

٣-١ ب نهاية الدالة النسبية

بسط ومقام

الدالة النسبية rational function: هي دالة يمكن كتابتها في صورة **نسبة** بين دالتين كثيرات الحدود.

بعض الأمثلة على الدوال النسبية:

$$ع (س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٩}, ق (س) = \frac{س^٣}{س^٢ + ٨}, د (س) = \frac{٨ - س^٣}{س - ٢}, هـ (س) = \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$$

فيما يأتي بيان الدالتين د (س) = $\frac{٨ - س^٣}{س - ٢}$

> (٢) = غير معرفة (غير معرفة)
المجال: $س \geq ٢$ أو $س \neq ٢$ أو $س \in \{٢\}$
نبحث وجود نهاية عند س = ٢

س	٢	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	١,٩٩٩	١,٩٩٩٩	١,٩٩٩٩٩
د(س)	١٧ -	١٩٧ -	١٩٩٧ -	١٩٩٩٧ -	٢٠٠٣	٢٠٠٣	٢٠٠٣

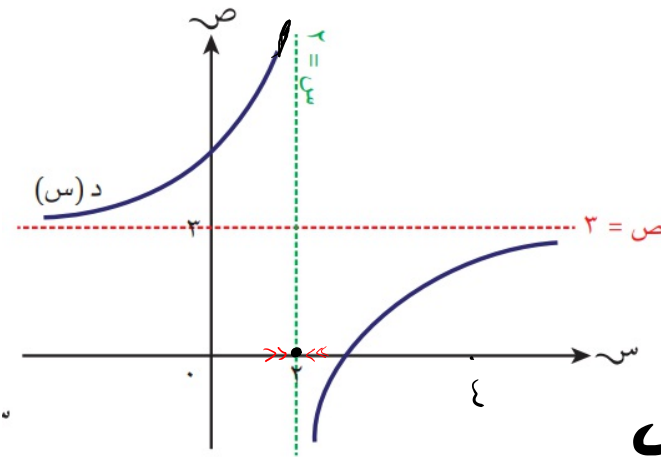
نهاية د (س) = ∞ (ليس)
نهاية د (س) = ∞ (ليس)

∴ نهاية د (س) ≠ نهاية د (س)

∴ نهاية د (س) غير موجودة

س = ٢ خط تقاربي رأسي

س = ٣ خط تقاربي أفقي



د(س) غير معرفة عند س = ٢، د(س) = ٣ لا حلول لها.

$$هـ (س) = \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$$

$$هـ (٣) = \frac{٩ - ٩}{٣ - ٣} = \frac{0}{0}$$

المجال: $س \in \{٣\}$

س ≥ ٣ س ≠ ٣ (الدالة غير معرفة عند س = ٣)

$$هـ (س) = \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٣)}$$

$$س \neq ٣ \quad س = س + ٣$$

س	١	٢	٣	٤	٥	٦
هـ	٤	٥	٧	١٠	١٣	١٦

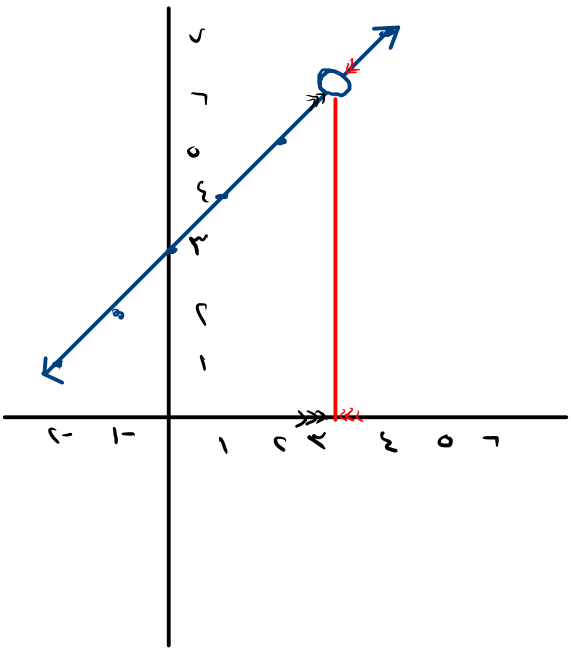
نهاية هـ (س) = ٦ (ليس)
نهاية هـ (س) = ٦ (ليس)

∴ نهاية هـ (س) = نهاية هـ (س) = ٦ (ليس)

∴ نهاية هـ (س) = ٦ (ليس)

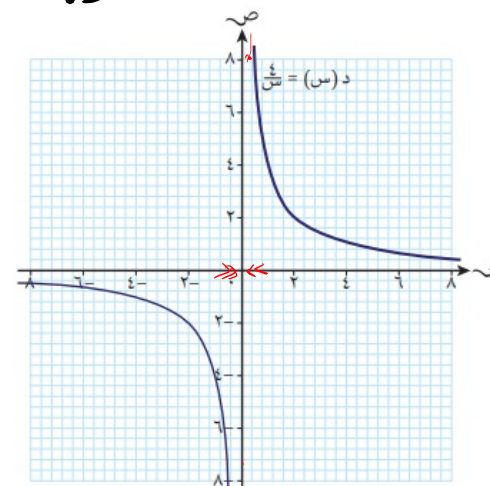
المنحنيان في بيان الدالة د (س) يقتربان أكثر فأكثر من المستقيمين المنقطين، ولكن لا يصلان إليهما أبداً. يسمى كل من هذين المستقيمين **بخط التقارب** asymptote، ويشير خط التقارب الرأسي إلى قيم س التي تكون الدالة عندها غير معرفة.

النقطة الناقصة في منحنى الدالة هـ (س) تعرف **بالفجوة** hole.



يبين الرسم الآتي منحنى الدالة د (س) = $\frac{4}{س}$: $\frac{س + 4}{س - 4}$

س = 0
ص = 0



من جهة اليمين		من جهة اليسار	
س	د (س)	س	د (س)
1	4	1-	4-
0,5	8	0,5-	8-
0,05	80	0,05-	80-
0,005	800	0,005-	800-
∞	∞	∞	∞

ب اشرح، باستخدام الرموز، سبب عدم وجود نهاية د (س).

ج اكتب معادلتَي خطي التقارب الرأسى والأفقى.

نهاية د (س) = ∞ ، نهاية د (س) = ∞
س.م.ب. س.م.ب.

نهاية د (س) \neq نهاية د (س)
س.م.ب. س.م.ب.

نهاية د (س) غير موجودة
س.م.ب.

معادلة التقارب الاعمى ص.م.

معادلة التقارب الرأسى ص.م.

د (س) = $\frac{س^2 - 2}{س}$ المجال 2-0.1 او س ≥ 2 ، س $\neq 0$.

د (س) = $\frac{س(س - 2)}{س}$ ، س $\neq 0$

ص = س - 2 ، س $\neq 0$

احداثيات الفجوة
(0, 2)

سر	1	3	5
ص	1-	1	3

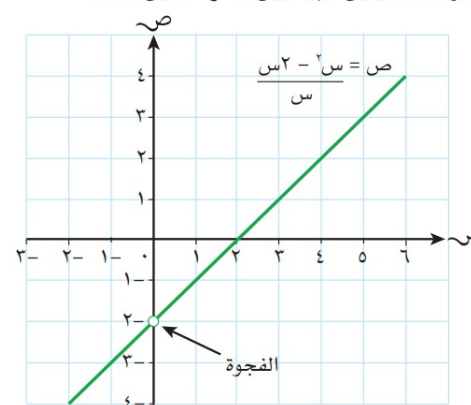
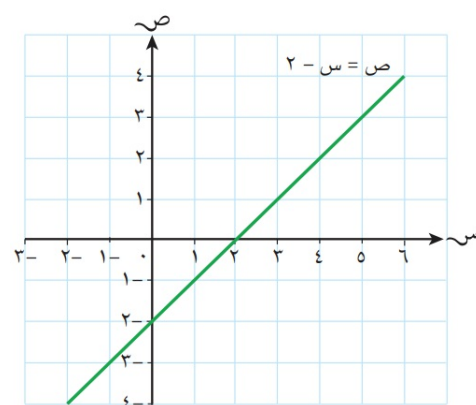
نهاية د (س) = ؟
س.م.ب.

نهاية د (س) = 2 ، نهاية د (س) = 2
س.م.ب. س.م.ب.

نهاية د (س) = نهاية د (س) = 2
س.م.ب. س.م.ب.

نهاية د (س) = 2
س.م.ب.

قارن التمثيلين البيانيين الموضحين أدناه:



فيما يلي جدول القيم للدالة النسبية د (س) = $\frac{1-s^2}{1-s}$

س	٤-	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
د(س)	٣-	٢-	١-	٠	١	غير معرّفة	٣	٤	٥	٦	٧

أ أوجد إحداثيات الفجوة الموجودة في منحنى الدالة د(س).

ب بيّن أن نهـا د(س) موجودة، وأوجد قيمتها.
س ← ١

$$د(س) = \frac{1-s^2}{1-s} = \frac{(1-s)(1+s)}{(1-s)} = 1+s$$

الاحداثيتي السين للفجوة = ١

الاحداثيتي الصادي للفجوة

(٢، ١) الفجوة

$$ص = ١ + ١ = ٢$$

إذا جعلنا قيمة س تقترب من ١
بالتناقص من جهة اليمين، نجد أن
نهـا د(س) = ٢
س ← ١+

س	د(س) = $\frac{1-s^2}{1-s}$
١,١	٢,١
١,٠١	٢,٠١
١,٠٠١	٢,٠٠١
١,٠٠٠١	٢,٠٠٠١

إذا جعلنا قيمة س تقترب من ١
بالتزايد من جهة اليسار، نجد أن
نهـا د(س) = ٢
س ← ١-

س	د(س) = $\frac{1-s^2}{1-s}$
٠,٩	١,٩
٠,٩٩	١,٩٩
٠,٩٩٩	١,٩٩٩
٠,٩٩٩٩	١,٩٩٩٩

نهـا د(س) موجودة لأن نهـا د(س) = نهـا د(س) = ٢
س ← ١+ س ← ١-

∴ نهـا د(س) = ٢
س ← ١

باستخدام التمثيل البياني المقابل:

أ أوجد ع(٢) = ٥

ب قدّر قيمة نهـا ع(س).
س ← ٣

الحل:

نهـا ع(س) = ١٠
س ← ٣

نهـا ع(س) = ١٠
س ← ٣

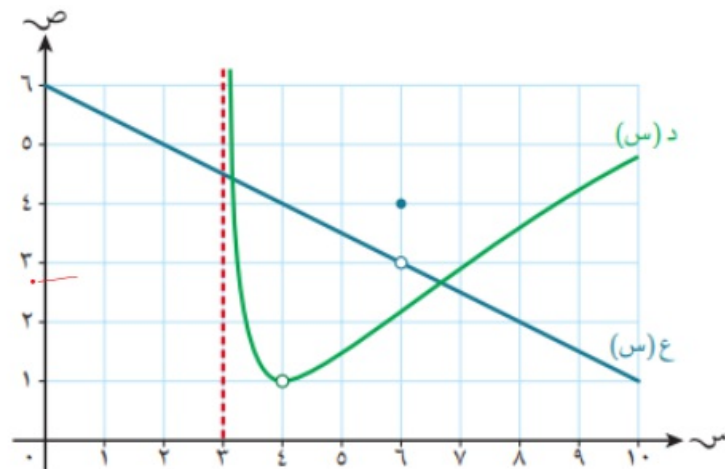
∴ نهـا ع(س) = نهـا ع(س) = ١٠
س ← ٣ س ← ٣

∴ نهـا ع(س) = ١٠
س ← ٣

أ استخدم التمثيل البياني حيث أمكن لتقدير قيمة:

(١) ع(٦) = ٤ (٢) نهـا ع(س) = ٣
س ← ٦ س ← ٦

(٣) د(٤) = ٢ (٤) نهـا د(س) = ١
س ← ٤ س ← ٤



ب علام يدلّك المستقيم المنقط الذي معادلته س = ٣ حول تمثيل الدالة د(س)؟

خط تقارب رأسي للدالة د(س)

إذا كانت الدالة ع (س) = $\frac{س^2 - ٧س + ١٢}{س - ٤}$ = $\frac{(س - ٣)(س - ٤)}{س - ٤}$ = $(س - ٣)$

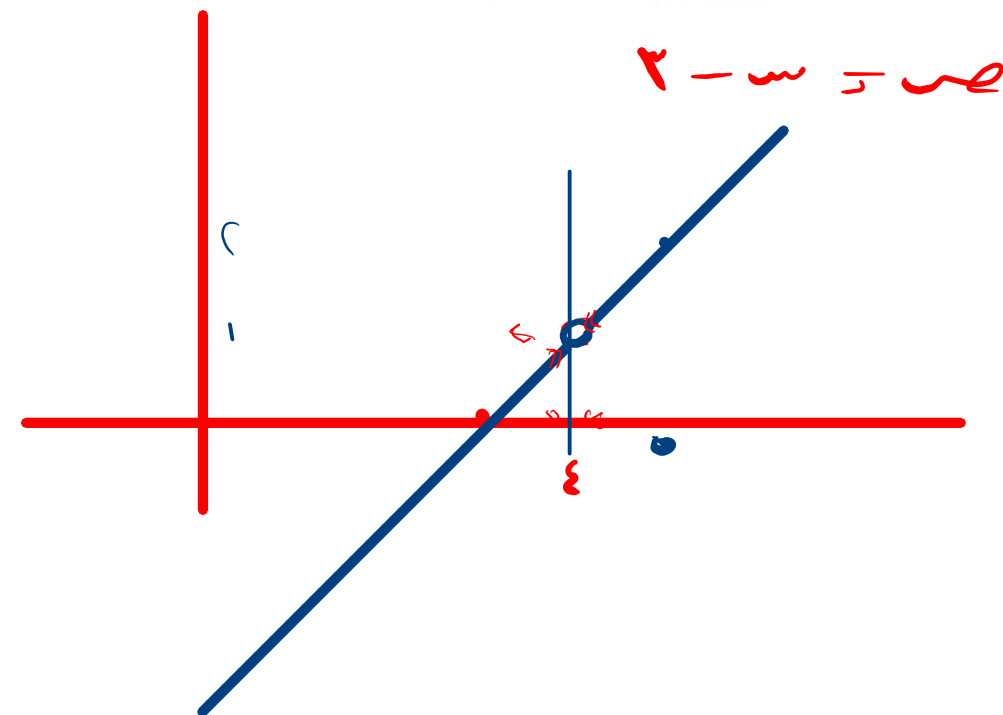
أ اشرح سبب أن الدالة ع (س) غير معرفّة عند س = ٤

ب استخدم جدولاً لتجد نهاية ع (س) عندما تقترب س إلى ٤ من:

(١) جهة اليسار.

(٢) جهة اليمين.

ج أعطِ سبب وجود نهاية الدالة ع (س) عند س = ٤



إذا كانت الدالة د (س) = $\frac{س^2 - ١}{س}$

أ انسخ وأكمل الجدولين الآتيين اللذين يبيّنان قيمة د (س) عندما تقترب س من الصفر من جهة اليسار، ومن جهة اليمين:

من جهة اليمين		من جهة اليسار	
س	د (س)	س	د (س)
٠,١	- ٨	٠,١-	٨
٠,٠٥	- ١٨	٠,٠٥-	١٨
٠,٠١	- ٩٨	٠,٠١-	٩٨
٠,٠٠٥	- ١٩٨	٠,٠٠٥-	
٠,٠٠١		٠,٠٠١-	
٠,٠٠٠٥		٠,٠٠٠٥-	

ب اذكر ما إذا كان ممكناً إيجاد أي نهاية من النهايتين الآتيتين، وأعطِ سبباً لكل إجابة:

(١) نهاية د (س) $\lim_{س \rightarrow ٠^+} د(س) = \infty$

(٢) نهاية د (س) $\lim_{س \rightarrow ٠^-} د(س) = \infty$

ج ماذا تستنتج عن نهاية د (س)؟ $\lim_{س \rightarrow ٠} د(س)$