



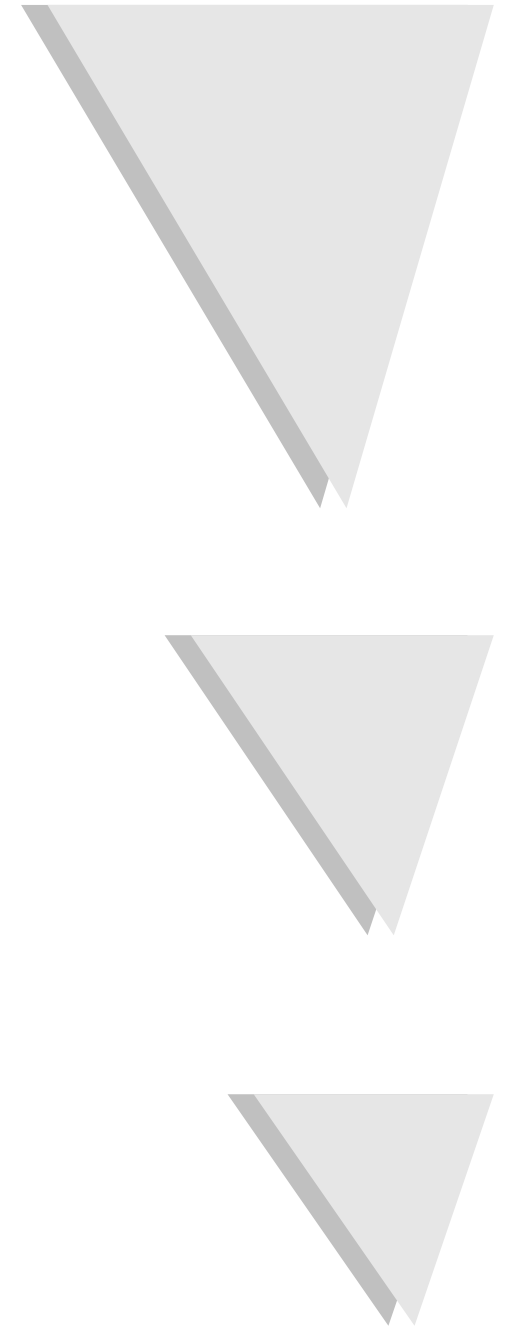
PROGRAMACIÓN FUNCIONAL

Modelo Funcional: Reducción



Reducción

- ◆ Computación por reducción
- ◆ Propiedades de la reducción
- ◆ Representando errores: bottom
 - ◆ Funciones parciales y totales
- ◆ Órdenes de reducción
 - ◆ Funciones estrictas y no-estrictas



Computación

◆ ¿Cómo calcular el valor de una expresión?

- 0) Reemplazar una subexpresión que coincida con una instancia del lado izquierdo de una ecuación por la correspondiente instancia del lado derecho.
- 1) Repetir el paso 1) hasta que no haya ninguna subexpresión que cumpla la condición.

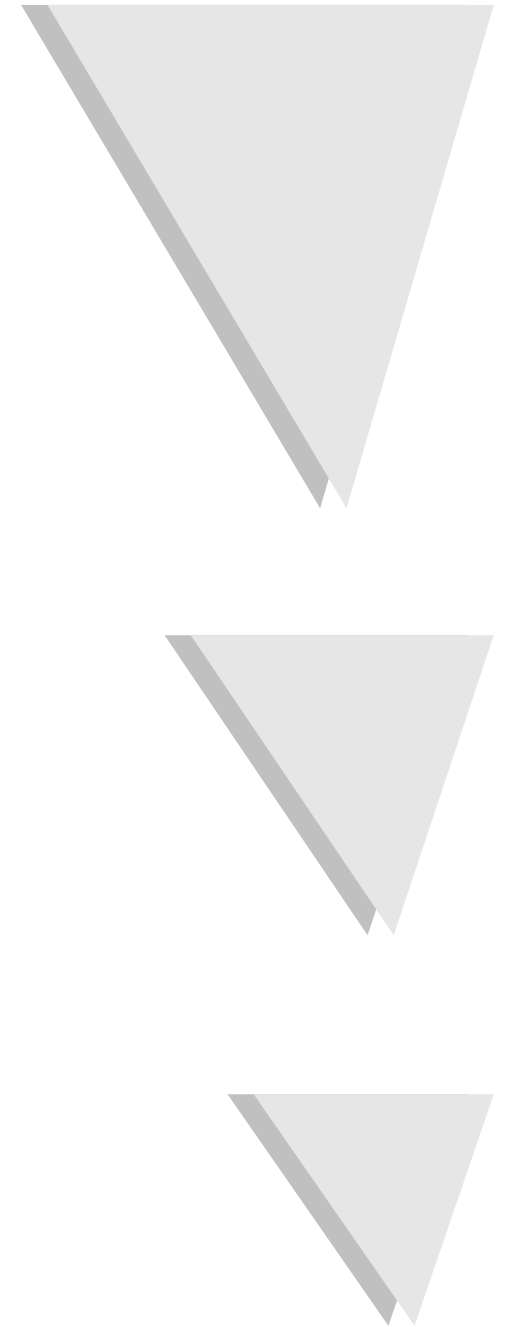
◆ Mecanismo de reducción

Reducción - Definiciones

- ◆ Redex (*reducible expression*)
 - ◆ subexpresión que coincide con una instancia del lado izquierdo de una ecuación
- ◆ Forma normal
 - ◆ expresión que no contiene redexes
- ◆ Mecanismo de reducción
 - 1) Localizar un redex
 - 2) Reemplazarlo
 - 3) Repetir hasta que la expresión esté en forma normal

Reducción

- ◆ ¿Qué propiedades tiene la reducción?
 - ◆ ¿Siempre termina?
(¿la forma normal existe?)
 - ◆ Normalización
 - ◆ Cuando termina, ¿da un único valor?
(¿la forma normal es única?)
 - ◆ Confluencia
 - ◆ ¿Hay más de una forma de reducir?
Si es así, ¿son todas equivalentes?
 - ◆ Órdenes de reducción



Normalización

- ◆ Considere el siguiente script:

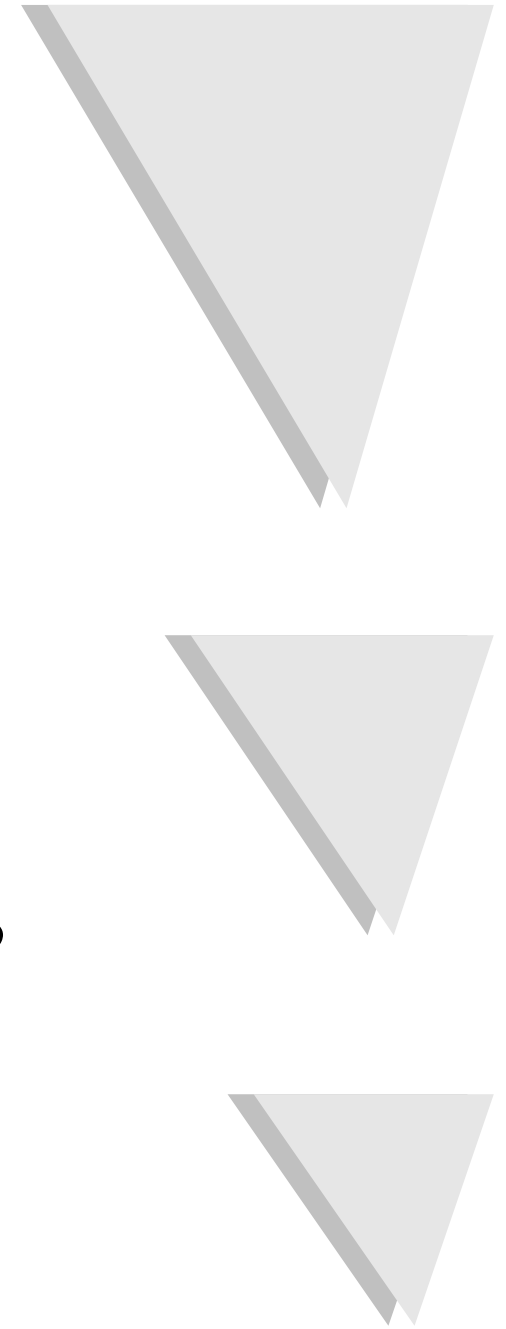
infinito :: Int

infinito = infinito + 1

recip :: Float -> Float

recip x | x > 0 = 1/x

- ◆ ¿Cómo se reduce la expresión infinito?
- ◆ ¿Y (recip 0)?



Normalización

- ◆ Forma normal
 - ◆ Expresión que no se puede reducir
 - ◆ Por abuso de lenguaje, *valor*
- ◆ La reducción pretende obtener la forma normal
- ◆ No toda expresión tiene forma normal
- ◆ ¿Puede ser que una expresión tenga forma normal, pero la reducción no la encuentre?

Normalización

- ◆ ¿Cuál es el valor de infinito? ¿Existe?
- ◆ Visión operacional:
 - ◆ expresiones cuyas computaciones no terminan
 - ◆ expresiones que no están definidas
- ◆ Visión denotacional:
 - ◆ BOTTOM (\perp): valor teórico que representa a un error o a una computación que no termina.
 - ◆ ¡NO SE PUEDE manejar de manera operacional!

Bottom

- ◆ Bottom es un valor especial
 - ◆ denotado \perp
 - ◆ representa computaciones erróneas o que no terminan
 - ◆ no se puede preguntar si algo es \perp sin obtener \perp
- ◆ Todos los tipos deben contener este valor de error, pues todos deben poder devolver error.
- ◆ ¿Cuál es, entonces el tipo de \perp ?

Bottom

- ◆ En ecuaciones

`bottom :: a`
`bottom = bottom`

- ◆ La expresión `bottom`, si se evalúa, nunca termina

- ◆ En Haskell

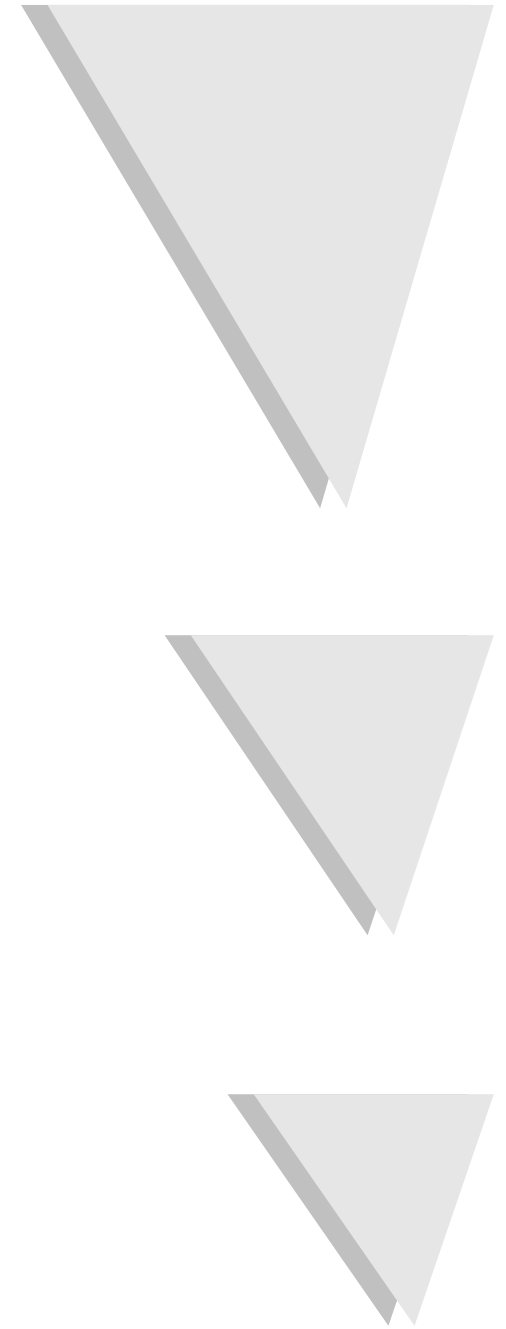
`error :: String -> a`
`-- error es predefinida, ¡pero sin ecuaciones!`

- ◆ La expresión `(error "Mensaje de error")` aborta y devuelve el mensaje "Mensaje de error"

Bottom

- ◆ Una expresión vale \perp si
 - ◆ no está definida
 - ◆ su computación no termina
- ◆ Considerar

```
f :: a -> Int
f x = if x == bottom then 1 else 0
```
- ◆ ¿Cuánto vale (f 2)?
- ◆ ¿Y (f bottom)?



Bottom y Funciones

- ◆ ¿Puede una función devolver \perp al recibir un valor definido?
 - ◆ Funciones parciales y totales
- ◆ ¿Y qué pasa cuando recibe \perp ?
 - ◆ Si lo precisa...
 - ◆ Si no lo precisa...
 - ◆ Funciones estrictas y no-estrictas

Funciones Parciales

- ◆ Considerar las siguientes definiciones

$\text{succ} :: \text{Int} \rightarrow \text{Int}$

$\text{succ } x = x + 1$

$\text{recip} :: \text{Float} \rightarrow \text{Float}$

$\text{recip } x \mid x > 0 = 1/x$

- ◆ Para todo n definido, la expresión $(\text{succ } n)$ está definida
 - ◆ La función succ es TOTAL
- ◆ La expresión $(\text{recip } n)$ no está definida para $n=0$
 - ◆ La función recip es PARCIAL

Funciones Parciales

- ◆ Función Parcial

- ◆ función que no está definida (vale \perp) al ser aplicada a un valor definido ($\neq \perp$)
- ◆ ¿Por qué no cambiar el tipo para que exprese exactamente el dominio?
 - ◆ Porque en ese caso no existe un programa que implemente inferencia de tipos
 - ◆ (Es un resultado de Teoría de la Computación)

Funciones Parciales

- ◆ ¿Qué diferencia hay entre estas dos funciones?

`recip :: Float -> Float`

`recip x | x > 0 = 1/x`

`recipE :: Float -> Float`

`recipE x | x > 0 = 1/x`

`recipE x | x == 0 = error ``No puedo calcular 1/0```

- ◆ $(\text{recip } x = \text{recipE } x)$ para todo x .
- ◆ Si $x=0$, ambas valen \perp PERO
¡el mensaje de error que ofrecen es diferente!

Funciones No Estrictas

- ◆ Considerar la siguiente definición

`const :: a -> b -> a`
`const x y = x`

- ◆ ¿Cuál es el valor de `(const infinito 2)`?
- ◆ ¿Y el de `(const 2 infinito)`?
- ◆ ¿Es necesario el primer argumento para calcular el resultado de `const`?
- ◆ ¿Y el segundo?

Funciones No Estrictas

- ◆ Función estricta

- ◆ cuando recibe \perp , retorna \perp

- ◆ Función no estricta

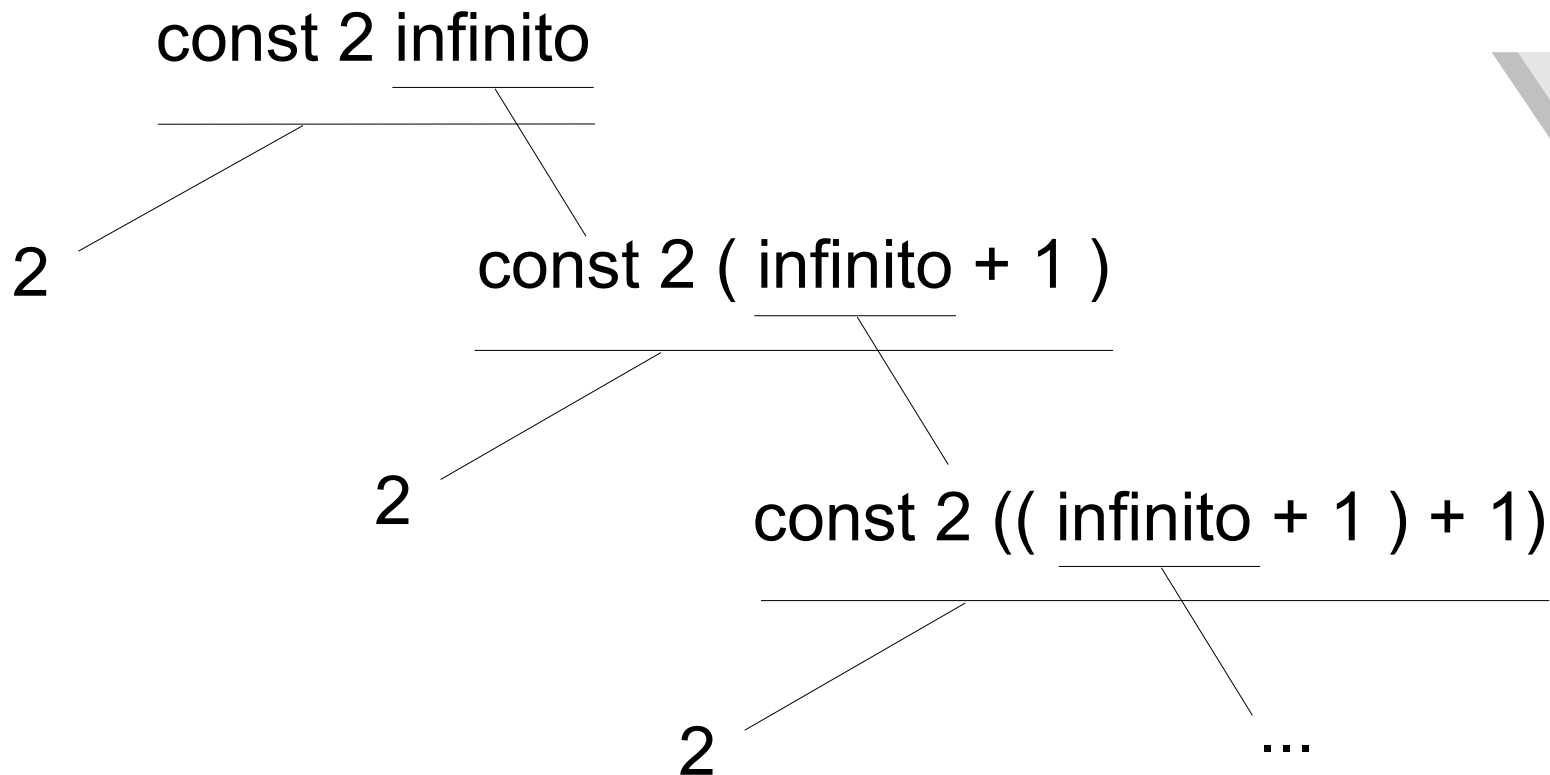
- ◆ cuando recibe \perp , puede retornar un valor definido ($\neq \perp$)

- ◆ Si la función precisa el valor para dar el resultado, entonces es estricta.

- ◆ Pero si no lo precisa, podemos elegir...

Orden de Evaluación

- ¿Cómo saber cuál redex elegir si hay más de uno?
¿Hace diferencia?



Orden de Evaluación

- ◆ Orden de evaluación
 - ◆ Algoritmo para la elección del redex a reducir
- ◆ Orden APLICATIVO
 - ◆ Primero los redexes internos
(\equiv primero los argumentos y luego la aplicación)
- ◆ Orden NORMAL
 - ◆ Primero los redexes externos
(\equiv primero la aplicación, y si aún están, los argumentos)
- ◆ En ambos casos, si hay más de uno al mismo nivel, elige el de más a la izquierda

Orden de Evaluación

- ◆ ¿Cuál orden encuentra la forma normal siempre que exista?
- ◆ ¿Cuál es el resultado de $(\text{const } 2 \text{ infinito})$ si reducimos con orden aplicativo?
- ◆ ¿Y si reducimos con orden normal?
- ◆ ¿Observa relación entre el orden de evaluación y el hecho de que una función sea estricta o no?

Orden de Evaluación

- ♦ La elección del orden de evaluación implica realizar la elección de si las funciones serán estrictas o no (cuando no precisen su argumento)
- ♦ Orden Aplicativo
 - ⇒ TODAS las funciones son estrictas
- ♦ Orden Normal
 - ⇒ hay funciones estrictas y no estrictas
(no estrictas las que no precisen su argumento)

Orden de evaluación

- ◆ En un lenguaje con efectos laterales, es NECESARIO que las funciones sean estrictas
 - ◆ ¿Por qué?
- ◆ En un lenguaje puro las funciones PUEDEN ser no estrictas
 - ◆ DECISIÓN DE DISEÑO
- ◆ Los diseñadores de Haskell eligieron que tenga funciones no estrictas

Eficiencia

- ◆ Ejemplo 1: considere la función
 $\text{quin } x = x + x + x + x + x$
- ◆ ¿Cuánto cuesta reducir (quin (fib 22))?
 (sabemos que (fib 22) cuesta $\sim 1.000.000$ reducciones)
 - ◆ Con orden aplicativo: $\sim 1.000.000$ reds.
 - ◆ Con orden normal: $\sim 5.000.000$ reds.
 - ◆ ¿se copia (fib 22) cinco veces, y cada copia se reduce en forma separada!

Eficiencia

- ◆ Ejemplo 2: considere además la función
 $\text{const } x \text{ y } = x$
- ◆ ¿Cuánto cuesta reducir (const 3 (quin (fib 22)))?
 - ◆ Con orden aplicativo: $\sim 1.000.000$ reds.
 - ◆ Con orden normal: ¡1 reducción!
 - ◆ ¡el argumento que no se precisa,
NO SE REDUCE!
- ◆ Entonces, ¿cuál orden usar?

Eficiencia

- ◆ Ejemplo 3: considere las funciones

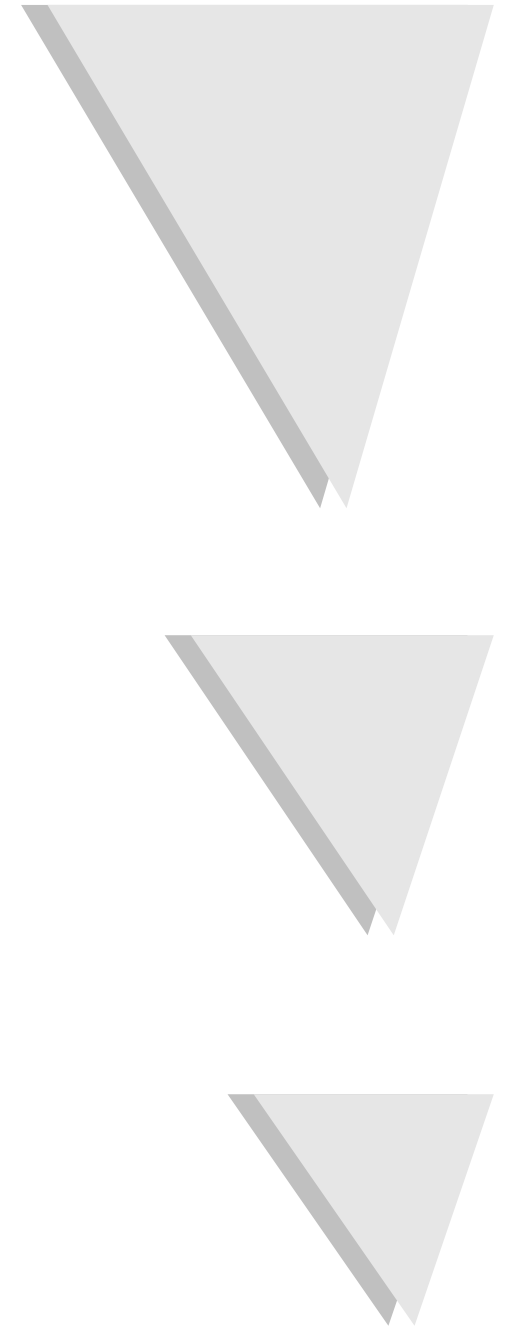
$fd :: (Int, Int) \rightarrow Int$

$fd(a,b) = a+a$

$test :: (Int, Int)$

$test = (3, \text{quin}(\text{fib } 22))$

- ◆ ¿Cuántas reducciones lleva $(fd \text{ test})$?
 - ◆ Con orden aplicativo: ~1.000.000 reds.
 - ◆ Con orden normal: 3 reducciones
- ◆ Entonces, ¿cuál orden usar?



Eficiencia

- ◆ ¿Cuál orden usar?
 - ◆ ¿Orden aplicativo?
 - ◆ ¿Orden normal?
- ◆ Solución para mejorar la eficiencia:
 - ◆ 'recordar' que las copias de x son el mismo valor, para no replicar trabajo
 - ◆ Da origen a la evaluación *lazy*



Evaluación *Lazy*

- ◆ Evaluación perezosa (o *lazy*)
 - ◆ Evaluación en orden normal, con las siguientes características adicionales:
 - ◆ Un argumento no es necesariamente evaluado por completo; sólo se evalúan aquellas partes que contribuyen efectivamente al cómputo
 - ◆ Si un argumento se evalúa, tal evaluación se realiza sólo una vez

Evaluación *Lazy*

◆ Ventajas

- ◆ usualmente mayor eficiencia
- ◆ mejores condiciones de terminación
- ◆ no hay necesidad de estructuras intermedias al componer funciones
- ◆ manipulación de estructuras de datos infinitas y computaciones infinitas

◆ Desventajas

- ◆ es difícil calcular el costo de ejecución
(pues depende del contexto en el que se usa...)

Resumen

- ◆ Reducción. Normalización.
- ◆ Bottom. Funciones parciales y totales.
- ◆ Funciones estrictas y no estrictas.
- ◆ Órdenes de reducción.
- ◆ *Lazy evaluation.*

