المنطقة ج = $\int_{أ}^{ب}$ ص ءس

مساحة المنطقة ج = $\int_{٢}^{٨}$ ٨س − س٢ ءس

$= \left[٤س^{٢} - \frac{١}{٣}س^{٣}\right]_{٢}^{٨}$

$= \left(٤(٨)^{٢} - \frac{١}{٣}(٨)^{٣}\right) - \left(٤(٢)^{٢} - \frac{١}{٣}(٢)^{٣}\right)$

$= \frac{٢٣٦}{٣} \times \frac{٤٠}{٣}$

$= ٧٢$

المساحة الكلية = ١٨ + ٧٢

= ٩٠ وحدة مربعة.

١٠) ص = $\sqrt{٢س + ١}$

٢س + ١ = ٠

س = $-\frac{١}{٢}$

أ = $\left(-\frac{١}{٢}، ٠\right)$

ص = $\sqrt{٢س + ١}$

اكتب الدالة في الصورة الأسيّة:

ص = $(٢س + ١)^{\frac{١}{٢}}$

لتجد معادلة العمودي على المماس عند النقطة ب:

استخدم قاعدة السلسلة:

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}(٢س + ١)^{\frac{١}{٢}} \times ٢$

$\frac{ءص}{ءس} = (٢س + ١)^{\frac{١}{٢}}$

عند س = ٤

$\frac{ءص}{ءس} = (٢ \times ٤ + ١)^{\frac{١}{٢}}$

ميل المماس = $\frac{١}{٣}$ = م

فيكون ميل العمودي على المماس −٣

استخدم ص − ص$_١$ = $-\frac{١}{م}$(س − س$_١$)،

س$_١$ = ٤، ص$_١$ = ٣

ص − ٣ = −٣(س − ٤)

ص − ٣ = −٣س + ١٢

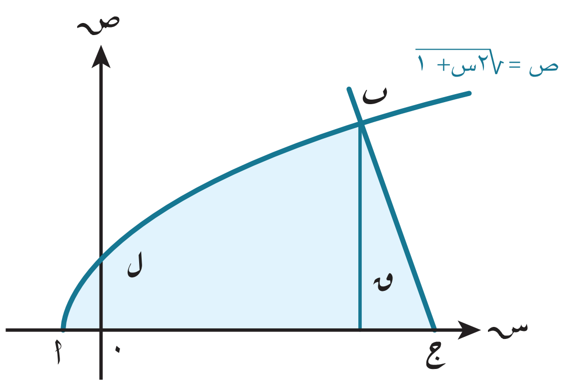
ص + ٣س = ١٥

عوّض ص = ٠، لتجد نقطة التقاطع العمودي على المماس مع محور السينات.

٠ + ٣س = ١٥

س = ٥

∴ إحداثيات النقطة ج هي (٥، ٠)



∴ مساحة المنطقة المظللة

= مساحة المنطقة ل + مساحة المثلث و

استخدم قاعدة مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

مساحة المثلث و = $\frac{١}{٢}$ × ١ × ٣ أو $\frac{٣}{٢}$

مساحة المنطقة ل = $\int_{أ}^{ب}$ ص ءس

$= \int_{-\frac{١}{٢}}^{٤} \left(٢س + ١\right)^{\frac{١}{٢}}$ ءص

$= \left[\frac{١}{\left(\frac{٣}{٢}\right)(٢)}\left(٢س + ١\right)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{-\frac{١}{٢}}^{٤}$

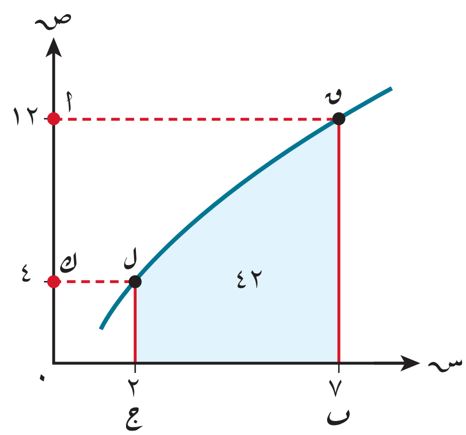
$$= \left[\frac{١}{٣} (٢س + ١)^{\frac{٣}{٢}} \right]_{-\frac{١}{٢}}^{٤}$$

$$= \left(\frac{١}{٣} (٢ \times ٤ + ١)^{\frac{٣}{٢}} \right) - \left(\frac{١}{٣} \left(٢ \times \left(-\frac{١}{٢}\right) + ١\right)^{\frac{٣}{٢}} \right)$$

المساحة الكلية = $\frac{٣}{٢} + ٩$

= $١٠ \frac{١}{٢}$ وحدة مربعة.

١١) انظر الشكل:



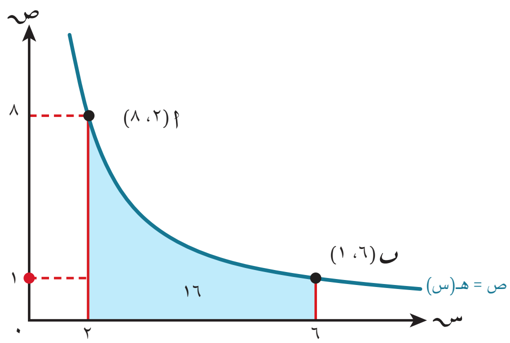
$\int_{٤}^{١٢}$ س ءص

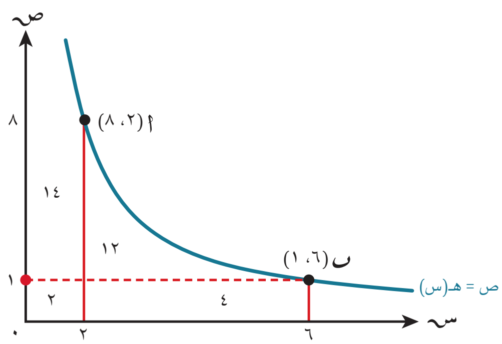
= مساحة المنطقة أ ى ب م − مساحة ك ل ج م − ٤٢

= ١٢ × ٧ − ٤ × ٢ − ٤٢

= ٣٤ وحدة مربعة.

١٢) انظر الشكل:





قيمة $\int_{١}^{٨}$ س ءص تساوي المساحة المحصورة بين المنحنى، والمحور الصادي، والمستقيمين ص = ١، ص = ٨ من المخطط أعلاه، نجد أن هذه المساحة =

١٦ − ١ × ٤ + ٢ × ٧ = ١٦ − ٤ + ١٤ = ٢٦ وحدة مربعة.

تمارين ٦-٧

١) استخدم $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ص ءس لتجد المساحة.

المساحة $= \int_{٠}^{٤} \left(٥ + ٦\text{س} - \text{س}^٢\right) \text{ءس}$

$= \left[٥\text{س} + ٣\text{س}^٢ - \frac{١}{٣}\text{س}^٣\right]_{٠}^{٤}$

$= \left(٥(٤) + ٣(٤)^٢ - \frac{١}{٣}(٤)^٣\right) - \left(٥(٠) + ٣(٠)^٢ - \frac{١}{٣}(٠)^٣\right)$

$= \left(\frac{١٤٠}{٣}\right) - (٠)$

∴ المساحة = $٤٦\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

مساحة المنطقة المظلّلة = $٤٦\frac{٢}{٣} - ٤ \times ٥$

مساحة المنطقة المظلّلة = $٢٦\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

٢) أوجد إحداثيات النقطتين أ، ب بحل المعادلتين ص = $(\text{س} - ٣)^٢$، ص = ٢س − ٣ آنيًا.

$(\text{س} - ٣)^٢ = ٢\text{س} - ٣$

$\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٩ = ٢\text{س} - ٣$

$\text{س}^٢ - ٨\text{س} + ١٢ = ٠$

$(\text{س} - ٦)(\text{س} - ٢) = ٠$

س = ٦ و س = ٢

تقع أ عند س = ٢، ب عند س = ٦

المساحة م $= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)} \,\text{ءس} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ(س)} \,\text{ءس}$

لتكن د(س) = ٢س − ٣، هـ(س) = $(\text{س} - ٣)^٢$:

∴ م $= \int_{٢}^{٦} (٢\text{س} - ٣) \,\text{ءس} - \int_{٢}^{٦} (\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٩) \,\text{ءس}$

$= \int_{٢}^{٦} (-\text{س}^٢ + ٨\text{س} - ١٢) \,\text{ءس}$

$= \left[-\frac{١}{٣}\text{س}^٣ + ٤\text{س}^٢ - ١٢\text{س}\right]_{٢}^{٦}$

$= \left(-\frac{١}{٣}(٦)^٣ + ٤(٦)^٢ - ١٢(٤)\right) - \left(-\frac{١}{٣}(٢)^٣ + ٤(٢)^٢ - ١٢(٢)\right)$

$= ١٠\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

٣) أوجد إحداثيات أ، ب بحلّ المعادلتين:

ص = −س^{٢} + ١١س − ١٨، ٢س + ص = ١٢ آنيًا:

أعد ترتيب المعادلة ٢س + ص = ١٢ لتحصل على ص = ١٢ − ٢س.

∴ −س^{٢} + ١١س − ١٨ = ١٢ − ٢س

س^{٢} − ١٣س + ٣٠ = ٠

(س − ١٠)(س − ٣) = ٠

س = ١٠ و س = ٣

تقع أ عند س = ٣، ب عند س = ١٠

المساحة = $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس − $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) ءس

لتكن د(س) = −س^{٢} + ١١س − ١٨،

هـ(س) = ١٢ − ٢س

المساحة = $\int_{٣}^{١٠}$ د(س) ءس − $\int_{٣}^{١٠}$ هـ(س) ءس

= $\int_{٣}^{١٠}$ (−س^{٢} + ١١س − ١٨) ءس

− $\int_{٣}^{١٠}$ (١٢ − ٢س) ءس

= $\int_{٣}^{١٠}$ (−س^{٢} + ١٣س − ٣٠) ءس

= $\left[-\frac{١}{٣}\right.$س^{٣} + $\frac{١٣}{٢}$س^{٢} − ٣٠س$\left.\right]_{٣}^{١٠}$

= $\left(-\frac{١}{٣}(١٠)^{٣} + \frac{١٣}{٢}(١٠)^{٢} - ٣٠(١٠)\right)$ −

$\left(-\frac{١}{٣}(٣)^{٣} + \frac{١٣}{٢}(٣)^{٢} - ٣٠(٣)\right)$

= $٥٧\frac{١}{٦}$ وحدة مربعة.

٤) ج ص = س^{٢} − ٤س + ٤ .... (١)

٢س + ص = ١٢ .... (٢)

من المعادلة (١)، ص = (س − ٢)^{٢}

لتجد المقطع السيني عوّض ص = ٠

(س − ٢)^{٢} = ٠

س − ٢ = ٠

س = ٢

منحنى الدالة التربيعية الشكل U، ويمس المحور السيني عند س = ٢ من المعادلة (٢)،

٢س + ص = ١٢

لتجد المقطع السيني عوّض ص = ٠ فينتج:

٢س = ١٢

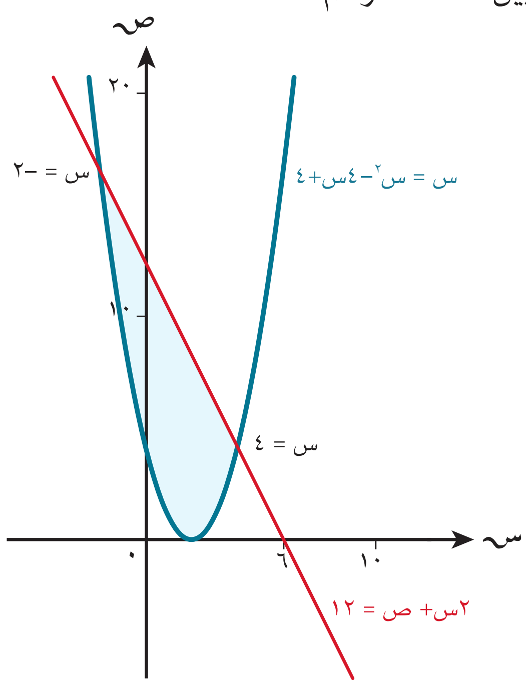
س = −٦

لتجد المقطع الصادي عوّض س = ٠ فينتج:

٢(٠) + ص = ١٢

ص = ١٢

حل المعادلتَين (١) و (٢)، آنيًا لتجد نقطة تقاطع التمثيلَين البيانيَّين. لاحظ الرسم.



من المعادلة (٢)، ٢س + ص = ١٢

نحصل على ص = ١٢ − ٢س

الآن استخدم (١)، فيكون:

س^{٢} − ٤س + ٤ = ١٢ − ٢س

س^{٢} − ٢س − ٨ = ٠

(س + ٢)(س − ٤) = ٠

س = −٢، س = ٤

يتقاطع المنحنى مع المستقيم عند س = −٢،

س = ٤

لتكن د(س) = ١٢ − ٢س،

هـ(س) = س^{٢} − ٤س + ٤

فتكون المساحة = $\int_{-٢}^{٤}$ د(س) ءس − $\int_{-٢}^{٤}$ هـ(س) ءس

= $\int_{-٢}^{٤}$ (١٢ − ٢س) ءس − $\int_{-٢}^{٤}$ (س^{٢} − ٤س + ٤) ءس

= $\int_{-٢}^{٤}$ (٨ + ٢س − س^{٢}) ءس

= $\left[٨س + س^{٢} - \frac{١}{٣}س^{٣} \right]_{-٢}^{٤}$

= $\left(٨(٤) + ٤^{٢} - \frac{١}{٣}(٤)^{٣} \right) - \left(٨(-٢) + (-٢)^{٢} - \frac{١}{٣}(-٢)^{٣} \right)$

= ٣٦ وحدة مربعة.

٥) يتقاطع المنحنيان عندما $س^{٢} = س\,(٢ - س)$

$س^{٢} = ٢س - س^{٢}$

$٢س^{٢} - ٢س = ٠$

$٢س\,(س - ١) = ٠$

$س = ٠ \text{ ، } س = ١$

المساحة $= \left| \int_{٠}^{١} س^{٢} - س\,(٢ - س)\,ءس \right|$

$= \left| \int_{٠}^{١} ٢س^{٢} - ٢س\,ءس \right|$

$= \left| \left[\left(\frac{٢س^{٣}}{٣} - س^{٢} \right) \right]_{٠}^{١} \right|$

$= \left| \left(\frac{٢}{٣} - ١^{٢} \right) - ٠ \right|$

$= \left| \frac{٢}{٣} - ١ \right|$

$= \frac{١}{٣}$ وحدات مربعة.

٦) استخدم $د(س) = \sqrt{س + ٤}$ .... (١) $د(س) = \frac{١}{٢}س + ٢$ ...... (٢)

اكتب المعادلة (١) في الصورة الأسيّة:

$د(س) = (س + ٤)^{\frac{١}{٢}}$

أوجد تكامل $د(س) = (س + ٤)^{\frac{١}{٢}}$ لتحصل على:

$$\frac{١}{\left(\frac{٣}{٢}\right)(١)} (س + ٤)^{\frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{٢}{٣}(س + ٤)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

استخدم المساحة $= \int_{-٤}^{٠} د(س)\,ءس - \int_{-٤}^{٠} هـ(س)\,ءس$

$= \int_{-٤}^{٠} (س + ٤)^{\frac{١}{٢}}\,ءس - \int_{-٤}^{٠} \left(\frac{٢}{٣}س + ٢ \right) ءس$

$= \int_{-٤}^{٠} \left((س + ٤)^{\frac{١}{٢}} - \frac{١}{٢}س - ٢ \right) ءس$

$= \left[\frac{٢}{٣}(س + ٤)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٤}س^{٢} - ٢س \right]_{-٤}^{٠}$

$= \left(\frac{٢}{٣}(٠ + ٤)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٤}(٠)^{٢} - ٢(٠) \right) - \left(\frac{٢}{٣}(-٤ + ٤)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٤}(-٤)^{٢} - ٢(-٤) \right) = ١\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

٧) أ يعطي ص = $\sqrt{٢س + ٣}$

اكتب الدالة في الصورة الأسيّة: ص = $(٢س + ٣)^{\frac{١}{٢}}$

المشتقة باستخدام قاعدة السلسلة: $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}(٢س + ٣)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢ = (٢س + ٣)^{-\frac{١}{٢}}$

ميل المماس عند س = ٣ هو $(٢ \times ٣ + ٣)^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣}$

استخدم ص − ص$_١$ = م(س − س$_١$)، حيث م = $\frac{١}{٣}$

س$_١$ = ٣، ص$_١$ = ٣ فتحصل على:

ص − ٣ = $\frac{١}{٣}$(س − ٣)

ص − ٣ = $\frac{١}{٣}$س − ١

ص = $\frac{١}{٣}$س + ٢

ب لتكن د(س) = $\frac{١}{٣}$س + ٢ هـ(س) = $\sqrt{٢س + ٣}$

المساحة = $\int_{٠}^{٣}$ د(س)ءس − $\int_{٠}^{٣}$ هـ(س)ءس

= $\int_{٠}^{٣} \left(\frac{١}{٣}س + ٢\right)ءس - \int_{٠}^{٣} (٢س + ٣)^{\frac{١}{٢}}ءس$

أوجد تكامل العبارة $(٢س + ٣)^{\frac{١}{٢}}$:

= $\frac{١}{\left(\frac{٣}{٢}\right)(٢)}(٢س + ٣)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

= $\frac{١}{٣}(٢س + ٣)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

= $\int_{٠}^{٣} \left(\frac{١}{٣}س + ٢ - (٢س + ٣)^{\frac{١}{٢}}\right)ءس$

= $\left[\frac{١}{٦}س^٢ + ٢س - \frac{١}{٣}(٢س + ٣)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٣}$

= $\left(\frac{١}{٦}(٣)^٢ + ٢(٣) - \frac{١}{٣}(٢(٣) + ٣)^{\frac{٣}{٢}}\right) - \left(\frac{١}{٦}(٠)^٢ + ٢(٠) - \frac{١}{٣}(٢(٠) + ٣)^{\frac{٣}{٢}}\right)$

= $-\frac{٣}{٢} + \sqrt{٣}$

= $\frac{١}{٢}(٢\sqrt{٣} - ٣)$ وحدة مربعة.

٨) **أ** المعطى: ص = ١٠ + ٩س − س^{٢}

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٩ − ٢س

ميل المنحنى عند س = ٦ هو ٩ − ٢(٦) = −٣

لتجد معادلة المماس، استخدم: ص − ص$_{١}$ = م(س − س$_{١}$)، حيث م = −٣ و س$_{١}$ = ٦، ص$_{١}$ = ٢٨

ص − ٢٨ = −٣(س − ٦)

ص − ٢٨ = −٣س + ١٨

ص = −٣س + ٤٦

معادلة المماس عند النقطة **ل** هي: ص = −٣س + ٤٦

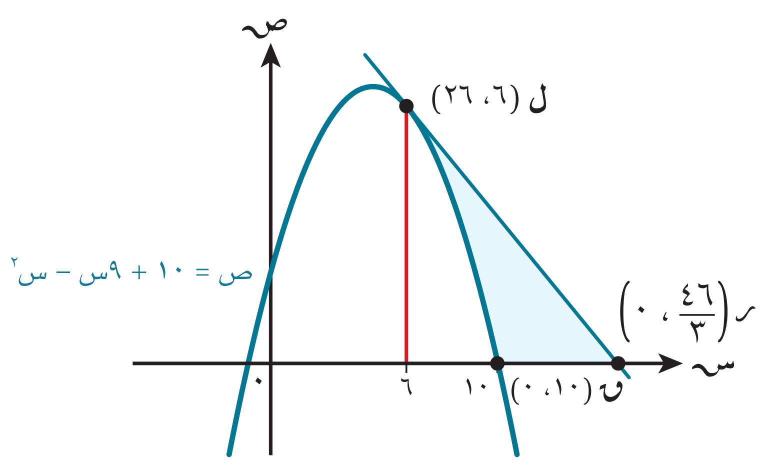
ب لتجد نقطة تقاطع المماس مع محور السينات، عوّض ص = ٠

−٣س + ٤٦ = ٠

س = $\frac{٤٦}{٣}$

فتكون، $\left(\frac{٤٦}{٣} ، ٠\right)$

لتكن د(س) = −٣س + ٤٦، هـ(س) = ١٠ + ٩س − س^{٢}



المساحة = مساحة المثلث الموضح في الرسم − $\int_{٦}^{١٠}$ هـ(س) ءس

المساحة = $\frac{١}{٢}$ × $\left(\frac{٤٦}{٣} - ٦\right)$ × ٢٨ − $\int_{٦}^{١٠}$ هـ(س) ءس

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٢٨}{٣}$ × ٢٨ − $\int_{٦}^{١٠}$ (١٠ + ٩س − س^{٢}) ءس

= $\frac{٣٩٢}{٣}$ − $\int_{٦}^{١٠}$ (١٠ + ٩س − س^{٢}) ءس

= $\frac{٣٩٢}{٣}$ − $\left[١٠\text{س} + \frac{٩}{٢}\text{س}^{٢} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{٦}^{١٠}$

$= \frac{٣٩٢}{٣} - \left(١٠(١٠) + \frac{٩}{٢}(١٠)^٢ - \frac{١}{٣}(١٠)^٣\right) - \left(١٠(٦) + \frac{٩}{٢}(٦)^٢ - \frac{١}{٣}(٦)^٣\right)$

انتبه لوجود الأقواس!

$= \frac{٣٩٢}{٣} - \left(١٠٠ + ٤٥٠ - \frac{١٠٠٠}{٣}\right) - (٦٠ + ١٦٢ - ٧٢)$

$= \frac{٣٩٢}{٣} - \frac{٢٠٠}{٣}$

= ٦٤ وحدة مربعة.

٩) أ المعطى: ص = ٤س − $س^٣$

$\frac{ءص}{ءس} = ٤ - ٣س^٢$

ميل مماس المنحنى عند س = ٢ هو: ٤ − ٣$(٢)^٢$ = −٨

لتجد معادلة المماس استخدم الصيغة: ص − $ص_١$ = م(س − $س_١$)، م = −٨،

$س_١$ = ٢، $ص_١$ = ٠

ص − ٠ = −٨(س − ٢)

ص = −٨س + ١٦

معادلة المماس عند ل هي: ص = ١٦ − ٨س

ب لتجد مساحة المنطقة المظللة استخدم: د(س) = ١٦ − ٨س، ق(س) = ٤س − $س^٣$

∴ المساحة = $\int_{-٤}^{٢}$ د(س) ءس − $\int_{-٤}^{٢}$ د(س) ءس

$= \int_{-٤}^{٢} (١٦ - ٨س)\, ءس - \int_{-٤}^{٢} (٤س - س^٣)\, ءس$

$= \int_{-٤}^{٢} (١٦ - ١٢س + س^٣)\, ءس$

$= \left[١٦س - ٦س^٢ - \frac{١}{٤}س^٤\right]_{-٤}^{٢}$

$= \left(١٦(٢) + ٦(٢)^٢ + \frac{١}{٤}(٢)^٤\right) - \left(١٦(-٤) - ٦(-٤)^٢ + \frac{١}{٤}(-٤)^٤\right)$

= ١٠٨ وحدة مربعة.

١٠) أ معطى: ص = ٥ − $\sqrt{١٠ - س}$

اكتب الدالة في الصورة الأسيّة: ص = ٥ − $(١٠ - س)^{\frac{١}{٢}}$

أوجد المشتقة مستخدمًا قاعدة السلسلة:

$\frac{ءص}{ءس} = -\frac{١}{٢}(١٠ - س)^{-\frac{١}{٢}} \times -١$

$= \frac{١}{٢}(١٠ - س)^{-\frac{١}{٢}}$

ميل مماس المنحنى عند س = ٩ هو: $\frac{١}{٢}(١٠ - ٩)^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢}$

لتجد معادلة المماس استخدم: $ص - ص_١ = م(س - س_١)$ عندما $م = \frac{١}{٢}$، $س_١ = ٩$، $ص_١ = ٤$

$ص - ٤ = \frac{١}{٢}(س - ٩)$

$٢ص - ٨ = س - ٩$

∴ معادلة المماس عند **ل** هي: $٢ص = س - ١$

أو $ص = \frac{١}{٢}س - \frac{١}{٢}$

ب لتجد مساحة المنطقة المظللة، استخدم:

$د(س) = ٥ - (١٠ - س)^{\frac{١}{٢}}$ ، $هـ(س) = \frac{١}{٢}س - \frac{١}{٢}$

المساحة $= \int_{٠}^{٩} د(س)\,ءس - \int_{٠}^{٩} هـ(س)\,ءس$

$= \int_{٠}^{٩} ٥ - (١٠ - س)^{\frac{١}{٢}}\,ءس - \int_{٠}^{٩} \left(\frac{١}{٢}س - \frac{١}{٢}\right)ءس$

$= \int_{٠}^{٩} \left(\frac{١١}{٢} - \frac{١}{٢}س - (١٠ - س)^{\frac{١}{٢}}\right)ءس$

$= \left[\frac{١١}{٢}س - \frac{١}{٤}س^٢ - \frac{١}{\left(\frac{٣}{٢}\right)(-١)}(١٠ - س)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٩}$

$= \left[\frac{١١}{٢}س - \frac{١}{٤}س^٢ + \frac{٢}{٣}(١٠ - س)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٩}$

$= \left(\frac{١١}{٢}(٩) - \frac{١}{٤}(٩)^٢ + \frac{٢}{٣}(١٠ - ٩)^{\frac{٣}{٢}}\right) - \left(\frac{١١}{٢}(٠) - \frac{١}{٤}(٠)^٢ + \frac{٢}{٣}(١٠ - ٠)^{\frac{٣}{٢}}\right)$

$= ٨{,}٨٣٤$

∴ المساحة = ٨,٨٣ وحدة مربعة (إلى أقرب ٣ أرقام معنوية).

تمارين ٦-٨

١) أ $\text{ص} = \text{س}^{٢} + \frac{٢}{\text{س}}$

$\text{الحجم} = \pi \int_{١}^{٢} \text{ص}^{٢}\, \text{ءس} = \pi \int_{١}^{٢} \left(\text{س}^{٢} + \frac{٢}{\text{س}}\right)^{٢} \text{ءس}$

$= \pi \int_{١}^{٢} \left(\text{س}^{٤} + ٤\text{س} + \frac{٤}{\text{س}^{٢}}\right) \text{ءس}$

اكتب العبارة في الصورة الأسيّة: $= \pi \int_{١}^{٢} (\text{س}^{٤} + ٤\text{س} + ٤\text{س}^{-٢})\, \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{١}{٥}\text{س}^{٥} + ٢\text{س}^{٢} - ٤\text{س}^{-١}\right]_{١}^{٢}$

$= \pi \left(\left(\frac{١}{٥}(٢)^{٥} + ٢(٢)^{٢} - ٤(٢)^{-١}\right) - \left(\frac{١}{٥}(١)^{٥} + ٢(١)^{٢} - ٤(١)^{-١}\right)\right)$

$= \frac{٧١\pi}{٥}$ وحدة مكعبة.

د $\text{ص} = \frac{٥}{٣ - \text{س}}$

$\text{الحجم} = \pi \int_{-١}^{١} \text{ص}^{٢}\, \text{دس} = \pi \int_{-١}^{١} \left(\frac{٥}{٣ - \text{س}}\right)^{٢} \text{ءس}$

$= \pi \int_{-١}^{١} ٢٥(٣ - \text{س})^{-٢}\, \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{٢٥}{(-١)(-١)}(٣ - \text{س})^{-١}\right]_{-١}^{١}$

$= \pi \left[٢٥(٣ - \text{س})^{-١}\right]_{-١}^{١}$

$= \pi \left(\left(٢٥(٣ - ١)^{-١}\right) - \left(٢٥(٣ - (-١))^{-١}\right)\right)$

$= \pi \left(\frac{٢٥}{٢} - \frac{٢٥}{٤}\right)$

$= \frac{٢٥\pi}{٤}$ وحدة مكعبة.

٢) أ معطى: ص = س^{٢} + ٢

س^{٢} = ص − ٢

الحجم = $\pi \int_{٢}^{١١}$ س^{٢} ءص = $\pi \int_{٢}^{١١}$ (ص − ٢) ءص

= $\pi \left[\frac{١}{٢}\right.$ص^{٢} − ٢ص$\left.\right]_{٢}^{١١}$

= $\pi \left(\left(\frac{١٢١}{٢} - ٢٢\right) - (٢ - ٤)\right)$

= $\frac{٨١\pi}{٢}$ وحدة مكعبة.

ب المعطى: ص = $\sqrt{٢\text{س} + ١}$

ص^{٢} = ٢س + ١

٢س = ص^{٢} − ١

س = $\frac{١}{٢}$ص^{٢} − $\frac{١}{٢}$

س^{٢} = $\left(\frac{١}{٢}\text{ص}^{٢} - \frac{١}{٢}\right)^{٢}$ أو $\left(\frac{١}{٢}\text{ص}^{٢} - \frac{١}{٢}\right)\left(\frac{١}{٢}\text{ص}^{٢} - \frac{١}{٢}\right)$

س^{٢} = $\frac{١}{٤}$ص^{٤} − $\frac{١}{٢}$ص^{٢} + $\frac{١}{٤}$

∴ الحجم = $\pi \int_{١}^{٣}$ س^{٢} ءص = $\pi \int_{١}^{٣} \left(\frac{١}{٤}\text{ص}^{٤} - \frac{١}{٢}\text{ص}^{٢} + \frac{١}{٤}\right)$ ءص

= $\pi \left[\frac{١}{٢٠}\text{ص}^{٥} - \frac{١}{٦}\text{ص}^{٣} + \frac{١}{٤}\text{ص}\right]_{١}^{٣}$

= $\pi \left(\left(\frac{١}{٢٠}(٣)^{٥} - \frac{١}{٦}(٣)^{٣} + \frac{١}{٤}(٣)\right) - \left(\frac{١}{٢٠}(١)^{٥} - \frac{١}{٦}(١)^{٣} + \frac{١}{٤}(١)\right)\right)$

= $\frac{١٢٤\pi}{١٥}$ وحدة مكعبة.

٣) المعطى: ص = $\frac{\text{أ}}{\text{س}}$

الحجم = $\pi \int_{١}^{٢}$ ص^{٢} ءس = $\pi \int_{١}^{٢} \left(\frac{\text{أ}}{\text{س}}\right)^{٢}$ ءس

= $\pi \int_{١}^{٢} \frac{\text{أ}^{٢}}{\text{س}^{٢}}$ ءس

اكتب العبارة في الصورة الأسيّة

= $\pi \int_{١}^{٢}$ (أ^{٢} س$^{-٢}$) ءس

$= \pi \left[-أ^{٢} س^{-١} \right]_{١}^{٢}$

$= \pi \left(\left(-أ^{٢} (٢)^{-١} \right) - \left(-أ^{٢} (١)^{-١} \right) \right)$

$١٨\pi = \frac{أ^{٢}\pi}{٢}$

$أ = \pm ٦$

يجب أن تكون أ موجبة ليكون التمثيل البياني في الربع الأول.

$\therefore أ = ٦$

٤) $ص = \sqrt{س^{٣} + ٤س^{٢} + ٣س + ٢}$

$ص^{٢} = س^{٣} + ٤س^{٢} + ٣س + ٢$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{-٢}^{١} ص^{٢} \, ءس$

$= \pi \int_{-٢}^{١} (س^{٣} + ٤س^{٢} + ٣س + ٢) \, ءس$

$= \left[\frac{١}{٤}س^{٤} + \frac{٤}{٣}س^{٣} + \frac{٣}{٢}س^{٢} + ٢س \right]_{-٢}^{١}$

$= \pi \left(\left(\frac{١}{٤}(١)^{٤} + \frac{٤}{٣}(١)^{٣} + \frac{٣}{٢}(١) + ٢(١) \right) - \left(\frac{١}{٤}(-٢)^{٤} + \frac{٤}{٣}(-٢)^{٣} + \frac{٣}{٢}(-٢)^{٢} + ٢(-٢) \right) \right)$

$= \frac{٣٩\pi}{٤}$ وحدة مكعبة.

٥) أ المعطى $٣س + ٨ص = ٢٤$

أعد الترتيب على النحو الآتي:

$٨ص = ٢٤ - ٣س$

$ص = ٣ - \frac{٣}{٨}س$

$ص^{٢} = ٩ - \frac{٩}{٤}س + \frac{٩}{٦٤}س^{٢}$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{٨} ص^{٢} \, ءس = \pi \int_{٠}^{٨} \left(٩ - \frac{٩}{٤}س + \frac{٩}{٦٤}س^{٢} \right)^{٢} ءس$

$= \pi \left[٩س - \frac{٩}{٨}س^{٢} + \frac{٩}{١٩٢}س^{٣} \right]_{٠}^{٨}$

$= \pi\left(\left(٩(٨) - \frac{٩}{٨}(٨)^{٢} + \frac{٩}{١٩٢}(٨)^{٣}\right) - \left(٩(٠) - \frac{٩}{٨}(٠)^{٢} + \frac{٩}{١٩٢}(٠)^{٣}\right)\right)$

$= ٢٤\pi$ وحدة مكعبة.

ب حجم المخروط $= \frac{١}{٣}\pi$ ر^{٢}ع

$= \frac{١}{٣}\pi(٣)^{٢}(٨)$

$= ٢٤\pi$ وحدة مكعبة.

٦) ص = (س − ٢)^{٢}

ص^{٢} = (س − ٢)^{٤}

يتقاطع المنحنى مع المحور س حيث ٠ = (س − ٢)^{٢} أي عند (٢، ٠).

يتقاطع المنحنى مع المحور ص حيث ص = (−٢)^{٢}، أي عند (٠، ٤).

وبالتالي فإن حدود التكامل بالنسبة لـ س هي س = ٠ و س = ٢.

∴ الحجم $= \pi\int_{٠}^{٢}$ ص^{٢} ءس $= \pi\int_{٠}^{٢}$ (س − ٢)^{٤} ءس

$= \pi\left[\frac{١}{٥}(\text{س} - ٢)^{٥}\right]_{٠}^{٢}$

$= \pi\left(\left(\frac{١}{٥}(٢ - ٢)^{٥}\right) - \left(\frac{١}{٥}(٠ - ٢)^{٥}\right)\right)$

$= \frac{٣٢\pi}{٥}$ وحدة مكعبة.

٧) **أ** معطى ٥$\sqrt{\text{س}}$ − س = ٠

لتجد نقطة تقاطع المنحنى **ل** مع محور السينات، عوّض، ص = ٠، فيكون ٥$\sqrt{\text{س}}$ − س = ٠

لا تحاول القسمة على $\sqrt{\text{س}}$ لأن هذه العملية تُنقص الحلول واحدًا.

حلِّل إلى العوامل: $\sqrt{\text{س}}$ (٥ − $\sqrt{\text{س}}$) = ٠

إما $\sqrt{\text{س}}$ = ٠، فيكون س = ٠ أو ٥ − $\sqrt{\text{س}}$ = ٠، فيكون س = ٢٥

∴ إحداثيات **ل** (٢٥، ٠)

ب ص = ٥$\sqrt{\text{س}}$ − س

ص^{٢} = (٥$\sqrt{\text{س}}$ − س)(٥$\sqrt{\text{س}}$ − س)

ص^{٢} = (٥س$^{\frac{١}{٢}}$ − س)(٥س$^{\frac{١}{٢}}$ − س)

$\text{ص}^{٢} = ٢٥\text{س} - ١٠\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{س}^{٢}$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{٢٥} \text{ص}^{٢}\, \text{ءس} = \pi \int_{٠}^{٢٥} \left(٢٥\text{س} - ١٠\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{س}^{٢}\right) \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{٢٥}{٢}\text{س}^{٢} + ٤\text{س}^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{٠}^{٢٥}$

$= \pi \left(\left(\frac{٢٥}{٢}(٢٥)^{٢} - ٤(٢٥)^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{٣}(٢٥)^{٣}\right) - \left(\frac{٢٥}{٢}(٠)^{٢} - ٤(٠)^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{٣}(٠)^{٣}\right)\right)$

$= \frac{٣١٢٥\pi}{٦}$ وحدة مكعبة.

٨) أ المعطى $\text{س} = \frac{٩}{\text{ص}^{٢}} - ١$

لتجد المقطع الصادي عوّض $\text{س} = ٠$:

$٠ = \frac{٩}{\text{ص}^{٢}} - ١$

$٩ - \text{ص}^{٢} = ٠$

$\text{ص}^{٢} = ٩$

$\text{ص} = \pm ٣$ (ارفض -٣ لأن **ل** تقع فوق محور السينات)

$\therefore$ إحداثيات **ل**$(٠ ،٣)$

ب $\text{س} = \frac{٩}{\text{ص}^{٢}} - ١$

$\text{س}^{٢} = \left(\frac{٩}{\text{ص}^{٢}} - ١\right)^{٢}$

$\text{س}^{٢} = (٩\text{ص}^{-٢} - ١)(٩\text{ص}^{-٢} - ١)$

$\text{س}^{٢} = ٨١\text{ص}^{-٤} - ١٨\text{ص}^{-٢} + ١$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{١}^{٣} \text{س}^{٢}\, \text{ءص} = \pi \int_{١}^{٣} \left(٨١\text{ص}^{-٤} - ١٨\text{ص}^{-٢} + ١\right) \text{ءص}$

$= \pi \left[-٢٧\text{ص}^{-٣} + ١٨\text{ص}^{-١} + \text{ص}\right]_{١}^{٣}$

$= \pi \left(\left(-٢٧(٣)^{-٣} + ١٨(٣)^{-١} + (٣)\right) - \left(-٢٧(١)^{-٣} + ١٨(١)^{٣} + (١)\right)\right)$

$= ١٦\pi$ وحدة مكعبة.

٩) المعطى $\text{ص} = \frac{٢}{٢\text{س} + ١}$

$\text{ص}^{٢} = \frac{٤}{(٢\text{س} + ١)^{٢}}$

$\text{ص}^{٢} = ٤(٢\text{س} + ١)^{-٢}$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{\text{ل}} \text{ص}^{٢} \, \text{ءس} = \pi \int_{٠}^{\text{ل}} \left(٤(٢\text{س} + ١)^{-٢}\right) \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{٤}{(-١)(٢)} (٢\text{س} + ١)^{-١}\right]_{٠}^{\text{ل}}$

$= \pi \left[-٢(٢\text{س} + ١)^{-١}\right]_{٠}^{\text{ل}}$

$= \pi \left((-٢(٢\text{ل} + ١)^{-١}) - (-٢(٢(٠)) + ١^{-١})\right)$

$= \pi \left(\frac{-٢}{٢\text{ل} + ١} + ٢\right)$

$= \pi \left(٢ - \frac{٢}{٢\text{ل} + ١}\right)$

عندما $\text{ل} \leftarrow \infty$، $\frac{٢}{٢\text{ل} + ١} \leftarrow ٠$

$\therefore$ يقترب الحجم من ٢π وحدة مكعبة.

١٠) أ معطى $\text{ص} = \sqrt{٢٥ - \text{س}^{٢}}$

لتجد المقطع الصادي عوّض $\text{س} = ٠$

$\text{ص} = \sqrt{٢٥ - ٠^{٢}}$

$\text{ص} = \pm ٥$ (ارفض -٥ لأن المنحنى يقطع محور الصادات أعلى $\text{ص} = ٠$).

وحيث $\text{ص} = \sqrt{٢٥ - \text{س}^{٢}}$

$\text{ص}^{٢} = ٢٥ - \text{س}^{٢}$

$\text{س}^{٢} = ٢٥ - \text{ص}^{٢}$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٣}^{٥} \text{س}^{٢} \, \text{ءص}$

$= \pi \int_{٣}^{٥} (٢٥ - \text{ص}^{٢}) \, \text{ءص}$

$= \pi \int_{٣}^{٥} (٢٥ - \text{ص}^{٢}) \, \text{ءص}$

$= \pi \left[٢٥\text{ص} - \frac{١}{٣}\text{ص}^{٣}\right]_{٣}^{٥}$

$$= \pi\left(\left(٢٥(٥) - \frac{١}{٣}(٥)^{٣}\right) - \left(٢٥(٣) - \frac{١}{٣}(٣)^{٣}\right)\right)$$

$= \frac{٥٢}{٣}\pi$ وحدة مكعبة.

ب الحجم $= \pi \int_{٠}^{٤} \text{ص}^{٢}\,\text{ءس}$، ويمثل حجم الأسطوانة.

$$= \pi \int_{٠}^{٤} \left(\sqrt{٢٥ - \text{س}^{٢}}\right)^{٢} \text{ءس} - \pi \text{ر}^{٢}\text{ع}$$

$$= \pi \int_{٠}^{٤} (٢٥ - \text{س}^{٢})\,\text{ءس} - \pi \times ٣^{٢} \times \text{ع}$$

$$= \pi \left[٢٥\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{٠}^{٤} - ٣٦\pi$$

$$= \pi\left(\left(٢٥(٤) - \frac{١}{٣}(٤)^{٣}\right) - \left(٢٥(٠) - \frac{١}{٣}(٠)^{٣}\right)\right) - ٣٦\pi$$

$= \frac{١٢٨\pi}{٣}$ وحدة مكعبة.

١١) **أ** المعطى $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ١٠٠$

$\text{س}^{٢} = ١٠٠ - \text{ص}^{٢}$

$\therefore$ حجم الإناء $= \pi \int_{-٨}^{٠} \text{س}^{٢}\,\text{ءص}$

$$= \pi \int_{-٨}^{٠} (١٠٠ - \text{ص}^{٢})\,\text{ءص}$$

$$= \pi \left[١٠٠\text{ص} - \frac{١}{٣}\text{ص}^{٣}\right]_{-٨}^{٠}$$

$$= \pi\left(\left(١٠٠(٠) - \frac{١}{٣}(٠)^{٣}\right) - \left(١٠٠(-٨) - \frac{١}{٣}(-٨)^{٣}\right)\right)$$

$= \frac{١٨٨٨\pi}{٣}$ سم^{٣}.

ب $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ١٠٠$

بما أن عمق الماء ٣ سم إحداثيات مستوى سطح الماء عند النقطة (٠، −٥)

$\therefore$ حجم الماء بداخل الإناء $= \pi \left[١٠٠\text{ص} - \frac{١}{٣}\text{ص}^{٣}\right]_{-٨}^{-٥}$

$$= \pi\left(\left(١٠٠(-٥) - \frac{١}{٣}(-٥)^{٣}\right) - \left(١٠٠(-٨) - \frac{١}{٣}(-٨)^{٣}\right)\right)$$

$= ١٧١\pi$ سم^{٣}.

١٤٤

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

١) $\text{د}'(\text{س}) = ١٢\text{س}^{٣} + ١٠\text{س}$

$\text{د}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٤} + ٥\text{س}^{٢} + \text{جـ}$ وحيث $\text{د}(-١) = ١$

$$١ = ٣(-١)^{٤} + ٥(-١)^{٢} + \text{جـ}$$

$$١ = ٨ + \text{جـ}$$

$$\text{جـ} = -٧$$

$$\text{د}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٤} + ٥\text{س}^{٢} - ٧$$

٢) $\int \left(٥\text{س} - \frac{٢}{\text{س}}\right)^{٢} \text{ءس}$

$$= \int \left(٢٥\text{س}^{٢} - ٢٠ + \frac{٤}{\text{س}^{٢}}\right) \text{ءس}$$

$$= \int \left(٢٥\text{س}^{٢} - ٢٠ + ٤\text{س}^{-٢}\right) \text{ءس}$$

$$= \frac{٢٥}{٣}\text{س}^{٣} - ٢٠\text{س} - \frac{٤}{\text{س}} + \text{جـ}$$

٣) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٦}{\text{س}^{٢}} - ٥\text{س}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٦\text{س}^{-٢} - ٥\text{س}$

أوجد التكامل لتحصل على:

$$\text{ص} = -٦\text{س}^{-١} - \frac{٥}{٢}\text{س}^{٢} + \text{جـ}$$

$$\text{ص} = -\frac{٦}{\text{س}} - \frac{٥}{٢}\text{س}^{٢} + \text{جـ}$$

عوّض $\text{س} = ٣$، $\text{ص} = ٥,٥$:

$$٥,٥ = -\frac{٦}{٣} - \frac{٥}{٢}(٣)^{٢} + \text{جـ}$$

$$\text{جـ} = ٣٠$$

$$\text{ص} = -\frac{٦}{\text{س}} - \frac{٥}{٢}\text{س}^{٢} + ٣٠$$

٤) $\text{د}'(\text{س}) = \frac{٣}{\sqrt{\text{س} + ٢}} - \frac{٨}{\text{س}^{٣}}$

اكتب المشتقة في الصورة الأسيّة:

$$\text{د}'(\text{س}) = ٣(\text{س} + ٢)^{-\frac{١}{٢}} - ٨\text{س}^{-٣}$$

أوجد التكامل لتحصل على:

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{٣}{\left(\frac{١}{٢}\right)(١)}(\text{س} + ٢)^{\frac{١}{٢}} + ٤\text{س}^{-٢} + \text{جـ}$$

$$\text{د}(\text{س}) = ٦(\text{س} + ٢)^{\frac{١}{٢}} + \frac{٤}{\text{س}^{٢}} + \text{جـ}$$

وحيث إن $\text{د}(٢) = ٣$، عوّض في الدالة لتجد قيمة جـ:

$$٣ = ٦(٢ + ٢)^{\frac{١}{٢}} + \frac{٤}{٢^{٢}} + \text{جـ}$$

$\text{جـ} = -١٠$،

فتكون الدالة $\text{د}(\text{س}) = ٦\sqrt{\text{س} + ٢} + \frac{٤}{\text{س}^{٢}} - ١٠$

٥) $\text{س} = \frac{٦}{\text{ص}^{٢}} + ١$

$$\text{س}^{٢} = \left(\frac{٦}{\text{ص}^{٢}} + ١\right)\left(\frac{٦}{\text{ص}^{٢}} + ١\right)$$

$$\text{س}^{٢} = \frac{٣٦}{\text{ص}^{٤}} + \frac{١٢}{\text{ص}^{٢}} + ١$$

اكتب العبارة في الصورة الأسيّة:

$$\text{س}^{٢} = ٣٦\text{ص}^{-٤} + ١٢\text{ص}^{-٢} + ١$$

$$\therefore \text{الحجم} = \pi \int_{١}^{٣} \text{س}^{٢} \text{ءص}$$

$$= \pi \int_{١}^{٣} \left(٣٦\text{ص}^{-٤} + ١٢\text{ص}^{-٢} + ١\right) \text{ءص}$$

$$= \pi \left[-١٢\text{ص}^{-٣} - ١٢\text{ص}^{-١} + \text{ص}\right]_{١}^{٣}$$

$$= \pi\Big(\left(-١٢(٣)^{-٣} - ١٢(٣)^{-١} + ٣\right) - \left(-١٢(١)^{-٣} - ١٢(١)^{-١} + ١\right)\Big)$$

$= \frac{١٩٤\pi}{٩}$ وحدة مكعبة.

٦) أ د$'$(س) = ٦س − ٦

توجد نقطة حرجة عندما د$'$(س) = ٠

٦س − ٦ = ٠

س = ١

ب أوجد التكامل لتحصل على:

د(س) = ٣س^{٢} − ٦س + جـ

الدالة تربيعية شكلها $\cup$، لذا توجد نقطة حرجة واحدة، وهي نقطة قيمة صغرى.

$\because$ د(س) $\geqslant$ ٥، فإن القيمة الصغرى د(س) = ٥، وعليه يكون ٣س^{٢} − ٦س + جـ = ٥

عند س = ١، فيكون: ٣(١)^{٢} − ٦(١) + جـ = ٥

جـ = ٨،

وتكون الدالة د(س) = ٣س^{٢} − ٦س + ٨

٧) أوجد نقاط التقاطع ص = ٥، ص = ٦س − س^{٢}

حل المعادلة: ٦س − س^{٢} = ٥

س^{٢} − ٦س + ٥ = ٠

(س − ١)(س − ٥) = ٠

س = ١، س = ٥

$\therefore$ مساحة المنطقة المظلّلة = $\int_{أ}^{ب}$ ص ءس − مساحة المستطيل

= $\int_{١}^{٥}$ (٦س − س^{٢}) ءس − ٥ × ٤

= $\left[٣س^{٢} - \frac{١}{٣}س^{٣} \right]_{١}^{٥}$ − ٢٠

= $\left(\left(٣(٥)^{٢} - \frac{١}{٣}(٥)^{٣} \right) - \left(٣(١)^{٢} - \frac{١}{٣}(١)^{٣} \right) \right)$ − ٢٠

= $\frac{٩٢}{٣}$ − ٢٠

= $١٠\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

طريقة بديلة:

مساحة المنطقة المظللة = $\int_{١}^{٥}$ (٦س − س^{٢}) دس − $\int_{١}^{٥}$ ٥ ءس

= $\int_{١}^{٥}$ (٦س − س^{٢} − ٥) ءس

$$= \left[\text{٣س}^{٢} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \text{٥س}\right]_{١}^{٥}$$

$$= \left(٣ \times ٥^{٢} - \frac{٥^{٣}}{٣} - ٥ \times ٥\right) - \left(٣ \times ١^{٢} - \frac{١^{٣}}{٣} - ٥ \times ١\right)$$

$$= ٨\frac{١}{٣} - \left(-٢\frac{١}{٣}\right)$$

$= ١٠\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

٨) الحجم $= \pi \int_{٠}^{٢} \text{ص}^{٢}\,\text{ءس}$

وحيث $\text{ص} = \text{س}^{٢} - \text{٦س} + ١١$ فإن:

$$\text{ص}^{٢} = (\text{س}^{٢} - \text{٦س} + ١١)(\text{س}^{٢} - \text{٦س} + ١١)$$

$$\text{ص}^{٢} = \text{س}^{٤} - \text{٦س}^{٣} + \text{١١س}^{٢} - \text{٦س}^{٣} + \text{٣٦س}^{٢} - \text{٦٦س} + \text{١١س}^{٢} - \text{٦٦س} + ١٢١$$

$$\text{ص}^{٢} = \text{س}^{٤} - \text{١٢س}^{٣} + \text{٥٨س}^{٢} - \text{١٣٢س} + ١٢١$$

الحجم $= \pi \int_{٠}^{٣} (\text{س}^{٤} - \text{١٢س}^{٣} + \text{٥٨س}^{٢} - \text{١٣٢س} + ١٢١)\,\text{ءس}$

$$= \pi\left[\frac{١}{٥}\text{س}^{٥} - \text{٣س}^{٤} + \frac{٥٨}{٣}\text{س}^{٣} - \text{٦٦س}^{٢} + \text{١٢١س}\right]_{٠}^{٣}$$

$$= \pi\left(\left(\frac{١}{٥}(٣)^{٥} - ٣(٣)^{٤} + \frac{٥٨}{٣}(٣)^{٣} - ٦٦(٣)^{٢} + ١٢١(٣)\right) - \left(-\frac{١}{٥}(٠)^{٥} - ٣(٠)^{٤} + \frac{٥٨}{٣}(٠)^{٣} - ٦٦(٠)^{٢} + ١٢١(٠)\right)\right)$$

$= \frac{٤٨٣\pi}{٥}$ وحدة مكعبة.

٩) أ المعطى $\text{ص}^{٢} = \text{٢س} - ١$ ...... (١)

$\text{٣ص} = \text{٢س} - ١$ .... (٢)

عند نقاط التقاطع يكون $\text{ص}^{٢} = \text{٣ص}$ أو $\text{ص}^{٢} - \text{٣ص} = ٠$

حلّل إلى العوامل لتحصل على:

$\text{ص}(\text{ص} - ٣) = ٠$

$\text{ص} = ٠$ أو $\text{ص} = ٣$

عوّض ص = ٠ في المعادلة (٢) لتحصل على:

$٣(٠) = \text{٢س} - ١$

$\text{٢س} = ١$

$\text{س} = \frac{١}{٢}$

عوّض ص = ٣ في المعادلة (٢) لتحصل على:

$٣(٣) = \text{٢س} - ١$

$٩ = \text{٢س} - ١$

$\text{٢س} = ١٠$

س =٥، وعليه يكون أ = ٥

ب مساحة المنطقة المظلّلة = $\int_{أ}^{ب}$ ص ءس

$= \int_{\frac{1}{2}}^{5} (٢س - ١)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2}{3}س - \frac{1}{3}\right)$ ءس

$= \left[\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)(2)}(٢س - ١)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{3}س^2 - \frac{1}{3}س\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{5}$

$= \left[\frac{1}{3}(٢س - ١)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}س^2 + \frac{1}{3}س\right]_{\frac{1}{2}}^{5}$

$= \left(\left(\frac{1}{3}\right)(2(5) - 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(5)^2 + \frac{1}{3}(5)\right) - \left(\frac{1}{3}\left(2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$= \frac{9}{4}$ وحدة مربعة.

١٠) أ ص = $\sqrt{١ + ٢س}$

عوّض ص = ٠ لتجد المقطع السيني:

٠ = $\sqrt{١ + ٢س}$

ربّع طرفَي المعادلة:

١ + ٢س = ٠

س = $-\frac{1}{2}$

إحداثيات أ $\left(-\frac{1}{2}، ٠\right)$

عوّض س = ٠ لتجد المقطع الصادي:

ص = $\sqrt{١ + ٢(٠)}$

ص = ±١،

وحيث إن ب تقع فوق محور السينات، فيكون ص = ١

∴ إحداثيات ب (٠، ١)

الإحداثي الصادي للنقطة ج، ص = ٣،

فيكون $\sqrt{١ + ٢س}$ = ٣

١ + ٢س = ٩

س = ٤

∴ إحداثيات ج (٤، ٣)

ب ص = $\sqrt{١ + ٢س}$

اكتب الدالة في الصورة الأسيّة:

ص = $(١ + ٢س)^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}(١ + ٢س)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢$

$\frac{ءص}{ءس} = (١ + ٢س)^{-\frac{١}{٢}}$

عند س = ٤،

$\frac{ءص}{ءس} = (١ + ٢(٤))^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣}$

ميل المماس عند س = ٤ هو $\frac{١}{٣}$

لتجد معادلة العمودي استخدم: ص − ص$_١$ = $-\frac{١}{م}$(س − س$_١$)، م = $\frac{١}{٣}$، س$_١$ = ٤، ص$_١$ = ٣

ص − ٣ = $-\frac{١}{\frac{١}{٣}}$(س − ٤)

ص − ٣ = −٣(س − ٤)

ص − ٣ = −٣س + ١٢

ص = −٣س + ١٥

ص = −٣س + ١٥

ج الحجم = $\pi \int_{.}^{١}$ س^{٢}ءص

عند ص = $(١ + ٢س)^{\frac{١}{٢}}$

ص^٢ = ١ + ٢س

٢س = ص^٢ − ١

س = $\frac{١}{٢}$ص^٢ − $\frac{١}{٢}$

س^٢ = $\left(\frac{١}{٢}ص^٢ - \frac{١}{٢}\right)\left(\frac{١}{٢}ص^٢ - \frac{١}{٢}\right)$

س^٢ = $\frac{١}{٤}$ص^٤ − $\frac{١}{٢}$ص^٢ + $\frac{١}{٤}$

∴ الحجم = $\pi \int_{.}^{١} \left(\frac{١}{٤}ص^٤ - \frac{١}{٢}ص^٢ + \frac{١}{٤}\right)$ءص

= $\pi \left[\frac{١}{٢٠}ص^٥ - \frac{١}{٦}ص^٣ + \frac{١}{٤}ص\right]_{.}^{١}$

= $\pi\left(\left(\frac{١}{٢٠}(١)^٥ - \frac{١}{٦}(١)^٣ + \frac{١}{٤}(١)\right) - \left(\frac{١}{٢٠}(٠)^٥ - \frac{١}{٦}(٠)^٣ + \frac{١}{٤}(٠)\right)\right)$

= $\frac{٢\pi}{١٥}$ وحدة مكعبة.

11) أ $ص = \frac{٢}{\sqrt{س + ١}}$

ربّع طرفَي المعادلة:

$ص^٢ = \frac{٤}{س + ١}$

$ص^٢ (س + ١) = ٤$

$س + ١ = \frac{٤}{ص^٢}$

$س = \frac{٤}{ص^٢} - ١$

ب لا حاجة إلى استخدام المطلق لأن المنطقة المظلّلة تقع في الربع الأول حيث لا توجد قيم سالبة لـ س، ص.

$\int_{١}^{٢} \left(\frac{٤}{ص^٢} - ١\right) ءص = \int_{١}^{٢} (٤ص^{-٢} - ١) ءص$

$= \left[\frac{٤ص^{-١}}{-١} - ص\right]_{١}^{٢}$

$= \left[- \frac{٤}{ص} - ص\right]_{١}^{٢}$

$= \left(- \frac{٤}{٢} - ٢\right) - \left(- \frac{٤}{١} - ١\right)$

$= -٤ - (-٥)$

$= ١$

يتقاطع المنحنى مع المحور الصادي عندما س = ٠، حيث $ص = \frac{٢}{\sqrt{١ + ٠}} = ٢$

المنطقة المظللة محصورة بين المنحنى والمستقيمين ص = ١ ، ص = ٢

∴ مساحة المنطقة المظلّلة = $\int_{١}^{٢} \left(\frac{٤}{ص^٢} - ١\right) ءص$

= ١ وحدة مربعة.

طريقة بديلة:

لاحظ أن المستقيم ص = ١ يتقاطع مع المنحنى عند $س = \frac{٤}{١^٢} - ١ = ٣$، ∴ يمكن أيضًا إيجاد مساحة المنطقة المظلّلة باستخدام $\int_{٠}^{٣}$ ص ءس − (مساحة المستطيل المحدّد بالمستقيمات ص = ٠، ص = ١، س = ٠، س = ٣):

مساحة المنطقة المظلّلة = $\int_{٠}^{٣}$ ص ءس − مساحة المستطيل

$= \int_{٠}^{٣} ٢(س + ١)^{-\frac{١}{٢}} ءس - (١ \times ٣)$

$= ٢ \int_{٠}^{٣} (س + ١)^{-\frac{١}{٢}} ءس - ٣$

$= ٢ \left[\frac{(س + ١)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}}\right]_{٠}^{٣} - ٣$

$= ٤\left[(٣+١)^{\frac{١}{٢}} - (٠+١)^{\frac{١}{٢}}\right] - ٣$

$= ٤\,(٢ - ١) - ٣$

$= ١$ وحدة مربعة.

ج الحجم $= \pi \int_{١}^{٢} س^{٢}\, ءص$

$= \pi \int_{١}^{٢} \left(\frac{٤}{ص^{٢}} - ١\right)^{٢} ءص$

$= \pi \int_{١}^{٢} \left(\frac{٤}{ص^{٢}} - ١\right)\left(\frac{٤}{ص^{٢}} - ١\right) ءص$

$= \pi \int_{١}^{٢} \left(\frac{١٦}{ص^{٤}} - \frac{٨}{ص^{٢}} + ١\right) ءص$

$= \pi \int_{١}^{٢} (١٦ص^{-٤} - ٨ص^{-٢} + ١)\, ءص$

$= \pi \left[-\frac{١٦}{٣} ص^{-٣} + ٨ص^{-١} + ص\right]_{١}^{٢}$

$= \pi\left(\left(\frac{١٦}{٣}(٢)^{-٣} + ٨(٢)^{-١} + ٢\right) - \left(\frac{١٦}{٣}(١)^{-٣} + ٨(١)^{-١} + ١\right)\right)$

$= \frac{٥\pi}{٣}$ وحدة مكعبة.

١٢ أ توجد النقطة الحرجة عندما $د'(س) = ٠$ وعليه يكون، $٣س^{\frac{١}{٢}} + ٣س^{-\frac{١}{٢}} - ١٠ = ٠$

استبدل $ع = س^{\frac{١}{٢}}$ فتصبح المعادلة:

$٣ع + \frac{٣}{ع} - ١٠ = ٠$

$٣ع^{٢} + ٣ - ١٠ع = ٠$

$٣ع^{٢} - ١٠ع + ٣ = ٠$

$(٣ع - ١)(ع - ٣) = ٠$

$ع = \frac{١}{٣}$ أو $ع = ٣$

وعليه، $س^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣}$ ومنها $س = \frac{١}{٩}$

أو $س^{\frac{١}{٢}} = ٣$، ومنها $س = ٩$

الإحداثيات السينية للنقاط الحرجة هي: $س = \frac{١}{٩}$، $س = ٩$

ب $\because$ $د'(س) = ٣س^{\frac{١}{٢}} + ٣س^{-\frac{١}{٢}} - ١٠$،

$\therefore$ $د''(س) = \frac{٣}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} - \frac{٣}{٢} س^{-\frac{٣}{٢}}$

عوّض س = $\frac{١}{٩}$ في د″(س) = $\frac{٣}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ − $\frac{٣}{٢}$ س$^{-\frac{٣}{٢}}$

لتحصل على:

د″$\left(\frac{١}{٩}\right)$ = $\left(\frac{٣}{٢}\right)\left(\frac{١}{٩}\right)^{-\frac{١}{٢}}$ − $\left(\frac{٣}{٢}\right)\left(\frac{١}{٩}\right)^{-\frac{٣}{٢}}$

= $\frac{٩}{٢}$ − $\frac{٨١}{٢}$

= −٣٦، وهي قيمة سالبة.

لذا توجد قيمة عظمى عند س = $\frac{١}{٩}$

عوّض س = ٩ في د″(س) = $\frac{٣}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ − $\frac{٣}{٢}$ س$^{-\frac{٣}{٢}}$

لتحصل على:

د″(٩) = $\left(\frac{٣}{٢}\right)$(٩)$^{-\frac{١}{٢}}$ − $\left(\frac{٣}{٢}\right)$(٩)$^{-\frac{٣}{٢}}$

= $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{١٨}$

= $\frac{٤}{٩}$، وهي قيمة موجبة.

لذا توجد قيمة صغرى عند س = ٩

ج حيث د′(س) = ٣س$^{\frac{١}{٢}}$ + ٣س$^{-\frac{١}{٢}}$ − ١٠

أوجد التكامل بدلالة س لتحصل على:

د(س) = ٢س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٦س$^{\frac{١}{٢}}$ − ١٠س + جـ

عوّض بدلًا من س = ٤، ص = −٧ في الدالة د(س).

−٧ = ٢(٤)$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٦(٤)$^{\frac{١}{٢}}$ − ١٠(٤) + جـ

−٧ = ١٦ + ١٢ − ٤٠ + جـ

جـ = ٥

د(س) = ٢س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٦س$^{\frac{١}{٢}}$ − ١٠س + ٥

١٣) أ أوجد معادلة العمودي على المماس عند النقطة أ

المعطى: ص = $\frac{٨}{\sqrt{٣\text{س} + ٤}}$

اكتب الدالة في الصورة الأسيّة:

ص = ٨(٣س + ٤)$^{-\frac{١}{٢}}$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − $\frac{١}{٢}$ × ٨(٣س + ٤)$^{-\frac{٣}{٢}}$ × ٣

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −١٢(٣س + ٤)$^{-\frac{٣}{٢}}$

عند س = ٠

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −١٢(٣(٠) + ٤)$^{-\frac{٣}{٢}}$ = − $\frac{٣}{٢}$

ميل المماس عند س = ٠ هو − $\frac{٣}{٢}$

لتجد معادلة العمودي على المماس عند س = ٠

استخدم ص − ص$_١$ = − $\frac{١}{\text{م}}$ (س − س$_١$)،

حيث م = − $\frac{٣}{٢}$، س$_١$ = ٠، ص$_١$ = ٤

ص − ٤ = − $\frac{١}{\left(-\frac{٣}{٢}\right)}$ (س − ٠)

ص = $\frac{٢}{٣}$ س + ٤، وهي معادلة العمودي.

عند س = ٤: ص = $\frac{٢٠}{٣}$

∴ إحداثيات ب $\left(٤، \frac{٢٠}{٣}\right)$

ب مساحة المنطقة ل = $\int_{أ}^{ب}$ ص ءس

$= \int_{٠}^{٤} ٨(٣س + ٤)^{-\frac{١}{٢}}$ ءس $= \left[\frac{٨}{\left(\frac{١}{٢}\right)(٣)}(٣س + ٤)^{\frac{١}{٢}}\right]_{٠}^{٤}$

$= \left[\frac{١٦}{٣}(٣س + ٤)^{\frac{١}{٢}}\right]_{٠}^{٤}$

$= \left(\left(\frac{١٦}{٣}(٣(٤) + ٤)^{\frac{١}{٢}}\right) - \left(\frac{١٦}{٣}(٣(٠) + ٤^{\frac{١}{٢}}\right)\right)$

$= \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

لتجد مساحة المنطقة م أوجد مساحة شبه المنحرف أولًا:

استخدم الصيغة م = $\frac{١}{٢}$ (أ + ب) × ع، حيث أ = ٤، ب = $\frac{٢٠}{٣}$، ع = ٤

مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}\left(٤ + \frac{٢٠}{٣}\right) × ٤$

$= \frac{٦٤}{٣}$ وحدة مربعة.

∴ مساحة المنطقة م = $\frac{٦٤}{٣}$ − مساحة المنطقة ل

$= \frac{٦٤}{٣} - \frac{٣٢}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

فتكون مساحة المنطقة ل = مساحة المنطقة م = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

١٤) أ ص = $(٣ - ٣س)^{٢}$ ومماس المنحنى عند النقطة $\left(\frac{١}{٢}، ٨\right)$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

$\frac{ءص}{ءس} = ٣(٣ - ٢س)^{٢} × -٢$

$\frac{ءص}{ءس} = -٦(٣ - ٢س)^{٢}$

عند س = $\frac{١}{٢}$

$\frac{ءص}{ءس} = -٦\left(٣ - ٢\left(\frac{١}{٢}\right)\right)^{٢} = -٢٤$

لتجد معادلة المماس عند س = $\frac{١}{٢}$:

استخدم ص − $ص_{١}$ = م(س − $س_{١}$)، حيث م = −٢٤، $س_{١}$ = $\frac{١}{٢}$، $ص_{١}$ = ٨

ص − ٨ = −٢٤ $\left(س - \frac{١}{٢}\right)$

ص = −٢٤س + ٢٠، وهي معادلة المماس.

ب لتجد نقطة تقاطع المماس مع محور الصادات، عوّض س = ٠ في:

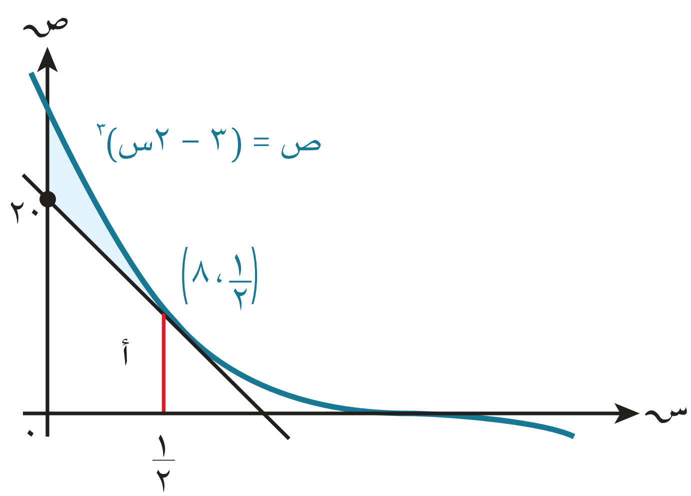
ص = −٢٤س + ٢٠

ص = −٢٤(٠) + ٢٠

ص = ٢٠

استخدم $\int_{أ}^{ب}$ ص ءس لحساب المساحة.

∴ مساحة المنطقة المظلّلة = $\int_{٠}^{\frac{١}{٢}} (٣ - ٢س)^{٣}$ ءس − مساحة شبه المنحرف أ (انظر الشكل).



استخدم قاعدة مساحة شبه المنحرف وهي: $\frac{١}{٢}$ (أ + ب) × ع

حيث أ = ٢٠، ب = ٨، ع = $\frac{١}{٢}$

مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ (٢٠ + ٨) × $\frac{١}{٢}$

= ٧ وحدات مربعة.

∴ المساحة المظلّلة = $\int_{٠}^{\frac{١}{٢}} (٣ - ٢س)^{٣}$ ءس − ٧

$$= \left[\frac{١}{(٤)(-٢)} (٣ - ٢س)^{٤}\right]_{٠}^{\frac{١}{٢}} - ٧$$

$$= \left[-\frac{١}{٨} (٣ - ٢س)^{٤}\right]_{٠}^{\frac{١}{٢}} - ٧$$

$$= \left(\left(-\frac{١}{٨}\right)\left(٣ - ٢\left(\frac{١}{٢}\right)\right)^{٤} - \left(-\frac{١}{٨}\right)\left(٣ - ٢(٠)\right)^{٤}\right) - ٧$$

= $\frac{٩}{٨}$ وحدة مربعة.

الوحدة السابعة
الأعداد المركبة
Complex numbers

مخطط توزيع الدروس

الدرس	الموضوع	عدد الحصص	الأهداف التعليمية	المفردات
٧-١	الأعداد التخيلية	١	٧-١ يتعرّف على مفهوم الأعداد المركّبة، ومعنى المفردات: الجزء الحقيقي والجزء التخيّلي، ومرافق ومقياس وسعة العدد المركّب.	العدد التخيّلي
٧-٢	الأعداد المركّبة	١	٧-١ يتعرّف على مفهوم الأعداد المركّبة، ومعنى المفردات: الجزء الحقيقي والجزء التخيّلي، ومرافق ومقياس وسعة العدد المركّب. ٧-٢ يستخدم حقيقة أن عددَين مركبَين يتساويان فقط إذا تساوى الجزآن الحقيقيان والجزآن التخيّليان.	العدد المركّب مرافق العدد المركّب
٧-٣	العمليات على الأعداد المركّبة	٢	٧-٣ يجري عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة لعددَين مركبَين في صورة أ + ت ب.	
٧-٤	المستوى المركّب	٧	٧-١ يتعرّف على مفهوم الأعداد المركّبة، ومعنى المفردات: الجزء الحقيقي والجزء التخيّلي، ومرافق ومقياس وسعة العدد المركّب. ٧-٤ يمثّل الأعداد المركّبة بيانيًا باستخدام مخطط أرجاند (Argand). ٧-٥ يحوّل الأعداد المركّبة من صيغة إلى أخرى (ديكارتية، قطبية، أسية). ٧-٦ ينفّذ عمليات الضرب والقسمة لعددَين مركّبَين مكتوبَين في الصورة القطبية ر(جتاأ + ت جاأ) = رهـ^{تأ}.	مخطط أرجاند، سعة العدد المركب، الصورة الديكارتية، مقياس العدد المركب، الصورة القطبية، المستوى المركب
٧-٥	حلّ المعادلات	٧	٧-٧ يستخدم النتيجة أن كل جذر غير حقيقي في المعادلة كثيرة الحدود ذات المعاملات الحقيقية، مرافقة بعضها لبعض. ٧-٨ يجد الجذور التربيعية لعدد مركّب، والجذور التكعيبية للواحد.	
	تمارين مراجعة نهاية الوحدة السابعة	٢		

٧-١ الأعداد التخيليّة و ٧-٢ الأعداد المركّبة

ملاحظات للمعلِّمين

في هذه الوحدة يستخدم الطلبة معلوماتهم من عدة مواضيع أخرى، وتتضمن أفكارًا من الجبر، والجذور الصمّاء (الأعداد غير النسبية المكتوبة في صورة جذرية)، والمتجهات. من المهم أن تستخدم الصيغ الصحيحة خلال الوحدة، الأمر الذي يساعد الطلبة على التفكير بوضوح في الذي يقومون به. مع تقدمهم في الوحدة، سيطورون مهاراتهم للربط بين الطرق الجبرية، والتمثيلات الهندسية المناظرة لها.

أفكار للتعليم

في البدء، سيتعامل الطلبة مع الأعداد التخيّلية، أي من دون الجزء الحقيقي للعدد المركب، وسينتقلون بعدها إلى الأعداد المركبة، حيث يمكنك البدء بالمثالَين ١، ٢ فتقدم لهم ت، وقوى ت.

تتكوّن تمارين ٧-١ من مجموعة من التمارين التي تساعد الطلبة على استخدام العدد ت، وقوى العدد ت.

قبل الانتقال إلى الجزء التالي من الموضوع، يمكنك أن تطلب إلى الطلبة استقصاء "استكشف ١" بالعمل في ثنائيات أو في مجموعات صغيرة، ومناقشة ما توصلوا إليه.

بعد دراسة الأعداد التخيّلية، سيبدأ الطلبة بالتعامل مع الأعداد المركبة في الدرس ٧-٢. يمكن أن يستفيد من العلاقة مع المتجهات ثنائية الأبعاد في المستوى الإحداثي التي يعرفونها من قبل.

يقدّم المثال ٤ حل معادلة تربيعيّة جذورها أعداد مركبة، ويوضّح أيضًا مرافق العدد المركب. ويوضّح المثال ٣ فكرة تساوي عددَين مركبَين إذا تساوى جزآهما الحقيقيان مع جزأَيهما التخيليَّين.

في الوقت نفسه، يمكنك استخدام المادة الموجودة على الرابط

An introduction to complex numbers (https://nrich.maths.org/1403/index) (NRICH)

توضح هذه المادة الهدف من وجود ت، وتبيّن كيفية البناء على فرضية وجود ت للتمكن من حل معادلات لا جذور حقيقية لها. يتضمن الموقع تمارين مفيدة تساعد الطلبة على تعميق فهمهم للأعداد المركبة، وكيفية عملها.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ١

صممت هذه المهمة لتساعد الطلبة على استكشاف الطبيعة الدورية لقوى العدد ت.

الإجابة: $ت^{٤} = ١$، $ت^{٨} = ١$، $ت^{٤ن} = ١$، $ت^{٢٠٠} = ١$

يمكن إيجاد الحل بطريقة بديلة كالآتي:

$ت^{٢} = -١$

$ت^{٢٠٠} = (ت^{٢})^{١٠٠} = (-١)^{١٠٠} = ١$

دعم الطلبة

قد يواجه بعض الطلبة صعوبة في إيجاد الجذور التربيعية للأعداد السالبة. التعامل مع العلاقة $ت^٢ = -١$ يساعدهم على تقبل الفكرة، وقد يفيدهم ذكر بعض استخدامات الأعداد المركبة (كما هو مذكور في مقدمة كتاب الطالب)، لتبيّن أن ذلك يفتح الطريق لوجود مفاهيم رياضية جديدة.

تحدّي الطلبة

يحتوي الرابط http://www.cambridge.org/links/mctd6580 (Plus Maths) Maths goes to the movies على مقالة مثيرة للاهتمام ومليئة بالتحديات، يمكنك أن تطلب إلى الطلبة قراءتها، فإنها تصف كيفية تطبيق الأعداد المركبة على رسوم الكمبيوتر والصور التي يتم توليدها بواسطته، وكيفية نقل الصور على الشاشة.

مصادر أخرى مفيدة

هناك المزيد من التطبيقات والروابط حول استخدام الأعداد المركبة في الحياة اليومية، في الرابط:

http://www.cambridge.org/links/mctd6582 (Math Forum) Using imaginary numbers،

والمزيد من المعلومات على الموقع:

http://www.cambridge.org/links/mctd6582 (NRICH) history of negative numbers

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٧-١

تمارين ٧-٢

٧-٣ العمليات على الأعداد المركّبة

ملاحظات للمعلِّمين

في هذا الدرس، سيتعلم الطلبة كيف يجمعون ويطرحون ويضربون ويقسمون الأعداد المركبة.

يتم جمع وطرح الأعداد المركبة عبر تجميع الحدود المتشابهة، بحيث تُعتبر الأجزاء الحقيقية حدودًا متشابهة، والأجزاء التخيلية حدودًا متشابهة. قد يجد الطلبة هنا أوجه شبه مع جمع المتجهات، وطرحها. مثلًا:

$\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٥ \\ ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ \\ ٦ \end{pmatrix}$ أو (٣أ + ٢ب) + (٥أ + ٤ب) = ٨أ + ٦ب تمامًا مثل (٣ + ٢ت) + (٥ + ٤ت) = ٨ + ٦ت.

يتم إيجاد حاصل ضرب العدد المركب (أ + ب ت) في العدد المركب (ج + دت) من خلال ضرب حدَّي العبارة الثانية في حدَّي العبارة الأولى، ثم تجميع الحدود المتشابهة.

يتم إيجاد حاصل قسمة العدد المركب أ + ب ت على العدد المركب ح + د ت من خلال كتابته في صورة نسبة، واستخدام العدد المرافق للمقسوم عليه. مثلًا: نضرب $\frac{\text{أ + ب ت}}{\text{ج + د ت}}$ في $\frac{\text{ج − د ت}}{\text{ج − د ت}}$ للتأكد من أن المقام الناتج هو (ج + د ت) × (ج − د ت) = ج^{٢} + د^{٢}، وهو عدد حقيقي.

يساعد التشابه مع العمليات على الجذور في فهم قسمة الاعداد المركبة؛ لأن الطريقة متشابهة مع إنطاق المقام باستخدام الفرق بين مربعين. شدّد على كتابة كل الخطوات المطلوبة بوضوح خلال الحل.

أفكار للتعليم

زيادة على العمل في الأمثلة الموجودة في كتاب الطالب وشرح النتيجة ١ والنتيجة ٢، من المهم التركيز على الحقيقتين الآتيتين:

ت^{٢} = (−ت)^{٢} = −١

ت × −ت = −ت × ت = −(ت)^{٢} = ١

قبل محاولة الإجابة عن التمارين الموجودة في تمارين ٧−٣، قد ترغب في إعطاء الطلبة تمارين إضافية حول الضرب تتضمن حدودًا سالبة، مثل:

التمرين	الإجابة	التمرين	الإجابة
١) (−٢ − ت)(−٣ + ت)	٧ + ت	٦) (−١ − ت)^{٢}	٢ ت
٢) (−٣ − ت)(−٢ − ت)	٥ + ٥ت	٧) (−٣ − ٢ت)^{٢}	٥ + ١٢ ت
٣) (−٤ + ٣ت)(٢ − ٥ت)	٧ + ٢٦ت	٨) $\left(-\frac{١}{٢} - ٢\text{ت}\right)^{٢}$	$-\frac{١٥}{٤}$ + ٢ت
٤) (−٧ − ٤ت)(−٣ −٦ت)	−٣ + ٥٤ت	٩) $\left(-٣ - \frac{١}{٢}\text{ت}\right)^{٢}$	$\frac{٣٥}{٤}$ + ٣ت
٥) (١ − ت)^{٢}	−٢ت	١٠) $\left(-\frac{٢}{٣} - \frac{٣}{٤}\text{ت}\right)^{٢}$	$-\frac{١٧}{١٤٤}$ + ت

تتضمن تمارين ٧−٣ مجموعة مختارة من التمارين التي يتم حلها لا تستخدم فيها الحاسبات: التمرينان ١، ٢ هما تمرينان مباشران، والتمارين من ٣ إلى ٦ يتطلّب حلّها مهارات في إجراء العمليات على الأعداد المركبة، والتمرين ٧ يستخدم الأعداد المركبة في تطبيقات كهربائية.

دعم الطلبة

هذه سلسلة من فيديوهات أكاديمية خان، Introduction to complex numbers،

https://youtu.be/SP-YJe7Vldo التي تساعد الطلبة على التعلم الذاتي، حيث يمكنهم توقيف العرض، وإعادة عرضه اعتمادًا على سرعة فهم كل منهم.

قد يخطئ الطلبة في إيجاد المرافق عند قسمة الأعداد المركبة، وقد يضربون البسط، ويبسطون الناتج، والطلبة الذين ينسقون حلولهم بوضوح يحرزون تقدمًا في إيجاد الإجابة الصحيحة.

تحدّي الطلبة

قد يستمتع الطلبة الواثقون من قدراتهم في هذا الدرس عند دراسة الأعداد المركبة من خلال الموقع (NRICH) https://nrich.maths.org/2432 What are complex numbers?، والذي يتعلق بعدة موضوعات عن هذه الأعداد، فهو يُغطّي موضوعات مثل الحساب، وحل المعادلات، والمتجهات، والتحويلات الهندسيّة في مخطط أرجاند. تستنتج وصفًا مختصرًا لصيغة أويلر باستخدام المشتقات والأسس، وتشجع الطلبة على التعمّق في مفهوم الأعداد المركبة.

مصادر أُخرى مفيدة

Complex squares (maths.org) (NRICH) http://nrich.maths.org/8109

يمكنك من خلال هذا الرابط أن تطلب من الطلبة التحقق من تربيع الأعداد المركبة، وتأثيرها على مخطط أرجاند، ومن إجراء التخمينات. قد تروق هذه المهمة للطلبة ذوي القدرات العالية (إن لم تكن قد قدمت مخطط أرجاند حتى الآن، فيمكنك استخدام هذا المورد في الدرس التالي):

Complex arithmetic ، (STEM) http://www.cambridge.org/links/mctd6588

يتكوّن هذا الرابط من ملاحظات وأمثلة وتمارين إضافية على الجمع والطرح والضرب والقسمة على الأعداد المركبة (لاحظ أن هذا المورد يستخدم j بدلًا من i (ت) كما هو مكتوب للمهندسين، وهو الرمز المعياري في الهندسة).

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٧-٣

٤-٧ المستوى المركّب

ملاحظات للمعلِّمين

تعامل الطلبة مع التمثيلات الثلاثة للعدد المركب أمر مهم، وهذه التمثيلات هي: الصورة الديكارتية، والصورة الأسيّة، والصورة القطبية. ومن المهم أيضًا أن يكونوا قادرين على ربطها مع مواقع النقاط في مخطط أرجاند.
إن الربط بين الخطوات الجبريّة والتحويلات الهندسية مهم جدًا، خصوصًا عند حل المسائل لاحقًا.

أفكار للتعليم

قد يجد الطلبة أن بعض الأفكار الجديدة تبدو واضحة لهم. يمكن ربط الصورة الديكارتية س + ت ص مع إحداثيات النقطة (س، ص)، ومع متجه الموضع $\begin{pmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{pmatrix}$ على مخطط أرجاند. فالمقياس والسعة للعدد المركب يشيران إلى طول المتجه، واتجاهه.

يبيّن المثال ٦ كيفية إيجاد المقياس والسعة للعدد المركب. تساعد المخططات على حساب قياس الزاوية الصحيحة، ويؤدي ذلك إلى تحويل العدد المركب من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية كما في المثال ٧، ويبيّن المثال ٨ كيفية التحويل بين الصور الثلاث للعدد المركب.

يبحث المثال ٩ في المقياس والسعة لحاصل ضرب وناتج قسمة الأعداد المركبة، وبيان التأثير على مخطط أرجاند. التوضيح الجبري مبيّن في كتاب الطالب.

التعامل مع الرموز يؤدي إلى:

$|\text{ع}_{١}\text{ع}_{٢}| = \text{ر}_{١} \times \text{ر}_{٢} = |\text{ع}_{١}||\text{ع}_{٢}|$،

والسعة للعدد المركّب $(\text{ع}_{١}\text{ع}_{٢}) = \text{أ}_{١} + \text{أ}_{٢}$

= السعة للعدد المركب $\text{ع}_{١}$ + السعة للعدد المركّب $\text{ع}_{٢}$

$\left|\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}}\right| = \frac{\text{ر}_{١}}{\text{ر}_{٢}} = \frac{|\text{ع}_{١}|}{|\text{ع}_{٢}|}$ ، والسعة للعدد المركب $\left(\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}}\right) = \text{أ}_{١} - \text{أ}_{٢}$ = السعة للعدد المركّب $\text{ع}_{١}$ − السعة للعدد المركّب $\text{ع}_{٢}$

طُبّقت هذه العلاقات في المثال ١٠

تدمج التمارين الواردة في تمارين ٧-٤ الطرائق الجبرية، وفهم الصور المختلفة للعدد المركّب مع تمثيلها على مخطط أرجاند.

يمثّل الموقع Complex rotations (NRICH) https://nrich.maths.org/1820 نشاطًا على التأثير الهندسي للضرب في ت.

دعم الطلبة

الموقع A brief introduction to the Argand diagram (NRICH) https://nrich.maths.org/9859 هو مصدر فيديو يلي العمليات على الأعداد المركبة في الدرس ٧-٣، ويمكن أن يستخدمه الطلبة ليكتشفوا الموضوع، كما يمكن توقيفه وإعادة تشغيله ليتعلموا ذاتيًا اعتمادًا على سرعة فهم كل منهم. يوجد أيضًا مصدر جيوجبرا تفاعلي وورقة عمل لمساعدة الطلبة على أن يتعوّدوا على كيفية تمثيل الأعداد المركبة في المستوى المركب. سيكون هذا نشاطًا مفيدًا للطلبة للعمل في ثنائيات، ولتفسير وتبرير ما يتوصلون إليه مع بعضهم.

تحدّي الطلبة

يمكن للطلبة المجيدين أن يشتقوا العلاقات المعطاة عند الضرب والقسمة من الصورة الأسيّة للعدد المركب.
يطلب الموقع Complex squares (NRICH) https://nrich.maths.org/8109 من الطلبة استقصاء تربيع الأعداد المركبة، وتأثيره على مخطط أرجاند، والقيام بالتخمينات. قد تكون هذه المهمة جاذبة للطلبة المجيدين.

مصادر أخرى مفيدة

تحتوي أكاديمية خان فيديوهات تعليم ذاتي حول
Plotting numbers on the complex plane (Khan Academy) https://youtu.be/kGzXIbauGQk، وتتضمن أيضًا فيديو تعليم ذاتي يحتوي على أسئلة تدريب على "الجمع والطرح وتأثيرها على النقاط في المستوى المركب".
(Khan Academy) https://www.khanacademy.org/math/algebra2/x2ec2f6f830c9fb89:complex/x2ec2f6f830c9fb89:complex-add-sub/v/adding-complex-numbers

https://www.youtube.com/watch?v=zA8FBzqHcwg

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٧-٤

٥-٧ حلّ المعادلات

ملاحظات للمعلّمين

يبدأ الدرس بفكرة "إذا لم تكن للمعادلة التربيعية جذور حقيقية، فيكون لها جذران مركبان مترافقان"، وبناءً عليه يمكن للطلبة أن يجدوا جذور كثيرة الحدود التربيعية أو التكعيبية، وذلك باستخدام نظرية العوامل.

أفكار للتعليم

يستخدم المثالان ١١، ١٤ نظرية العوامل مع جذر حقيقي أو عامل معطى، ويبيّنان طريقة ممكنة (مقارنة المعاملات) لإيجاد الجذور المركبة المتبقية لكثيرة الحدود التكعيبية. سيلاحظ الطلبة في المثال ١٥ توضيحًا لهذه الطريقة لإيجاد جذور كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة.

يتعامل المثال ١٧ مع إيجاد الجذور التربيعية لعدد مركب ما، وتمثيلها على مخطط أرجاند. فيما يأتي طريقة بديلة للحل الوارد في كتاب الطالب:

طريقة بديلة لحل مثال ١٧:

بعد الوصول إلى المعادلتين: $س^٢ - ص^٢ = -٢$ .... (١)

$٢ س ص = ٢\sqrt{٣}$ .... (٢)

يكون الحل كالآتي:

بتربيع طرفَي كل من المعادلتين (١)، (٢):

$س^٤ - ٢س^٢ص^٢ + ص^٤ = ٤$ .... (٣)

$٤ س^٢ص^٢ = ١٢$ .... (٤)

بجمع المعادلتين (٣)، (٤):

$س^٤ + ٢س^٢ص^٢ + ص^٤ = ١٦$

$\therefore (س^٢ + ص^٢)^٢ = ١٦$

وحيث إن: $س^٢ + ص^٢ \geqslant ٠$، وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين:

$س^٢ + ص^٢ = ٤$ .... (٥)

بجمع المعادلتين (١)، (٥):

$٢ س^٢ = ٢$

$س^٢ = ١$

$س = \pm ١$

وبالتعويض في (٢):

عند $س = ١$، نجد أن $ص = \frac{\sqrt{٣}}{١} = \sqrt{٣}$

عند $س = -١$، نجد أن $ص = \frac{\sqrt{٣}}{-١} = -\sqrt{٣}$

$\therefore$ الجذور التربيعية للعدد المركب $-٢ + (٢\sqrt{٣})$ ت هي:

$١ + \sqrt{٣}$ ت، $-١ - \sqrt{٣}$ ت

يمكن أن تقدم مفهوم الجذور التكعيبية للواحد مستخدمًا المثال ١٨ في مناقشة جماعية مع الصف، وهو تدريب جيد ليمثّل الطلبة الجذور على مخطط أرجاند، ويلاحظون كيف ترتبط معًا.

في تمارين ٧-٥ تتعلق التمارين من ١ إلى ٩ بإيجاد جذور المعادلات والجذور التكعيبية. التمرين ١٠ يتطرق إلى حل معادلة من الدرجة الرابعة، في حين يتطرق التمرين ١١ إلى جذور معادلة تربيعية.

دعم الطلبة

قد يجد بعض الطلبة هذا الموضوع صعبًا من حيث المفهوم إلى حد ما. الرابط:

(STEM) EdExcel Further pure 1: Complex numbers http://www.cambridge.org/links/mctd6604,

يتضمن أمثلة مفيدة حول حل المعادلات، وإيجاد الجذور التربيعية (ص ١-٢).

مصادر أُخرى مفيدة

يحتوي الرابط الآتي الخطة الدراسية والملاحظات والأمثلة والتمارين على الأعداد المركبة:

(STEM) حول الأعداد المركبة، ويوجد في الرابط: http://www.cambridge.org/links/mctd6609

(STEM) EdExcel Further pure 1: Complex numbers http://www.cambridge.org/links/mctd6610

نظرة عامة عن حل المعادلات كثيرة الحدود (ص ٢-٧)، بما في ذلك أمثلة على حل معادلات تكعيبية وتربيعية ذات جذور مركبة.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٧-٥

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السابعة.

إجابات تمارين كتاب الطالب - الوحدة السابعة: الأعداد المركّبة

إجابات معرفة قبلية

١) أ) ٣أ − ٢بس
ب) ٢أ^{٢} − أبس − ٣ب^{٢}س^{٢}
ج) ٢٣أ − ٦بس

٢) أ) $-٢\sqrt{٢}$ ب) −١
ج) $\frac{٢٣ - ٩\sqrt{٣}}{٢٢}$

٣) أ) $-\frac{\pi}{٤}$، $\frac{٣\pi}{٤}$
ب) ٢,٢٩ء مقرّبة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

٤) أ) ٥
ب) ٠,٩٢٧ء مقرّبة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية أو ٥٣,١° مقرّبة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.
ج) $\overrightarrow{\text{ب أ}} = \begin{pmatrix} -٢ \\ ١١ \end{pmatrix}$

تمارين ٧-١

١) أ) ١٢ت ب) $\frac{٢}{٣}$ت
ج) $(٣\sqrt{١٠})$ت د) ١٣ت

٢) أ) ٨ ب) $(٩ + ٢\sqrt{٢})$ت
ج) $\sqrt{٢٩}$ د) $\frac{٥}{٦}$

تمارين ٧-٢

١) أ) $\pm \frac{٨}{٥}$ت ب) $\pm \frac{\sqrt{٧}}{٢}$ت
ج) $\pm \frac{١}{٢}$ت

٢) الجزء الحقيقي من ع هو ٤، والجزء التخيلي هو −٣

٣) أ = ٥، ب = −٢

٤) أ) س = ٣، ص = −١ ب) س = ١، ص = ٣
ج) س = ١، ص = ٢

٥) أ) −١ ± $(٢\sqrt{٣})$ت ب) −٢ ± ت
ج) $\frac{١}{٢} \pm \frac{٣}{٢}$ت د) ٣ ± $\sqrt{٦}$ت
هـ) $-\frac{٤}{٣} \pm \frac{\sqrt{١٤}}{٣}$ت و) $-\frac{٥}{٤} \pm \frac{\sqrt{٧}}{٤}$ت

تمارين ٧-٣

١) أ) ٥ + ٥ت ب) ٤١
ج) ٤٠ − ٤٢ت د) ٢٨ − ٩٦ت
هـ) ٥ − ٢ت و) −١ + ت
ز) ٥ − ت ح) $\frac{١}{٢} - \frac{٥}{٢}$ت

٢) أ) ٦ − ٥ت ب) ٤ + ت
ج) ١١ + ٧ت د) $-\frac{١}{٥} - \frac{١٣}{٥}$ت

٣) أ) ع^{٢} + ٤٩ = ٠ ب) ع^{٢} − ٢ع + ٢٦ = ٠
ج) ع^{٢} − ٤ع + ١٣ = ٠ د) ع^{٢} + ٥ع + ١٤ = ٠

٤) س = $\frac{١}{٢}$، ص = $\frac{٣}{٢}$

٥) ١ + ٢ت

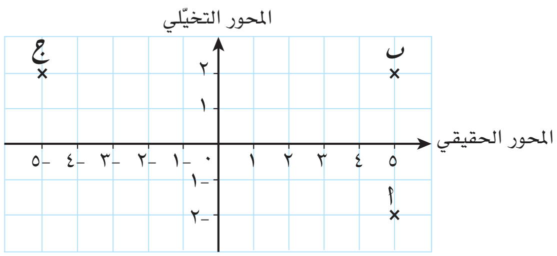
٦) ع^{٢} − ١٠ع + ٢٨ = ٠

٧) ٣,٢ − ٢,٤ت أمبير.

تمارين ٧-٤

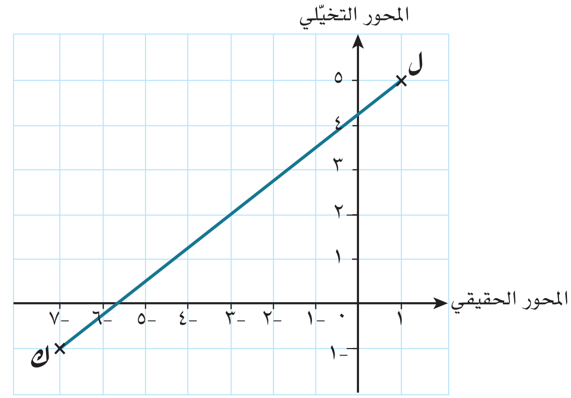
قياسات جميع الزوايا بالراديان مقربة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

١) أ)



ب) (−ل)* = −٥ − ٢ت

٢) أ



ب $−٣ + ٢ت$

٣) أ $(١٣، ٢,٧٥)$ ب $\left(٥، \frac{\pi}{٢}\right)$

ج $(١٧، ١,٠٨)$ د $(٦١، −٠,١٨١)$

هـ $(٤١، −١,٧٩)$ و $\left(٢، −\frac{٢\pi}{٣}\right)$

ز $(٣، ٠,٧٣٠)$ ح $(٢٥، −٢,٨٦)$

ط $\left(\sqrt{٢}ك، −\frac{\pi}{٤}\right)$

٤) أ $\sqrt{١٠}\,(جتا(١,٨٩) + ت\, جا(١,٨٩))$ للنقطة أ.

$\sqrt{١٠}\,(جتا(٠,٣٢٢) + ت\, جا(٠,٣٢٢))$ للنقطة ب.

$\sqrt{١٠}\,(جتا(−١,٢٥) + ت\, جا(−١,٢٥))$ للنقطة ج.

ب برهان (انظر الحل التفصيلي صفحة ١٧٧).

٥) أ $\frac{٣}{٢} + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}ت$ ب $١,٩١ + ٤,٦٢\,ت$

ج $−\frac{١}{٢}$ د $\frac{٣\sqrt{٢}}{٢} − \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}ت$

٦) أ $٥هـ^{\frac{\pi ت}{٦}}$

ب $\sqrt{٢}هـ^{−\frac{\pi ت}{٤}}$

ج $\frac{\sqrt{٢}هـ^{−\frac{٥\pi ت}{١٢}}}{٥}$

٧) أ $= \frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$، ب $= \frac{٥}{٢}$

٨) أ $ر^{٢}$

ب $جتا^{٢}أ − جا^{٢}أ + ت\,(٢جا أ جتا أ)$

تمارين ٧-٥

قياسات جميع الزوايا بالراديان مقربة إلى أقرب ٣ أرقام معنويّة.

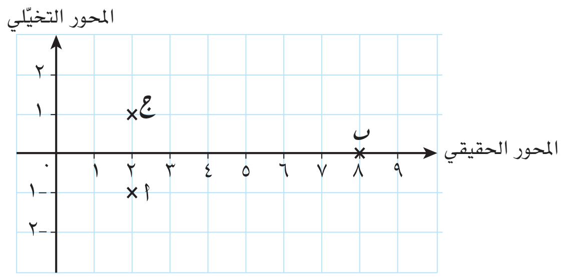
١) أ $ك = ١$

ب $ع_{٢} = ت$، $ع_{٢} = −١$، وهو حقيقي.

٢) أ $ع = ٢ − ت$

ب $ل = ٧٣$، $ك = −٤٠$

ج



٣) $\frac{\sqrt{٦}}{٢}(جتا ١,٧٨ + ت\, جا ١,٧٨)$،

$\frac{\sqrt{٦}}{٢}(جتا(−١,٧٨) + ت\, جا(−١,٧٨))$

٤) $ع = ٣$، $ع = ٥ت$، $ع = −٥ت$

٥) $س = ٨$، $ص = ٣$

٦) $ع = −٠,٥$، $ع = ٣ + ت$، $ع = ٣ − ت$

٧) $ع = ٣ت$، $ع = −٣ت$، $ع = ١ + ٢ت$، $ع = ١ − ٢ت$

٨) أ $−٥ + ت$، $٥ − ت$

ب $−٣ − ت\sqrt{٢}$، $٣ + ت\sqrt{٢}$

ج $\sqrt{٢} − ت\frac{\sqrt{٣}}{٢}$، $−\sqrt{٢} + ت\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

د $٤ − ٣ت$، $−٤ + ٣ت$

هـ $١ + ت\sqrt{٥}$، $−١ − ت\sqrt{٥}$

٩) أ $ع = ٧$، $ع = ٤ + ت\sqrt{٣}$، $ع = ٤ − ت\sqrt{٣}$

ب $ع = −\frac{١١}{٨}$، $ع = \frac{−٢٥ + ت\sqrt{٣}}{١٦}$، $ع = \frac{−٢٥ − ت\sqrt{٣}}{١٦}$

١٠) أ $= ١٦$، ب $= −١$، $ع = \pm ٤ت$، $ع = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{١٥}}{٢}ت$،

$ع = \frac{١}{٢} − \frac{\sqrt{١٥}}{٢}ت$

١١) أ برهان (انظر الحل التفصيلي صفحة ١٨٤).

ب ع = $\frac{١}{٥}$ − $\frac{٢\sqrt{٦}}{٥}$ ت

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السابعة

قياسات جميع الزوايا بالراديان مقربة إلى أقرب ٣ أرقام معنويّة.

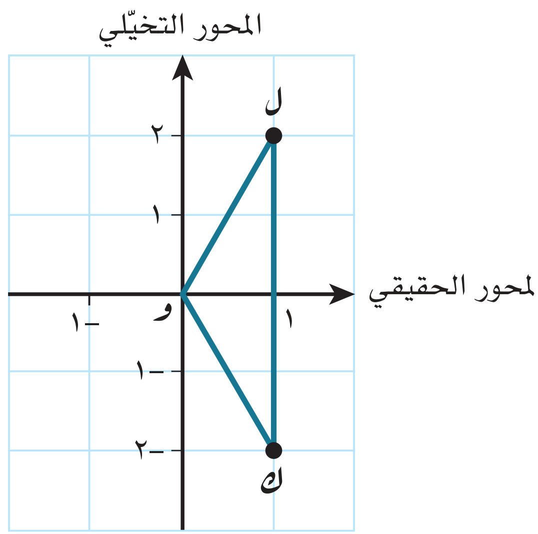
١) −٠,١ − ١,٧ت

٢) ق = ١ − ٥ت، ق = ١ + ٥ت

٣) ع ع* = ك^{٢} + ٣٦، $\frac{ع}{ع^{*}}$ = $\frac{(ك^{٢} - ٣٦) - ١٢ك ت}{ك^{٢} + ٣٦}$

٤) $\frac{ق}{ح}$ = ٢ هـ$^{(-\frac{٧\pi}{١٢})ت}$

٥) أ

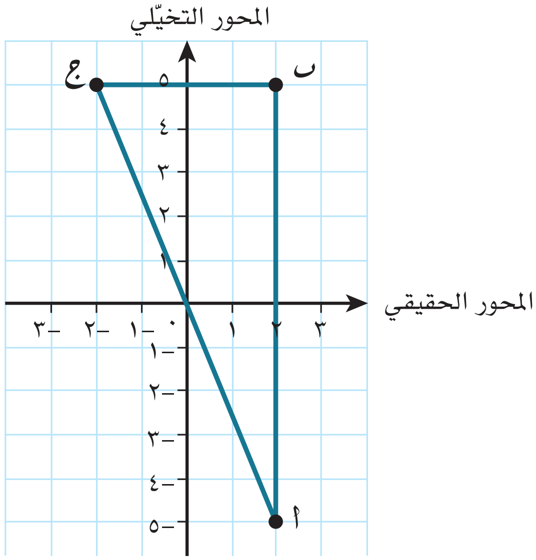


المثلث و ل ك متطابق الضلعَين.

ب $\frac{ق}{ح}$ = $\sqrt{٢}$ (جتا$(\frac{٣}{٤}\pi)$ + ت جا$(\frac{٣}{٤}\pi)$)

٦) أ س = $\frac{١}{٢}$، ص = ٣

ب



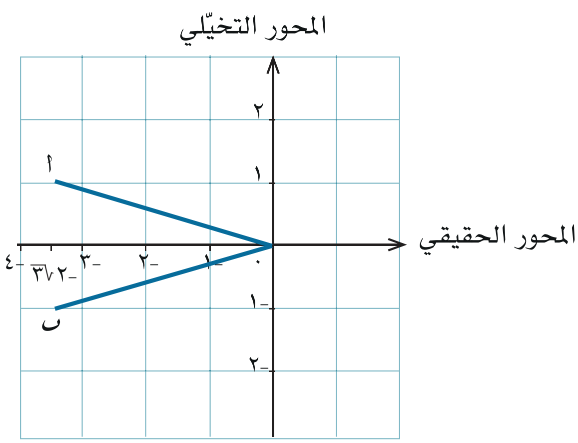
المثلث أ ب ج قائم الزاوية.

ج ١) $\frac{٢١}{٢٩}$ − $\frac{٢٠}{٢٩}$ ت

٢) جتا(−٠,٧٦١) + ت جا(−٠,٧٦١)

٧) أ ع$_{١}$ = −٢$\sqrt{٣}$ + ت، ع$_{٢}$ = −٢$\sqrt{٣}$ − ت

ب



ج |ع$_{١}$| = |ع$_{٢}$| = $\sqrt{١٣}$، السعة للعدد المركب

ع$_{١}$ = ٢,٨٦، السعة للعدد المركب ع$_{٢}$ = −٢,٨٦

٨) أ المقياس = ٨، السعة = −$\frac{\pi}{٦}$

ب ٢$\sqrt{٢}$ هـ$^{(-\frac{\pi}{٤})ت}$

٩) ح = −١ + ت

١٠) س = −٣، ص = $\sqrt{٢}$ أو س = ٣، ص = $-\sqrt{٢}$

١١) أ) برهان

ب) $ع_١ = ٣$، $ع_٢ = -\frac{١}{٢} + \frac{ت}{٢}$، $ع_٣ = -\frac{١}{٢} - \frac{ت}{٢}$

١٢) $ع_٢ = ٣ + ٢ت$

١٣) ع = $-\frac{٤}{٣}$، ع = $\frac{١}{٦} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ت، ع = $\frac{١}{٦} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ت

١٤) أ د(−٣) = ٠

ب ع = ١، ع = −٣، ع = $-\frac{١}{٤} + \frac{\sqrt{١٥}}{٤}$ت،

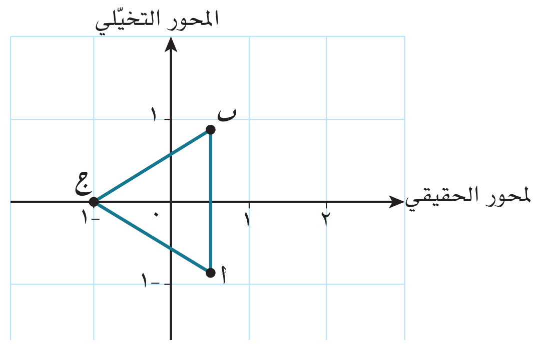
ع = $-\frac{١}{٤} + \frac{\sqrt{١٥}}{٤}$ت

١٥) أ) ل = ٣، ك = ٤

ب) $|ع_١| = ٢$

١٦) أ ع = −١، ع = $\frac{١ + ت\sqrt{٣}}{٢}$، ع = $\frac{١ - ت\sqrt{٣}}{٢}$

ب



المثلث أ ب ج متطابق الأضلاع.

١٧) أ برهان

ب $\left|\frac{ع}{ع^*}\right| = ١$، سعة $\left(\frac{ع}{ع^*}\right) = -٠,٨٤١$

ج $٣ع^٢ - ٤ع + ٣ = ٠$

١٨) أ ك = −١ ب سعة ع = ٠,٨٦٢

١٩) ٧ − ٢ت

٢٠) ف = ١ + ٢ت، ق = −٢ − ٢ت

٢١) أ $\frac{٣}{٢} + \frac{١}{٢}$ت

ب $-\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}$ت

إجابات تمارين كتاب النشاط - الوحدة السابعة: الأعداد المركّبة

تمارين ٧-١

١) أ ١٣ت ب $\frac{٨}{١٣}$ت

ج ٣ت$\sqrt{١٠}$ د ١٢ت

٢) أ −٣٠ ب −٩ + ٣ت

ج −٢٠ د $\frac{٥}{٦}$

تمارين ٧-٢

١) أ ± $\frac{٢ت}{٣}$ ب ± $\frac{٢ت}{\sqrt{٣}}$

ج ± $\frac{٥ت}{٤}$

٢) أ ±٣ت ب −٢ ± ت

ج ٣ ± ٤ت د $\frac{١}{٢}$(−١ ± ٥ت)

٣) أ ١ − ٧ت ب −٢ − ت

ج ٥ د −٣ت

تمارين ٧-٣

١) أ ٤ ب ٦ت

ج ١٣ د ٢٤ت

هـ ٢٤ت و −١٠

ز ١٦ ح −٣٦

٢) أ ٤ − ت ب ٢ + ٣ت

ج ٧ د ٥ + ٢ت

هـ ٥ − ٥ت و ٨ + ٦ت

ز $\frac{١}{٥}$(١ + ٧ت) ح $\frac{١}{١٠}$(١ − ٧ت)

ط ١ − ٣ت ي ٢ + ٤ت

ك $\frac{١}{٢}$(−١ − ٣ت) ل $\frac{١}{٥}$(٣ + ت)

٣) س = ١، ص = ١

٤) أ −٢ −٥ت   ب $\frac{1}{3}$(٧ − ٢ت)

ج $\frac{1}{2}$(−٥ + ت)   د $\frac{1}{25}$(٧ + ٢٤ت)

٥) أ س = ٢، ص = ت   ب س = ١ + ت، ص = ٢ت

٦) ع = ٣ + ٤ت

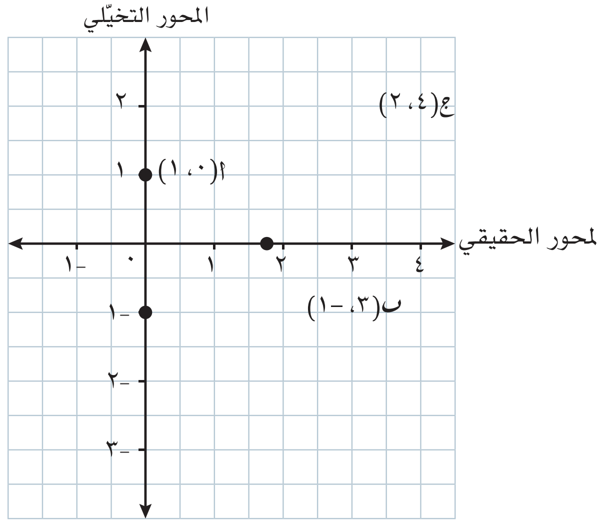
٧) أ س^{2} − ٢س + ٥ = ٠   ب س^{2} − ٦س + ٢٥ = ٠

ج س^{2} + ٢س + ٦ = ٠

٨) س = ٢، ص = ١

تمارين ٧-٤

١)



٢) ٢ر(جتا أ + ت جا أ)، حيث:

أ ر = ٢، أ = $\frac{7}{12}\pi$ ب ر = ٢، أ = $\frac{1}{12}\pi$

ج ر = ٢، أ = $\frac{5}{6}\pi$ د ر = ٢، أ = $\frac{1}{12}\pi$

٣) أ جتا أ − ت جا أ   ب جتا أ − ت جا أ

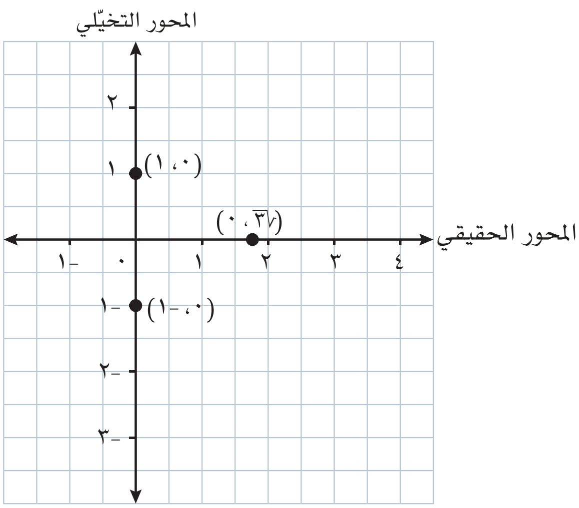
ج ر(جتا أ − ت جا أ)   د $\frac{1}{ر}$(جتا أ − ت جا أ)

٤) أ ٢(جتا $\frac{1}{3}\pi$ + ت جا $\frac{1}{3}\pi$)،

$\sqrt{2}$ (جتا $\left(\frac{-1}{4}\pi\right)$ + ت جا $\left(\frac{-1}{4}\pi\right)$)

ب −$\sqrt{3}$ + ت

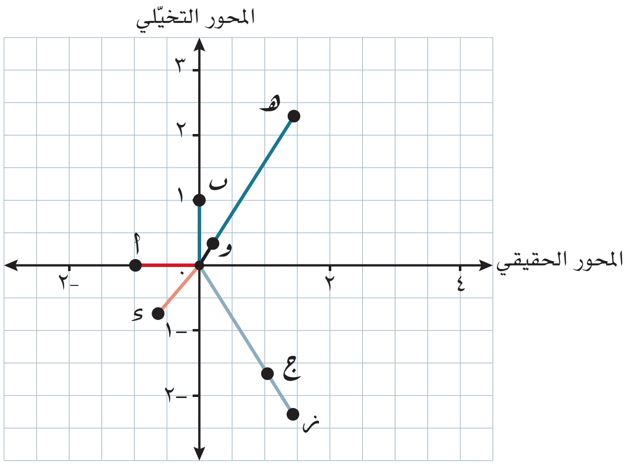
٥) أ



ب ١) −$\frac{1}{6}\pi$ ٢) $\frac{1}{6}\pi$

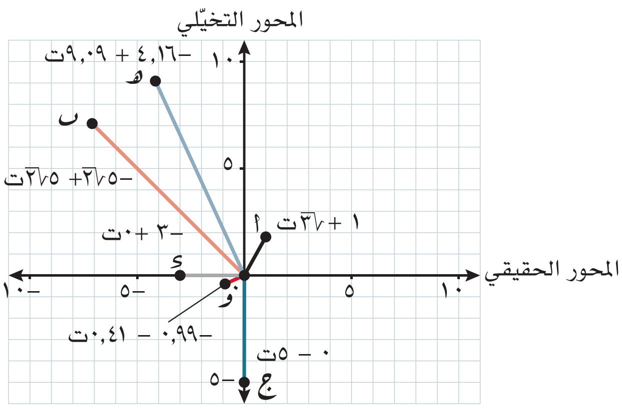
٣) $\frac{1}{3}\pi$ ٤) $\frac{1}{3}\pi$

٦)



٧) هـ$^{\text{جتا أ}}$، جا أ

٨)



أ ١ + $\sqrt{٣}$ ت

ب −٥$\sqrt{٢}$ + ٥$\sqrt{٢}$ ت

ج −٥ت

د −٣

هـ −٤,١٦ + ٩,٠٩ت

و −٠,٩٩ − ٠,١٤ ت

٩) ر(جتاأ + ت جاأ) عندما:

أ ر = ٢,٢٤، أ = ١,١١

ب ر = ٥، أ = −٠,٩٣

ج ر = ٧,٨١، أ = ٢,٢٧

د ر = ١٠,٦٣، أ = −٢,٢٩

هـ ر = ١، أ = ٠

و ر = ٢، أ = $\frac{١}{٢}\pi$

ز ر = ٣، أ = π

ح ر = ٤، أ = −$\frac{١}{٢}\pi$

ط ر = ٢، أ = −$\frac{١}{٤}\pi$

ي ر = ٢، أ = $\frac{٢}{٣}\pi$

١٠) أ $\sqrt{٣}$ + ت

ب ٣ + ٤ت

ج −٣ + ٤ت، −٩ + ٤ت

د ± $\frac{١}{٢}\sqrt{٢}$ + (٢ ± $\frac{١}{٢}\sqrt{٢}$) ت

تمارين ٧-٥

١) $ع_١$ = ٣ − ٢ت، $ع_٢$ = −٣ + ٢ت

٢) أ (ع − ٥ت)(ع + ٥ت)

ب (٣ع − ١ − ٢ت)(٣ع − ١ + ٢ت)

ج (٢ع + ٣ − ٢ت)(٢ع + ٣ + ٢ت)

د (ع − ٢)(ع + ٢)(ع − ٢ت)(ع + ٢ت)

هـ (ع − ٣)(ع + ٣)(ع − ت)(ع + ت)

٣) أ عوّض ع = ١ + ت. إذا كان الطرف الأيمن = ٠ فإن ١ + ت جذر للمعادلة $ع^٤$ + ٣$ع^٢$ − ٦ع + ١٠

= $(١ + ت)^٤$ + ٣$(١ + ت)^٢$ − ٦(١ + ت) + ١٠

= ١ + ٤ت + ٦$ت^٢$ + ٤$ت^٣$ + $ت^٤$ + ٣(١ + ٢ت + $ت^٢$) − ٦ − ٦ت + ١٠

= ١ + ٤ت − ٦ − ٤ت + ١ + ٣ + ٦ت − ٣ − ٦ − ٦ت + ١٠

= ٠

ب (١ − ت)(−١ + ٢ت)(−١ − ٢ت)

٤) أ عوّض ع = −٢ + ت. إذا كان الطرف الأيمن = ٠ فإن ١ + ت جذر للمعادلة $ع^٤$ + ٢٤ع + ٥٥

= $(−٢ + ت)^٤$ + ٢٤(−٢ + ت) + ٥٥

= ١٦ − ٣٢ت + ٢٤$ت^٢$ − ٨$ت^٣$ + $ت^٤$ − ٤٨ + ٢٤ت + ٥٥

= ١٦ − ٣٢ت − ٢٤ + ٨ت + ١ − ٤٨ + ٢٤ت + ٥٥

= ٠

ب (−٢ − ت)(٢ − ت$\sqrt{٧}$)(٢ + ت$\sqrt{٧}$)

٥) ع = أ + ب ت

$\text{ع}^* = \text{أ} - \text{ب ت}$

$\frac{\text{ع}}{\text{ع}^*} = \frac{\text{أ} + \text{ب ت}}{\text{أ} - \text{ب ت}} = \frac{(\text{أ} + \text{ب ت})(\text{أ} + \text{ب ت})}{(\text{أ} - \text{ب ت})(\text{أ} + \text{ب ت})} =$

$\frac{\text{أ}^٢ + ٢\text{أب ت} - \text{ب}^٢}{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}$

ليكن الجزء الحقيقي جـ، ويساوي $\frac{\text{أ}^٢ - \text{ب}^٢}{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}$

ليكن الجزء الحقيقي د، ويساوي $\frac{٢\text{أب}}{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}$

$\text{جـ}^٢ = \frac{(\text{أ}^٢ - \text{ب}^٢)^٢}{(\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢)^٢} = \frac{\text{أ}^٤ - ٢\text{أ}^٢\text{ب}^٢ + \text{ب}^٤}{(\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢)}$

$\text{د}^٢ = \frac{(٢\text{أب})^٢}{(\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢)^٢} = \frac{٤\text{أ}^٢\text{ب}^٢}{(\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢)^٢}$

اجمع العبارتين لتجد أن:

$\text{جـ}^٢ + \text{د}^٢ = \frac{\text{أ}^٤ - ٢\text{أ}^٢\text{ب}^٢ + \text{ب}^٤}{(\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢)^٢} + \frac{٤\text{أ}^٢\text{ب}^٢}{(\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢)^٢}$

$= \frac{\text{أ}^٤ + ٢\text{أ}^٢\text{ب}^٢ + \text{ب}^٤}{(\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢)^٢} = \frac{(\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢)^٢}{(\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢)^٢} = ١$

٦) $\pm(٢ + ٢\sqrt{٣}\,\text{ت})$

٧) أ $\pm(١ - \text{ت})$

ب $\pm(٢ + ٥\text{ت})$

ج $\pm(١{,}١٠ + ٠{,}٤٥٥\text{ت})$

د $\pm(٣ - ٢\text{ت})$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السابعة

١) ١ − ت، −٦

٢) ك = ±٢

٣) أ ٤، $\frac{١}{٣}\pi$ ب $\pm(\sqrt{٣} + \text{ت})$

ج $١ - \text{ت}(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})$، $١ + \text{ت}(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})$

٤) أ ١) ١، ٠ ٢) ١، π

٣) ١، ٠ ٤) ١، π

ب ١) ٢، ٠ ٢) ٠، غير معرّفة

٣) ٢، ٠ ٤) ٠، غير معرّفة

٥) أ جـ = ٢ + ٢ت

ب $|\text{جـ}| = ٢\sqrt{٢}$ ، السعة = $\frac{\pi}{٤}$

٦) أ ك = ١٢

ب ١ + ٢ت، $\frac{١}{٢}$

٧) أ $\text{ع}_١ = ٣$، $\text{ع}_٢ = \frac{-٣ + ٣\sqrt{٣}\,\text{ت}}{٢}$، $\text{ع}_٣ = \frac{-٣ - ٣\sqrt{٣}\,\text{ت}}{٢}$

ب $\text{ك}_١ = ٢\text{ت}$، $\text{ك}_٢ = ١ - \text{ت}$

٨) أ $\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\text{ت}}{٢}$

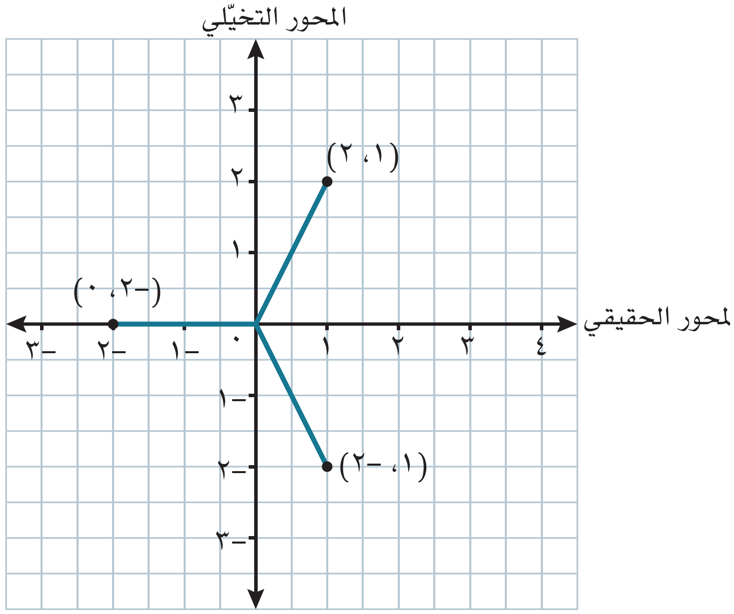
ب $\text{ع} = ٢\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٣} - \text{ت جا}\frac{\pi}{٣}\right)$

ج $٨\text{هـ}^{\frac{-\pi\text{ت}}{٦}}$

د المقياس = $\frac{١}{٢}$، السعة = π

٩) أ أ = ١

ب



ج للجذر ١ + ٢ت: |٦(١ + ٢ت) – ١| = |٥ + ١٢ت| = $\sqrt{٥^٢ + ١٢^٢}$ = ١٣

للجذر ١ – ٢ت: |٦(١ + ٢ت) – ١| = |٥ – ١٢ت| = $\sqrt{٥^٢ + (–١٢)^٢}$ = ١٣

للجذر –٢: |٦ × (–٢) – ١| = |–١٢ – ١| = ١٣

١٠) أ ٢ + ت   ب –٢ ± ٣ت

ج ع = ٢ + ت، ق = ت

الوحدة السابعة: حلول تمارين كتاب الطالب
الأعداد المركّبة

تمارين ٧-١

١) أ $\sqrt{-١٤٤}$

$= \sqrt{١٤٤ \times -١}$

$= \sqrt{١٤٤} \times \sqrt{-١}$

$= ١٢\text{ت}$

د $\sqrt{-١٦} + \sqrt{-٨١}$

$= \sqrt{١٦}\sqrt{-١} + \sqrt{٨١}\sqrt{-١}$

$= ٤\text{ت} + ٩\text{ت}$

$= ١٣\text{ت}$

٢) ب $٩\text{ت} - (\text{ت}\sqrt{٢})^٣$

$= ٩\text{ت} - \text{ت}^٢\text{ت}(\sqrt{٢})^٢\sqrt{٢}$

$= ٩\text{ت} - (-١)\text{ت}(٢\sqrt{٢})$

$= ٩\text{ت} + ٢\text{ت}\sqrt{٢}$

$= (٩ + ٢\sqrt{٢})\text{ت}$

تذكّر أن:

$\text{ت}^٢ = -١$

$\text{ت}^٣ = \text{ت}^٢\text{ت} = -\text{ت}$

$\text{ت}^٤ = (\text{ت}^٢)^٢ = (-١)^٢ = ١$

عند تبسيط قوى ت الأكبر من ٤، استخدم هذه الحقائق للتبسيط.

مثل: $\text{ت}^٧ = \text{ت}^٤\text{ت}^٢\text{ت} = ١(-١)\text{ت} = -\text{ت}$.

د $-\frac{٥}{٦\text{ت}^٢}$

$= -\frac{٥}{٦(-١)}$

$= \frac{٥}{٦}$

تمارين ٧-٢

١) أ س^{٢} + $\frac{٦٤}{٢٥}$ = ٠

س = ± $\sqrt{-\frac{٦٤}{٢٥}}$

= ± $\sqrt{\frac{٦٤}{٢٥} \times -١}$

= ± $\frac{٨}{٥}$ ت

ب ٤س^{٢} + ٧ = ٠

س^{٢} = −$\frac{٧}{٤}$

س = ± $\sqrt{\frac{٧}{٤} \times -١}$

س = ± $\frac{\sqrt{٧}}{٢}$ ت

ج ١٢س^{٢} + ٣ = ٠

س^{٢} = −$\frac{١}{٤}$

س = ± $\sqrt{-\frac{١}{٤}}$

س = ± $\sqrt{\frac{١}{٤} \times -١}$

= ± $\frac{١}{٢}$ ت

٢) في العدد المركب ع = أ + ب ت، الجزء الحقيقي أ، والتخيّلي ب. وعليه في العدد المركب ع = ٤ − ٣ت، الجزء الحقيقي ٤، والجزء التخيلي −٣

٣) إذا كان ع$_{١}$ = ع$_{٢}$ فإن الجزأين الحقيقيَّين في ع$_{١}$، ع$_{٢}$ متساويان، وكذلك الجزآن التخيّليان فيهما متساويان.

فيكون أ = ٥، ب = −٢

٤) أ (س + ٢ص) + ت(٣س − ص) = ١ + ١٠ت

ساوِ بين الأجزاء الحقيقية لتحصل على:

س + ٢ص = ١ .... (١)

ساوِ بين الأجزاء التخيّلية لتحصل على:

٣س − ص = ١٠

٦س − ٢ص = ٢٠ .... (٢)

(١) + (٢) لتحصل على:

٧س = ٢١

س = ٣

٣ + ٢ص = ١

٢ص = −٢

ص = −١

ب (س + ص − ٤) + ٢س ت = (٥ − ص)ت

ساوِ بين الأجزاء الحقيقية لتحصل على:

س + ص − ٤ = ٠

س + ص = ٤ .... (١)

ساوِ بين الأجزاء التخيّلية لتحصل على:

٢س = ٥ − ص

٢س + ص = ٥ .... (٢)

(٢) − (١) لتحصل على:

س = ١

١ + ص = ٤

ص = ٣

ج (س − ص) + (٢س − ص)ت = −١

ساوِ بين الأجزاء الحقيقية لتحصل على:

س − ص = −١ .... (١)

ساوِ بين الأجزاء التخيّلية لتحصل على:

٢س − ص = ٠ .... (٢)

(٢) − (١) لتحصل على:

س = ١

١ − ص = −١

ص = ٢

٥)

ثمّة طريقتان: حلّ الجزئية (ب) بإكمال المربع، وحلّ الجزئية (هـ) باستخدام الصيغة التربيعيّة. هاتان الطريقتان متكافئتان، لأن الصيغة التربيعية وجدت باستخدام إكمال المربع.

ب $ع^2 + 4ع + 5 = 0$

$(ع + 2)^2 - 4 + 5 = 0$

$(ع + 2)^2 = -1$

$ع + 2 = \pm ت$

$ع = -2 \pm ت$

هـ $3ع^2 + 8ع + 10 = 0$

$ع = \dfrac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(3)(10)}}{2(3)}$

$ع = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 120}}{6}$

$ع = \dfrac{-8 \pm \sqrt{-56}}{6}$

$ع = \dfrac{-8 \pm ت\sqrt{4 \times 14}}{6}$

$ع = \dfrac{-8 \pm 2ت\sqrt{14}}{6}$

$= -\dfrac{4}{3} \pm \dfrac{\sqrt{14}}{3}ت$

تمارين ٧-٣

١) **ج** $(7 - 3ت)^2 = (7 - 3ت)(7 - 3ت)$

$= 49 - 21ت - 21ت + 9ت^2$

$= 49 + 9(-1) - 42ت$

$= 40 - 42ت$

ز $\dfrac{13(1 + ت)}{2 + 3ت}$

$= \dfrac{13(1 + ت)(2 - 3ت)}{(2 + 3ت)(2 - 3ت)}$

$= \dfrac{13(2 - 3ت + 2ت - 3ت^2)}{4 - 9ت^2}$

$= \dfrac{26 - 39ت + 26ت + 39}{4 + 9}$

$= \dfrac{65 - 13ت}{13}$

$= 5 - ت$

د $\dfrac{ع_1}{ع_2} = \dfrac{5 - 3ت}{1 + 2ت}$

$= \dfrac{(5 - 3ت)(1 - 2ت)}{(1 + 2ت)(1 - 2ت)}$

$= \dfrac{5 - 10ت - 3ت + 6ت^2}{1 - 4ت^2}$

$= \dfrac{5 + 6(-1) - 13ت}{1 - 4(-1)}$

$= \dfrac{-1 - 13ت}{5}$

$= -\dfrac{1}{5} - \dfrac{13}{5}ت$

٢) **ب** $ع_1^* = 5 + 3ت$

$ع_1^* - ع_2$

$= 5 + 3ت - (1 + 2ت)$

$= 4 + ت$

٣) **ب** $ع_1 + ع_2 = 1 + 5ت + 1 - 5ت = 2$

$ع_1ع_2 = (1 + 5ت) \times (1 - 5ت)$

$= 1 - 25ت^2$

$= 26$

المعادلة هي:

$ع^2 - 2ع + 26 = 0$

باستخدام المساعدة المعطاة في كتاب الطالب.

د $ع_{١} + ع_{٢} = -٥$

$$ع_{١}ع_{٢} = \left(-\frac{٥}{٢} - \frac{\sqrt{٣١}}{٢}ت\right)\left(-\frac{٥}{٢} + \frac{\sqrt{٣١}}{٢}ت\right)$$

$$= \left(\frac{٥}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{\sqrt{٣١}}{٢}\right)^{٢}ت^{٢}$$

$$= \frac{٢٥}{٤} + \frac{٣١}{٤}$$

$$= \frac{٥٦}{٤}$$

$$= ١٤$$

المعادلة هي:

$$ع^{٢} + ٥ع + ١٤ = ٠$$

٤) $ع + ٤ = ٣\,ت\,ع^{*}$

افترض أن $ع = س + ت\,ص$

$$(س + ت\,ص) + ٤ = ٣ت\,(س - ت\,ص)$$

ساوِ بين الأجزاء الحقيقية لتحصل على:

$$س + ٤ = ٣ص$$

$س - ٣ص = -٤$ .... (١)

ساوِ بين الأجزاء التخيّلية لتحصل على:

$ص = ٣س$ .... (٢)

عوّض (٢) في (١) لتحصل على:

$$س - ٣(٣س) = -٤$$

$$س - ٩س = -٤$$

$$-٨س = -٤$$

$$س = \frac{١}{٢}$$

$$ص = \frac{٣}{٢}$$

٥) $م(٣ - ٥ت) = ١٣ + ت$

$$م = \frac{١٣ + ت}{٣ - ٥ت}$$

$$= \frac{(١٣ + ت)(٣ + ٥ت)}{(٣ - ٥ت)(٣ + ٥ت)}$$

$$= \frac{٣٩ + ٦٥ت + ٣ت + ٥ت^{٢}}{٩ - ٢٥ت^{٢}}$$

$$= \frac{٣٩ - ٥ + ٦٨ت}{٩ + ٢٥}$$

$$= \frac{٣٤ + ٦٨ت}{٣٤}$$

$$= ١ + ٢ت$$

٦) $٥ - ت\sqrt{٣}$ هو جذر آخر للمعادلة.

$$ع_{١} = ٥ + ت\sqrt{٣}$$

$$ع_{٢} = ٥ - ت\sqrt{٣}$$

$$ع_{١} + ع_{٢} = ١٠$$

$$ع_{١}ع_{٢} = ٢٥ - ت^{٢}(\sqrt{٣})^{٢}$$

$$= ٢٥ + ٣ = ٢٨$$

فتكون المعادلة:

$$ع^{٢} - ١٠ع + ٢٨ = ٠$$

٧) $٢٤٠ = \text{شدّة التيار} \times (٤٨ + ٣٦ت)$

$$\text{شدّة التيار} = \frac{٢٤٠}{٤٨ + ٣٦ت}$$

$$= \frac{٢٤٠\,(٤٨ - ٣٦ت)}{(٤٨ + ٣٦ت)(٤٨ - ٣٦ت)}$$

$$= \frac{٢٤٠\,(٤٨ - ٣٦ت)}{٤٨^{٢} + ٣٦^{٢}}$$

$$= \frac{٢٤٠\,(٤٨ - ٣٦ت)}{٣٦٠٠}$$

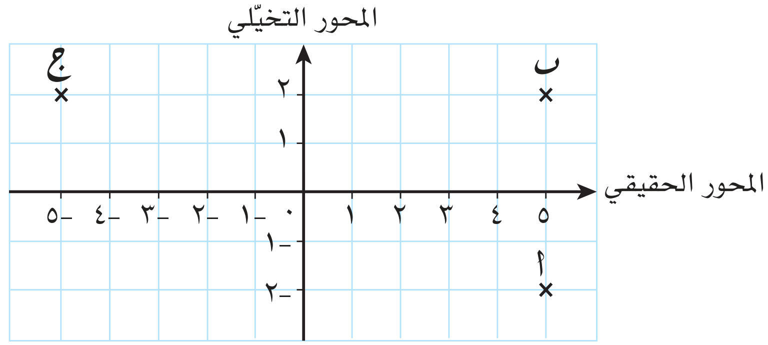
$$= \frac{٤٨ - ٣٦ت}{١٥}$$

$$= \frac{١٦}{٥} - \frac{١٢}{٥}\,ت$$

$= ٣{,}٢ - ٢{,}٤ت$ أمبير.

تمارين ٧-٤

١) أ



ب ع = ٥ − ٢ت

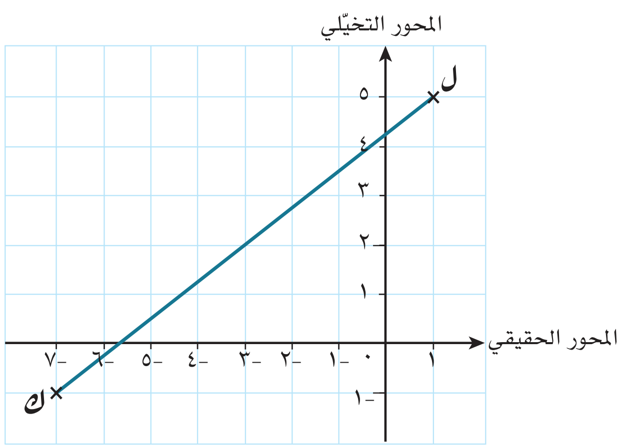
ع* = ٥ + ٢ت

−ع = −٥ + ٢ت

عندما ترسم مخطط أرجاند، فإن النقطة التي تبحث عنها تظهر من الشكل وإحداثياتها (−٥، −٢).

وعليه فإن العدد المركب هو −٥ − ٢ت.

٢) أ



ب من مخطط أرجاند تلاحظ أن إحداثيات نقطة المنتصف (−٣ ، ٢). وعليه فإن العدد المركب هو −٣ + ٢ت.

طريقة بديلة، يمكنك أن تحسب الوسط الحسابي للجزء الحقيقي وللجزء التخيلي لتحصل على:

$$\frac{١ + (-٧)}{٢} + ت\left(\frac{٥ + (-١)}{٢}\right)$$

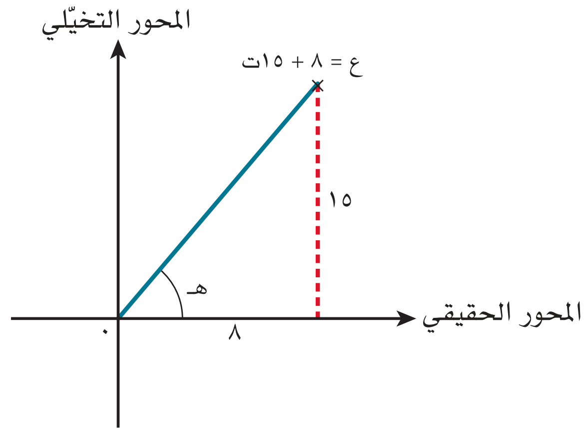
$$= -\frac{٦}{٢} + ت\left(\frac{٤}{٢}\right)$$

$$= -٣ + ٢ت$$

تذكّر أن إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين أ$(س_١، ص_١)$، ب $(س_٢، ص_٢)$

هي: $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$، وهذا يكافئ الوسط الحسابي للجزء الحقيقي وللجزء التخيّلي للعدَدين المركّبَين.

٣) ج



سعة العدد المركب (٨ + ١٥ت) = ظا$^{-١}\left(\frac{١٥}{٨}\right)$ = ١,٠٨

|٨ + ١٥ت| = $\sqrt{٨^٢ + ١٥^٢}$ = $\sqrt{٢٨٩}$ = ١٧

ارسم مخطط أرجاند ليساعدك في الحسابات مثل إيجاد السعة، وفي إيجاد قياسات الزوايا، وحلّ المسائل الهندسيّة.

ط أولًا اعتمد العدد المركب ١ − ت:

سعة العدد المركب (ك(١ − ت)) = $-\frac{\pi}{٤}$

|ك(١ − ت)| = ك|١ − ت|

= ك$\sqrt{(١)^٢ + (-١)^٢}$ = ك$\sqrt{٢}$

٤) أ النقطة أ:

ع$_١$ = −١ + ٣ت

|ع$_١$| = $\sqrt{(-١)^٢ + ٣^٢}$ = $\sqrt{١٠}$

السعة للعدد المركب ع$_١$ = π − ظا$^{-١}$ ٣ = ١,٨٩

−١ + ٣ت = $\sqrt{١٠}$ (جتا(١,٨٩) + ت جا(١,٨٩))

النقطة ب:

ع$_٢$ = ٣ + ت

|ع$_٢$| = $\sqrt{٣^٢ + ١^٢}$ = $\sqrt{١٠}$

السعة للعدد المركب ع$_٢$ = ظا$^{-١}\left(\frac{١}{٣}\right)$ = ٠,٣٢٢

٣ + ت = $\sqrt{١٠}$ (جتا(٠,٣٢٢) + ت جا(٠,٣٢٢))

النقطة ج:

ع$_٣$ = ١ − ٣ت

|ع$_٣$| = $\sqrt{١ + (-٣)^٢}$ = $\sqrt{١٠}$

السعة للعدد المركب ع$_٣$ = −ظا$^{-١}$ (٣) = −١,٢٥

١ − ٣ت = $\sqrt{١٠}$ (جتا(−١,٢٥) + ت جا(−١,٢٥))

ب أب = |٣ + ت − (−١ + ٣ت)|

= |٤ − ٢ت|

= $\sqrt{١٦ + ٤}$

= $\sqrt{٢٠}$

أج = |١ − ٣ت − (−١ + ٣ت)|

= |٢ − ٦ت|

= $\sqrt{٤ + ٣٦}$

= $\sqrt{٤٠}$

ب ج = |١ − ٣ت − (٣ + ت)|

= |−٢ − ٤ت|

= $\sqrt{٤ + ١٦}$

= $\sqrt{٢٠}$

لاحظ أن:

(ب ج)^٢ + (أ ب)^٢ = ٢٠ + ٢٠ = ٤٠ = (أ ج)^٢،

وكذلك أ ب = ب ج، وعليه يكون المثلث قائم الزاوية ومتطابق الضلعين.

٥) أ $\;٣\left(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٣}\right) = ٣\left(\frac{١}{٢} + \text{ت}\,\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

$= \frac{٣}{٢} + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}\,\text{ت}$

ب $\;٥\left(\text{جتا}\,\frac{٣\pi}{٨} + \text{ت جا}\,\frac{٣\pi}{٨}\right)$

$= ٥\,(٠{,}٣٨٢٧ + ٠{,}٩٢٣٩\,\text{ت})$

$= ١{,}٩١ + ٤{,}٦٢\,\text{ت}$

ج $\;\frac{\text{هـ}^{\text{ت}\pi}}{٢} = \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{\text{ت}\pi}$

$= \frac{١}{٢}\,(\text{جتا}\,\pi - \text{ت جا}\,\pi)$

$= \frac{١}{٢}\,(-١ + ٠\,\text{ت})$

$= -\frac{١}{٢}$

د $\;٣\,\text{هـ}^{-\frac{\pi}{٤}\text{ت}} = ٣\left(\text{جتا}\left(-\frac{\pi}{٤}\right) + \text{ت جا}\left(-\frac{\pi}{٤}\right)\right)$

$= ٣\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢} - \frac{\sqrt{٢}}{٢}\,\text{ت}\right)$

$= \frac{٣\sqrt{٢}}{٢} - \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}\,\text{ت}$

> تذكّر أن: $\left|\frac{\text{ع}_١}{\text{ع}_٢}\right| = \frac{|\text{ع}_١|}{|\text{ع}_٢|}$

> تذكّر أن: السعة للعدد المركب $(\text{ع}_١\text{ع}_٢)$ = السعة للعدد المركب $\text{ع}_١$ + السعة للعدد المركب $\text{ع}_٢$
> السعة للعدد المركب $\left(\frac{\text{ع}_١}{\text{ع}_٢}\right)$ = السعة للعدد المركب $\text{ع}_١$ − السعة للعدد المركب $\text{ع}_٢$

٦) أ $\;|\text{ق}| = ٥$

السعة للعدد المركب ق = $\frac{\pi}{٦}$

$\text{ق} = ٥\,\text{هـ}^{\frac{\pi}{٦}\text{ت}}$

ب $\;|\text{ع}| = \left|\frac{٣ - ٧\text{ت}}{٥ - ٢\text{ت}}\right|$

$= \frac{\sqrt{٣^٢ + (-٧)^٢}}{\sqrt{٥^٢ + (-٢)^٢}}$

$= \frac{\sqrt{٥٨}}{\sqrt{٢٩}}$

$= \sqrt{٢}$

السعة للعدد المركب ع = $\text{ظا}^{-١}\left(-\frac{٧}{٣}\right) - \text{ظا}^{-١}\left(-\frac{٢}{٥}\right)$

$= -\frac{١}{٤}\,\pi$

$\text{ع} = \sqrt{٢}\,\text{هـ}^{-\frac{١}{٤}\text{ت}\pi}$

ج $\;\frac{\text{ع}}{\text{ق}} = \frac{\sqrt{٢}\,\text{هـ}^{-\frac{١}{٤}\text{ت}\pi}}{٥\,\text{هـ}^{\frac{١}{٦}\text{ت}\pi}}$

$= \frac{\sqrt{٢}}{٥}\,\text{هـ}^{\text{ت}\pi\left(-\frac{١}{٤} - \frac{١}{٦}\right)}$

$= \frac{\sqrt{٢}}{٥}\,\text{هـ}^{-\frac{٥}{١٢}\text{ت}\pi}$

٧) $\text{ع} = \text{أ} + \text{ب ت}$

$\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ = ٥^٢ = ٢٥$ .... (١)

$\text{ظا}\left(\frac{\pi}{٦}\right) = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

$\frac{\sqrt{٣}}{٣} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

$\sqrt{٣}\,\text{أ} = ٣\text{ب}$

$\text{أ} = \sqrt{٣}\,\text{ب}$ .... (٢)

عوّض (٢) في (١) لتحصل على:

$(\sqrt{٣}\,\text{ب})^٢ + \text{ب}^٢ = ٢٥$

$\text{ب}^٢ = \frac{٢٥}{٤}$

$\text{ب} = \pm\sqrt{\frac{٢٥}{٤}} = \pm\frac{٥}{٢}$

لكن سعة ع $>$ ٠، فتكون ب $>$ ٠

أي أن $\text{ب} = \frac{٥}{٢}$، وبالتعويض في (٢):

$$\text{أ} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$$

٨) أ $\text{ع} = \text{ر}\,(\text{جتاأ} + \text{ت جاأ})$

$\text{ع}^* = \text{ر}\,(\text{جتاأ} - \text{ت جاأ})$

$\text{ع ع}^* = \text{ر}^{٢}\,(\text{جتاأ} + \text{ت جاأ})\,(\text{جتاأ} - \text{ت جاأ})$

$= \text{ر}^{٢}\,(\text{جتا}^{٢}\text{أ} - \text{ت}^{٢}\,\text{جا}^{٢}\text{أ})$

$= \text{ر}^{٢}\,(\text{جتا}^{٢}\text{أ} + \text{جا}^{٢}\text{أ})$

$= \text{ر}^{٢}$

ب $\text{ع} = \text{ر}\,(\text{جتاأ} + \text{ت جاأ})$

$\text{ع}^* = \text{ر}\,(\text{جتاأ} - \text{ت جاأ})$

$$\frac{\text{ع}}{\text{ع}^*} = \frac{\text{ر}\,(\text{جتاأ} + \text{ت جاأ})}{\text{ر}\,(\text{جتاأ} - \text{ت جاأ})}$$

$$\frac{\text{ع}}{\text{ع}^*} = \frac{\text{ر}\,(\text{جتاأ} + \text{ت جاأ})(\text{جتاأ} + \text{ت جاأ})}{\text{ر}\,(\text{جتاأ} - \text{ت جاأ})\,(\text{جتاأ} + \text{ت جاأ})}$$

$$= \frac{\text{جتا}^{٢}\text{أ} + ٢\text{ت جاأ جتاأ} + \text{ت}^{٢}\text{جا}^{٢}\text{أ}}{\text{جتا}^{٢}\text{أ} - \text{ت}^{٢}\text{جا}^{٢}\text{أ}}$$

$$= \frac{\text{جتا}^{٢}\text{أ} - \text{جا}^{٢}\text{أ} + (٢\text{جاأ جتاأ})\,\text{ت}}{\text{جتا}^{٢}\text{أ} + \text{جا}^{٢}\text{أ}}$$

$$= \text{جتا}^{٢}\text{أ} - \text{جا}^{٢}\text{أ} + (٢\text{جاأ جتاأ})\,\text{ت}$$

تمارين ٧-٥

١) أ $(-\text{ت})^{٣} + (-\text{ت})^{٢} + (-\text{ت}) + \text{ك} = ٠$

$\text{ت}^{٢}(-\text{ت}) + (\text{ت})^{٢} - \text{ت} + \text{ك} = ٠$

$\text{ت} - ١ - \text{ت} + \text{ك} = ٠$

$\text{ك} = ١$

ب تذكر دائمًا أنه إذا كان ع جذرًا، فإن ع* هو جذر أيضًا، حيث كثيرة الحدود تكون على الأقل من الدرجة الثانية.

بما أن $\text{ع} = -\text{ت}$ أحد الجذور، فإن $(\text{ع} + \text{ت})$ ومرافقه هما عاملان للعبارة $\text{ع}^{٣} + \text{ع}^{٢} + \text{ع} + ١$

$\text{ع}^{٣} + \text{ع}^{٢} + \text{ع} + ١ = (\text{ع} + \text{ت})(\text{ع} - \text{ت})(\text{أ ع} + \text{ب})$

$= (\text{ع}^{٢} + ١)(\text{أ ع} + \text{ب})$ بالملاحظة: أ = ١، ب = ١

$= (\text{ع}^{٢} + ١)(\text{ع} + ١)$

$\therefore$ $(\text{ع} + ١)$ هو العامل الثالث للعبارة $\text{ع}^{٣} + \text{ع}^{٢} + \text{ع} + ١$

الجذر الثالث هو حل المعادلة $\text{ع} + ١ = ٠$، أي:

$\text{ع} = -١$، وهو عدد حقيقي.

٢) أ العدد المركب المرافق = ٢ − ت

(٢ + ت)^{٣} − ١٢(٢ + ت)^{٢} + ل(٢ + ت) + ك = ٠

٨ + ١٢ ت + ٦ت^{٢} + ت^{٣} − ١٢ (٤ + ٤ ت + ت^{٢}) + ٢ل + ٢ل ت + ك = ٠

ب ساوِ بين الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيّلية لتحصل على:

٨ − ٦ − ٤٨ + ١٢ + ٢ل + ك = ٠

٢ل + ك = ٣٤ .... (١)

١٢ − ١ − ٤٨ + ل = ٠ .... (٢)

ل = ٣٧

فيكون من (١):

٧٤ + ك = ٣٤

ك = −٤٠

تذكّر دائمًا أنه إذا كان لكثيرة حدود عاملان، فإن حاصل ضربهما أيضًا يكون عاملًا لكثيرة الحدود تلك.

ج جذران من الجذور هما: ع = ٢ + ت، ع = ٢ − ت

∴ (ع − ٢ − ت) و (ع − ٢ + ت) عاملان.

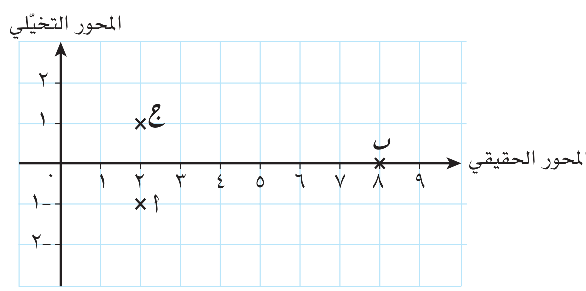
ع^{٣} − ١٢ع^{٢} + ٣٧ع − ٤٠ = (ع − ٢ − ت)(ع − ٢ + ت)(أ ع + ب)

= (ع^{٢} − ٢ع + ت ع − ٢ع + ٤ − ٢ت − ت ع + ٢ت + ١)(أ ع + ب)

= (ع^{٢} − ٤ع + ٥)(أ ع + ب)   بالملاحظة: أ = ١، ب = ٨

= (ع^{٢} − ٤ع + ٥)(ع − ٨)

الجذور هي: ع = ٢ + ت، ع = ٢ − ت، ع = ٨



٣) ٢ع^{٢} + ع + ٣ = ٠

$$ع = \frac{-١ \pm \sqrt{١^{٢} - ٤(٢)(٣)}}{٢(٢)}$$

$$= \frac{-١ \pm \sqrt{-٢٣}}{٤}$$

$$= \frac{-١ \pm ت\sqrt{٢٣}}{٤}$$

$ع_١ = \frac{-١ + ت\sqrt{٢٣}}{٤}$ ، $ع_٢ = \frac{-١ - ت\sqrt{٢٣}}{٤}$

السعة للعدد المركب $ع_١ = \pi - ظا^{-١}\left(\frac{\sqrt{٢٣}}{١}\right) = ١{,}٧٨$

السعة للعدد المركب $ع_٢$ = − السعة للعدد المركب $ع_١$؛ لأن الجذرَين عددان مركبان مترافقان.

$|ع_١| = |ع_٢| = \sqrt{\left(-\frac{١}{٤}\right)^٢ + \left(\frac{\sqrt{٢٣}}{٤}\right)^٢}$

$= \sqrt{\frac{١}{١٦} + \frac{٢٣}{١٦}}$

$= \sqrt{\frac{٢٤}{١٦}} = \frac{٢\sqrt{٦}}{٤}$

$= \frac{\sqrt{٦}}{٢}$

$ع_١ = \frac{\sqrt{٦}}{٢}(جتا ١{,}٧٨ + ت\ جا ١{,}٧٨)$،

$ع_٢ = \frac{\sqrt{٦}}{٢}(جتا(-١{,}٧٨) + ت\ جا(-١{,}٧٨))$

تذكّر أنه إذا كان $ع_١$، $ع_٢$ عددَين مركبَين مترافقَين وهما جذران للمعادلة نفسها، فإن السعة للعدد المركب $ع_١$ = − السعة للعدد المركب $ع_٢$

٤) $ع^٣ - ٣ع^٢ + ٢٥ع - ٧٥ = (ع - ٣)(أع^٢ + بع + جـ)$ بالملاحظة: أ = ١، جـ = ٢٥

$= (ع - ٣)(ع^٢ + بع + ٢٥)$

$= ع^٣ + (ب - ٣)ع^٢ + (٢٥ - ٣ب) - ٧٥$

ساوِ بين معاملات $ع^٢$ لتحصل على $-٣ = ب - ٣$، أي $ب = ٠$

$ع^٣ - ٣ع^٢ + ٢٥ع - ٧٥ = (ع - ٣)(أع^٢ + بع + جـ)$

$= (ع - ٣)(ع٢ + ٢٥)$ استخدم الفرق بين المربعَين

$= (ع - ٣)(ع + ٥ت)(ع - ٥ت)$

$ع^٣ - ٣ع^٢ + ٢٥ع - ٧٥ = ٠$

$(ع - ٣)(ع + ٥ت)(ع - ٥ت) = ٠$

$ع - ٣ = ٠$، أي $ع = ٣$

$ع + ٥ت = ٠$، أي $ع = -٥ت$

$ع - ٥ت = ٠$، أي $ع = ٥ت$

٥) $س^٢ + ٢سصت + ت^٢ص^٢ = ٥٥ + ٤٨ت$

ساوِ بين الأجزاء الحقيقية لتحصل على:

$س^٢ - ص^٢ = ٥٥$ .... (١)

ساوِ بين الأجزاء التخيّلية لتحصل على:

$٢س ص = ٤٨$ .... (٢)

عوّض في (١) لتحصل على:

$$س^٢ - \left(\frac{٢٤}{س}\right)^٢ = ٥٥$$

$$(س^٢)^٢ - ٥٧٦ = ٥٥س^٢$$

$$(س^٢)^٢ - ٥٥س^٢ - ٥٧٦ = ٠$$

$$(س^٢ - ٦٤)(س^٢ + ٩) = ٠$$

$س^٢ + ٩ = ٠$ مرفوض، لأن س عدد حقيقي.

$$س = ±٨$$

$$ص = \frac{٢٤}{٨} = ٣$$

٦) بما أن $(٢ع + ١)$ أحد العوامل، فإن $ع = -\frac{١}{٢}$ هو أحد الجذور.

$$٢ع^٣ - ١١ع^٢ + ١٤ع + ١٠ = (٢ع + ١)(أع^٢ + ب ع + جـ)$$

بالملاحظة: أ = ١، جـ = ١٠

$$= (٢ع+١)(ع^٢ + ب ع + ١٠)$$

$$= ٢ع^٣ + (٢ب + ١)ع^٢ + (ب + ٢٠)ع + ١٠$$

ساوِ بين معاملات $ع^٢$ لتحصل على: $-١١ = ٢ب + ١$، أي $ب = -٦$

$$٢ع^٣ - ١١ع^٢ + ١٤ع + ١٠ = (٢ع + ١)(ع^٢ - ٦ع + ١٠)$$

يمكن إكمال المربع لإيجاد جذور العبارة $ع^٢ - ٦ع + ١٠$:

$$ع^٢ - ٦ع + ١٠ = ٠$$

$$(ع - ٣)^٢ = -١$$

$$ع - ٣ = ± \sqrt{-١}$$

$$ع = ٣ ± ت$$

الجذور هي: $ع = -\frac{١}{٢}$، $ع = ٣ + ت$، $ع = ٣ - ت$

٧) بما أن $ع = ٣ت$ أحد الجذور، فإن مرافقه $ع = -٣ت$ جذر آخر.

∴ $(ع - ٣ت)$، $(ع + ٣ت)$ عاملان.

$$ع^٤ - ٢ع^٣ + ١٤ع^٢ - ١٨ع + ٤٥$$

$$= (ع - ٣ت)(ع + ٣ت)(أ ع^٢ + ب ع + جـ)$$

بالملاحظة: أ = ١، جـ = ٥

$$= (ع^٢ + ٩)(أع^٢ + ب ع + ٥)$$

$$= ع^٤ + ب ع^٣ + ١٤ع^٢ + ٩ ب ع + ٤٥$$

ساوِ بين معاملات $ع^٣$ لتحصل على $ب = -٢$

$$ع^٤ - ٢ع^٣ + ١٤ع^٢ - ١٨ع + ٤٥$$

$$= (ع^٢ + ٩)(ع^٢ - ٢ع + ٥)$$

أكمل المربع لتجد جذرَي $ع^{٢} - ٢ع + ٥$:

$ع^{٢} - ٢ع + ٥ = ٠$

$(ع - ١)^{٢} + ٤ = ٠$

$ع - ١ = \pm\sqrt{-٤}$

$ع = ١ \pm ٢ت$

الجذور هي: $ع = ٣ت$، $ع = -٣ت$، $ع = ١ \pm ٢ت$

٨) ب $(س + ت ص)^{٢} = ٧ + (٦\sqrt{٢})\,ت$

$س^{٢} + ٢س ص ت + ت^{٢} ص^{٢} = ٧ + (٦\sqrt{٢})\,ت$

ساوِ بين الأجزاء الحقيقية لتحصل على:

$س^{٢} - ص^{٢} = ٧$ .... (١)

$٢س ص = ٦\sqrt{٢}$

$ص = \frac{٣\sqrt{٢}}{س}$ .... (٢)

عوّض في (١) لتحصل على:

$س^{٢} - \left(\frac{٣\sqrt{٢}}{س}\right)^{٢} = ٧$

$(س^{٢})^{٢} - ١٨ = ٧س^{٢}$

$(س^{٢})^{٢} - ٧س^{٢} - ١٨ = ٠$

$(س^{٢} - ٩)(س^{٢} + ٢) = ٠$

$س^{٢} + ٢ = ٠$ مرفوض؛ لأن س عدد حقيقي.

$س = \pm ٣$

$س = ٣$، $ص = \sqrt{٢}$ أو

$س = -٣$، $ص = -\sqrt{٢}$

الجذور التربيعية هي:

$\pm(٣ + ت\sqrt{٢})$

٩) أ $(ع - ٥)^{٣} = ٨$

$ع - ٥ = \sqrt[٣]{٨}$

$ع - ٥ = ٢\sqrt[٣]{١}$

استخدم الجذور التكعيبية الثلاثة للواحد لتجد ع:

باستخدام $\sqrt[٣]{١} = ١$	باستخدام $\sqrt[٣]{١} = \frac{-١ + ت\sqrt{٣}}{٢}$	باستخدام $\sqrt[٣]{١} = \frac{-١ - ت\sqrt{٣}}{٢}$
$ع - ٥ = ٢ \times ١$ $ع = ٢ + ٥$ $= ٧$	$ع - ٥ = ٢ \times \frac{-١ + ت\sqrt{٣}}{٢}$ $ع = \cancel{٢} \times \frac{-١ + ت\sqrt{٣}}{\cancel{٢}} + ٥$ $= -١ + ت\sqrt{٣} + ٥$ $= ٤ + ت\sqrt{٣}$	$ع - ٥ = ٢ \times \frac{-١ - ت\sqrt{٣}}{٢}$ $ع = \cancel{٢} \times \frac{-١ - ت\sqrt{٣}}{\cancel{٢}} + ٥$ $= -١ - ت\sqrt{٣} + ٥$ $= ٤ - ت\sqrt{٣}$

ب $(٢ع + ٣)^{٣} = \frac{١}{٦٤}$

$٢ع + ٣ = \sqrt[٣]{\frac{١}{٦٤}}$

$٢ع + ٣ = \frac{١}{٤} \times \sqrt[٣]{١}$

الآن استخدم الجذور التكعيبية الثلاثة للواحد لتجد ع:

باستخدام $\sqrt[٣]{١} = ١$	باستخدام $\sqrt[٣]{١} = \frac{-١ + ت\sqrt{٣}}{٢}$	باستخدام $\sqrt[٣]{١} = \frac{-١ - ت\sqrt{٣}}{٢}$
$٢ع + ٣ = \frac{١}{٤} \times ١$ $ع = \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٤} - ٣\right)$ $= -\frac{١١}{٨}$	$٢ع + ٣ = \frac{١}{٤} \times \frac{-١ + ت\sqrt{٣}}{٢}$ $ع = \frac{١}{٢} \times \left(\frac{-١ + ت\sqrt{٣}}{٨} - ٣\right)$ $= \frac{١}{٢} \times \left(\frac{-٢٥ + ت\sqrt{٣}}{٨}\right)$ $= \frac{-٢٥ + ت\sqrt{٣}}{١٦}$ $= -\frac{٢٥}{١٦} + \frac{ت\sqrt{٣}}{١٦}$	$٢ع + ٣ = \frac{١}{٤} \times \frac{-١ - ت\sqrt{٣}}{٢}$ $ع = \frac{١}{٢} \times \left(\frac{-١ - ت\sqrt{٣}}{٨} - ٣\right)$ $= \frac{١}{٢} \times \left(\frac{-٢٥ - ت\sqrt{٣}}{٨}\right)$ $= \frac{-٢٥ - ت\sqrt{٣}}{١٦}$ $= -\frac{٢٥}{١٦} - \frac{ت\sqrt{٣}}{١٦}$

١٠) $ع^٤ - ع^٣ + ٢٠ع^٢ - ١٦ع + ٦٤ = (ع^٢ + أ)(ع^٢ + بع + ٤)$

اعتمد الحد الثابت لتحصل على:

$٤أ = ٦٤$

$أ = ١٦$

اعتمد معامل $ع^٣$ لتحصل على:

$ب = -١$

$ع^٤ - ع^٣ + ٢٠ع^٢ - ١٦ع + ٦٤ = (ع^٢ + ١٦)(ع^٢ - ع + ٤)$

$ع = \pm ٤ت$

أو

$ع^٢ - ع + ٤ = ٠$

$\left(ع - \frac{١}{٢}\right)^٢ - \frac{١}{٤} + ٤ = ٠$

$\left(ع - \frac{١}{٢}\right)^٢ = \frac{١٥}{٤}$

$ع = \frac{١}{٢} \pm \frac{ت\sqrt{١٥}}{٢}$

$ع = ٤ت ،\ -٤ت ،\ \frac{١}{٢} + \frac{ت\sqrt{١٥}}{٢} ،\ \frac{١}{٢} - \frac{ت\sqrt{١٥}}{٢}$

١١) أ $\left(\frac{١}{٥} + \frac{٢\sqrt{٦}}{٥}ت\right)^٢$

$= \frac{١}{٢٥} + \frac{٤\sqrt{٦}}{٢٥}ت - \frac{٢٤}{٢٥}$

$= -\frac{٢٣}{٢٥} + \frac{٤\sqrt{٦}}{٢٥}ت$

الطرف الأيمن =

$$٥\left(\frac{١}{٥} + \frac{٢\sqrt{٦}}{٥}ت\right)^{٢} - ٢\left(\frac{١}{٥} + \frac{٢\sqrt{٦}}{٥}ت\right) + ٥$$

$$= ٥\left(-\frac{٢٣}{٢٥} + \frac{٤\sqrt{٦}}{٢٥}ت\right) - ٢\left(\frac{١}{٥} + \frac{٢\sqrt{٦}}{٥}ت\right) + ٥$$

$$= -\frac{٢٣}{٥} + \frac{٤\sqrt{٦}}{٥}ت - \frac{٢}{٥} - \frac{٤\sqrt{٦}}{٥}ت + ٥$$

$$= -٥ + ٥ + \frac{٤\sqrt{٦}}{٥}ت - \frac{٤\sqrt{٦}}{٥}ت$$

= ٠، وهو الطرف الأيسر.

∴ الجذر $\frac{١}{٥} + \frac{٢\sqrt{٦}}{٥}$ت يمثل حلًا للمعادلة.

ب

تذكر أنه إذا كان ع جذرًا لمعادلة تربيعيّة، فإن ع* هو جذر أيضًا.

الحلّ الآخر هو مرافق العدد المركب، وهو

$$\frac{١}{٥} - \frac{٢\sqrt{٦}}{٥}ت$$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السابعة

١) $\frac{٥ - ٢ت}{١ + ٣ت}$

$$= \frac{(٥ - ٢ت)(١ - ٣ت)}{(١ + ٣ت)(١ - ٣ت)}$$

$$= \frac{٥ - ١٥ت - ٢ت + ٦ت^{٢}}{١ - ٩ت^{٢}}$$

$$= \frac{-١ - ١٧ت}{١ + ٩}$$

$$= \frac{-١}{١٠} - \frac{١٧ت}{١٠} = -٠,١ - ١,٧ ت$$

تذكّر هذه الطريقة التي تتضمن دائمًا الفرق بين مربعَين في المقام. يمكنك أن تستخدم الحقيقة $س^{٢} - أ^{٢}$ = (س – أ) (س + أ) لتوفير الوقت في بعض الأعمال.

٢) $ق^{٢} - ٢ق + ٢٦ = ٠$

$(ق - ١)^{٢} - ١ + ٢٦ = ٠$

$(ق - ١)^{٢} = -٢٥$

$ق - ١ = \pm ٥ت$

$ق = ١ \pm ٥ت$

٣) $ع = ك - ٦ت$

$ع^{*} = ك + ٦ت$

$ع ع^{*} = (ك - ٦ت)(ك + ٦ت)$

$= ك^{٢} - ٣٦ت^{٢}$

$= ك^{٢} + ٣٦$

$\frac{ع}{ع^{*}} = \frac{ك - ٦ت}{ك + ٦ت}$

$= \frac{(ك - ٦ت)(ك - ٦ت)}{(ك + ٦ت)(ك - ٦ت)}$

$= \frac{ك^{٢} - ١٢ك ت + ٣٦ت^{٢}}{ك^{٢} - ٣٦ت^{٢}}$

$= \frac{(ك^{٢} - ٣٦) - ١٢ك ت}{ك^{٢} + ٣٦}$

$= \frac{ك^{٢} - ٣٦}{ك^{٢} + ٣٦} - \frac{١٢ك ت}{ك^{٢} + ٣٦}$

٤) $ق = ٤هـ^{\frac{٥\pi}{١٢}ت}$

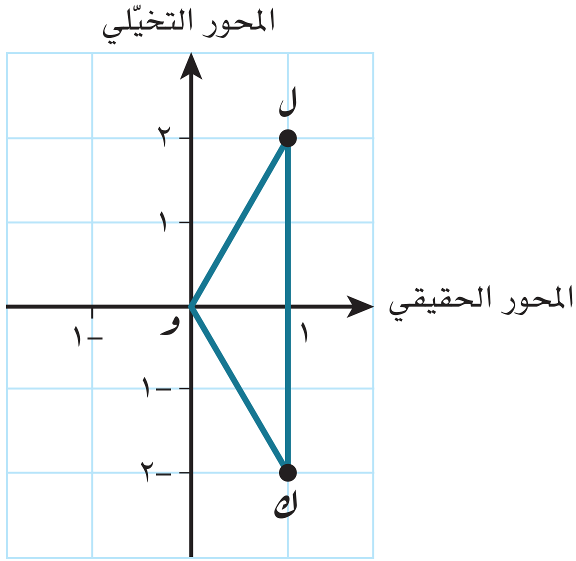
$ح = ٢هـ^{\pi ت}$

$\frac{ق}{ح} = \frac{٤هـ^{\frac{٥\pi}{١٢}ت}}{٢هـ^{\pi ت}} = ٢هـ^{\pi ت\left(\frac{٥}{١٢} - ١\right)}$

$= ٢هـ^{-\frac{٧}{١٢}\pi ت}$

٥) أ $ح = ١ + ٢ت$

$ح^{*} = ١ - ٢ت$



المثلث **و ل ك** متطابق الضلعين؛ لأن $|ح| = |ح^{*}|$

ب $\frac{ق}{ح} = \frac{-٣ - ت}{١ + ٢ت}$

$= \frac{-(٣ + ت)(١ - ٢ت)}{(١ + ٢ت)(١ - ٢ت)}$

$= \frac{-٣ + ٦ت - ت + ٢ت^{٢}}{١ - ٤ت^{٢}}$

$= \frac{-٥ + ٥ت}{١ + ٤}$

$= -١ + ت$

$\left|\frac{ق}{ح}\right| = \sqrt{١^{٢} + ١^{٢}} = \sqrt{٢}$

سعة العدد المركب $(-١ + ت) = \pi - ظا^{-١}(١)$

$= \pi - \frac{\pi}{٤} = \frac{٣\pi}{٤}$

$\frac{ق}{ح} = \sqrt{٢}\left(جتا\left(\frac{٣\pi}{٤}\right) + ت\, جا\left(\frac{٣\pi}{٤}\right)\right)$

٦) **أ** $ع^* = ٢ + ٥ت$

$٢ + ٥ت = ٢س + ١ + (٤س + ص)ت$

ساوِ الأجزاء الحقيقية لتحصل على:

$٢س + ١ = ٢$

$س = \frac{١}{٢}$

ساوِ الأجزاء التخيّلية لتحصل على:

$٤س + ص = ٥$

$٢ + ص = ٥$

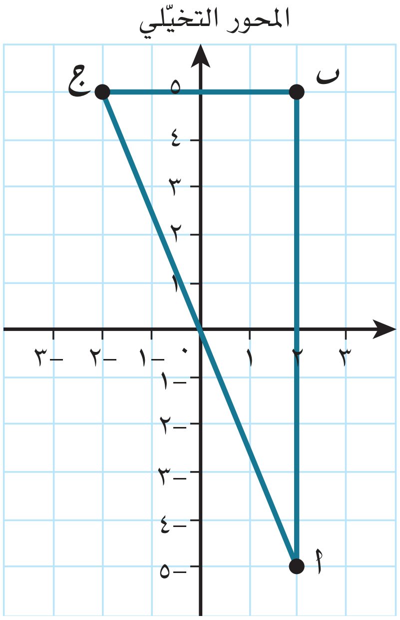
$ص = ٣$

ب $ع = ٢ - ٥ت$

$ع^* = ٢ + ٥ت$

$-ع = -٢ + ٥ت$

لاحظ أن $-ع$ هو انعكاس لـ $ع^*$ في المحور التخيلي. وكذلك $ع$، $ع^*$ لهما الجزء الحقيقي نفسه، فيقع $ع^*$ رأسيًا أعلى $ع$ على مخطط أرجاند. بالمثل $ع^*$ ، $-ع$ لهما الجزء التخيلي نفسه، فيقع $-ع$ إلى يسار $ع^*$ مباشرة على مخطط أرجاند، وحيث إن الضلعَين اللذين يصلان بين أزواج هذه النقاط يكونان رأسيًا وأفقيًا، فيكون المثلث قائم الزاوية.



المثلث أ ب ج قائم الزاوية.

ج) ١) $\frac{\text{ع}^*}{-\text{ع}} = \frac{٢ + ٥\text{ت}}{-٢ + ٥\text{ت}}$

$= \frac{(٢ + ٥\text{ت})(-٢ - ٥\text{ت})}{(-٢ + ٥\text{ت})(-٢ - ٥\text{ت})}$

$= \frac{-٤ - ٢٠\text{ت} - ٢٥\text{ت}^٢}{٤ - ٢٥\text{ت}^٢}$

$= \frac{٢١ - ٢٠\text{ت}}{٢٩}$

$= \frac{٢١}{٢٩} - \frac{٢٠}{٢٩}\text{ت}$

٢) $\left|\frac{\text{ع}^*}{-\text{ع}}\right| = \left|\frac{٢١}{٢٩} - \frac{٢٠}{٢٩}\text{ت}\right| = \sqrt{\left(\frac{٢١}{٢٩}\right)^٢ + \left(\frac{٢٠}{٢٩}\right)^٢}$

$= \frac{١}{٢٩}\sqrt{٢١^٢ + ٢٠^٢}$

$= \frac{\sqrt{٨٤١}}{٢٩} = ١$

السعة للعدد المركب $\left(\frac{٢١}{٢٩} - \frac{٢٠}{٢٩}\text{ت}\right)$

$= -\text{ظا}^{-١}\left(\frac{٢٠}{٢١}\right) = -٠,٧٦١$

$\frac{٢١}{٢٩} - \frac{٢٠}{٢٩}\text{ت} = \text{جتا}(-٠,٧٦١) + \text{ت جا}(-٠,٧٦١)$

٧) أ) $\text{ع}^٢ + (٤\sqrt{٣})\text{ع} + ١٣ = ٠$

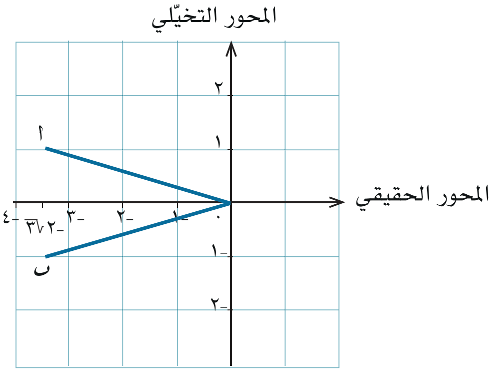
$(\text{ع} + ٢\sqrt{٣})^٢ - ١٢ + ١٣ = ٠$

$(\text{ع} + ٢\sqrt{٣})^٢ = -١$

$\text{ع} + ٢\sqrt{٣} = \pm\text{ت}$

$\text{ع} = -٢\sqrt{٣} \pm \text{ت}$

ب)



المتجهان يمثل كل منهما انعكاسًا للآخر في المحور الحقيقي.

العددان المركّبان المترافقان لهما المقياس نفسه.

ج) $\text{ع}_١ = -٢\sqrt{٣} + \text{ت}$

$\text{ع}_٢ = -٢\sqrt{٣} - \text{ت}$

$|\text{ع}_١| = |\text{ع}_٢| = \sqrt{١٣}$،

السعة للعدد المركب $\text{ع}_١ =$

$\pi - \text{ظا}^{-١}\left(\frac{١}{٢\sqrt{٣}}\right) = ٢,٨٦$

السعة للعدد المركب $\text{ع}_٢$ = − السعة للعدد المركب $\text{ع}_١$

$= -\pi + \text{ظا}^{-١}\left(\frac{١}{٢\sqrt{٣}}\right)$

$= -٢,٨٦$

٨) أ) $\text{ع} = ٤\sqrt{٣} - ٤\text{ت}$

$|\text{ع}| = \sqrt{(٤\sqrt{٣})^٢ + (-٤)^٢} = \sqrt{٤٨ + ١٦} = \sqrt{٦٤} = ٨$

السعة للعدد المركب ع $= -\text{ظا}^{-١}\left(\frac{٤}{٤\sqrt{٣}}\right) = -\frac{\pi}{٦}$

ب) $\text{ع} = ٨\left(\text{جتا}\left(-\frac{\pi}{٦}\right) + \text{ت جا}\left(-\frac{\pi}{٦}\right)\right) = ٨\text{هـ}^{-\frac{\pi\text{ت}}{٦}}$

$\text{ح} = ٢\sqrt{٢}\left(\text{جتا}\left(\frac{\pi}{١٢}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\pi}{١٢}\right)\right) = ٢\sqrt{٢}\,\text{هـ}^{\frac{\pi\text{ت}}{١٢}}$

$\frac{\text{ع}}{\text{ح}} = \frac{٨\text{هـ}^{-\frac{\pi\text{ت}}{٦}}}{٢\sqrt{٢}\,\text{هـ}^{\frac{\pi\text{ت}}{١٢}}} = ٢\sqrt{٢}\,\text{هـ}^{-\frac{\pi\text{ت}}{٦} - \frac{\pi\text{ت}}{١٢}}$

$= ٢\sqrt{٢}\,\text{هـ}^{-\frac{\pi\text{ت}}{٤}}$

تذكّر أن: $\text{ر}(\text{جتاأ} + \text{ت جاأ}) = \text{ر هـ}^{\text{أت}}$

٩) $\text{ح} = \text{س} + \text{ت ص}$، $\text{ح}^* = \text{س} - \text{ت ص}$

$\text{ح}^* - ٢ - ٢\text{ت} = ٣\text{ت ح}$

$(\text{س} - \text{ت ص}) - ٢ - ٢\text{ت} = ٣\text{ت}(\text{س} + \text{ت ص})$

$\text{س} - \text{ت ص} - ٢ - ٢\text{ت} = ٣\text{س ت} - ٣\text{ص}$

$\text{س} - ٢ + (-٢ - \text{ص})\text{ت} = -٣\text{ص} + ٣\text{ س ت}$

ساوِ الأجزاء الحقيقية، فينتج:

س − ٢ = −٣ص

س + ٣ ص = ٢ .... (١)

ساوِ الأجزاء التخيّلية، فينتج:

− ص − ٢ = ٣س

٣س + ص = −٢ .... (٢)

٣ × المعادلة (١) واطرح (٢)، فينتج:

٨ص = ٨

ص = ١

عوّض في (١)، فينتج:

س + ٣ = ٢

س = −١

ح = −١ + ت

١٠) أ

تذكّر عند حل تمرين ١٠ أنك في الحقيقة تجد الجذر التربيعي لـ ٧ − ٦$\sqrt{٢}$ ت.

$(\text{س} + \text{ت ص})^{٢} = ٧ - (٦\sqrt{٢})\,\text{ت}$

$\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س ص ت} + \text{ت}^{٢}\,\text{ص}^{٢} = ٧ - (٦\sqrt{٢})\,\text{ت}$

$\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} + ٢\,\text{س ص ت} = ٧ - (٦\sqrt{٢})\,\text{ت}$

ساوِ الأجزاء الحقيقية لتحصل على:

$\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} = ٧$ .... (١)

ساوِ الأجزاء التخيّلية لتحصل على:

$٢\,\text{س ص} = -٦\sqrt{٢}$

$\text{س ص} = -٣\sqrt{٢}$

$\text{ص} = -\frac{٣\sqrt{٢}}{\text{س}}$ .... (٢)

عوّض في (١) لتحصل على:

$\text{س}^{٢} - \left(-\frac{٣\sqrt{٢}}{\text{س}}\right)^{٢} = ٧$

$\text{س}^{٢} - \frac{١٨}{\text{س}^{٢}} = ٧$

$(\text{س}^{٢})^{٢} - ٧\text{س}^{٢} - ١٨ = ٠$

$(\text{س}^{٢} - ٩)(\text{س}^{٢} + ٢) = ٠$

$س^٢ = ٩$ أو $س^٢ = -٢$

$س = \pm ٣$

(لا توجد جذور حقيقية للمعادلة $س^٢ = -٢$)

$س = ٣$، $ص = -\sqrt{٢}$

$س = -٣$، $ص = \sqrt{٢}$

11) أ $د(ع) = ٢ع^٣ - ٤ع^٢ - ٥ع - ٣$

$د(٣) = ٥٤ - ٣٦ - ١٥ - ٣ = ٠$

$\therefore$ ع − ٣ عامل للدالة د(ع) من نظرية العامل.

ب $٢ع^٣ - ٤ع^٢ - ٥ع - ٣ = (ع - ٣)(أع^٢ + بع + جـ)$

$= (ع - ٣)(٢ع^٢ + بع + ١)$

$= ٢ع^٣ + بع^٢ + ع - ٦ع^٢ - ٣بع - ٣$

$= ٢ع^٣ + (ب - ٦)ع^٢ + (١ - ٣ب)ع - ٣$

ساوِ بين معاملات $ع^٢$ لتحصل على $-٤ = ب - ٦$، أي أن: $ب = ٢$

$\therefore$ العامل التربيعي لـ $٢ع^٣ \; ٤ع^٢ - ٥ع - ٣$ هو: $٢ع^٢ + ٢ع + ١$

$٢ع^٣ - ٤ع^٢ - ٥ع - ٣ = ٠$

$(ع - ٣)(٢ع^٢ + ٢ع + ١) = ٠$

$ع = ٣$ أو $٢ع^٢ + ٢ع + ١ = ٠$

باستخدام الصيغة التربيعية حيث أ = ٢، ب = ٢، جـ = ١:

$$ع = \frac{-٢ \pm \sqrt{٢^٢ - ٤(٢)(١)}}{٢(٢)}$$

$$ع = \frac{-٢ \pm \sqrt{-٤}}{٤}$$

$$= -\frac{١}{٢} \pm \frac{ت}{٢}$$

جذور المعادلة $٢ع^٣ - ٤ع^٢ - ٥ع - ٣ = ٠$ هي: $ع_١ = ٣$، $ع_٢ = -\frac{١}{٢} + \frac{ت}{٢}$، $ع_٣ = -\frac{١}{٢} - \frac{ت}{٢}$

١٢) $\because$ ع$_١$ ع$_٢$ = ٢١ + ت، $\therefore$ ع$_٢$ = $\frac{٢١ + ت}{ع_١}$

$= \frac{٢١ + ت}{٥ - ٣ت}$

$= \frac{(٢١ + ت)(٥ + ٣ت)}{(٥ - ٣ت)(٥ + ٣ت)}$

$= \frac{١٠٥ + ٦٨ت + ٣ت^٢}{٢٥ + ٩}$

$= \frac{١٠٢ + ٦٨ت}{٣٤}$

$= ٣ + ٢ت$

١٣) $(٣ع + ١)^٣ = -٢٧$

$(٣ع + ١)^٣ = -٢٧$

$٣ع + ١ = -٣\sqrt[٣]{١}$

$٣ع + ١ = -٣ \times ١$، $٣ع + ١ = -٣ \times \left(-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}ت}{٢}\right)$، $٣ع + ١ = -٣ \times \left(-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}ت}{٢}\right)$

$٣ع + ١ = -٣$، $٣ع + ١ = \frac{٣}{٢} - \frac{٣\sqrt{٣}ت}{٢}$، $٣ع + ١ = \frac{٣}{٢} + \frac{٣\sqrt{٣}ت}{٢}$

$٣ع = -٤$، $٣ع = \frac{١}{٢} - \frac{٣\sqrt{٣}ت}{٢}$، $٣ع = \frac{١}{٢} + \frac{٣\sqrt{٣}ت}{٢}$

$ع = -\frac{٤}{٣}$، $ع = \frac{١}{٦} - \frac{\sqrt{٣}ت}{٢}$، $ع = \frac{١}{٦} + \frac{\sqrt{٣}ت}{٢}$

تذكّر أن الجذور التكعيبية للواحد هي: ١، $-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}ت}{٢}$، $-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}ت}{٢}$

١٤) أ) د(ح) = $٢ح^٤ + ٥ح^٣ - ٢ح^٢ + ح - ٦$

د(−٣) = $٢(-٣)^٤ + ٥(-٣)^٣ - ٢(-٣)^٢ + (-٣) - ٦$

$= ١٦٢ - ١٣٥ - ١٨ - ٣ - ٦ = ٠$

فيكون ح + ٣ عامل للدالة د(ح) من نظرية العامل.

ب) $\because$ ح = ١ جذرًا للمعادلة. $\therefore$ (ح − ١) عامل.

(ح + ٣) عامل،

$٢ح^٤ + ٥ح^٣ - ٢ح^٢ + ح - ٦ = (ح - ١)(ح + ٣)(أح^٢ + ب ح + جـ)$

$= (ح^٢ + ٢ح - ٣)(أح^٢ + ب ح + جـ)$ بالملاحظة: أ = ٢، جـ = ٢

$= (ح^٢ + ٢ح - ٣)(٢ح^٢ + ب ح + ٢)$

$= ٢ح^٤ + (٤ + ب)ح^٣ + (٢ب - ٤)ح^٢ + (٤ - ٣ب)ح - ٦$

ساوِ بين معاملات لتحصل على: ٥ = ٤ + ب، أي أن: ب = ١

وعليه، $٢ح^{٤} + ٥ح^{٣} - ٢ح^{٢} + ح - ٦ = (ح^{٢} + ٢ح - ٣)(٢ح^{٢} + ح + ٢)$

نجد جذور $٢ح^{٢} + ح + ٢$ من $٢ح^{٢} + ح + ٢ = ٠$

باستخدام الصيغة التربيعية، حيث أ = ٢، ب = ١، جـ = ٢:

$$ح = \frac{-١ \pm \sqrt{١^{٢} - ٤(٢)(٢)}}{٤}$$

$$= \frac{-١ \pm \sqrt{-١٥}}{٤}$$

$$= -\frac{١}{٤} \pm \frac{ت\sqrt{١٥}}{٤}$$

١٥) أ $ع = -\frac{٣}{٢} + \frac{\sqrt{٧}}{٢}ت$

$$\left(-\frac{٣}{٢} + \frac{\sqrt{٧}}{٢}ت\right)^{٢} + ل\left(-\frac{٣}{٢} + \frac{\sqrt{٧}}{٢}ت\right) + ك = ٠$$

$$\frac{٩}{٤} - \frac{٣\sqrt{٧}}{٢}ت + \frac{٧}{٤}ت^{٢} - \frac{٣}{٢}ل + \frac{\sqrt{٧}}{٢}ل\,ت + ك = ٠$$

$$\frac{٩}{٤} - \frac{٣\sqrt{٧}}{٢}ت - \frac{٧}{٤} - \frac{٣}{٢}ل + \frac{\sqrt{٧}}{٢}ل\,ت + ك = ٠$$

$$\left(\frac{١}{٢} - \frac{٣}{٢}ل + ك\right) + \left(\frac{\sqrt{٧}}{٢}ل - \frac{٣\sqrt{٧}}{٢}\right)ت = ٠$$

ساوِ الأجزاء الحقيقية لتحصل على:

$$\frac{١}{٢} - \frac{٣}{٢}ل + ك = ٠$$

$٢ك - ٣ل = -١$ .... (١)

ساوِ الأجزاء التخيّلية لتحصل على:

$$\frac{\sqrt{٧}}{٢}ل - \frac{٣\sqrt{٧}}{٢} = ٠$$

$ل = ٣$

من المعادلة (١) ينتج أن:

$٢ك - ٩ = -١$

$٢ك = ٨$

$ك = ٤$

ب $\left| -\frac{٣}{٢} + \frac{\sqrt{٧}}{٢} ت \right|$

$$= \sqrt{\left(-\frac{٣}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{\sqrt{٧}}{٢}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{٩}{٤} + \frac{٧}{٤}}$$

$$= \sqrt{٤}$$

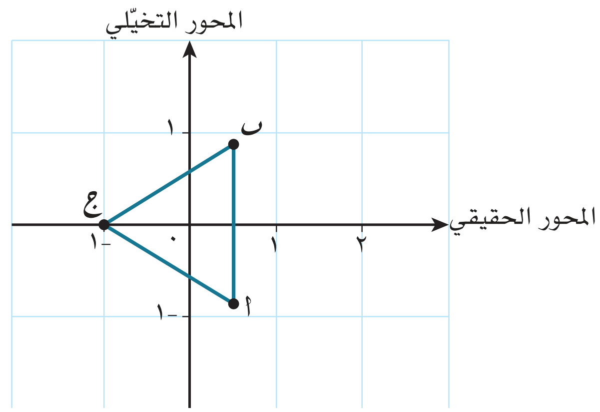
$$= ٢$$

١٦) أ $ع^{٣} = -١$

$$ع = -١ \times ١ ،\ -١ \times \left(-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت\right) ،\ -١ \times \left(-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت\right)$$

$$ع = -١ ،\ ع = \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت ،\ \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$$

ب



المثلث أ ب ج متطابق الأضلاع.

١٧) أ $ع = \sqrt{٥} - ت$

$$ع^{*} = \sqrt{٥} + ت$$

$$\frac{ع}{ع^{*}} = \frac{(\sqrt{٥} - ت)}{(\sqrt{٥} + ت)}$$

$$= \frac{(\sqrt{٥} - ت)(\sqrt{٥} - ت)}{(\sqrt{٥} + ت)(\sqrt{٥} - ت)}$$

$$= \frac{٥ - ٢\sqrt{٥} ت + ت^{٢}}{٥ - ت^{٢}}$$

$$= \frac{٤ - ٢\sqrt{٥} ت}{٦}$$

$$= \frac{٢}{٣} - \frac{\sqrt{٥}}{٣} ت$$

ب $\left|\frac{ع}{ع^*}\right| = \left|\frac{٢}{٣} - \frac{\sqrt{٥}ت}{٣}\right| = \sqrt{\left(\frac{٢}{٣}\right)^٢ + \left(\frac{\sqrt{٥}}{٣}\right)^٢}$

$= \sqrt{\frac{٤}{٩} + \frac{٥}{٩}}$

$= ١$

السعة للعدد المركب $\left(\frac{٢}{٣} - \frac{\sqrt{٥}ت}{٢}\right) = - ظا^{-١}\left(\frac{\sqrt{٥}}{٢}\right) = -٠,٨٤١$

ج لاحظ أنه إذا كان ح ، $ح^*$ جذرَين لكثيرة حدود، فإن (ع − ح)، $(ع - ح^*)$ عاملان لكثيرة الحدود، وبالمثل (ع − ح) $(ع - ح^*)$ عامل أيضًا .

$$\left(ع - \left(\frac{٢}{٣} - \frac{\sqrt{٥}ت}{٣}\right)\right)\left(ع - \left(\frac{٢}{٣} + \frac{\sqrt{٥}ت}{٣}\right)\right) = ٠$$

$$ع^٢ - \left(\frac{٢}{٣} - \frac{\sqrt{٥}ت}{٣} + \frac{٢}{٣} + \frac{\sqrt{٥}ت}{٣}\right)ع - \left(\frac{٢}{٣} - \frac{\sqrt{٥}ت}{٣}\right)\left(\frac{٢}{٣} + \frac{\sqrt{٥}ت}{٣}\right) = ٠$$

$$ع^٢ - \frac{٤}{٣}ع + \left(\frac{٤}{٩} - \frac{٥ت^٢}{٩}\right) = ٠$$

$$ع^٢ - \frac{٤}{٣}ع + ١ = ٠$$

$$٣ع^٢ - ٤ع + ٣ = ٠$$

---

١٨) **أ** $ع = \frac{ك - ٤ت}{٢ك - ت} = \frac{(ك - ٤ت)(٢ك + ت)}{(٢ك - ت)(٢ك + ت)}$

$= \frac{٢ك^٢ - ٧كت - ٤ت^٢}{٤ك^٢ - ت^٢}$

$= \frac{٢ك^٢ + ٤ - ٧كت}{٤ك^٢ + ١}$

$= \frac{٢ك^٢ + ٤}{٤ك^٢ + ١} - \frac{٧كت}{٤ك^٢ + ١}$

ساوِ الأجزاء التخيّلية، فينتج أن:

$- \frac{٧ك}{٤ك^٢ + ١} = \frac{٧}{٥}$

$-٣٥ك = ٢٨ك^٢ + ٧$

$٢٨ك^٢ + ٣٥ك + ٧ = ٠$

$٤ك^٢ + ٥ك + ١ = ٠$

$(٤ك + ١)(ك + ١) = ٠$

وحيث إن ك عدد صحيح، فإن:

$ك = -١$

ب من الجزئية (أ):

$ع = \frac{٢ك^٢ + ٤}{٤ك^٢ + ١} - \frac{٧كت}{٤ك^٢ + ١}$

بالتعويض عن قيمة ك = −١

الجزء الحقيقي (ع) $= \frac{٢ك^٢ + ٤}{٤ك^٢ + ١} = \frac{٦}{٥}$

$ع = \frac{٦}{٥} + \frac{٧}{٥}ت$

السعة للعدد المركب ع $= ظا^{-١}\left(\frac{٧}{٦}\right) = ٠,٨٦٢$

١٩) ح = أ + ب ت

ح = أ − ب ت

٣(أ + ب ت) + ٢ت(أ − ب ت) = ١٧ + ٨ت

٣أ + ٣ب ت + ٢أ ت + ٢ب = ١٧ + ٨ت

٣أ + ٢ب + (٢أ + ٣ب) ت = ١٧ + ٨ت

ساوِ الأجزاء الحقيقية، فينتج:

٣أ + ٢ب = ١٧ .... (١)

ساوِ الأجزاء التخيّلية، فينتج:

٢أ + ٣ب = ٨ .... (٢)

٢ × (١) يعطي ٦أ + ٤ب = ٣٤ .... (٣)

٣ × (٢) يعطي ٦أ + ٩ب = ٢٤ .... (٤)

(٤) − (٣) يعطي:

٥ب = −١٠

ب = −٢

٢أ − ٦ = ٨

أ = ٧

ح = ٧ − ٢ت

٢٠) ق + ٢ف = ٢ت

ت ق + ٢ت ف = ٢ت^{٢}

ت ق + ٢ ت ف = −٢ .... (١)

ت ق + ف = ٣ .... (٢)

أوجد (٢) − (١):

ف (١ − ٢ت) = ٥

ف = $\frac{\text{٥}}{\text{١ − ٢ت}}$

= $\frac{\text{٥(١ + ٢ت)}}{\text{(١ − ٢ت) (١ + ٢ت)}}$

= $\frac{\text{٥ + ١٠ت}}{\text{٥}}$

= ١ + ٢ت

ق = ٢ت − ٢ف

= ٢ت − ٢(١ + ٢ت)

= ٢ت − ٢ − ٤ت

= −٢ − ٢ت

٢١) أ ح = $\frac{\text{(١ + ت) + ت}}{\text{ت (١ + ت) + ٢}}$

= $\frac{\text{١ + ٢ت}}{\text{−١ + ٢ + ت}}$

= $\frac{\text{١ + ٢ت}}{\text{١ + ت}}$

= $\frac{\text{(١ + ٢ت)(١ − ت)}}{\text{(١ + ت)(١ − ت)}}$

= $\frac{\text{٣ + ت}}{\text{٢}}$

= $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ + $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ت

ب ع = $\frac{\text{ع + ت}}{\text{ت ع + ٢}}$

ت ع^{٢} + ٢ع = ع + ت

ت ع^{٢} + ع − ت = ٠

افترض أن ع = س + ت ص

ت (س + ت ص)^{٢} + س + ت ص − ت = ٠

ت (س^{٢} + ٢س ص ت + ت^{٢}ص^{٢}) + س + ت ص − ت = ٠

ت س^{٢} + ٢س ص ت^{٢} − ت ص^{٢} + س + ت ص − ت = ٠

−٢س ص + س + (س^{٢} − ص^{٢} + ص − ١) ت = ٠

ساوِ الأجزاء الحقيقية لتحصل على:

−٢س ص + س = ٠

س (١ − ٢ص) = ٠

س = ٠ أو ص = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$

الجزء الحقيقي لـ ع سالب، فإن س $\neq$ ٠

فيكون ص = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$

ساوِ الأجزاء التخيّلية لتحصل على:

$س^٢ - ص^٢ + ص - ١ = ٠$

$س^٢ - \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ + \frac{١}{٢} - ١ = ٠$

$س^٢ = \frac{٣}{٤}$

$س = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

وحيث $س < ٠$، فإن

$س = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ويكون $ع = -\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}ت$

الوحدة الثامنة:

التوزيع الطبيعي

The normal distribution

مخطط توزيع الدروس

الدرس	الموضوع	عدد الحصص	الأهداف التعليمية	المفردات
٨-١ (PPT)	المتغير العشوائي المتصل والمنحنى الطبيعي	٢	٨-١ يعرّف خصائص المتغير العشوائي المتصل، ويستخدم التوزيع الطبيعي لتمثيل المتغير العشوائي المتصل حيث يكون مناسبًا.	المتغير العشوائي المتصل، دالة كثافة الاحتمال، المنحنى الطبيعي
٨-٢	التوزيع الطبيعي	٢	٨-٢ يتذكّر خصائص التوزيع الطبيعي. ٨-٣ يستخدم جدول التوزيع الطبيعي، عندما $ز \sim ط(٠، ١)$ لإيجاد: • قيمة ل$(ز > ز_١)$، أو قيمة احتمال متعلِّقة بها. • قيمة $ز_١$ بمعلومية قيمة ل$(ز > ز_١)$، أو قيمة احتمال متعلِّقة بها.	التوزيع الطبيعي، المقاييس، المتغير الطبيعي المعياري
٨-٣	معيارية التوزيع الطبيعي		٨-٤ يستخدم جدول التوزيع الطبيعي ليحل المسائل المتعلقة بالمتغير س، حيث $س \sim ط(و، ع^٢)$، بما في ذلك إيجاد: • قيمة ل$(س > س_١)$، أو قيمة احتمال متعلّق بذلك، بمعلومية قيم $س_١$، و، ع. • قيمة $س_١$، و، ع إذا علمت قيمة ل$(س > س_١)$، أو قيمة احتمال متعلّق بذلك.	
٨-٣أ	معيارية التوزيع الطبيعي لإيجاد الاحتمالات	٢	٨-٤ يستخدم جدول التوزيع الطبيعي ليحل المسائل المتعلقة بالمتغير س، حيث $س \sim ط(و، ع^٢)$، بما في ذلك إيجاد: • قيمة ل$(س > س_١)$، أو قيمة احتمال متعلّق بذلك، بمعلومية قيم $س_١$، و، ع. • قيمة $س_١$، و، ع إذا علمت قيمة ل$(س > س_١)$، أو قيمة احتمال متعلّق بذلك.	المعيارية، الدرجة (القيمة) (ز)
٨-٣ب	معيارية التوزيع الطبيعي لإيجاد و، ع، س	٢	٨-٤ يستخدم جدول التوزيع الطبيعي ليحل المسائل المتعلقة بالمتغير س، حيث $س \sim ط(و، ع^٢)$، بما في ذلك إيجاد: • قيمة ل$(س > س_١)$، أو قيمة احتمال متعلّق بذلك، بمعلومية قيم $س_١$، و، ع. • قيمة $س_١$، و، ع إذا علمت قيمة ل$(س > س_١)$، أو قيمة احتمال متعلّق بذلك.	
	تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثامنة	٢		

٨-١ المتغير العشوائي المتصل والمنحنى الطبيعي

ملاحظات للمعلّمين

تعاملنا في الصف الحادي عشر مع متغيرات عشوائية منفصلة، حيث تمكّنا من إيجاد احتمال قيم محددة للمتغيّر (س)، وإيجاد ل(س = ر). الآن نتعرّف على متغيرات عشوائية متصلة تعتمد على القياس. لا يمكننا إيجاد احتمال قيم بعينها للمتغيرات العشوائية المتصلة، ولكن يمكننا أن نجد احتمال مجال من القيم مثل ل(أ ≥ س > ب).

نجري ذلك بقياس كثافة تكرار المدرج التكراري، بحيث تساوي المساحة الكليّة ١، ثم نرسم منحنى فوق المدرج التكراري. عندها تساوي المساحة تحت المنحنى أيضًا ١، وهي مجموع الاحتمالات.

تبيّن شريحة العرض الإلكترونية ٨ كيفية القيام بذلك.

يناقش كتاب الطالب مواقف متعددة حيث يكون تماثل المنحنى الطبيعي فيها مناسبًا أو غير مناسب لتمثيل دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي متصل. ويبيّن نشاط استكشف ١ عرضًا مفيدًا يساعد الطلبة على تمييز المنحنى الطبيعي من المنحنيات الأخرى المتماثلة.

أفكار للتعليم

فيما يتعلق بالمنحنى الطبيعي، يمكن طرح تمرين للمجموعات الصغيرة مماثل للموقف الآتي:

طُلِب إلى ١٠٠ طالب أن يقيس كل منهم طول ملعب المدرسة لأقرب سنتيمتر، فتمّ تجميع البيانات في فئات طول كل منها ١ سم، وعرضت النتائج في مدرج تكراري.

ما الخواص المتوقعة للمدرج التكراري؟

ما شكل التوزيع الذي تتخيله؟

يستدعي ذلك إجراء مناقشة تتعلق بالقياسات والأخطاء، وحقيقة كون المدرج التكراري متماثلًا تقريبًا حول الوسط الحسابي لقياسات الطلبة. ينتج ذلك بسبب نقصان التقدير الذي يماثل زيادة التقدير، والنتيجة تكون قريبة من الطول الفعلي، حيث إن الأخطاء الكبيرة في القياس ستكون نادرة.

في هذا الدرس، سيتعلم الطلبة كيفية التمييز بين المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتغيرات العشوائية المتصلة، وفهم أهمية الطرق التي يمكن استخدامها لتمثيل قيمها.

يجب أن يكون الطلبة على دراية باستخدام المدرج التكراري لتمثيل قيم المتغير العشوائي المتصل، ولكن قبل محاولة حل النشاط في استكشف ١، قم بتذكيرهم بكيفية حساب كثافة التكرار لفئة من البيانات حيث تكون مساحة العمود متناسبة مع التكرار في الفئة:

$$\text{كثافة التكرار} = \frac{\text{التكرار}}{\text{طول الفئة}}.$$

ثم تتم مناقشة ميزات التوزيع الاحتمالي التي يمكن تمثيلها بمنحنى متماثل على شكل جرس (يتم رسمه من خلال النقاط الوسطى للأعمدة عند ارتفاعات كثافات التكرار) بشيء من التفصيل.

من خلال مقارنة مجموعتين من البيانات الموزعة توزيعًا طبيعيًا، يوضح المثالان ١، ٢ كيف تحدد قيمة الوسط موضع المنحنى الطبيعي، وكيف يحدد الانحراف المعياري شكل (الارتفاع والطول) للمنحنى الطبيعي.

في التمرين ١ من تمارين ٨-١، يُطلب من الطلبة التمييز بين المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة. في التمرينين ٢، ٣ سيتذكرون خصائص هذه الأنواع من التوزيعات من منحنيات طبيعية معطاة. تتطلب التمارين من ٤ إلى ٦ من الطلبة تطبيق معرفتهم بميزات مجموعات البيانات الموزعة توزيعًا طبيعيًا لرسم المنحنيات الطبيعية، ومعرفة أوجه التشابه والاختلاف بين هذه المنحنيات.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ١

١)

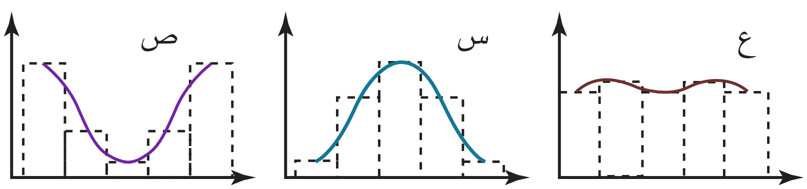
ع	٣ ≤ ع < ٦	٦ ≤ ع < ٩	٩ ≤ ع < ١٢	١٢ ≤ ع < ١٥	١٥ ≤ ع < ١٨
التكرار (ت)	٢٤	٢٧	٢٤	٢٧	٢٤
كثافة التكرار	$\frac{٢٤}{٦-٣} = ٨$	٩	٨	٩	٨

س	٢ ≤ س < ٦	٦ ≤ س < ١٠	١٠ ≤ ع < ١٤	١٤ ≤ س < ١٨	١٨ ≤ س < ٢٢
التكرار (ت)	١٢	٥٦	٨٠	٥٦	١٢
كثافة التكرار	$\frac{١٢}{٦-٢} = ٣$	١٤	٢٠	١٤	٣

ص	١ ≤ ص < ٦	٦ ≤ ص < ١١	١١ ≤ ص < ١٦	١٦ ≤ ص < ٢١	٢١ ≤ ص < ٢٦
التكرار (ت)	٢٥	١٥	٥	١٥	٢٥
كثافة التكرار	$\frac{٢٥}{٦-١} = ٥$	٣	١	٣	٥

٢) و ٣)

جميع الجداول تحوي ٥ فئات متساوية الطول، وارتفاعاتها معطاة بكثافة التكرار. لاحظ أن المبيّن أدناه مجرد رسوم، ونحن مهتمون فقط بشكل المنحنيات، لذلك لا ضرورة لوجود تسميات أو أعداد.



٤) جميعها لها محور تماثل رأسي.

٥) س فقط.

دعم الطلبة

قد تطلب إلى الطلبة القيام بتجربة مثل تقدير درجة حرارة غرفة الصف أو قياس عرض غرفة الصف (يُسمح لكل طالب بإعطاء أكثر من تقدير واحد، لتصبح بيانات العيّنة كبيرة نسبيًا). إن رسم مدرج تكراري للنتائج يوضّح للطلبة شكل التوزيع.

تحدّي الطلبة

يُعدّ التمرين ٦ الوارد في تمارين ٨-١ من تمارين التحدّي للطلبة، لأنهم بحاجة إلى أن يحسبوا الوسط الحسابي، والانحراف المعياري قبل أن يرسموا المنحنى بدقة.

مصادر أخرى مفيدة

ستجد على موقع جيوجبرا GeoGebra على الرابط https://www.geogebra.org/m/fXww9z9S توضيحًا لتأثير تغيير المقياسَين (و) ، (ع) في التوزيع الطبيعي.

تتمركز قيم المتغير المتصل حول قيمة (و) على المنحنى، فزيادة أو نقصان قيمة (و) يسحب المنحنى إلى اليمين أو إلى اليسار. كما أن زيادة قيمة (ع) يُنقص ارتفاع المنحنى، ولكن المساحة تحت المنحنى لا تتغيّر. وبما أننا نتعامل في هذا الدرس مع مقادير محدودة من البيانات، فمن المعقول القول إن الزيادة في قيمة (ع) توسّع المنحنى، والعكس صحيح.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٨–١

٨-٢ التوزيع الطبيعي

ملاحظات للمعلِّمين

يركز هذا الدرس في البداية على الخصائص الأساسية للتوزيع الطبيعي كما هو مبيّن في الجدول الآتي:

الخصائص	الاحتمالات
نصف القيم أصغر من الوسط الحسابي. نصف القيم أكبر من الوسط الحسابي.	ل(س > و) = ل(س ⩾ و) = ٠,٥ ل(س < و) = ل(س ⩽ و) = ٠,٥
٦٨,٢٦ ٪ تقريبًا من القيم تقع بمقدار انحراف معياري واحد عن الوسط الحسابي.	ل(و − ع > س ⩾ و + ع) = ٠,٦٨٢٦
٩٥,٤٤٪ تقريبًا من القيم تقع بمقدار انحرافَين معياريَّين عن الوسط الحسابي.	ل(و − ٢ع > س ⩾ و + ٢ع) = ٠,٩٥٤٤
٩٩,٧٤٪ تقريبًا من القيم تقع بمقدار ٣ انحرافات معيارية عن الوسط الحسابي.	ل(و − ٣ع > س ⩾ و + ٣ع) = ٠,٩٩٧٤

النقطة الرئيسية التي يجب أن يتمسك بها الطلبة هي أنه مهما كانت قيم (و)، (ع)، فإن احتمالات القيم في التوزيع الطبيعي التي تقع ضمن عدد محدد من الانحرافات المعيارية عن الوسط الحسابي ثابتة.

معادلة منحنى المتغير العشوائي الطبيعي س ~ ط(و، ع^{٢}) هي:

$$\text{د(س)} = \frac{١}{\text{ع}\sqrt{٢\pi}} \times \text{هـ}^{-\frac{(\text{س}-\text{و})^{٢}}{٢\text{ع}^{٢}}}$$ ؛ لجميع قيم س الحقيقية.

معادلة منحنى المتغيّر الطبيعي المعياري ز ~ ط(٠، ١) هي:

$$\text{د(س)} = \frac{١}{\sqrt{٢\pi}} \times \text{هـ}^{-\frac{\text{س}^{٢}}{٢}}$$ ؛ لجميع قيم س الحقيقية.

قد يتفاجأ الطلبة عند علمهم بأن إيجاد تكامل الدالة لحساب المساحة تحت المنحنى ليس مطلوبًا منهم؛

وذلك لوجود عدد لانهائي للقيم الممكنة للمقياسَين (الوسط الحسابي والتباين)، لذا فالشيء العملي والأكثر فاعلية هو معيارية المنحنيات الطبيعية ليكون وسطها الحسابي ٠، وتباينها ١

إن قراءة واستخدام جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري مبيّن ومعروض بشكل تفصيلي في كتاب الطالب.

ملاحظة حول استخدام الحاسبة:

إضافة إلى استخدام الجدول، تستطيع بعض الآلات الحاسبة العصرية إعطاء قيم د (ز).

لاكتشاف ذلك، عليك الرجوع إلى دليل آلتك الحاسبة، حيث لا تستخدم جميع نماذج الآلات الحاسبة المفاتيح والرموز نفسها. ومن المعروف أيضًا أن بعض الآلات الحاسبة تنتج قيمًا غير مطابقة لتلك الواردة في الجدول.

يتم الحصول على قيم د(ز) المستخدمة في الأمثلة، والأسئلة في هذه الوحدة من الجدول، وليس من الآلة الحاسبة.

أفكار للتعليم

اطلب إلى الطلبة استخدام المعلومات المعطاة في الجدول أدناه عند حساب الاحتمالات (النسب المئوية للقيم التي تقع فيها القيم ضمن أيّ من الفترات التالية (تم تظليل الإجابات).

من المفيد أيضًا أن يُطلب إلى الطلبة رسم المنحنى الطبيعي في كلّ حالة، وتسميته بقيم مناسبة (شبيهة بالقيم المشار إليها من الجزئية (أ) إلى الجزئية (و) في كتاب الطالب).

الفترات	الاحتمال	النسبة المئوية (٪)
ل(و < س ≤ و + ع) ل(و − ع < س ≤ و)	$\frac{١}{٢}$ × ٠,٦٨٢٦ = ٠,٣٤١٣	٣٤,١٣
ل(و < س ≤ و + ٢ع) ل(و − ٢ع < س ≤ و)	$\frac{١}{٢}$ × ٠,٩٥٤٤ = ٠,٤٧٧٢	٤٧,٧٢
ل(و < س ≤ و + ٣ع) ل(و − ٣ع < س ≤ و)	$\frac{١}{٢}$ × ٠,٩٩٧٤ = ٠,٤٩٨٧	٤٩,٨٧
ل(و + ع < س ≤ و + ٢ع) ل(و − ٢ع < س ≤ و − ع)	$\frac{١}{٢}$ × (٠,٩٥٤٤ − ٠,٦٨٢٦) = ٠,١٣٥٩	١٣,٥٩
ل(و + ع < س ≤ و + ٣ع) ل(و − ٣ع < س ≤ و − ع)	$\frac{١}{٢}$ × (٠,٩٩٧٤ − ٠,٦٨٢٦) = ٠,١٥٧٤	١٥,٧٤
ل(و + ٢ع < س ≤ و + ٣ع) ل(و − ٣ع < س ≤ و − ٢ع)	$\frac{١}{٢}$ × (٠,٩٩٧٤ − ٠,٩٥٤٤) = ٠,٠٢١٥	٢,١٥
ل(و − ع < س ≤ و + ٢ع) ل(و − ٢ع < س ≤ و + ع)	$\frac{١}{٢}$ × (٠,٦٨٢٦ + ٠,٩٥٤٤) = ٠,٨١٨٥	٨١,٨٥
ل(و − ع < س ≤ و + ٣ع) ل(و − ٣ع < س ≤ و + ع)	$\frac{١}{٢}$ × (٠,٦٨٢٦ + ٠,٩٩٧٤) = ٠,٨٤٠٠	٨٤,٠٠
ل(و − ٢ع < س ≤ و + ٣ع) ل(و − ٣ع < س ≤ و + ٢ع)	$\frac{١}{٢}$ × (٠,٩٥٤٤ + ٠,٩٩٧٤) = ٠,٩٧٥٩	٩٧,٥٩

يوضح المثال ٣ كيفية استخدام جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد قيمة د(ز) باستخدام قيمة معطاة لـ ز، ثم توضح الأمثلة ٤، ٥، ٦ الربط بين قيم د(ز) والاحتمالات.

يشرح المثال ٧ كيفية قراءة جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري بالعكس، من خلال إيجاد قيمة ز باستخدام قيمة معطاة لـ د(ز). بعدها يتم تطبيق ذلك في المثال ٨

يرد التطبيق العملي لاستخدام الجدول في المثال ٩

في التمرين ١ من تمارين ٨-٢، يستخدم الطلبة الجدول لإيجاد قيم د(ز) باستخدام قيم معطاة لـ ز.

في التمرين ٢، يستخدم الطلبة الجدول بالعكس لإيجاد قيم ز باستخدام قيم معطاة لـ د(ز).

في التمرينين ٣، ٤، يستخدم الطلبة الجدول لإيجاد احتمالات مدى قيم لـ ز.

في التمارين من ٥ إلى ٧، يستخدم الطلبة الجدول بالعكس لإيجاد قيم ز استنادًا إلى الاحتمالات المعطاة.

يتضمّن التمرينان ٨، ٩ تطبيقًا عمليًا لاستخدام الجدول.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ٢

١)

المتغير	النسبة المئوية للقيم بين (و – ع)، (و + ع)
(أ)	٦٠٪
(ب)	٦٨,٢٦ ٪
(ج)	٧٠٪

٢) نعم، الترتيب الصحيح هو (ب)، (ج)، (أ) (اعتمادًا على مدى قربها من ٦٨,٢٦٪ من المشاهدات ضمن انحراف معياري واحد عن الوسط الحسابي).

٣) أ ح = ٠,٩٥٤٤ × ٥٠٠٠ = ٤٧٧٢

ب ط = ١١٣٥٨ ÷ ٠,٩٩٧٢ = ١١٣٨٩ أو ١١٣٩٠

ج ٨٤ إلى ٩٦ من (و + ١ع) إلى (و + ٢ع).

ف ٪ = $\frac{٩٥,٤٤ - ٦٨,٢٦}{٢}$ ٪ = ١٣,٥٩ ٪ ∴ ف = ١٣,٥٩

د ٨٤ إلى ٤٨ من (و – ٢ع) إلى (و + ٢ع) ∴ ك = $\frac{٨٤,١٣ - ٢,٢٨}{١٠٠}$ × ٩٦٨٠

= ٠,٨١٨٥ × ٩٦٨٠

= ٧٩٢٣

دعم الطلبة

قد يكون هذا الجدول غير واضح لبعض الطلبة، وتحتاج إلى تدريبات إضافية قبل استخدامها في حلّ مسائل هذا الدرس.

إليك جدولًا يمكنك أن تطلب إليهم ملأه (تم تظليل الإجابات).

قيمة (ز)	قيمة د (ز)
٠,٦	٠,٧٢٥٧
٠,٧١	٠,٧٦١١
٠,٨٣	٠,٧٩٦٧
٠,٩١	٠,٨١٨٦
١,٤٧	٠,٩٢٩٢
٢,١٠	٠,٩٨٢١
٠,٤	٠,٦٥٥٤
٠,٥١	٠,٦٩٥٠
٠,٨٨	٠,٨١٠٦
٠,٩٠	٠,٨١٥٩
١,٣٥	٠,٩١١٥
٢,١٤	٠,٩٨٣٨

عندما يبدأ الطلبة بحلّ المسائل المتعلقة بالمتغير الطبيعي المعياري لإيجاد الاحتمالات أو قيم ز، يجب تشجيعهم على رسم أشكال تتضمن منحنيات طبيعية عليها القيم المناسبة. تكمن الاستفادة من القيام بذلك في أن هذه المنحنيات تمكنهم من ملاحظة ما إذا كان الاحتمال أكبر من ٠,٥ أو أقل منه. يضعهم ذلك في مكان أفضل عند التعامل مع الدرس اللاحق، حيث عليك الإصرار على أن يتضمن حلّ كلّ تمرين شكلًا يدعم الحل.

تحدّي الطلبة

سيواجه الطلبة تحديات مع التمارين التي تتطلب إيجاد ل(أ ⩽ ز > ب)، بخاصة عندما يكون أ أو كلٌّ من أ، ب أصغر من صفر. يمكن الانتقال إلى الأمثلة ٥، ٦، ٨، ٩ للمساعدة على استيعاب فكرة الحل.

مصادر أخرى مفيدة

يسمح لك مصدر The Standard Normal Distribution Table على الرابط :

https://www.mathsisfun.com/data/standard-normal-distribution-table.html في موقع Math Is Fun أن تتعامل مع التوزيع الطبيعي، ويوضّح أيضًا كيفية العمل في جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٨-٢

٨-٣ معيارية التوزيع الطبيعي

٨-٣أ معيارية التوزيع الطبيعي لإيجاد الاحتمالات

ملاحظات للمعلِّمين

قبل أن تبدأ بهذا الجزء من الدرس، من الضروري أن يمتلك الطلبة فهمًا واضحًا للربط بين الاحتمالات، وعدد الانحرافات المعيارية عن الوسط الحسابي، لأن العمل في الدرسَين ٨ - ٣أ، ٨ - ٣ب يعتمد على الخاصيّة المهمة للتوزيع الطبيعي (هذه الاحتمالات تعتمد فقط على عدد الانحرافات المعيارية بين القيمة، والوسط الحسابي).

أفكار للتعليم

على الرغم من أن الصيغة $\left(ز = \frac{س - و}{ع}\right)$ لإيجاد الدرجة (ز) معطاة، ومُشار إليها عدة مرات في كتاب الطالب، إلا أنه عليك إعطاء الطلبة الفرصة ليتعاملوا معها بأنفسهم. وعند نجاحهم في ذلك، ستحتاج فقط إلى تحويلها إلى الصيغة $ز = \frac{س - و}{ع}$.

إليك ثلاث مجموعات من التمارين يمكنك تقديمها للطلبة ليتمكنوا من تحقيق وإتقان الصيغة أعلاه.

في البداية، زوّد الطلبة بالمعلومات في العمود الأول والثاني والثالث حتى يتمكنوا من إكمال العمودَين الرابع والخامس مبيّنين عملهم للإجابة التي يحصلون عليها في العمود السادس.

بعد أن ينهي الطلبة منفردين حل هذا الجزء من النشاط، أدر نقاشًا جماعيًا لتكملة ملء العمود السادس، ووجّههم للتوصل إلى الصيغة $ز = \frac{س - و}{ع}$.

في كلّ حالة من الحالات الآتية، يتبع المتغيّر العشوائي المتصل (س) توزيعًا طبيعيًا:

الوسط الحسابي (و)	الانحراف المعياري (ع)	قيمة (س)	يمين (أكبر من) أو يسار (أصغر من) (و)	عدد الانحرافات المعيارية / الدرجة المعيارية (ز)	الحسابات
٢٠	٨	٢٨	يمين (أكبر من)	+١	$\frac{٢٨ - ٢٠}{٨}$
٢٠	٨	١٢	يسار (أصغر من)	−١	$\frac{١٢ - ٢٠}{٨}$
٢٠	٨	٢٠	غير ذلك	٠	$\frac{٢٠ - ٢٠}{٨}$
٣٦	١٠	٥١	يمين (أكبر من)	+١٫٥	$\frac{٥١ - ٣٦}{١٠}$
٣٦	١٠	١٦	يسار (أصغر من)	−٢	$\frac{١٦ - ٣٦}{١٠}$

(يتبع)

الوسط الحسابي (و)	الانحراف المعياري (ع)	قيمة (س)	يمين (أكبر من) أو يسار (أصغر من) (و)	عدد الانحرافات المعيارية / الدرجة المعيارية (ز)	الحسابات
٣٦	١٠	٤١	يمين (أكبر من)	+٠,٥	$\frac{٤١ - ٣٦}{١٠}$
٨٣	٢٤	٨٩	يمين (أكبر من)	+٠,٢٥	$\frac{٨٩ - ٨٣}{٢٤}$
٨٣	٢٤	٦٥	يسار (أصغر من)	−٠,٧٥	$\frac{٦٥ - ٨٣}{٢٤}$
٨٣	٢٤	١١٤,٢	يمين (أكبر من)	+١,٣	$\frac{١١٤,٢ - ٨٣}{٢٤}$
٨٣	٢٤	١٨,٢	يسار (أصغر من)	−٢,٧	$\frac{١٨,٢ - ٨٣}{٢٤}$

انتبه إلى أن بعض الطلبة يطرحون العدد الصغير من العدد الكبير في جميع الحالات، الأمر الذي يجعل الدرجة (ز) السالبة دائمًا موجبة.

دعم الطلبة

إذا واجه أحد الطلبة صعوبة في حساب الدرجة (ز)، فأعطهم قيمًا صحيحة لكلّ من و، ع، مثل ١١، ٣ على الترتيب، واطلب إليهم أن يجدوا مجموعة قيم (و − ٣ع)، (و − ٢ع)، (و − ع)، (و)، (و + ع)، (و + ٢ع)، (و + ٣ ع). لاحظ أن الأعداد في هذه الحالة تمثل متتالية حسابية (٢، ٥، ٨ ، ١١، ١٤ ،١٧، ٢٠)، الأمر الذي يساعد الطلبة على الفهم. ٢٠٦

لا بد من توجيه الطلبة دائمًا إلى أهمية أن تتضمن حلولهم أشكالًا توضيحية لكل تمرين. فعلى الرغم من أن المخطط ليس جزءًا مطلوبًا من الحل، إلا أنه ليس مفيدًا لهم فقط، بل يجعل الأمر سهلًا على المعلم عندما يتتبع الخطأ الذي يقومون به، ويبلغهم بالخطوة التي ارتكبوا الخطأ عندها خلال عملهم. في التمرين ١ من تمارين ٨-٣أ، يحصل الطلبة على الفرصة لحساب القيم المعيارية (الدرجة (ز)). وفي التمرينين ٢، ٣، يقوم الطلبة بحساب قيمة (ز)، ثم إيجاد الاحتمالات باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري، إذ يتم توفير المخططات في التمرين ٢، ولكن في التمرين ٣ يحتاج الطلبة إلى رسم المخططات الخاصة بهم.

إذا كان بعض الطلبة يتعلمون بالطريقة البصرية، فاعتمد الحلّين الآتيَين للتمرين:

"إذا علمت أن س ~ ط (١٦، ٧)، فأوجد ل (١٢ < س ≤ ٢١) "باستخدام إحدى الطريقتَين الآتيتَين:

الطريقة ١:

ل (١٢ < س ≤ ٢١) = ل (١٢ < س ≤ ١٦) + ل (١٦ < س ≤ ٢١)

$$= \left(د\left(\frac{١٦ - ١٦}{\sqrt{٧}}\right) - د\left(\frac{١٢ - ١٦}{\sqrt{٧}}\right)\right) + \left(د\left(\frac{٢١ - ١٦}{\sqrt{٧}}\right) - د\left(\frac{١٦ - ١٦}{\sqrt{٧}}\right)\right)$$

= د (٠) − د (−١,٥١) + د (١,٨٩) − د (٠)

= ٠,٥ − (١ − ٠,٩٣٤٥) + ٠,٩٧٠٦ − ٠,٥

= ٠,٩٠٥١

ملاحظة: يمكن حساب الاحتمال مباشرة كالآتي:

ل (١٢ < س ≤ ٢١) =

ل (س ≤ ٢١) - ل (س < ١٢)

= د (١,٨٩) - (١ - د(١,٥١))

= ٠,٩٧٠٦ - ٠,٠٦٥٥ = ٠,٩٠٥١

الطريقة ٢:

د (١,٨٩) - د (٠)

= ٠,٩٧٠٦ - ٠,٥

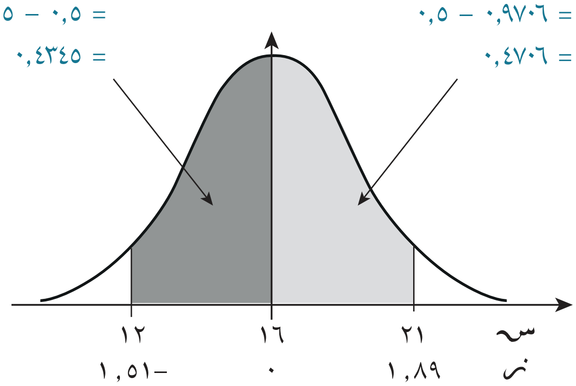
= ٠,٤٧٠٦

د (٠) - د (-١,٥١)

= ٠,٥ - (١ - ٠,٩٣٤٥)

= ٠,٥ - ٠,٠٦٥٥

= ٠,٤٣٤٥



ل (١٢ < س ≤ ٢١) = ٠,٤٣٤٥ + ٠,٤٧٠٦

= ٠,٩٠٥١

التمرين ٢ من تمارين ٨-٣أ مزوّد بالأشكال المرسومة. نأمل أن تساعد هذه الأشكال الطلبة على ملاحظة مدى فائدتها، وتشجيعهم على رسم الأشكال الخاصة بكل منهم عند حل التمارين.

تحدّي الطلبة

التمارين ٤، ٥، ٦ تحتاج إلى مهارة تبسيط العبارات التي تحوي (و) ، (ع) ليجدوا درجة (ز)، والتي تُعدّ تحديًا لغالبية الطلبة، والتمرين ٦ يتعلق بموقف من الحياة اليومية.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٨-٣أ

٨-٣ب معيارية التوزيع الطبيعي لإيجاد و، ع، س

ملاحظات للمعلِّمين

يُعدّ هذا الدرس امتدادًا للدرس السابق، حيث وجد الطلبة الاحتمالات، بينما يتضمّن إيجاد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري، والتباين أو قيمة س بمعلومية احتمال معطى. كما يتضمن مواقف تكوين معادلتَين بمجهولَين و، ع بمعلومية احتمالَين، ثم حلّ المعادلتَين لإيجاد كل من و، ع، كما في المثال ١٦ الوارد في كتاب الطالب. ذكّر الطلبة أنه عندما يجدوا قيمة أحد المجهولَين، يجب عدم استخدام القيمة المقرّبة له لإيجاد قيمة المجهول الآخر.

أفكار للتعليم

اطلب إلى الطلبة إكمال جدول مشابه للجدول الموجود في الدرس السابق (٨ – ٣أ)، حيث كان الهدف إيجاد الاحتمالات، ولكن المطلوب الآن هو إيجاد قيم و أو ع أو س (تم تظليل الإجابات).

الوسط الحسابي، (و)	الانحراف المعياري، (ع)	قيمة (س)	الدرجة (ز)
١٤	٦	٢٣	+١,٥
١٥	٨	١,٤	−١,٧
١٢,٦	٥	٢٣,٦	+٢,٢
١٤,٨	٧	٦,٤	−١,٢
١١,٧	١٠	٣٠,٢	+١,٨٥
٧٣,٧	٢٦	٧٠,٤٥	−٠,١٢٥
١٦	٤	٢٤,٤	+٢,١
١٩	٩	٣٤	$+1\frac{2}{3}$
$12\frac{3}{4}$	$10\frac{1}{2}$	−٣	$-1\frac{1}{2}$

دعم الطلبة

لا بد من توجيه الطلبة دائمًا إلى أهمية أن تتضمن حلولهم أشكالًا توضيحية لكل تمرين. فهذا العمل ليس مفيدًا لهم فقط، بل يجعل الأمر سهلًا على المعلم حيث يتتبع أخطاءهم التي يقعون فيها. التمرينان ١، ٢ من تمارين ٨-٤ عبارة عن أسئلة روتينية تتضمن إيجاد إحدى القيم الحدودية لاحتمال معيّن عندما تكون قيمة الاحتمال معروفة. وفي التمارين من ٣ إلى ٧، يجد الطلبة قيمة و، ع، باستخدام احتمال معيّن، ومعلومة أخرى حول متغيّر عشوائي متصل يتبع توزيعًا طبيعيًا.

تحدّي الطلبة

التمارين من ٨ إلى ١٢ من تمارين ٨-٣ب هي تمارين تحدٍّ للطلبة لتطبيق ما تعلّموه عن التوزيع الطبيعي في حلّ مسائل عن مواقف من الحياة اليومية.

مصادر أخرى مفيدة

فيديو أكاديمية خان Khan Academy ,Deep definition of the norma distribution في الرابط:

http://normal distribution (gaussian distribution) (video) | khan academy/

يقدّم التوزيع الطبيعي بالتفصيل، ويساعد الطلبة على فهم المجالات التي يستخدم فيها.

كما يقدم الرابط:

http://normal distributions review (article) | khan academy/

Khan Academy Normal distributions review (article) من أكاديمية خان مراجعة مفيدة للأفكار الرئيسة للتوزيع الطبيعي.

قد يحاول الطلبة الإجابة عن أسئلة الاختيار من متعدد من الموقع: Standard Normal Distribution

http://mathopolis question database في Mathopoplis.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

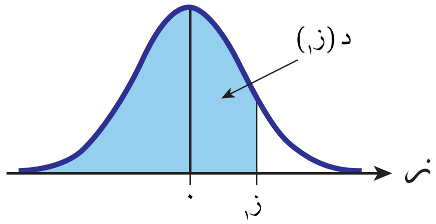
تمارين ٨-٣ب

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثامنة.

دالة التوزيع الطبيعي المعياري

إذا كان المتغير (ز) يأخذ شكل التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي، وتباينه ١، فإن الجدول يُعطي قيمة د (ز) لكل قيمة من قيم ز، حيث:

- د (ز١) = ل (ز ⩽ ز١)
- د (−ز١) = ١ − د (ز١)



ز	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٩	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩
١,٥	٠,٩٣٣٢	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٩٤	٠,٩٤٠٦	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤٤١
١,٦	٠,٩٤٥٢	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٩٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٤٥
١,٧	٠,٩٥٥٤	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٩٩	٠,٩٦٠٨	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦٣٣
١,٨	٠,٩٦٤١	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٩٩	٠,٩٧٠٦
١,٩	٠,٩٧١٣	٠,٩٧١٩	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٦٧
٢,٠	٠,٩٧٧٢	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨١٢	٠,٩٨١٧
٢,١	٠,٩٨٢١	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٧
٢,٢	٠,٩٨٦١	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٩٠
٢,٣	٠,٩٨٩٣	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٨	٠,٩٩٠١	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩١١	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١٦
٢,٤	٠,٩٩١٨	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٦
٢,٥	٠,٩٩٣٨	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٥٢
٢,٦	٠,٩٩٥٣	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٤
٢,٧	٠,٩٩٦٥	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٤
٢,٨	٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٨١
٢,٩	٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦
٣,٠	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠
٣,١	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣
٣,٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥
٣,٣	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٧
٣,٤	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٨

الوحدة الثامنة

التوزيع الطبيعي

العرض التوضيحي الإلكتروني ٨

المنحنى الطبيعي

يعتمد المنحنى الذي يمثّل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي على شكل المدرج التكراري.

الرياضيّات المتقدمة للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الثاني

إليك الجدول التكراري المجمّع لـ ٥ فئات طول كل منها ١٠،

حيث $\sum$ت = ٣٢٠:

س	٢٠ ≤ س < ٣٠	٣٠ ≤ س < ٤٠	٤٠ ≤ س < ٥٠	٥٠ ≤ س < ٦٠	٦٠ ≤ س < ٧٠
التكرار (ت)	٢٠	٨٠	١٢٠	٨٠	٢٠

ارتفاعات الأعمدة في المدرج التكراري متساوية مع كثافة التكرار،

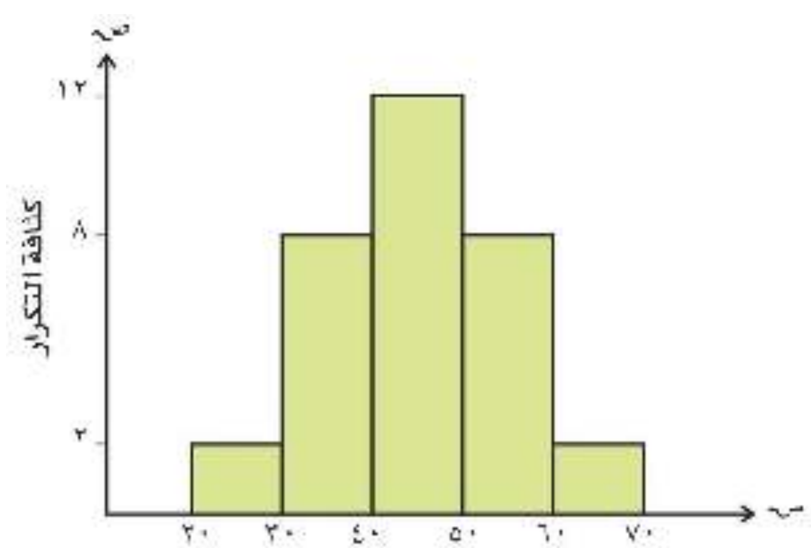
حيث كثافة التكرار = تكرار الفئة + طول الفئة.

س	٢٠ ≤ س < ٣٠	٣٠ ≤ س < ٤٠	٤٠ ≤ س < ٥٠	٥٠ ≤ س < ٦٠	٦٠ ≤ س < ٧٠
كثافة التكرار	٢٠ ÷ ١٠ = ٢	٨٠ ÷ ١٠ = ٨	١٢٠ ÷ ١٠ = ١٢	٨٠ ÷ ١٠ = ٨	٢٠ ÷ ١٠ = ٢

٢١٢

الرياضيّات المتقدمة للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الثاني

يبيّـن المدرج التكراري التوزيع التكراري للمتغير (س).



لدينا الآن الجدول التكراري نفسه المجمّع لـ ٥ فئات طول كل منها ١٠،
حيث ∑ ت = ٣٢٠:

س	٢٠ ≤ س < ٣٠	٣٠ ≤ س < ٤٠	٤٠ ≤ س < ٥٠	٥٠ ≤ س < ٦٠	٦٠ ≤ س < ٧٠
التكرار (ت)	٢٠	٨٠	١٢٠	٨٠	٢٠

يبينّ الجدول الآتي كثافة التكرار النسبي،
حيث كثافة التكرار النسبي = تكرار الفئة ÷ (طول الفئة × ∑ ت):

س	٢٠ ≤ س < ٣٠	٣٠ ≤ س < ٤٠	٤٠ ≤ س < ٥٠	٥٠ ≤ س < ٦٠	٦٠ ≤ س < ٧٠
كثافة التكرار النسبي	$\frac{٢٠}{٣٢٠\times١٠} = \frac{١}{١٦٠}$	$\frac{٨٠}{٣٢٠\times١٠} = \frac{٤}{١٦٠}$	$\frac{١٢٠}{٣٢٠\times١٠} = \frac{٦}{١٦٠}$	$\frac{٨٠}{٣٢٠\times١٠} = \frac{٤}{١٦٠}$	$\frac{٢٠}{٣٢٠\times١٠} = \frac{١}{١٦٠}$

الرياضيّات المتقدمة للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الثاني

يمكننا الآن تغيير قيم كثافة التكرار الواقعة على المحور الرأسي في مخطط المدرج التكراري إلى قيم كثافة التكرار النسبي، لتصبح مساحات الأعمدة ممثلة للتكرارات النسبية، أي تقريب الاحتمالات.

في هذه الحالة، يمكن تسمية المحور الرأسي "كثافة الاحتمال".

الرياضيّات المتقدمة للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الثاني

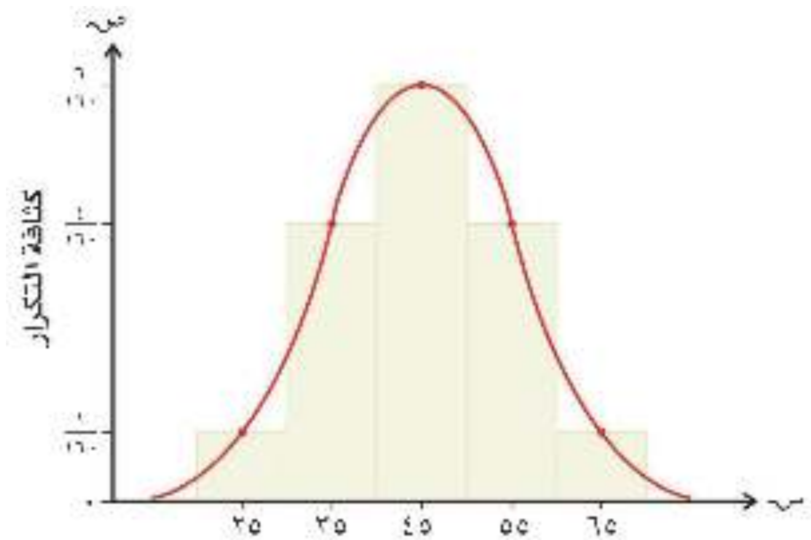
يمكن رسم المنحنى الطبيعي الذي يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير (س) بتعيين نقطة لكل من الفئات الخمس.

تعيّن النقاط عند نقطة المنتصف (٢٥، ٣٥، ٤٥، ٥٥، ٦٥) عند أعلى الكثافات الاحتمالية.

الرياضيّات المتقدمة للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الثاني

كما تلاحظ، لم يتغيّر شكل المدرج التكراري.

كل من المساحة الإجمالية للأعمدة، والمساحة تحت المنحنى الطبيعي مساوية لـ ١



إجابات تمارين كتاب الطالب - الوحدة الثامنة: التوزيع الطبيعي

إجابات معرفة قبلية

١) أ الوسط الحسابي = ٨

ب التباين = ١٤,٦، الانحراف المعياري = ٣,٨٢

٢) أ قيم المتغير العشوائي (س) هي: ٢، ٣، ٤، ٥

ب قيمة ك = $\frac{٢}{١٣}$

ج ل (٣ > س ⩾ ٥) = $\frac{٧}{١٣}$

تمارين ٨-١

١) أ لا، فهي تصف متغيرًا عشوائيًا منفصلًا (يمثل توزيع ذي الحدَّين).

ب لا، فهي تمثل عددًا ثابتًا، وليس متغيرًا.

ج نعم، فهي تمثل متغيرًا عشوائيًا متصلًا.

د لا، فهي تصف متغيرًا عشوائيًا منفصلًا (يمثل توزيعًا هندسيًا).

٢) أ خاطئة. ب صحيحة.

ج صحيحة. د خاطئة.

٣) أ ١) $ع^٢_{ل} > ع^٢_{ق}$

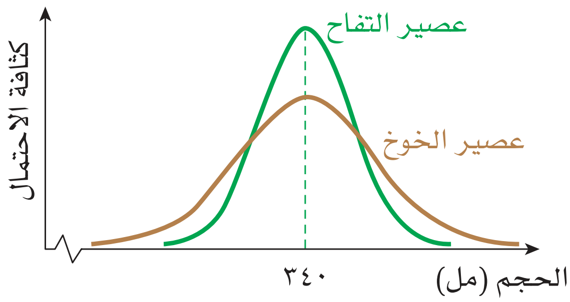
٢) $و_{ل} > و_{ق}$

ب ١) يجب تحريك المنحنى ل إلى اليمين.

٢) يجب تقصير ارتفاع المنحنى ق ليظهر أكثر اتساعًا.

ج المساحة تحت كلّ منحنى لا تتغير.

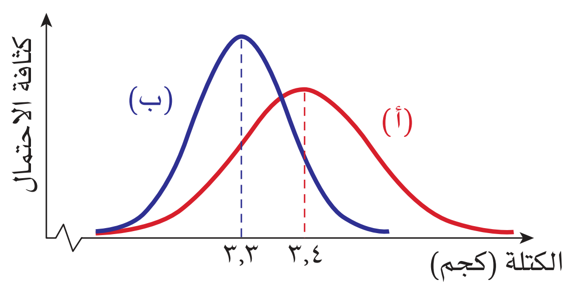
٤) أ



ب أوجه التشابه بين المنحنيين: لهما محور التماثل نفسه؛ لأن لهما الوسط الحسابي نفسه. المساحة تحت المنحنيَين هي نفسها.

أوجه الاختلاف بين المنحنيين: منحنى عصير التفاح أعلى من منحنى عصير الخوخ. ومنحنى عصير الخوخ أقصر وأوسع (أعرض) من منحنى عصير التفاح؛ لأن انحرافه المعياري ضعف الانحراف المعياري لمنحنى عصير التفاح.

٥) أ



ب أوجه التشابه بين المنحنيين: المساحة تحت المنحنيَين متساوية.

أوجه الاختلاف بين المنحنيين: محور تماثل المنحنى (أ) يقع إلى يمين محور تماثل المنحنى (ب)، والمنحنى (أ) أقصر وأوسع من المنحنى (ب).

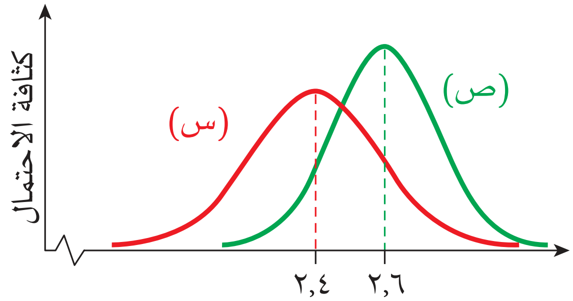
٦) أ $\overline{س} = \frac{١٢٠٠٠}{٥٠٠٠} = ٢,٤$، $\overline{ص} = \frac{٢٦٠٠٠}{١٠٠٠٠} = ٢,٦$،

$\overline{ص} > \overline{س}$

أي أن: الوسط الحسابي للمجموعة (ص) أكبر من الوسط الحسابي للمجموعة (س).

الأمر الذي يعني أن: محور تماثل المنحنى (ص) يقع إلى يمين محور تماثل المنحنى (س).

ب



تمارين ٨-٢

١) أ ٠,٦٣٦٨ ب ٠,٩٢٩٢
ج ٠,٩٧٨٨ د ٠,٧٩٣٩
هـ ٠,٠٠٢١

٢) أ ٠,٥٥ ب ١,٢٩
ج ١,٧٨ د ٠,٠٥
هـ ١,٤٣

٣) أ ٠,٩٣٧٠ ب ٠,٥٢٧٩
ج ٠,٢٨٧٧ د ٠,٠٠٦٩
هـ ٠,٢٠٩٠ و ٠,٠٢٢٨
ز ٠,٩٥٩٩ ح ٠,٥٠٤٠

٤) أ ٠,٤٩٣٨ ب ٠,٠٥٦٧
ج ٠,٠٤٠٣ د ٠,٠٢٧٣
هـ ٠,٧٣٢٠ و ٠,٢١٩٦
ز ٠,٦٨٢٦ ح ٠,٨٨١٢

٥) أ ١,٤٨ ب ٠,٢٨
ج ٠,٩٧ د ١,٩٨
هـ ١,٥٤ و ١,٨٩
ز −٠,٦٨ ح −١,٢٩

٦) أ ٠ ب ٠,٤٤
ج ٢ د ١,٦٧

٧) أ ١,٧٨ ب ٠,١٣١٤

٨) أ ٠,٥٩١٠ ب ٣٧,٤٥ ٪

٩) أ ٠,٩٧٥٠ ب ١٨,٩٤ ٪

تمارين ٨-٣أ

١) أ ١,٠٠ ب ٢,٠٠
ج ١,٧٣ د ٠,٩٨
هـ −١,٥٠ و −١,٨١
ز −١,٣٤ ح −٢,٧٤

٢) أ ٠,٧٢٥٧
ب ٠,١٩٢٢
ج ٠,٦٢٦٦

٣) أ ١) ٠,٩١٩٢ ٢) ٠,٠٨٠٨
ب ١) ٠,٦١٤١ ٢) ٠,٣٨٥٩
ج ١) ٠,٩٦٤١ ٢) ٠,٠٣٥٩
د ١) ٠,٠٤٦٥ ٢) ٠,٩٥٣٥
هـ ١) ٠,٢٨٤٣ ٢) ٠,٧١٥٧
و ٠,٩٥٤٤
ز ٠,٤٢٤٤
ح ٠,٢٢٩٧
ط ٠,٧٤٥٨
ي ٠,٠٩٤٤

٤) أ ٠,٨٤١٣ ب ٠,٤٥٦٢
ج ٠,٥٩٨٧ د ٠,٢٨٤٣

٥) أ ٠,٩٧٧٢ ب ٠,٢٢٦٦
ج ٠,٣٦٣٢ د ٠,٩٥٢٥

٦) أ ٠,٩٣٣٢ ب ٦٨,٢٦ ٪

تمارين ٨-٣ب

١) أ أ = ٣٥,٠ ب ب = ١٥,٥

ج ج = ٢٣,٦ د د = ١٦,١

هـ هـ = ٢,٦ و و = ١٨,٥

ز ز = ٨٦,٨

٢) أ ح = ٩,٨ ب ط = ٤٢,٧

ج ك = ١٧,٥ د ن = ١٢,٦

٣) ٠,٠٥١٦

٤) ع = ٢,٦٩

٥) و = ١٢,٥٧

٦) و = ٥٨,٨، ع = ١٤,٧ (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

٧) و = ٩٣,٢، ع = ٦٣,٢ (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

٨) ح، = ١٦٢,٢

٩) ١١,٦ (مل)^{٢}

١٠) ب = ٢٤٠ (لأقرب متر)

١١) ٨٥٠٠

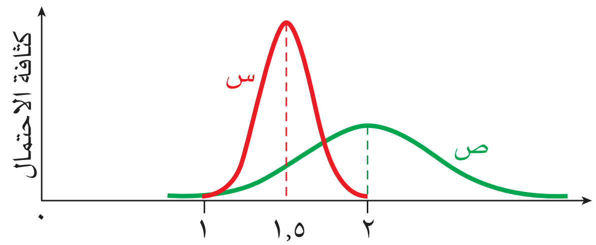
١٢) أ ٠,١٠٥٦ ب ٢٥

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثامنة

١) أ ع = ١,٥

ب ٠,٨٤١٣

٢)



٣) أ ٣١٦ يوم.

ب م = ٧٣٤٧,٦

٤) ٠,٩٣٣٢

٥) أ و = ٣,٢٨٥ ب ٦١,٤١ ٪

٦) أ ٠,٢٣٨٩ ب ١١٦

٧) أ و = ٨,٣٢؛ ع = ٢,٥٠

ب ٠,٨٢٣٨

٨) ع = ٢,٣٤

٩) ٥,٧١ ٪

إجابات تمارين كتاب النشاط - الوحدة الثامنة: التوزيع الطبيعي

تمارين ٨-١

١) أ متصل. ب منفصل.

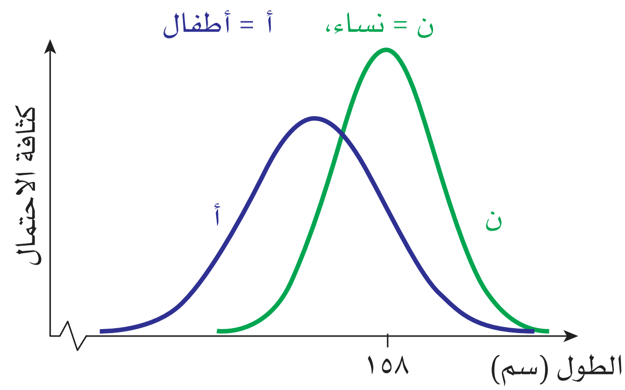
ج غير متصل، وغير منفصل.

د متصل.

٢) أوجه التشابه بين المنحنيين: المنحنيان لهما الارتفاع نفسه، والاتساع (العرض) نفسه؛ لأن تباينهما متساوٍ.

أوجه الاختلاف بين المنحنيين: أعلى نقطة في المنحنى (ب) هي ٤ وحدات إلى يمين أعلى نقطة في المنحنى (أ)؛ لأن الوسط الحسابي للنوع (ب) أكبر من الوسط الحسابي للنوع (أ).

٣)



٤) أ $و_2 > و_1$ ب $ع_2 > ع_1$

٥) أ الوسط الحسابي = $\frac{٠,٧٦٤}{٢}$ = ٠,٣٨٢ كجم.

التباين = $\left(\frac{\sqrt{٠,٠٠٠٢٤}}{٢}\right)^{٢}$ = ٠,٠٠٠٠٦ كجم^{٢}.

ب إن كل زوج من هذا النوع من الأحذية متساوٍ في الكتلة.

تمارين ٨-٢

١)
- أ ٠,٥٩١٠
- ب ٠,٩٩٣١
- ج ٠,٥٥٩٦
- د ٠,٠١٢٩
- هـ ٠,٠٠٨٩
- و ٠,٢٨١٠
- ز ٠,٩٦٦٤
- ح ٠,٩٧٩٨
- ط ٠,٥٢٣٩
- ي ٠,٠٣٣٦
- ك ٠,٠٠٣٠
- ل ٠,٤٢٠٧
- م ٠,٩٤٩٥
- ن ٠,٠٥٠٥
- س ٠,٩٥٠٥
- ع ٠,٠٥٠٥

٢)
- أ ٠,٠٣٦٦
- ب ٠,١٢٠٣
- ج ٠,٣٤٤٠
- د ٠,٤٣٩٣
- هـ ٠,٩٥٥٠
- و ٠,٧٧٨٣

٣)
- أ ٠,٨٥٣٧
- ب ٠,٢٠٨٨
- ج ٠,٠٣٢٠
- د ٠,١٢٠٢
- هـ ٠,٤٤٧٠
- و ٠,٩٥٠٠
- ز ٠,٩٧٩٦
- ح ٠,٨٠٦٤
- ط ٠,٠١٦٤

٤)
- أ ٠,٤٤
- ب ١,١٦
- ج ٢,١٥
- د ١,٠٣
- هـ ٠,٢٤
- و ١,١٨
- ز ٢,٤٥
- ح ٠,٧٦
- ط −٢,٨٣ أو −٢,٨٤
- ي −١,٩٦
- ك −١,٠٣
- ل ٠
- م −٢,٧٤
- ن −٢,١٩
- س −١,٦٨
- ع −٠,٠٦
- ف ١,٦٥
- ص ١,٢٨
- ق ٢,٥٧
- ر ٠,٨١

٥) أ ٪ ٩٥,٤٤ ب ٢٠٥٢

٦) أ ٪ ٢,٢٨ ب ١١٤

٧) ك = ١,٩٦

٨) ١٦٩٧

٩) أ ٨١,٨٥ ٪ ب ١٧٠

١٠) أ ٣٣٦٥ ب ٩١

ج ١٢٠٠

١١) أ ٦٩,١٥ ٪ ب ١٠,٥٦ ٪

تمارين ٨-٣أ

١) أ س ~ ط (٢٠، ١٦)، س ~ ط ($٢٠، ٤^{٢}$)،

ب ز = ١,٥٠

ج ١) ٠,٩٣٣٢ ٢) ٠,٠٦٦٨

٢) أ ٠,٩٣٩٤ ب ٠,٥٠٠٠

ج ٠,٦٧٠٠ د ٠,١١٩٠

٣) أ ل(س ≥ ٢٥) = ٠,٨٩٤٤

ب ٠,٠٠٦٢

ج ٠,٧٧٣٤ د ٠,٠٤٠١

٤) أ ٠,٩٥٢٥ ب ٠,٠٠٩٩

ج ٠,٧٤٨٦ د ٠,٠٠٣٨

٥) أ ٠,١٣٥٩ ب ٠,٠٦٠٦

ج ٠,٧٣٣٣ د ٠,٧٧٠٤

هـ ٠,٨٦٦٤

٦) ٠,٩٥٤٥

٧) ٠,٨٠٢٣

٨) أ ٠,٠٣٦٧ ب ٠,٠٠٦٢

ج ٠,٨٢١٠

٩) ٠,٣٥٢٠

١٠) ٤٠,١٣ ٪

تمارين ٨-٣ب

١) أ ٠,١٥٨٧ ب ٠,٠٢٢٨

٢) أ ٤١,٦ ب ٢٩,٩

ج ٣٧,٣ د ٣١,٧

٣) أ باستخدام $\frac{٢٠ - و}{ع}$ = $ف^{-١}$ (٠,٩٣٣٢)

ب ١٥,٠٥ − و = ٢,٥١ع

ج و = ٢,٥، ع = ٥

د ٠,١٣٥٧

٤) ٦٤,٩٠

٥) و = ٤٢,٠، ع = ٨,٤٧

٦) و = ٩,٥١، ع = ٠,٣٠٣

٧) أ ٠,٦١٣٨

ب ١) ح = ٢٠,٩ (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

٢) ك = ١٦,٣ (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

ج ١٦ أو ١٧

٨) ٤٧ $(ساعة)^{٢}$

٩) و = ٤٩,٢، ع = ١٣,٤ (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

١٠) أ ٨٢,٥ سم إلى ٨٩,٣ سم.

ب ٠,٩٤٤١

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثامنة

١) أ ٠,٩٤٨٤ ب ٠,٠٢٨١

٢) ٠,٢٢٥٧

٣) أ ع = ٩,٩٩ ب ٠,٧٩١٠

٤) أ $\frac{١٢٠ - و}{ع}$ = د$^{-١}$ (٠,٧٨٨١)

ب ١١٥ − و = ٠,٧ع

ج و = ٨٠، ع = ٥٠

د ٠,٣٤٤٦

٥) أ و = ٥٣,٣، ع = ١٥,٢

ب ٠,٦٧٠٠

٦) ٨٠,٧ ٪

٧) ل (ص < ك − ٢) = ٠,٨٣٤

أ ع = ١,٤٢

ب ٠,٠٠٥٤

٨) أ ١) و = ١٥ ٢) ع < ٣

ب ١) ل (أ < ١٩) ٢) ل (١١ < ب < ١٩)

التوزيع الطبيعي

تمارين ٨-١

١) أ لا، فهي تصِف متغيرًا عشوائيًا منفصلًا (يمثل توزيع ذي الحدَّين).

ب لا، فهي تمثّل عددًا ثابتًا، وليس متغيرًا.

ج نعم، فهي تمثل متغيرًا عشوائيًا متصلًا.

د لا، فهي تصِف متغيرًا عشوائيًا منفصلًا (يمثل توزيعًا هندسيًا).

٢) أ خاطئة، محور تماثل أ يقع إلى يسار محور تماثل ب، لذا الوسط الحسابي للمتغيّر أ أقل منه للمتغيّر ب.

ب صحيحة، انتشار قيم أ أقل من انتشار قيم ب؛ لأن نقطة القمة للمنحنى أ أعلى من نقطة القمة للمنحنى ب، ويظهر المنحنى أ أقلّ اتساعًا.

ج صحيحة، لأن $و_{أ} > و_{ب}$

د خاطئة، لأن $و_{ب} > و_{أ}$

٣) أ ١) قيم المتغير ل أكثر انتشارًا من قيم ق، لذا $ع_{ل}^{٢} > ع_{ق}^{٢}$

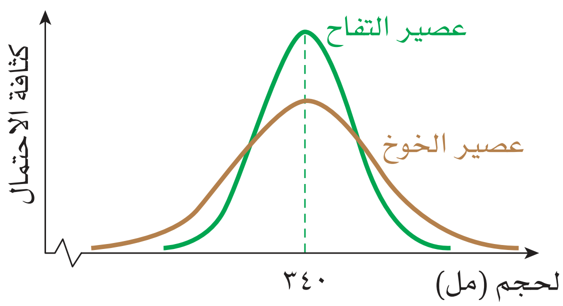
٢) محور تماثل ل يقع إلى يسار محور تماثل ق، لذا $و_{ل} > و_{ق}$.

ب ١) يجب أن يتحرّك المنحنى ل كاملًا إلى اليمين.

٢) قمة المنحنى ق يجب أن تكون أقلّ من قمة المنحنى ل.

ج المساحة تحت المنحنيَين لا تتغيّر؛ لأنها دائمًا تساوي ١

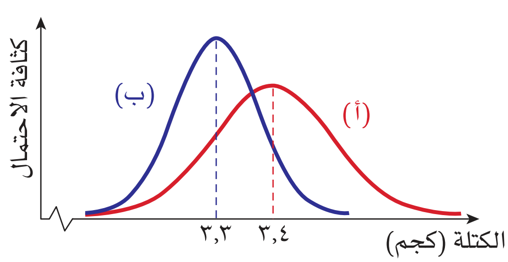
٤) أ يتمركز منحنى عصير الخوخ عند ٣٤٠ لكن نقطة قمته أخفض من منحنى عصير التفاح، لذا يجب أن يظهر أكثر اتساعًا؛ لأن انحرافه المعياري ضعف الانحراف المعياري لمنحنى عصير التفاح.



ب أوجه التشابه بين المنحنيين: المنحنيان لهما محور التماثل نفسه؛ لأن لهما الوسط الحسابي نفسه، والمساحة تحت كلّ من المنحنيَين هي نفسها.

أوجه الاختلاف بين المنحنيين: نقطة قمة منحنى عصير التفاح أعلى من نقطة قمة عصير الخوخ، ومنحنى عصير الخوخ أكثر اتساعًا من منحنى عصير التفاح؛ لأن انحرافه المعياري ضعف الانحراف المعياري لمنحنى عصير التفاح.

٥) أ



ب أوجه التشابه بين المنحنيين: المساحة تحت كلّ من المنحنيَين متساوية.

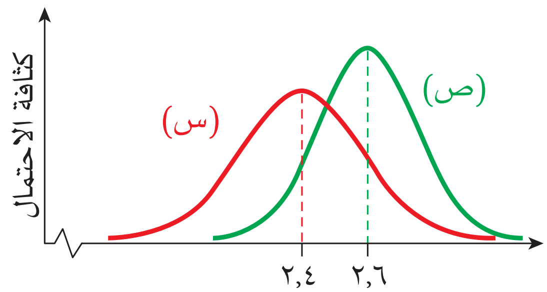
أوجه الاختلاف بين المنحنيين: يقع محور تماثل المنحنى (أ) إلى يمين محور تماثل المنحنى (ب)، والمنحنى (أ) أقصر وأكثر اتساعًا من المنحنى (ب).

٦) أ $\overline{س} = \frac{١٢٠٠٠}{٥٠٠٠} = ٢,٤$، $\overline{ص} = \frac{٢٦٠٠٠}{١٠٠٠٠} = ٢,٦$،
$\overline{ص} > \overline{س}$

أي أن: الوسط الحسابي للمجموعة (ص) أكبر من الوسط الحسابي للمجموعة (س).

الأمر الذي يعني أن: محور تماثل المنحنى (ص) يقع إلى يمين محور تماثل المنحنى (س).

ب تباين المجموعة س (١,٢٤) أكبر من تباين المجموعة ص (٠,٤٤)، لذا فإن المنحنى (س) أقصر وأعرض من المنحنى (ص):



تمارين ٨-٢

١) أ د (٠,٣٥) = ٠,٦٣٦٨

ب د (١,٤٧) = ٠,٩٢٩٢

ج د (٢,٠٣) = ٠,٩٧٨٨

د د (٠,٨٢) = ٠,٧٩٣٩

هـ ١ − د (٢,٨٦) = ١ − ٠,٩٩٧٩ = ٠,٠٠٢١

٢) أ ز = د$^{-١}$ (٠,٧٠٨٨) = ٠,٥٥

ب ز = د$^{-١}$ (٠,٩٠١٥) = ١,٢٩

ج ز = د$^{-١}$ (٠,٩٦٢٥) = ١,٧٨

د ز = د$^{-١}$ (٠,٥١٩٩) = ٠,٠٥

هـ ز = د$^{-١}$ (١ − ٠,٠٧٦٤) = د$^{-١}$ (٠,٩٢٣٦) = ١,٤٣

٣) أ د (١,٥٣) = ٠,٩٣٧٠

ب د (٠,٠٧) = ٠,٥٢٧٩

ج د (−٠,٥٦) = ١ − د (٠,٥٦) = ٠,٢٨٧٧

د د (−٢,٤٦) = ١ − د (٢,٤٦) = ٠,٠٠٦٩

هـ ١ − د (٠,٨١) = ١ − ٠,٧٩١٠ = ٠,٢٠٩٠

و ١ − د (٢) = ١ − ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

ز د (١,٧٥) = ٠,٩٥٩٩

ح د (٠,٠١) = ٠,٥٠٤٠

٤) أ د (٢,٥٠) − د (٠) = ٠,٩٩٣٨ − ٠,٥٠٠٠ = ٠,٤٩٣٨

ب د (١,٢٧) − د (١) = ٠,٨٩٨٠ − ٠,٨٤١٣ = ٠,٠٥٦٧

ج د (٢,٣٢) − د (١,٦٤) = ٠,٩٨٩٨ − ٠,٩٤٩٥ = ٠,٠٤٠٣

د د (١,٦٤) − د (١,٤٢) = ٠,٩٤٩٥ − ٠,٩٢٢٢ = ٠,٠٢٧٣

هـ د (٠,٧٤) − (١ − د (١,٧٧))

= ٠,٧٧٠٤ − (١ − ٠,٩٦١٦)

= ٠,٧٧٠٤ − ٠,٠٣٨٤ = ٠,٧٣٢٠

و د (−٠,٣١) − د (−١) = ٠,٣٧٨٣ − ٠,١٥٨٧ = ٠,٢١٩٦

ز ٢د (١) − ١ = ٢ × ٠,٨٤١٣ − ١ = ٠,٦٨٢٦

ح ٢د (١,٥٦) − ١ = ٢ × ٠,٩٤٠٦ − ١ = ٠,٨٨١٢

٥) أ ز = د$^{-١}$ (٠,٩٣٠٦) = ١,٤٨

ب ز = د$^{-١}$ (٠,٦١٠٣) = ٠,٢٨

ج ز = د$^{-١}$ (٠,٨٣٤٠) = ٠,٩٧

د ز = د$^{-١}$ (٠,٩٧٦١) = ١,٩٨

هـ ز = د$^{-١}$ (٠,٩٣٨٢) = ١,٥٤

و ز = د$^{-١}$ (١ − ٠,٠٢٩٤)

= د$^{-١}$ (٠,٩٧٠٦) = ١,٨٩

ز ز = − د$^{-١}$ (٠,٧٥١٧) = −٠,٦٨

ح ز = − د$^{-١}$ (٠,٩٠١٥) = −١,٢٩

٢٢٢

٦) أ د (١٫٧٣) − د (ز$_{١}$) = ٠٫٤٥٨٢

د (ز$_{١}$) = ٠٫٩٥٨٢ − ٠٫٤٥٨٢

ز$_{١}$ = د$^{-١}$ (٠٫٥٠٠٠)

= ٠

ب د (١٫٢٧) − د (ز$_{١}$) = ٠٫٢٢٨٠

د (ز$_{١}$) = ٠٫٨٩٨٠ − ٠٫٢٢٨٠

د (ز$_{١}$) = ٠٫٦٧٠٠

ز$_{١}$ = د$^{-١}$ (٠٫٦٧٠٠)

= ٠٫٤٤

ج د (ز$_{٢}$) − د (١٫٨٣) = ٠٫٠١١

د (ز$_{٢}$) = ٠٫٩٦٦٤ + ٠٫٠١١

ز$_{٢}$ = د$^{-١}$ (٠٫٩٥٥٤)

= ١٫٧٠

د د (ز$_{٢}$) − د (−١) = ٠٫٧٩٣٨

د (ز$_{٢}$) = ٠٫٧٩٣٨ + (١ − ٠٫٨٤١٣)

د (ز$_{٢}$) = ٠٫٧٩٣٨ + ٠٫١٥٨٧

د (ز$_{٢}$) = ٠٫٩٥٢٥

ز$_{٢}$ = د$^{-١}$ (٠٫٩٥٢٥)

= ١٫٦٧

٧) أ ٢د (ز$_{١}$) − ١ = ٠٫٩٢٥

٢د (ز$_{١}$) = ١٫٩٢٥

د (ز$_{١}$) = ٠٫٩٦٢٥

ز$_{١}$ = د$^{-١}$ (٠٫٩٦٢٥)

= ١٫٧٨

ب ل (ز ⩾ ز$_{٢}$) = ١ − $\frac{٠٫٥٧٥٤}{٢}$ = ٠٫٧١٢٣

ز$_{٢}$ = د$^{-١}$ (٠٫٧١٢٣)

= ٠٫٥٦

ل (ز > ٢ز$_{٢}$) = ل (ز > ١٫١٢)

= ١ − د (١٫١٢)

= ١ − ٠٫٨٦٨٦

= ٠٫١٣١٤

٨) أ د (٠٫٢٣) = ٠٫٥٩١٠

ب ١ − د (٠٫٣٢) = ٠٫٣٧٤٥

النسبة المئوية للرحلات = ٠٫٣٧٤٥ × ١٠٠٪

= ٣٧٫٤٥٪

٩) أ د (١٫٩٦) = ٠٫٩٧٥٠

ب ١ − د (٠٫٨٨) = ٠٫١٨٩٤

النسبة المئوية للأيام = ٠٫١٨٩٤ × ١٠٠٪

= ١٨٫٩٤ ٪

تمارين ٨-١٣أ

١) أ ز = $\frac{١٧ - ١٥}{\sqrt{٤}}$ = ١٫٠٠

ب ز = $\frac{٣٨ - ٣٠}{\sqrt{١٦}}$ = ٢٫٠٠

ج ز = $\frac{٤٨ - ٤٢}{\sqrt{١٢}}$ = ١٫٧٣

د ز = $\frac{٣٦٫٨ - ٣٢٫٤}{\sqrt{٢٠}}$ = ٠٫٩٨

هـ ز = $\frac{٧٢٫٥ - ٨٣}{\sqrt{٤٩}}$ = −١٫٥٠

و ز = $\frac{٢٢ - ٢٨}{\sqrt{١١}}$ = −١٫٨١

ز ز = $\frac{١٣٢ - ١٤٦}{\sqrt{١٠٩}}$ = −١٫٣٤

ح ز = $\frac{٠ - ١٥}{\sqrt{٣٠}}$ = −٢٫٧٤

٢) أ ل (س ⩽ ١١) = ل $\left(ز \leqslant \frac{١١ - ٨}{\sqrt{٢٥}}\right)$

= ل (ز ⩽ ٠٫٦)

= د (٠٫٦)

= ٠٫٧٢٥٧

ب ل (س ≤ ٦٩,١) = ل $\left(ز = \frac{٦٩,١ - ٧٢}{\sqrt{١١}}\right)$

= ل (ز ≤ −٠,٨٧)

= ١ − د (٠,٨٧)

= ١ − ٠,٨٠٧٨

= ٠,١٩٢٢

ج ل (٣ > س ≤ ٧) = ل $\left(\frac{٣ - ٥}{\sqrt{٥}} > س \le \frac{٧ - ٥}{\sqrt{٥}}\right)$

= ل (−٠,٨٩ > س ≤ ٠,٨٩)

= ٢ × د (٠,٨٩) − ١

= ٢ × ٠,٨١٣٣ − ١

= ٠,٦٢٦٦

٣) أ ١) ل (س ≤ ٩,٧) = ل $\left(ز \le \frac{٩,٧ - ٦,٢}{\sqrt{٦,٢٥}}\right)$

= ل (ز ≤ ١,٤)

= د (١,٤)

= ٠,٩١٩٢

٢) ل (س > ٩,٧) = ١ − ٠,٩١٩٢ = ٠,٠٨٠٨

ب ١) ل (س ≤ ٥) = ل $\left(ز \le \frac{٥ - ٣}{\sqrt{٤٩}}\right)$

= ل (ز ≤ ٠,٢٩)

= د (٠,٢٩)

= ٠,٦١٤١

٢) ل (س > ٥) = ١ − ٠,٦١٤١ = ٠,٣٨٥٩

ج ١) ل (س > ٣٣,٤) = ل $\left(ز > \frac{٣٣,٤ - ٣٧}{\sqrt{٤}}\right)$

= ل (ز > −١,٨)

= د (١,٨)

= ٠,٩٦٤١

٢) ل (س ≤ ٣٣,٤) = ١ − ٠,٩٦٤١ = ٠,٠٣٥٩

د ١) ل (س ≤ ١٣,٥) = ل $\left(ز \le \frac{١٣,٥ - ٢٠}{\sqrt{١٥}}\right)$

= ل (ز ≤ −١,٦٨)

= ١ − د (١,٦٨)

= ١ − ٠,٩٥٣٥

= ٠,٠٤٦٥

٢) ل (س > ١٣,٥) = ١ − ٠,٠٤٦٥ = ٠,٩٥٣٥

هـ ١) ل (س > ٩١) = ل $\left(ز > \frac{٩١ - ٨٠}{\sqrt{٣٧٥}}\right)$

= ل (ز > ٠,٥٧)

= ١ − د (٠,٥٧)

= ١ − ٠,٧١٥٧

= ٠,٢٨٤٣

٢) ل (س ≤ ٩١) = ١ − ٠,٢٨٤٣ = ٠,٧١٥٧

و ل (١ > س ≤ ٢١)

= ل $\left(\frac{١ - ١١}{\sqrt{٢٥}} > س \le \frac{٢١ - ١١}{\sqrt{٢٥}}\right)$

= ل (−٢ > ز ≤ ٢)

= ٢د (٢) − ١

= ٢ × ٠,٩٧٧٢ − ١

= ٠,٩٥٤٤

ز ل (٢ > س ≤ ٥) = ل $\left(\frac{٢ - ٣}{\sqrt{٧}} > ز \le \frac{٥ - ٣}{\sqrt{٧}}\right)$

= ل (−٠,٣٨ > ز ≤ ٠,٧٦)

= د (٠,٧٦) − (١ − د (٠,٣٨))

= د (٠,٧٦) + د (٠,٣٨) − ١

= ٠,٧٧٦٤ + ٠,٦٤٨٠ − ١

= ٠,٤٢٤٤

ح) إذا علمت أن س ~ ط (٢٥، ٦)، فأوجد ل $(٢٦ \leqslant س < ٢٨)$

ل $(٢٦ \leqslant س < ٢٨) = د\left(\frac{٢٨ - ٢٥}{\sqrt{٦}}\right) - د\left(\frac{٢٦ - ٢٥}{\sqrt{٦}}\right)$

= د (١,٢٢) − د (٠,٤١)

= ٠,٨٨٨٨ − ٠,٦٥٩١

= ٠,٢٢٩٧

ط) ل $(-١,١٤ < ز \leqslant ١,١٤)$

= د (١,١٤) + د (١,١٤) − ١

= ٢د (١,١٤) − ١

= ٢ × ٠,٨٧٢٩ − ١

= ٠,٧٤٥٨

ي) إذا علمت أن س ~ ط (١٢، ٢,٥٦) فأوجد ل $(٨ \leqslant س < ١٠)$

∵ ٨، ١٠ أقل من و = ١٢

∴ قيمتي ز تكونان سالبتين

ل $\left(\left(\frac{٨ - ١٢}{\sqrt{٢,٥٦}}\right) \leqslant ز < \left(\frac{١٠ - ١٢}{\sqrt{٢,٥٦}}\right)\right)$

ل $(-٢,٥ \leqslant ز < -١,٢٥)$

تطبق الخاصية الموجودة من النتيجة ٥

ل $(-أ < س < -ب) = د (أ) - د(ب)$، $-أ < -ب < ٠$

ل $(٨ \leqslant س < ١٠) = د\left(\frac{١٢ - ٨}{\sqrt{٢,٥٦}}\right) - د\left(\frac{١٢ - ١٠}{\sqrt{٢,٥٦}}\right)$

= د (٢,٥) − د (١,٢٥)

= ٠,٩٩٣٨ − ٠,٨٩٤٤

= ٠,٠٩٩٤

٤) أ) ل $\left(ز < \left(\frac{٢و - و}{و}\right)\right) = د\left(\frac{٢و - و}{و}\right) = د\left(\frac{و}{و}\right)$

= د (١)

= ٠,٨٤١٣

ب) ل $\left(ز > \left(\frac{\frac{١٠}{٩}و - و}{\sqrt{و^٢}}\right)\right) = ١ - د\left(\frac{\frac{١٠}{٩}و - و}{\sqrt{و^٢}}\right) = ١ - د\left(\frac{١}{٩}\right)$

= ١ − ٠,٥٤٣٨

= ٠,٤٥٦٢

ج $ل\left(ز < \left(\frac{\frac{٣}{٤}و - و}{\sqrt{و^{٢}}}\right)\right) = د\left(\frac{و - \frac{٣}{٤}و}{\sqrt{و^{٢}}}\right)$

$= د\left(\frac{\frac{١}{٤}و}{و}\right)$

$= د\left(\frac{١}{٤}\right)$

$= ٠,٥٩٨٧$

د $ل\left(ز > \left(\frac{\frac{٣}{٧}و - و}{\sqrt{و^{٢}}}\right)\right) = ١ - د\left(\frac{و - \frac{٣}{٧}و}{\sqrt{و^{٢}}}\right)$

$= ١ - د\left(\frac{\frac{٤}{٧}و}{و}\right)$

$= ١ - د\left(\frac{٤}{٧}\right)$

$= ١ - ٠,٧١٥٧$

$= ٠,٢٨٤٣$

٥) أ $ل\left(ز \leqslant \left(\frac{٧ع - ٣ع}{\sqrt{٤ع^{٢}}}\right)\right) = ل\left(ز \leqslant \left(\frac{٤ع}{٢ع}\right)\right) = ل\,(ز \leqslant ٢)$

$= د\,(٢)$

$= ٠,٩٧٧٢$

ب $ل\left(ز < \left(\frac{\frac{٩}{٢}ع - ٣ع}{\sqrt{٤ع^{٢}}}\right)\right) = ١ - د\left(\frac{\frac{٩}{٢}ع - ٣ع}{\sqrt{٤ع^{٢}}}\right)$

$= ١ - د\left(\frac{\frac{٣}{٢}ع}{٢ع}\right)$

$= ١ - د\left(\frac{٣}{٤}\right)$

$= ١ - د\,(٠,٧٥)$

$= ١ - ٠,٧٧٣٤$

$= ٠,٢٢٦٦$

ج $ل\left(ز \geqslant \left(\frac{٢,٣ع - ٣ع}{\sqrt{٤ع^{٢}}}\right)\right) = ١ - د\left(\frac{٣ع - ٢,٣ع}{\sqrt{٤ع^{٢}}}\right)$

$= ١ - د\left(\frac{٠,٧ع}{٢ع}\right)$

$= ١ - د\,(٠,٣٥)$

$= ١ - ٠,٦٣٦٨$

$= ٠,٣٦٣٢$

د $ل\left(ز < \left(\frac{-\frac{١}{٣}ع - ٣ع}{\sqrt{٤ع^{٢}}}\right)\right)$

$= د\left(\frac{\frac{١٠}{٣}}{٢}\right)$

$= د\left(\frac{٥}{٣}\right)$

$= ٠,٩٥٢٥$

٦) أ ١١س = ٨س + ١,٥ × ٢س

= الوسط الحسابي + ٢ × الانحراف المعياري

∴ ز = ١,٥ وعليه:

د (١,٥) = ٠,٩٣٣٢

ب ١٠س = ٨س + ١ × ٢س

= الوسط الحسابي + ١ انحراف معياري

∴ ز = ١ وعليه:

٦س = ٨س − ١ × ٢س

= الوسط الحسابي − ١ انحراف معياري

∴ ز = −١ وعليه المساحة المطلوبة =

د (١) − د (−١) = د (١) − (١ − د (١))

= ٢ (د (١)) − ١

= ٢ × ٠,٨٤١٣ − ١

= ٠,٦٨٢٦

= ٦٨,٢٦ ٪

الحل الآخر:

أ $ل\,(\text{الراتب} < ١١س) = ل\left(ز < \frac{١١س - ٨س}{٢س}\right)$

$= ل\,(ز < ١,٥)$

$= د\,(١,٥)$

$= ٠,٩٣٣٢$

ب $\text{ل}(٦\text{س} < \text{الراتب} < ١٠\text{س})$

$$= \text{ل}\left(\frac{٦\text{س} - ٨\text{س}}{٢\text{س}} < \text{ز} < \frac{١٠\text{س} - ٨\text{س}}{٢\text{س}}\right)$$

$$= \text{ل}(-١ < \text{ز} < ١)$$

$$= ٢\text{د}(١) - ١$$

$$= ٢ \times ٠{,}٨٤١٣ - ١$$

$$= ٠{,}٦٨٢٦$$

$$= ٦٨{,}٢٦\%$$

تمارين ٨-٣ب

١) أ الاحتمال المعطى أكبر من ٠,٥، لذا نعرف أن أ > ٣٠

$$\text{د}\left(\frac{\text{أ} - ٣٠}{\sqrt{١٦}}\right) = ٠{,}٨٩٤٤$$

$$\frac{\text{أ} - ٣٠}{٤} = \text{د}^{-١}(٠{,}٨٩٤٤)$$

$$\frac{\text{أ} - ٣٠}{٤} = ١{,}٢٥$$

$$\text{أ} = ٤ \times ١{,}٢٥ + ٣٠$$

$$\text{أ} = ٣٥{,}٠$$

ب الاحتمال المعطى أكبر من ٠,٥، لذا نعرف أن

ب > ١٢، $\text{د}\left(\frac{\text{ب} - ١٢}{\sqrt{٤}}\right) = ٠{,}٩٥٩٩$

$$\frac{\text{ب} - ١٢}{\sqrt{٤}} = \text{د}^{-١}(٠{,}٩٥٩٩)$$

$$\frac{\text{ب} - ١٢}{٢} = ١{,}٧٥$$

$$\text{ب} = ٢ \times ١{,}٧٥ + ١٢$$

$$= ١٥{,}٥$$

ج الاحتمال المعطى أقل من ٠,٥، لذا نعرف أن

ج > ١٧، ونعرف أيضًا أن

$$\text{ل}(\text{س} \geq \text{ج}) = ١ - ٠{,}٠٩٥١ = ٠{,}٩٠٤٩$$

$$\text{د}\left(\frac{\text{ج} - ١٧}{\sqrt{٢٥}}\right) = ٠{,}٩٠٤٩$$

$$\frac{\text{ج} - ١٧}{٥} = \text{د}^{-١}(٠{,}٩٠٤٩)$$

$$\text{ج} = ٥ \times ١{,}٣١ + ١٧$$

$$= ٢٣{,}٦$$

د الاحتمال المعطى أقل من ٠,٥، لذا نعرف أن م > ١٥،

ونعرف أيضًا أن $\text{ل}(\text{س} \geq \text{م}) = ١ - ٠{,}٣٥٢٠ = ٠{,}٦٤٨٠$

$$\text{د}\left(\frac{\text{م} - ١٥}{\sqrt{٨}}\right) = ٠{,}٦٤٨٠$$

$$\frac{\text{م} - ١٥}{\sqrt{٨}} = \text{د}^{-١}(٠{,}٦٤٨٠)$$

$$\frac{\text{م} - ١٥}{\sqrt{٨}} = ٠{,}٣٨$$

$$\text{م} = \sqrt{٨} \times ٠{,}٣٨ + ١٥$$

$$= ١٦{,}١$$

هـ الاحتمال المعطى أقل من ٠,٥، فنعرف أن هـ > ١،

$$\text{ل}(\text{س} \leq \text{هـ}) = ٠{,}١٢٣٠$$

$$\text{ل}\left(\text{ز} > \frac{\text{هـ} - ١}{\sqrt{٢}}\right) = ٠{,}١٢٣٠$$

$$١ - \text{د}\left(\frac{\text{هـ} - ١}{\sqrt{٢}}\right) = ٠{,}١٢٣٠$$

$$١ - ٠{,}١٢٣٠ = \text{د}\left(\frac{\text{هـ} - ١}{\sqrt{٢}}\right)$$

$$\text{د}\left(\frac{\text{هـ} - ١}{\sqrt{٢}}\right) = ٠{,}٨٧٧٠$$

$$\frac{\text{هـ} - ١}{\sqrt{٢}} = \text{د}^{-١}(٠{,}٨٧٧٠)$$

$$\frac{\text{هـ} - ١}{\sqrt{٢}} = ١{,}١٦$$

$$\text{هـ} = \sqrt{٢} \times ١{,}١٦ + ١$$

$$= ٢{,}٦$$

و الاحتمال المعطى أكبر من ٠,٥، لذا نعرف أن

ك > ٢٣، أي أن ك سالبة.

$$\text{د}\left(\frac{٢٣ - \text{ك}}{\sqrt{٩}}\right) = ٠{,}٩٣٣٢$$

$$\frac{٢٣ - \text{ك}}{٣} = \text{د}^{-١}(٠{,}٩٣٣٢)$$

$$\frac{٢٣ - \text{ك}}{٣} = ١{,}٥$$

$$\text{ك} = ٢٣ - ٣ \times ١,٥$$
$$= ١٨,٥$$

ز) الاحتمال المعطى أكبر من ٠,٥، لذا نعرف أن ر < ١٠٠، أي أن ر سالبة.

$$\text{د}\left(\frac{١٠٠ - \text{ر}}{٨}\right) = ٠,٩٥٠٠$$
$$\frac{١٠٠ - \text{ر}}{٨} = \text{د}^{-١}\,(٠,٩٥٠٠)$$
$$\frac{١٠٠ - \text{ر}}{٨} = ١,٦٤٥$$
$$\text{ر} = ١٠٠ - ٨ \times ١,٦٤٥$$
$$= ٨٦,٨$$

٢) أ) تدلّنا المتباينة ٨ < س ≤ ح على أن ح < ٨، و < ٨، والاحتمال < ٠,٥

$$\text{د}\left(\frac{\text{ح} - ٧}{\sqrt{٢}}\right) - \text{د}\left(\frac{٨ - ٧}{\sqrt{٢}}\right) = ٠,٢١٦٠$$
$$\text{د}\left(\frac{\text{ح} - ٧}{\sqrt{٢}}\right) - \text{د}\,(٠,٧١) = ٠,٢١٦٠$$
$$\text{د}\left(\frac{\text{ح} - ٧}{\sqrt{٢}}\right) - ٠,٧٦١١ = ٠,٢١٦٠$$
$$\text{د}\left(\frac{\text{ح} - ٧}{\sqrt{٢}}\right) = ٠,٩٧٧١$$
$$\frac{\text{ح} - ٧}{\sqrt{٢}} = \text{د}^{-١}\,(٠,٩٧٧١)$$
$$\frac{\text{ح} - ٧}{\sqrt{٢}} = ١,٩٩٥$$
$$\text{ح} = ٧ + \sqrt{٢} \times ١,٩٩٥$$
$$= ٩,٨$$

ب) الاحتمال المعطى أكبر من ٠,٥، لذا نعرف أن ص < ٤٥

$$\text{د}\left(\frac{٥٥ - ٤٥}{\sqrt{٥٠}}\right) - \left(١ - \text{د}\left(\frac{٤٥ - \text{ص}}{\sqrt{٥٠}}\right)\right) = ٠,٥٤٨٦$$
$$\text{د}\left(\frac{٥٥ - ٤٥}{\sqrt{٥٠}}\right) + \text{د}\left(\frac{٤٥ - \text{ص}}{\sqrt{٥٠}}\right) - ١ = ٠,٥٤٨٦$$
$$\text{د}\,(١,٤١) + \text{د}\left(\frac{٤٥ - \text{ص}}{\sqrt{٥٠}}\right) = ١,٥٤٨٦$$
$$٠,٩٢٠٧ + \text{د}\left(\frac{٤٥ - \text{ص}}{\sqrt{٥٠}}\right) = ١,٥٤٨٦$$
$$\text{د}\left(\frac{٤٥ - \text{ص}}{\sqrt{٥٠}}\right) = ٠,٦٢٧٩$$
$$\frac{٤٥ - \text{ص}}{\sqrt{٥٠}} = \text{د}^{-١}\,(٠,٦٢٧٩)$$
$$\frac{٤٥ - \text{ص}}{\sqrt{٥٠}} = ٠,٣٢٥$$
$$\text{ص} = ٤٥ - \sqrt{٥٠} \times ٠,٣٢٥$$
$$= ٤٢,٧$$

ج) الاحتمال المعطى يساوي ٠,٥٠٠، لذا نعرف أن ك < ٢٠ أي إنها سالبة.

$$= \text{د}\left(\frac{٢٢ - ٢٠}{\sqrt{١١}}\right) - \left(١ - \text{د}\left(\frac{٢٠ - \text{ك}}{\sqrt{١١}}\right)\right) = ٠,٥٠٠$$
$$\text{د}\,(٠,٦٠) + \text{د}\left(\frac{٢٠ - \text{ك}}{\sqrt{١١}}\right) - ١ = ٠,٥٠٠$$
$$٠,٧٢٥٧ + \text{د}\left(\frac{٢٠ - \text{ك}}{\sqrt{١١}}\right) - ١ = ٠,٥٠٠$$
$$\text{د}\left(\frac{٢٠ - \text{ك}}{\sqrt{١١}}\right) = ٠,٧٧٤٣$$
$$\frac{٢٠ - \text{ك}}{\sqrt{١١}} = \text{د}^{-١}\,(٠,٧٧٤٣)$$
$$\frac{٢٠ - \text{ك}}{\sqrt{١١}} = ٠,٧٥٥$$
$$\text{ك} = ٢٠ - \sqrt{١١} \times ٠,٧٥٥$$
$$= ١٧,٥$$

د) الاحتمال المعطى أقل من ٠,٥،
فإننا بحاجة إلى معرفة ما إذا كانت م < ١٢ أو م > ١٢

يمكن تنفيذ ذلك بأن نقارن القيمة ل (١٢ < س ≤ ١٦) مع القيمة ل (ن < س ≤ ١٦).

ل (١٢ < س ≤ ١٦)

$$= \text{د}\left(\frac{١٦ - ١٢}{\sqrt{٥}}\right) - \text{د}\left(\frac{١٢ - ١٢}{\sqrt{٥}}\right)$$

$د(١,٧٩) - د(٠)$

$= ٠,٩٦٣٣ - ٠,٥$

$= ٠,٤٦٣٣$

ل (١٢ < س ⩽ ١٦) > ل (ن < س ⩽ ١٦)، لذا فإن ن > ١٢

$د\left(\frac{١٦ - ١٢}{\sqrt{٥}}\right) - د\left(\frac{ن - ١٢}{\sqrt{٥}}\right) = ٠,٣٥٧٦$

$د(١,٧٩) - د\left(\frac{ن - ١٢}{\sqrt{٥}}\right) = ٠,٣٥٧٦$

$٠,٩٦٣٣ - د\left(\frac{ن - ١٢}{\sqrt{٥}}\right) = ٠,٣٥٧٦$

$د\left(\frac{ن - ١٢}{\sqrt{٥}}\right) = ٠,٦٠٥٧$

$\frac{ن - ١٢}{\sqrt{٥}} = د^{-١}(٠,٦٠٥٧)$

$\frac{ن - ١٢}{\sqrt{٥}} = ٠,٢٦٥$

$ن = ١٢ + \sqrt{٥} \times ٠,٢٦٥$

$= ١٢,٦$

٣) $ل(س < ٠) = ل\left(ز < \left(\frac{٠ - ٤}{\sqrt{٦}}\right)\right) = ١ - د\left(\frac{٤ - ٠}{\sqrt{٦}}\right)$

$= ١ - د(١,٦٣)$

$= ١ - ٠,٩٤٨٤$

$= ٠,٠٥١٦$

٤) $ل(ت > ١٤.٧) = ٠.٠٤$

$١ - د\left(\frac{٤,٧}{ع}\right) = ٠,٠٤$

$د\left(\frac{٤,٧}{ع}\right) = ١ - ٠,٠٤$

$د\left(\frac{٤,٧}{ع}\right) = ٠,٩٦٠٠$

$\frac{٤,٧}{ع} = د^{-١}(٠,٩٦٠٠)$

$\frac{٤,٧}{ع} = ١,٧٥$

$ع = \frac{٤,٧}{١,٧٥}$

$= ٢,٦٩$

٥) الاحتمال المعطى أكثر من ٠,٥، لذا نعرف أن و < ١٥،

$د\left(\frac{١٥ - و}{\sqrt{١٣}}\right) = ٠,٧٥٠٠$

$\frac{١٥ - و}{\sqrt{١٣}} = د^{-١}(٠,٧٥٠٠)$

$\frac{١٥ - و}{\sqrt{١٣}} = ٠,٦٧٥$

$و = ١٥ - \sqrt{١٣} \times ٠,٦٧٥$

$= ١٢,٥٧$

٦) $د\left(\frac{٨٣ - و}{ع}\right) = ٠,٩٥٠٠$

$\frac{٨٣ - و}{ع} = د^{-١}(٠,٩٥٠٠)$

$\frac{٨٣ - و}{ع} = ١,٦٤٥$، ولكن و = ٤ع (معطى)

$٨٣ - ٤ع = ١,٦٤٥\ ع$

$ع = \frac{٨٣}{٥,٦٤٥}$

= ١٤,٧ (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

$\because و = ٤ع$

$\therefore و = ٤ \times ١٤,٧$

= ٥٨,٨ (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

٧) $د\left(\frac{و - ١٢}{و - ٣٠}\right) = ٠,٩٠٠٠$

$\frac{و - ١٢}{و - ٣٠} = د^{-١}(٠,٩٠٠٠)$

$\frac{و - ١٢}{و - ٣٠} = ١,٢٨٥$

$و - ١٢ = ١,٢٨٥\ و - ٣٨,٥٥$

$و = \frac{٢٦,٥٥}{٠,٢٨٥} = ٩٣,٢$ (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

ع = و − ٣٠، أي أن: ع = ٩٣,٢ − ٣٠

ع = ٦٣,٢ (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

٨) لتقرر ما إذا كانت ح_1 أقل أو أكبر من ١٦١، عليك أن تقارن بين قيمة ل (١٦١ ⩽ ح < ١٦٤)، وقيمة ل (ح_1 ⩽ ح < ١٦٤).

ل (١٦١ ⩽ ح < ١٦٤) =

$\text{د}\left(\frac{\text{١٦٤} - \text{١٦١}}{\sqrt{\text{٧,٢}}}\right) - \text{د}\left(\frac{\text{١٦١} - \text{١٦١}}{\sqrt{\text{٧,٢}}}\right)$

$= \text{د}\left(\frac{\text{١٦٤} - \text{١٦١}}{\sqrt{\text{٧,٢}}}\right) - \text{د}\,(\text{٠})$

= د (١,١٢) − ٠,٥٠٠

= ٠,٨٦٨٦ − ٠,٥٠٠

= ٠,٣٦٨٦،

فتجد أن ل (١٦١ ⩽ ح < ١٦٤) > ل (ح_1 ⩽ ح < ١٦٤).

∴ ح_1 تكون أيضًا على يمين الوسط الحسابي ١٦١

$\text{د}\left(\frac{\text{١٦٤} - \text{١٦١}}{\sqrt{\text{٧,٢}}}\right) - \text{د}\left(\frac{\text{ح}_1 - \text{١٦١}}{\sqrt{\text{٧,٢}}}\right) = \text{٠,٢٠٠٠}$

$= \text{د}\,(\text{١,١٢}) - \text{د}\left(\frac{\text{ح}_1 - \text{١٦١}}{\sqrt{\text{٧,٢}}}\right) = \text{٠,٢٠٠٠}$

$= \text{٠,٨٦٨٦} - \text{د}\left(\frac{\text{ح}_1 - \text{١٦١}}{\sqrt{\text{٧,٢}}}\right) = \text{٠,٢٠٠٠}$

$\text{د}\left(\frac{\text{ح}_1 - \text{١٦١}}{\sqrt{\text{٧,٢}}}\right) = \text{٠,٦٦٨٦}$

$\frac{\text{ح}_1 - \text{١٦١}}{\sqrt{\text{٧,٢}}} = \text{د}^{-1}\,(\text{٠,٦٦٨٦})$

$\frac{\text{ح}_1 - \text{١٦١}}{\sqrt{\text{٧,٢}}} = \text{٠,٤٣٥}$

$\text{ح}_1 = \text{١٦١} + \sqrt{\text{٧,٢}} \times \text{٠,٤٣٥}$

= ١٦٢,٢

٩) افترض أن س تمثل كمية الزيت في العبوة، فيكون

س ~ ط (٥٠٧، ع^2)، ل (س < ٥٠٠) = ٠,٠٢٠٠

$\text{د}\left(\frac{\text{٥٠٧} - \text{٥٠٠}}{\text{ع}}\right) = \text{١} - \text{٠,٠٢٠٠}$

$\text{د}\left(\frac{\text{٧}}{\text{ع}}\right) = \text{٠,٩٨٠٠}$

$\frac{\text{٧}}{\text{ع}} = \text{د}^{-1}\,(\text{٠,٩٨٠٠})$

$\frac{٧}{ع} = ٢,٠٥٥$

$ع = \frac{٧}{٢,٠٥٥}$

$ع^{٢} = \left(\frac{٧}{٢,٠٥٥}\right)^{٢}$

= ١١,٦ مل^{٢}

١٠) افترض أن المسافة التي يسبحونها س، فيكون
س ~ ط (١٩٩، ٣٧٠٠)، $ل(س > ب) = ٠,٢٥$
$ب > ١٩٩$ أي أن ب موجبة

$$١ - د\left(\frac{ب - ١٩٩}{\sqrt{٣٧٠٠}}\right) = ٠,٢٥$$

$$د\left(\frac{ب - ١٩٩}{\sqrt{٣٧٠٠}}\right) = ٠,٧٥٠٠$$

$$\frac{ب - ١٩٩}{\sqrt{٣٧٠٠}} = د^{-١}(٠,٧٥٠٠)$$

$$\frac{ب - ١٩٩}{\sqrt{٣٧٠٠}} = ٠,٦٧٥$$

$$ب = ١٩٩ + \sqrt{٣٧٠٠} \times ٠,٦٧٥$$

= ٢٤٠ (لأقرب متر)

١١) لتكن كتلة الطفل حديث الولادة م، فيكون
م ~ ط(٣,٣٥، ٠,٠٨٥٥).

$$ل(م < ٣,٥) = د\left(\frac{٣,٥ - ٣,٣٥}{\sqrt{٠,٠٨٥٥}}\right)$$

= د (٠,٥١)

= ٠,٦٩٥٠

∴ ٦٩,٥٪ من الأطفال كتلهم أقل من ٣,٥ كجم،
وعددهم التقديري = ٠,٦٩٥٠ × ١٢٢١٣ = ٨٤٨٨ طفلًا.

١٢) أ ليكن وقت الانتظار ت، فيكون ت ~ ط (١٥، ١٦).

$$ل(ت < ١٠) = ل\left(ز < \left(\frac{١٠ - ١٥}{\sqrt{١٦}}\right)\right)$$

قيمة ز سالبة

= ١ − د (١,٢٥)

= ١ − ٠,٨٩٤٤

= ٠,١٠٥٦

ب $ل(ت < ٨) = ١ - د\left(\frac{١٥ - ٨}{\sqrt{١٦}}\right)$

= ١ − د (١,٧٥)

= ٠,٠٤٠١

وعليه يكون ٤,٠١ ٪ من المرضى ينتظرون أقل من ٨ دقائق، وعددهم = ٠,٠٤٠١ × ٦٢٤ = ٢٥ مريضًا.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثامنة

١) أ د $\left(\frac{٨ - ٥}{ع}\right) = ٠{,}٩٧٧٢$

$\frac{٨ - ٥}{ع} = د^{-١} (٠{,}٩٧٧٢)$

$\frac{٣}{ع} = ٢$

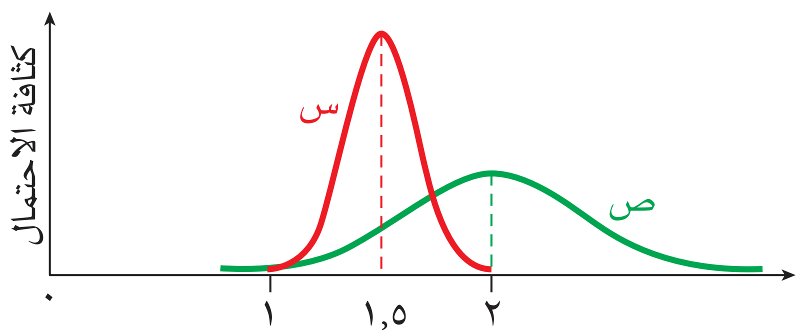
$ع = ١{,}٥$

ب د (س < ٩٫٥) = د $\left(\frac{٩{,}٥ - ٨}{١{,}٥}\right)$

= د (١)

= ٠٫٨٤١٣

٢)



٣) أ افترض أن المبيع اليومي س لترًا، فيكون: س ~ ط (٤٥٢٠، $٥٦٠^٢$).

ل (س > ٣٩٠٠) = د $\left(\frac{٤٥٢٠ - ٣٩٠٠}{٥٦٠}\right)$

= د (١٫١١)

= ٠٫٨٦٦٥

عدد الأيام المتوقع هو: ٠٫٨٦٦٥ × ٣٦٥ = ٣١٦ يومًا.

ب س ~ ط (م، $٥٦^٢$)، وكذلك ل (س < ٨٠٠٠).

= ١ − ٠٫١٢٢٠ = ٠٫٨٧٨٠

د $\left(\frac{٨٠٠٠ - م}{٥٦٠}\right) = ٠{,}٨٧٨٠$

$\frac{٨٠٠٠ - م}{٥٦٠} = د^{-١} (٠{,}٨٧٨٠)$

إحدى خصائص التماثل للمنحنى الطبيعي هي: أن المساحة على يمين ز = أ تساوي المساحة على يسار ز = −أ.

$$\frac{٨٠٠٠ - م}{٥٦٠} = ١{,}١٦٥$$

$$م = ٨٠٠٠ - ٥٦٠ \times ١{,}١٦٥$$

$=$ ٧٣٤٧,٦ أو ٧٣٥٠ (مقرّبة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية)

٤) $د\left(\frac{٢و - و}{\frac{٢}{٣}و}\right) = د\left(\frac{٣}{٢}\right)$

$= د\,(١{,}٥)$

$= ٠{,}٩٣٣٢$

٥) أ $د\left(\frac{و - ٣}{٠{,}٧٥}\right) = ١ - ٠{,}٣٥٢٠ = ٠{,}٦٤٨٠$

$$\frac{و - ٣}{٠{,}٧٥} = د^{-١}\,(٠{,}٦٤٨٠)$$

$$\frac{و - ٣}{٠{,}٧٥} = ٠{,}٣٨$$

$$و = ٣ + ٠{,}٧٥ \times ٠{,}٣٨$$

$$= ٣{,}٢٨٥$$

ب $ل\,(\text{الكتلة} < ٣{,}٥) = د\left(\frac{٣{,}٥ - ٣{,}٢٨٥}{٠{,}٧٥}\right)$

$= د\,(٠{,}٢٩) = ٠{,}٦١٤١$

٦١,٤١ ٪ كتلتها أقل من ٣,٥ كجم.

٦) أ $س \sim ط\,(١٢٥،\ ٤{,}٢^{٢})$

$ل\,(س < ١٢٨) = ١ - د\left(\frac{١٢٨ - ١٢٥}{٤{,}٢}\right)$

$= ١ - د\,(٠{,}٧١)$

$= ١ - ٠{,}٧٦١١$

$= ٠{,}٢٣٨٩$

ب $ل\,(س \geqslant ١٢٨) = ١ - ٠{,}٢٣٨٩ = ٠{,}٧٦١١$

$ل\,(س < ك) = ٠{,}٧٦١١ - ٠{,}٧٤٦٥ = ٠{,}٠١٤٦$

$ل\,(س \leqslant ك) = ١ - ٠{,}٠١٤٦ = ٠{,}٩٨٥٤$

$$د\left(\frac{١٢٥ - ك}{٤{,}٢}\right) = ٠{,}٩٨٥٤$$

$$\frac{١٢٥ - ك}{٤{,}٢} = د^{-١}\,(٠{,}٩٨٥٤)$$

$\frac{\text{١٢٥} - \text{ك}}{\text{٤,٢}} = \text{٢,١٨}$

$\text{ك} = \text{١٢٥} - \text{٤,٢} \times \text{٢,١٨}$

$= \text{١١٦}$

٧) أ ص ~ ط (و، $(\text{٠,٣}\ \text{و})^{\text{٢}}$)

$(\text{ص} > \text{١٠}) = \text{د}\left(\frac{\text{١٠} - \text{و}}{\text{ع}}\right) = \text{٠,٧٥٠٠}$

$\frac{\text{١٠} - \text{و}}{\text{٠,٣}\ \text{و}} = \text{د}^{-\text{١}}\ (\text{٠,٧٥٠٠})$

$\frac{\text{١٠} - \text{و}}{\text{٠,٣}\ \text{و}} = \text{٠,٦٧٥}$

$\text{١٠} - \text{و} = \text{٠,٢٠٢٥}\ \text{و}$

$\text{و} = \text{٨,٣٢}$

$\text{١٠ع} = \text{٣} \times \text{٨,٣٢}$

$\text{ع} = \text{٢,٤٩}$

ب $\text{ل}\ (\text{ص} \leqslant \text{٦}) = \text{د}\left(\frac{\text{٨,٣٢} - \text{٦}}{\text{٢,٤٩}}\right)$

$= \text{د}\ (\text{٠,٩٣})$

$= \text{٠,٨٢٣٨}$

٨) $\text{ل}\ (\text{ق} > \text{٨}) = \text{د}\left(\frac{\text{٨} - \text{٩}}{\text{٤}}\right) = \text{١} - \text{د}\ (\text{٠,٢٥}) = \text{٠,٤٠١٣}$

$\text{ل}\ (\text{ح} > \text{٨}) = \text{د}\left(\frac{\text{٨} - \text{٦}}{\text{ع}}\right) = \text{د}\left(\frac{\text{٢}}{\text{ع}}\right) = \text{٢} \times \text{٠,٤٠١٣}$

$\text{د}\left(\frac{\text{٢}}{\text{ع}}\right) = \text{٠,٨٠٢٦}$

$\frac{\text{٢}}{\text{ع}} = \text{د}^{-\text{١}}\ (\text{٠,٨٠٢٦})$

$\frac{\text{٢}}{\text{ع}} = \text{٠,٨٥٥}$

$\text{ع} = \text{٢,٣٤}$

٩) افترض أن أعمار السيارات أ، فيكون أ ~ ط (٤٣، $\text{ع}^{\text{٢}}$).

$\text{ل}\ (\text{أ} > \text{٥٠}) = \text{٠,٢٨٠٠}$

$\text{د}\left(\frac{\text{٤}\frac{\text{١}}{\text{٦}} \times \text{١٢} - \text{٤٣}}{\text{ع}}\right) = \text{د}\left(\frac{\text{٧}}{\text{ع}}\right)$

$\text{د}\left(\frac{\text{٧}}{\text{ع}}\right) = \text{١} - \text{٠,٢٨٠٠}$

$= \text{٠,٧٢٠٠}$

$\frac{\text{٧}}{\text{ع}} = \text{د}^{-\text{١}}\ (\text{٠,٧٢٠٠})$

$\frac{\text{٧}}{\text{ع}} = \text{٠,٥٨٥}$

$\text{ع} = \text{١٢,٠}$

$\text{ل}\ (\text{العمر} > \text{٢٤ شهرًا}) = \text{د}\left(\frac{\text{٤٨} - \text{٢٤}}{\text{١٢,٠}}\right)$

$= \text{١} - \text{د}\ (\text{١,٥٨})$

$= \text{٠,٠٥٧١}$

وعليه يكون ٥,٧١٪ من السيارات عمرها التشغيلي أقل من سنتَين.

بحمد الله

الرياضيات المتقدمة

دليل المعلّم

الصف الثاني عشر

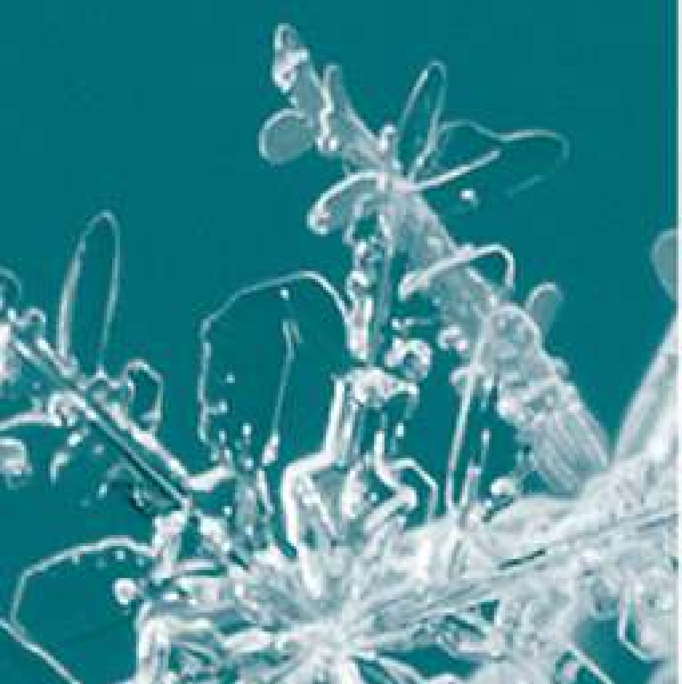
يتوافر في دليل المعلم الدعم لتخطيط الدروس وتقديمها بأسلوب واضح، تغني المعلمين عن بذل الوقت والجهد في تحضير لدروس والإجابة عن المسائل المطروحة في كتاب الطالب.

من ميزات دليل المعلم أنه يقدم:

- أفكارًا وإرشادات داعمة لكل وحدة، بما في ذلك شرائح باوربوينت PowerPoint لعرضها أمام طلبة الصف.
- توجيهات حول كيفية مساعدة الطلبة على التقدم في الموضوعات.
- إجابات عن جميع الأسئلة والتمارين الواردة في كتاب الطالب وكتاب النشاط.

يشمل منهج الرياضيات المتقدمة للصف الثاني عشر أيضًا:

- كتاب الطالب
- كتاب النشاط



CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

www.moe.gov.om