



ملخص الوحدة الثالثة لمادة الرياضيات المتقدمة للصف الثاني عشر



إعداد الأستاذة: إيمان بنت محمد الجابرية

مدرسة بلاد بني بو علي للتعليم الأساسي (١١ - ١٢)



نهاية الدالة عند نقطة

للدوال كثيرة الحدود

بعض الأمثلة على الدوال كثيرات الحدود:

د (س) = $7س - 2$

هـ (س) = $9 + 2س - 5س^2$

ع (س) = $س^4 + س^3 + س^2 + س + 1$

- ✓ هي دالة تحتوي على حد واحد أو أكثر لمتغير مرفوع إلى قوة صحيحة غير سالبة.
- ✓ أيجاد النهاية بإنشاء جدول لقيم يمين ويسار أ

مثال: أوجد نها $3س^2 - 5س + 9$ س $\rightarrow 1$

الحل: بإنشاء جدول

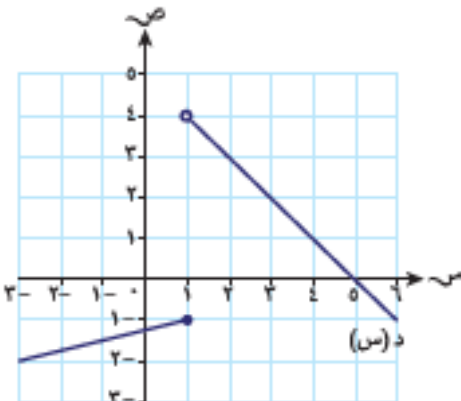
س تتزايد لتقترب من 1- جهة اليسار			س تتناقص لتقترب من 1- جهة اليمين			
1,1-	1,01-	1,001-	1-	0,999-	0,99-	0,9-
9,73	9,07	9,01		8,98	8,93	8,33
نها $3س^2 - 5س + 9$ س $\rightarrow 1$			نها $3س^2 - 5س + 9$ س $\rightarrow 1$			

∴ نها $3س^2 - 5س + 9$ س $\rightarrow 1$ (موجودة)

التحقق من الحل بالتعويض المباشر ($9 = 5 + (-1) - 2(-1)^3$)

دوال المعرفة بأكثر من قاعدة

- ✓ تتكون الدالة من جزأين أو أكثر ويمكن أن يحوي المنحنى خطوط مستقيمة ومنحنيات، وتحوي بعضها على قفزات التي تتغير فيها قيمة الدالة بشكل كبير
- ✓ أيجاد النهاية من خلال الرسم. (يجب إيجاد نهاية الدالة من الجهتين اليمين واليسار)



مثال توضيحي للنقاط الأساسية التي نستخرجها من خلال الرسم:

أوجد قيمة مايلي من خلال الدالة د(س) الموضحة في الرسم المقابل:

د(3-) = 2-

د(1-) = 1-

نها د(س) = غير موجودة س $\rightarrow 1$

لأن: نها د(س) = 4 و نها د(س) = 1- غير متساويان س $\rightarrow 1$

نها د(س) = 2 س $\rightarrow 3$

د(2) = 3

نها د(س) = صفر س $\rightarrow 0$

د(0) = صفر

للدوال النسبية

- ✓ هي دالة يمكن كتابتها في صورة نسبة بين دالتين كثيرات الحدود
- ✓ إيجاد النهاية بإنشاء جدول لقيم يمين ويسار أ
- ✓ انتبه لأصفار المقام (إما أن تكون هناك فجوات أو خط تقارب رأسي)

متى تكون للدالة فجوة وخط تقارب رأسي؟ نها د(س) حيث د(س) نسبية
س < -1

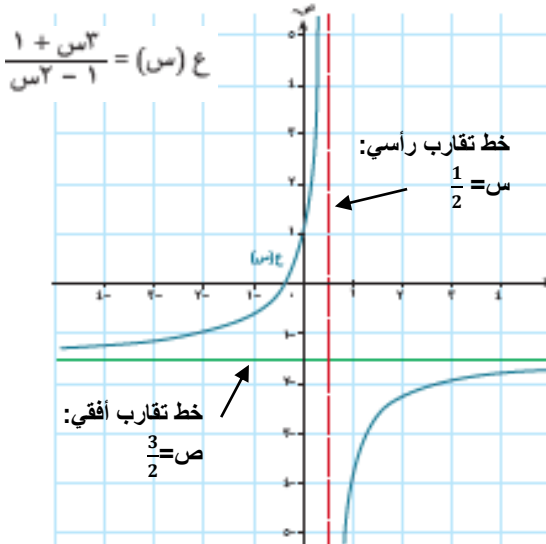
بالتعويض المباشر أولاً : د(أ)

كان ناتج التعويض = $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$

- لا يوجد عامل صفري/ لا يمكن التحليل/ لا توجد فجوة
- وإنما يوجد خط تقارب رأسي معادلته س = صفر المقام
- $\frac{\text{معامل أعلى درجة في البسط}}{\text{معامل أعلى درجة في المقام}} = \text{خط تقارب أفقي معادلته ص}$
- (ص = ناتج نها الدالة النسبية عند اللانهاية)

إذا كان ناتج التعويض = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

- يوجد عامل صفري يجب التخلص منه (عامل المقام)
- بالتحليل والتبسيط (فرق بين مربعين / عامل مشترك/ تحليل حدودية من الدرجة الثانية)
- توجد فجوة احداثيها (س ، ص)
- حيث س = صفر المقام
- ص = ناتج التعويض عن س في الدالة بعد التبسيط

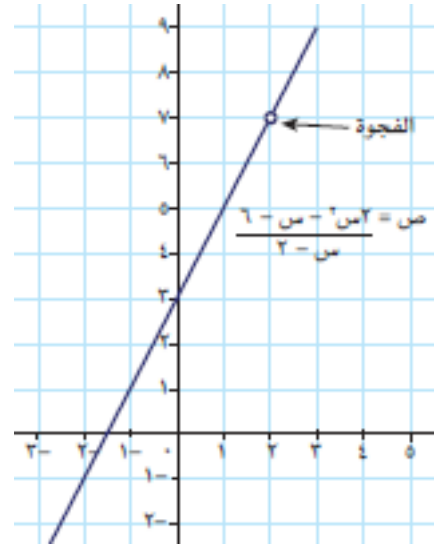


معادلة خط تقارب رأسي:

صفر المقام :

$$س^2 - 1 = 0 \implies س = 1, -1$$

نها ع(س) = غير موجودة
س < -1, 0, 5



احداثيات الفجوة:

صفر المقام: س = 2, 0 < --- س = 2

$$\text{تحليل وتبسيط: } (س - 2)(س + 2) = \frac{(س + 2)(س - 2)}{س - 2}$$

نعوض عن س = 2 : $ص = 3 + (2)^2 = 7$ (2, 7)

نهاية الدالة عند اللانهاية

للدوال النسبية

الحالة	قيمة النهاية	مثال	خط تقارب رأسي	خط تقارب أفقي
درجة البسط أقل من درجة المقام	صفر	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 7} = 0$	صفر = مقام	صفر = ص
درجة البسط = درجة المقام	ص = معامل أعلى درجة في البسط / معامل أعلى درجة في المقام	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - 7} = 2$	صفر = مقام	ص = معامل أعلى درجة في البسط / معامل أعلى درجة في المقام
درجة البسط أكبر من درجة المقام	غير موجودة	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3}{x^2 + 7} = \infty$	صفر = مقام	لا يوجد

الاتصال

ملاحظة: تكون الفجوات وخطوط التقارب الرأسية عند أصفار المقام للدالة النسبية وعندها تكون الدالة غير متصلة

✓ تكون الدالة متصلة عند نقطة إذا تحققت الشروط التالية:

- د(أ) معرفة
- نهاية د(س) موجودة (أي نها د(س) من جهة اليمين = نها د(س) من جهة اليسار)
- د(أ) = نها د(س)

✓ تكون الدالة متصلة على فترة مغلقة: إذا لم تكون هناك أي فجوات أو قفزات أو خطوط تقارب في تلك الفترة

مثال:

الدالة ع(س) متصلة عند جميع القيم س ما عدا س = ٣ وذلك لوجود فجوة، ولأن نها ع(س) ≠ ع(٣)
ع(س) متصلة في الفترة ١ ≤ س ≤ ٢ ، ٢ ≤ س ≤ ٤ ، ٤ ≤ س
ع(س) غير متصلة في الفترة ٢ ≤ س ≤ ٤ بسبب وجود فجوة عند س = ٣

