

٢-٣ نهاية الدالة النسبية عند اللانهاية (س ← ∞±)

في هذا الدرس سنتعلم ما يحدث لقيم الدالة عندما تكبر قيمة س (تصبح س أقرب إلى موجب اللانهاية positive infinity، ويعبر عنها في صورة س ← ∞+، وعندما تصغر قيمة س (تصبح س أقرب إلى سالب اللانهاية negative infinity، ويعبر عنها في صورة س ← ∞-).

$$\text{إذا كان } \frac{1}{\text{س}} = \text{نهاية د (س)}$$

س	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	∞
د (س)	١	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠٠١	٠

$$\text{نهاية د (س)} = ٠$$

س	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	∞
د (س)	١	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠٠١	٠

$$\text{نهاية د (س)} = ٠$$

خواص ∞ - ∞

$$\text{① } \frac{٠}{\infty} = ٠, \frac{\infty}{\infty} = ٠, \frac{٠}{٠} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{١}{\infty} = ٠$$

$$\text{② } \frac{٠}{\infty} = ٠, \frac{\infty}{\infty} = ٠, \frac{٠}{٠} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{١}{\infty} = ٠$$

$$\text{③ } \frac{٠}{\infty} = ٠, \frac{\infty}{\infty} = ٠, \frac{٠}{٠} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{١}{\infty} = ٠$$

$$\text{④ } \frac{٠}{\infty} = ٠, \frac{\infty}{\infty} = ٠, \frac{٠}{٠} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{١}{\infty} = ٠$$

$$\text{د (س)} = \frac{١}{\text{س}} \text{ أوجد نهاية د (س) نها د (س)}$$

باستخدام جد أول النهايات

س	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	∞
د (س)	١	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠٠١	٠

$$\text{نهاية س} = \frac{١}{\text{س}}$$

س	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	∞
د (س)	١	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠٠١	٠

$$\text{نهاية س} = \frac{١}{\text{س}}$$

$$\text{نهاية س} = \frac{١}{\text{س}}, \text{نهاية س} = \frac{١}{\text{س}}$$

$$\text{نهاية س} = \frac{١}{\text{س}}$$

$$\text{نهاية س} = \frac{١}{\text{س}}$$

$$\text{نهاية س} = \frac{١}{\text{س}}$$

$$\text{نهاية س} = \frac{١}{\text{س}}$$

$$\text{نهاية س} = \frac{١}{\text{س}}$$

$$\text{نهاية س} = \frac{١}{\text{س}}$$

~ موجبة

موجب

لكل قيم $n < 0$ ، أ عدد حقيقي:

$$\text{نها} \begin{matrix} \infty+ \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{1}{n} = 0, \text{نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{1}{n} = 0$$

أوجد كلاً مما يأتي:

$$\text{أ) نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{2s+9}{s^3-5} =$$

$$\text{ب) نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{4s^2+3}{s^3+s^2} =$$

$$\text{ج) نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{12s^4}{s^7-2s^4} =$$

بالقسمة بسطاً ومقاماً على s

$$\text{أ) نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{2s+9}{s^3-5} =$$

$$= \text{نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{\frac{2}{s} + \frac{9}{s^2}}{\frac{s^3}{s^3} - \frac{5}{s^3}} = \text{نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{\frac{2}{s} + \frac{9}{s^2}}{1 - \frac{5}{s^3}} =$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\text{ب) نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{4s^2+3}{s^3+s^2} =$$

$$= \text{نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{\frac{4s^2}{s^3} + \frac{3}{s^3}}{\frac{s^3}{s^3} + \frac{s^2}{s^3}} = \text{نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{\frac{4}{s} + \frac{3}{s^3}}{1 + \frac{1}{s}} =$$

بالقسمة بسطاً ومقاماً على s

$$\text{ج) نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{12s^4}{s^7-2s^4} =$$

$$= \text{نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{\frac{12s^4}{s^7}}{\frac{s^7}{s^7} - \frac{2s^4}{s^7}} = \text{نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{\frac{12}{s^3}}{1 - \frac{2}{s^3}} =$$

$$\text{أ) نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{2s+9}{s^3-5} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ب) نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{4s^2+3}{s^3+s^2} = \frac{4}{3}$$

$$\text{ج) نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{12s^4}{s^7-2s^4} = \frac{12}{7}$$

مما سبق نلاحظ أنه عندما تتساوى أكبر قوة في البسط مع أكبر قوة في المقام، فإن ناتج النهاية يساوي النسبة بين معامل أكبر قوة في البسط، ومعامل أكبر قوة في المقام.

أوجد نهاية كل دالة من الدالتين الآتيتين عندما $s \rightarrow \infty$:

$$\text{أ) د (س) } = \frac{1-s^2}{7+s^3}$$

$$\text{ب) هـ (س) } = \frac{5s^2+s}{7+s^2}$$

$$\text{أ) نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{1-s^2}{7+s^3} =$$

$$= \text{نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{\frac{1}{s^3} - \frac{s^2}{s^3}}{\frac{7}{s^3} + \frac{s^3}{s^3}} = \text{نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s}}{\frac{7}{s^3} + 1} =$$

$$\text{ب) نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{5s^2+s}{7+s^2} =$$

$$= \text{نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{\frac{5s^2}{s^2} + \frac{s}{s^2}}{\frac{7}{s^2} + \frac{s^2}{s^2}} = \text{نها} \begin{matrix} \infty- \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{5 + \frac{1}{s}}{1 + \frac{7}{s^2}} =$$

ب) أوجد نهاية كل دالة من الدالتين الآتيتين عندما $s \rightarrow -\infty$:

$$(1) \text{ ق (س) } = \frac{s^5 - s^9}{s^4 + s^6}$$

$$(2) \text{ ع (س) } = \frac{s^6 + s^3 - s^5}{s^8 + s^3 + s^6}$$

$$(3) \text{ م (س) } = \frac{s^7 - s^2}{s^2 - 1}$$

① نها $\frac{s^5 - s^9}{s^4 + s^6}$ بالقسمة بسفاً ومقاماً على s^6

$$= \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{\frac{s^5}{s^6} - \frac{s^9}{s^6}}{\frac{s^4}{s^6} + \frac{s^6}{s^6}} = \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{s} - s^3}{\frac{1}{s^2} + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

② نها $\frac{s^6 + s^3 - s^5}{s^8 + s^3 + s^6}$ بالقسمة بسفاً ومقاماً على s^8

$$= \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{\frac{s^6}{s^8} + \frac{s^3}{s^8} - \frac{s^5}{s^8}}{\frac{s^8}{s^8} + \frac{s^3}{s^8} + \frac{s^6}{s^8}} = \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^5} - \frac{1}{s^3}}{1 + \frac{1}{s^5} + \frac{1}{s^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

نها $\frac{s^7 - s^2}{s^2 - 1}$ بالقسمة بسفاً ومقاماً على s^2

$$= \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{\frac{s^7}{s^2} - \frac{s^2}{s^2}}{\frac{s^2}{s^2} - \frac{1}{s^2}} = \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{s^5 - 1}{1 - \frac{1}{s^2}} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

لاحظ النتائج الآتية:

- إذا كانت أعلى قوة في البسط أكبر من أعلى قوة في المقام، فإن النهاية عندما $s \rightarrow \pm\infty$ تكون غير موجودة.
- إذا كانت أعلى قوة في البسط أقل من أعلى قوة في المقام، فإن النهاية عندما $s \rightarrow \pm\infty$ تساوي 0 (صفرًا).

لتكن الدالة د(س) = $\frac{4}{s} - s$:

أ) اكتب العبارة $\frac{4}{s} - s$ في صورة نسبية.

ب) بيّن أن نها $\frac{4}{s} - s$ غير موجودة عندما $s \rightarrow \infty$.

نها $\frac{4}{s} - s$

بها $\frac{4}{s} - s$

$\frac{\infty}{1} = \infty$ غير موجودة

د(س) = $\frac{4}{s} - s$

بها $\frac{4}{s} - s$

بالقسمة بسفاً ومقاماً على s

إذا علمت أن نهـا $\frac{100s^2 - 7s}{(3 - s)^2 + 5} \rightarrow \infty$ ، فأوجد قيم أ .

$$\text{نهـا} = \frac{100s^2 - 7s}{(3 - s)^2 + 5} = 25$$

$$\text{نهـا} = \frac{100s^2 - 7s}{(3 - s)^2 + 5} = 25$$

∴ النهاية موجودة = 25

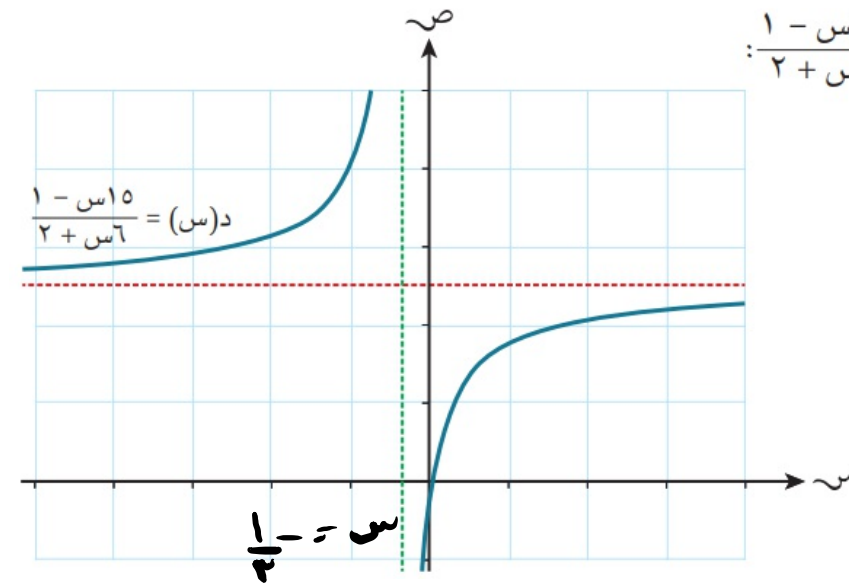
∴ النهاية = $\frac{1}{m} = 25$

$$100 = m^2$$

$$m = 10$$

$$m = 10$$

$$m = 10$$



بيّن الرسم المقابل منحنى الدالة د(س) = $\frac{100s^2 - 7s}{(3 - s)^2 + 5}$:

أوجد معادلة كل مما يأتي:

(١) خط التقارب الرأسي.

(٢) خط التقارب الأفقي.

ب تحقق من معادلة خط التقارب

الأفقي باستخدام جدول القيم.

∴

$$\text{①} \quad 0 = 3 + s$$

$$s = -3 = \frac{0}{1}$$

خط التقارب الرأسي $s = -3$

$$\text{②} \quad \text{ص} = \frac{100}{1} = 100$$

خط التقارب الأفقي $\text{ص} = 100$

س	د(س) = $\frac{100s^2 - 7s}{(3 - s)^2 + 5}$
0	-0,5
1	1,75
10	2,403
100	2,490
1000	2,499

نهـا د(س) = 100
سرعة

س	د(س) = $\frac{100s^2 - 7s}{(3 - s)^2 + 5}$
0	-0,5
1	4
10	2,603
100	2,510
1000	2,501

نهـا د(س) = 100
سرعة

إذا علمت أن نهـا $\frac{3س^3 - 5س^2 - 7س + 6}{13 - \frac{كس}{3}}$ ، فأوجد قيمة ك.

∴ النهاية موجودة = 6

∴ قيمة النهاية = $\frac{3}{\frac{ك}{3}}$ = 6

$$\frac{6}{1} = \frac{3 \times 3}{ك}$$

$$6 - 6 = ك = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1.5$$

إذا علمت أن نهـا $\frac{(2-س)(س^3 + 5س^2 + 7س + 6)}{س^5 + 7}$ = 2

أوجد قيمة م ماب

∴ النهاية موجودة = 2

∴ درجة البسط = درجة النام

$$2 = 2 - 0$$

$$2 = \frac{ب}{0}$$

$$10 = ب$$

1 إذا علمت أن نهـا $\frac{6س^2 + 2س - (بس^3 - 3س^2 - 9س + 6)}{9س^2 - 9}$ ، فأوجد القيم الممكنة لـ ب.

$$\text{نهـا} \frac{6س^2 + 2س - (بس^3 - 3س^2 - 9س + 6)}{9س^2 - 9}$$

$$18 = \text{نهـا} \frac{6س^2 + 2س - بس^3 + 3س^2 + 9س - 6}{9س^2 - 9}$$

$$18 = \text{نهـا} \frac{بس^3 - 6س^2 - 11س + 6}{9س^2 - 9}$$

∴ النهاية موجودة = 18

درجة البسط = درجة النام

قيمة النهاية = $\frac{\text{معامل الرأس}}{\text{معامل الرأس}}$

$$18 = \frac{ب}{9}$$

$$162 = ب$$

$$ب = \pm \sqrt[3]{162} = \pm 5.4$$

اسـ٦

إذا كانت نها $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{p s^2 (1+s)^4}{(3s^2-3)^2} = \frac{3}{2}$ ، فإن قيمة p تساوي:

☐ 3

☒ 6

☐ 6 -

☐ 3 -

$$\frac{3}{2} = \frac{p s^2}{(3s^2-3)^2}$$

$$6 = 4 \times \frac{3}{2} = p$$

إذا كانت نها $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2(2+p) - s(4+p)}{5+s(2-p)} = \frac{1}{2}$ ، فإن قيمة p تساوي:

☐ $\frac{1}{2}$

☐ $\frac{3}{2}$

☐ $\frac{3}{2} -$

☒ $\frac{1}{2} -$

$$0 = 2 + p$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4-p}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{p}{5+s(2-p)}$$

متـ

إذا كان نها $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(3s^4+3)^0}{(s^3+7)^n} = \frac{1}{2}$ ، حيث $n \in \mathbb{N}^+$ ، $p \in \mathbb{C}$ فأوجد قيمة k من $1, n$.

$$\frac{1}{2} = \frac{1+n^3}{s^3}$$

$$1 = 1 + n^3$$

$$0 = n^3$$

$$2 = n$$

قيمة النهاية =

$$\frac{0}{2} = \frac{0}{2}$$

$$1 = \frac{0}{2} = \frac{0}{2} = 0$$