# Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Часть 1.

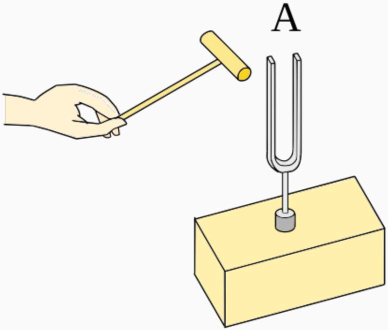
Лабораторная работа
по курсу “Дискретные преобразования сигналов”

Составитель
Тормагов Т.А.
tormagov@phystech.edu

5 февраля 2019 г.

# Практическая задача

Имеется аудиозапись tuning-fork.wav . Камертон издает звук эталонной высоты, а музыкант на слух подстраивает инструмент так, чтобы звук, издаваемый инструментом, звучал одинаково по высоте с камертоном.
Нужно по аудиозаписи понять, камертон какой эталонной частоты был записан.



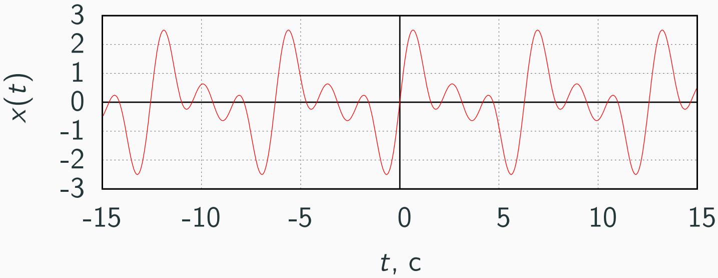
# Классификация сигналов

# Аналоговый сигнал

Будем рассматривать одномерные сигналы, заданные как функция времени $x(t)$.

Сигналы отражают состояние физической системы. Пример – напряжение на выходе RC-цепи интегрирующего типа.

Аналоговые сигналы описываются непрерывными и кусочно-непрерывными функциями времени $x(t)$.



# Преобразование Фурье (ПФ)

Как известно из курса “Радиотехнические цепи и сигналы”, пара преобразования Фурье для сигнала $x(t)$ (если оно существует) определяется следующем образом:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt, \qquad X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt,$$

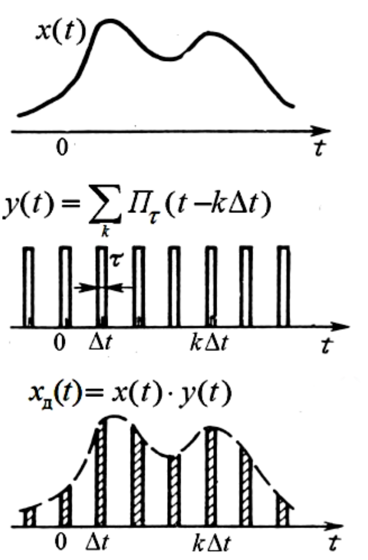
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(j\omega t) d\omega$$

(запись через частоту $f$, измеряемую в герцах (Гц, Hz));

(запись через частоту $\omega = 2\pi f$, измеряемую в рад/с).

# Дискретизация сигналов

- Дискретные сигналы $x_d(t)$ образуются путем умножения аналогового сигнала $x(t)$ на функцию дискретизации $y(t)$.
- Функцией дискретизации может быть периодическая последовательность коротких импульсов, следующих с шагом дискретизации $\Delta t$.
- Частота дискретизации $f_d = 1/\Delta t$.



# Дискретизация сигналов

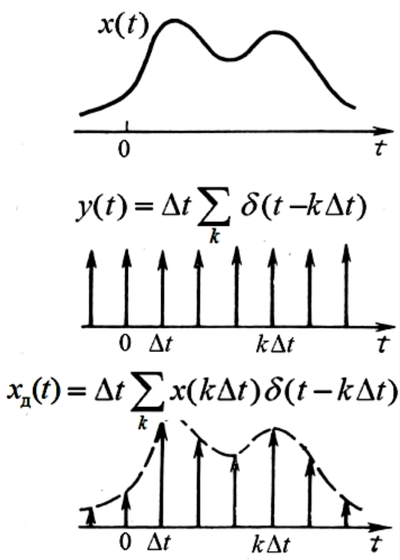
В идеальном случае функция дискретизации – периодическая последовательность дельта-функций.

$$y(t) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t)$$

$$x_d(t) = x(t)y(t) =$$

$$= \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t)$$

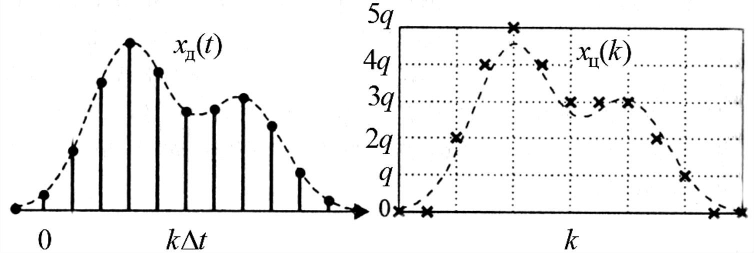
($x_d(t)$ – континуальная запись дискретного сигнала)



# Цифровые сигналы

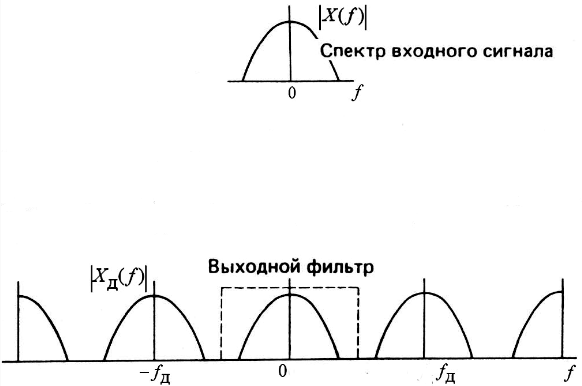
Цифровой сигнал, пригодный для цифровой обработки, помимо того, что он является дискретным, описывается квантованной решетчатой функцией, принимающей лишь ряд дискретных значений, называемых уровнями квантования.

В итоге цифровой сигнал представятся последовательностью чисел , имеющих ограниченное число разрядов.

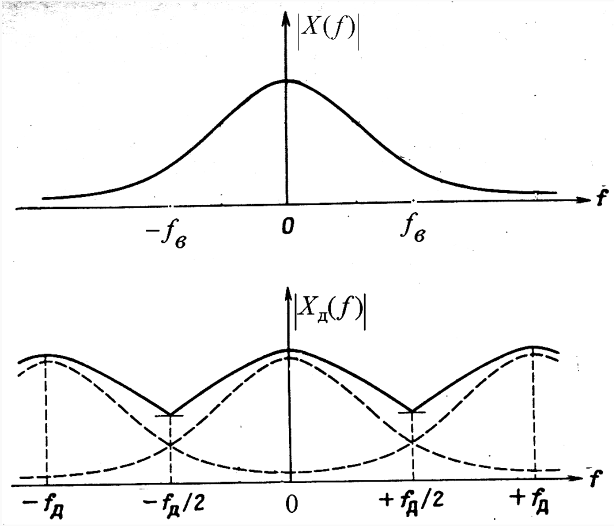


# Повторение спектра при дискретизации

Дискретизация аналогового сигнала по времени с шагом $\Delta t$ приводит к периодическому повторению его спектра по оси частот с периодом, равным частоте дискретизации $f_d$.



# Эффект наложения (“aliasing”)



# ДВПФ

# ДВПФ

Для оценки спектра сигнала по последовательности его отчетов вводится дискретное по времени преобразование Фурье (ДВПФ)

$$X(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t}, \tag{1}$$

$$x(k\Delta t) = \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df. \tag{2}$$

Отметим, что прямое ДВПФ является периодической функцией частоты с периодом, равным частоте дискретизации $f_d$.

# Запись ДВПФ через переменную $\omega$ (рад/с)

$$X(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k\Delta t},$$

$$x(k\Delta t) = \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) e^{j2\pi f k\Delta t} df.$$

Если принять $2\pi f = \omega$, а частоту дискретизации взять в рад/с ($\omega_d = 2\pi/\Delta t$), то

$$X(\omega) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \exp(-j\omega k\Delta t), \tag{3}$$

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} X(\omega) \exp(j\omega k\Delta t) d\omega. \tag{4}$$

# Запись ДВПФ через переменную $\nu = f/f_d$

$$X(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t},$$

$$x(k\Delta t) = \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df.$$

Введем нормированные частоты $\nu = f/f_d$ и примем $\Delta t = 1$ ($f_d = 1/\Delta t$). Тогда пара ДВПФ может быть записана следующим образом:

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi \nu k}, \tag{5}$$

$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) e^{j2\pi \nu k} d\nu. \tag{6}$$

# Запись ДВПФ через переменную $\theta = 2\pi\omega/\omega_d$

$$X(\omega) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\exp(-j\omega k\Delta t),$$

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} X(\omega)\exp(j\omega k\Delta t)d\omega.$$

Аналогично можно принять $\theta = 2\pi\omega/\omega_d$ и $\Delta t = 1$, тогда

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\theta k}, \tag{7}$$

$$x(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\theta)e^{j\theta k}d\theta. \tag{8}$$

# Формы записи ДВПФ ($\omega = 2\pi f$, $\nu = f/f_d$, $\theta = 2\pi\omega/\omega_d$)

$$X(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k\Delta t}$$

$$x(k\Delta t) = \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) e^{j2\pi f k\Delta t} df$$

$$X(\omega) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j\omega k\Delta t}$$

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} X(\omega) e^{j\omega k\Delta t} d\omega$$

---

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi\nu k}$$

$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) e^{j2\pi\nu k} d\nu$$

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\theta k}$$

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) e^{j\theta k} d\theta$$

# Свойства ДВПФ

# ДВПФ

Предложим, что для последовательности $x(k)$ ДВПФ спектр будет $X(\nu)$, что символически будем обозначать следующим образом:

$$x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu).$$

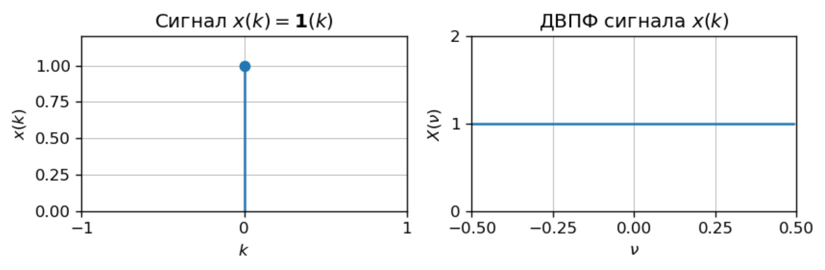
Рассмотрим далее свойства ДВПФ.

# Единичный импульс

$$\mathbf{1}(k) = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{1}(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} 1 \tag{9}$$

$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi\nu k} = x(0)e^0 = 1$



# Линейность ДВПФ

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$ и $y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} Y(\nu)$, то

$$\alpha x(k) + \beta y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \alpha X(\nu) + \beta Y(\nu), \tag{10}$$

где $\alpha$, $\beta$ - фиксированные числа.

Это свойство следует непосредственно из соответствующих свойств интеграла и суммы.

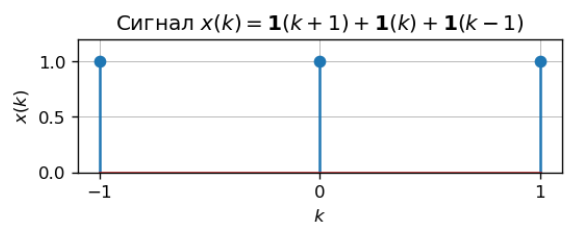
$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi\nu k}$$

$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) e^{j2\pi\nu k} d\nu$$

# Пример. Три единичных импульса.

Рассмотрим в качестве примера последовательность единичных импульсов $x(k) = \mathbf{1}(k+1) + \mathbf{1}(k) + \mathbf{1}(k-1)$, где

$$\mathbf{1}(k) = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

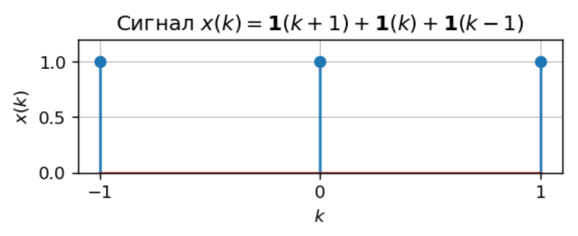


# Пример. Три единичных импульса.

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi\nu k} =$$

$$= \sum_{k=-1}^{1} x_2(k) e^{-j2\pi\nu k} = x(-1)e^{j2\pi\nu} + x(0)e^{0} + x(1)e^{-j2\pi\nu} =$$

$$= \exp(j2\pi\nu) + 1 + \exp(-j2\pi\nu) = 1 + 2\cos(2\pi\nu);$$

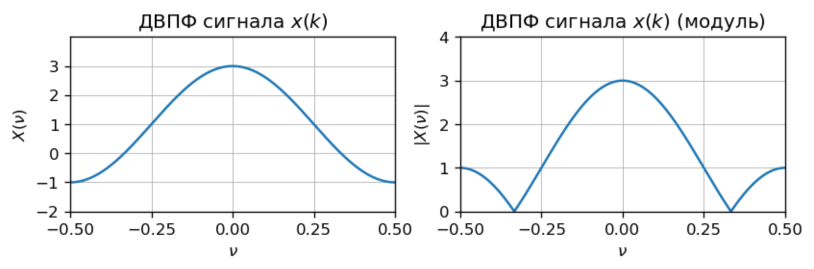


# Пример. Три единичных импульса.

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi\nu k} =$$

$$= \sum_{k=-1}^{1} x_2(k) e^{-j2\pi\nu k} = x(-1)e^{j2\pi\nu} + x(0)e^{0} + x(1)e^{-j2\pi\nu} =$$

$$= \exp(j2\pi\nu) + 1 + \exp(-j2\pi\nu) = 1 + 2\cos(2\pi\nu);$$



# Равенство Парсеваля

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$ и $y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} Y(\nu)$, то

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 \, d\nu \qquad (11)$$

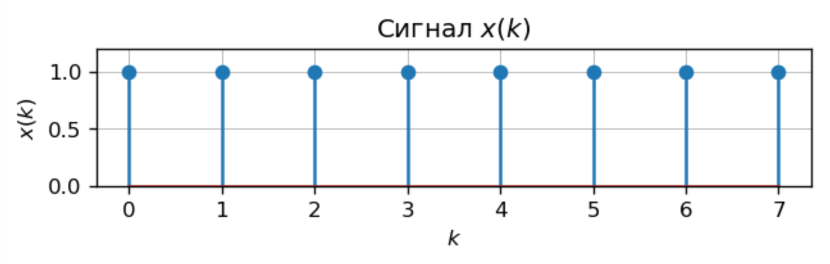
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y^*(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)\, Y^*(\nu)\, d\nu \qquad (12)$$

Пример. Предположим, что имеется финитная последовательность $x(k) = \{1; \underbrace{1}_{k=0}; 1\}$. Тогда

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 = 3.$

При этом $\int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 \, d\nu = \int_{-1/2}^{1/2} |1 + 2\cos(2\pi\nu)|^2 \, d\nu = 3$

# Пример. Последовательность импульсов




N=8 последовательных единичных импульсов

$$x(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}(k-m)$$

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu k}$$

# Пример. Последовательность импульсов

В точках $\nu = n$, где n-целое

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu k} = N$$

В точках $\nu \neq n$, где n-целое

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu k} = \frac{1 - e^{-j2\pi\nu N}}{1 - e^{-j2\pi\nu}}$$

$$= \frac{e^{-j\pi\nu N}}{e^{-j\pi\nu}} \frac{e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N}}{e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}} = e^{-j(N-1)\pi\nu} \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}$$

$$|X(\nu)| = \left| \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right|$$

# Пример. Последовательность импульсов

$$x(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}(k-m)$$

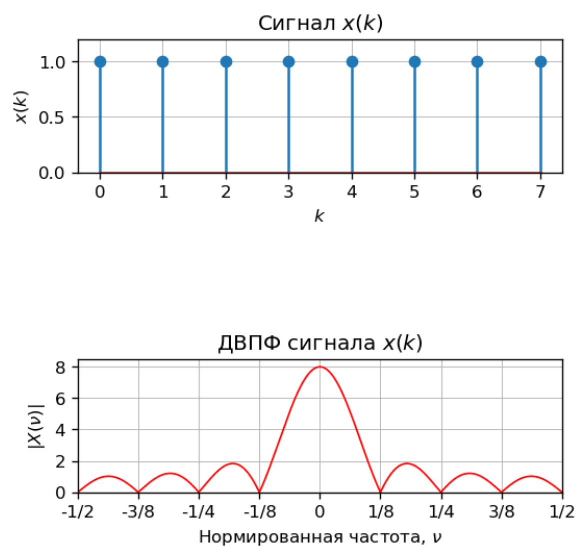
$$|X(\nu)| = \left|\frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\right|$$

$$X(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) = 8$$

Прямоугольное окно

ширина главного лепестка

$\Delta\nu = 2/N$



# FAQ

Известно, что импульсная характеристика линейной дискретной системы

$$h(k) = \mathbf{1}(k) + \mathbf{1}(k-1).$$

Как вычислить модуль частотной характеристики (модуль ДВПФ последовательности h(k))?

Source:
https://dsp.stackexchange.com/questions/34414/frequency-response-with-delta-function

# FAQ

$$h(k) = \mathbf{1}(k) + \mathbf{1}(k-1).$$

$$H(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=0}^{1} x_2(k) e^{-j2\pi\nu k} =$$

$$= x(0)e^{0} + x(1)e^{-j2\pi\nu} = 1 + \exp(-j2\pi\nu)$$

# FAQ

$$h(k) = \mathbf{1}(k) + \mathbf{1}(k-1).$$

$$H(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=0}^{1} x_2(k) e^{-j2\pi\nu k} =$$

$$= x(0)e^{0} + x(1)e^{-j2\pi\nu} = 1 + \exp(-j2\pi\nu) =$$

$$= \exp(-j\pi\nu)(\exp(j\pi\nu) + \exp(-j\pi\nu))$$

$$|H(\nu)| = |\exp(-j\pi\nu)|\,|\exp(j\pi\nu) + \exp(-j\pi\nu)| = 2|\cos(\pi\nu)|$$

(Модуль необходим – $\cos(\pi\nu)$ при $\nu = 1$ равен -1)

# Теорема запаздывания

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$, то

$$x(k-m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)e^{-j2\pi\nu m} \tag{13}$$

Докажем это свойство.

Возьмем обратное ДВПФ для правой части выражения:

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)e^{-j2\pi\nu m}e^{j2\pi\nu k}d\nu = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)e^{j2\pi\nu(k-m)}d\nu = x(k-m).$$

# Теорема запаздывания

$$x(k-m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)e^{-j2\pi\nu m} \tag{14}$$

При $m > 0$ $x(k-m)$ – это сигнал, запаздывающий относительно сигнала $x(k)$ на $m$ временных отсчетов.

Пример. $x(k) = \mathbf{1}(k)$, $X(\nu) = 1$

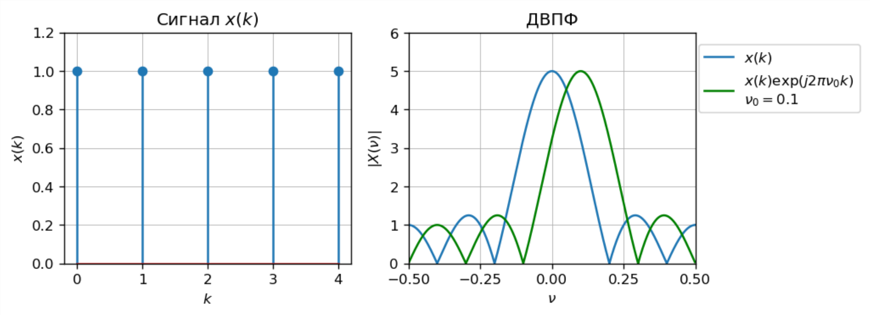
$x(k-1) = \mathbf{1}(k-1)$, $Y(\nu) = e^{-j2\pi\nu}$

$x(k+1) = \mathbf{1}(k+1)$, $Z(\nu) = e^{j2\pi\nu}$

# Теорема смещения

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$, то

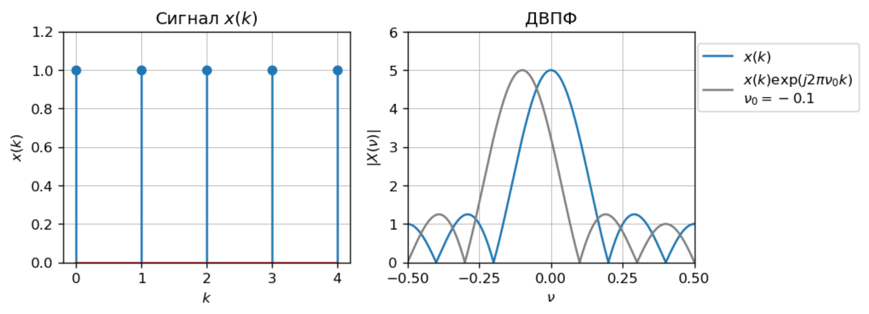
$$x(k)e^{j2\pi\nu_0 k} \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu - \nu_0) \qquad (15)$$



# Теорема смещения

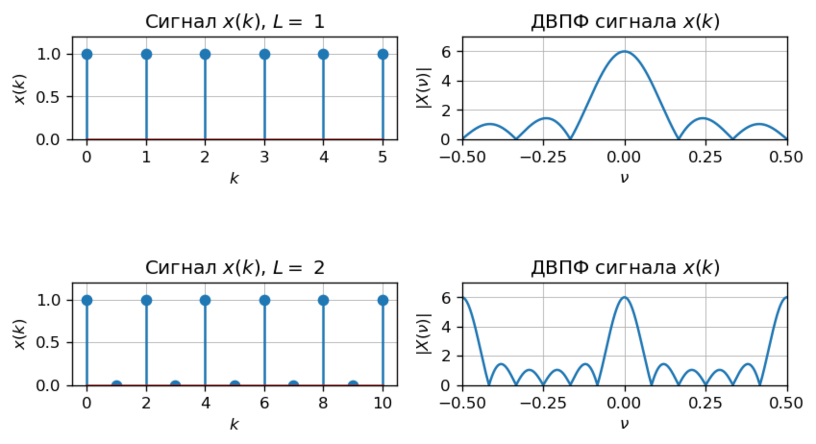
Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$, то

$$x(k)e^{j2\pi\nu_0 k} \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu - \nu_0)$$



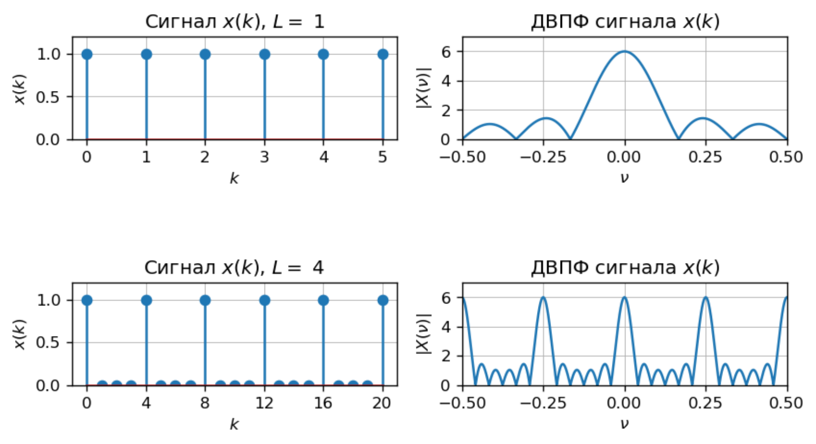
# Изменение масштаба

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\mathbf{1}(k - mL) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu L) \tag{16}$$



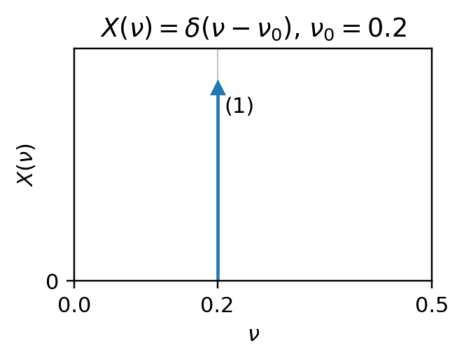
# Изменение масштаба

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\mathbf{1}(k-mL) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu L)$$



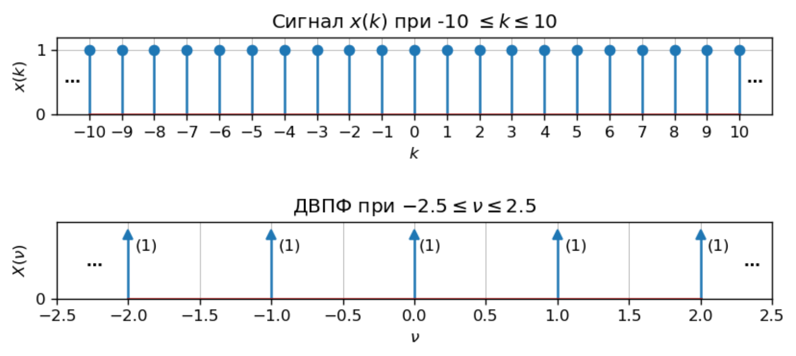
# Дельта-функция

Для дельта-функции в точке $\nu_0$ интеграл $\int_{\nu_0-\varepsilon}^{\nu_0+\varepsilon} \delta(\nu - \nu_0) = 1$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда площадь под графиком равна 1 и обозначается на графике как (1).



# Периодическая последовательность единичных импульсов

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n) \tag{17}$$



# Периодическая последовательность единичных импульсов

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\left(k-m\right) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu-n\right)$$

Доказательство

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \right) \exp(-j2\pi\nu k) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu k)$$

# Периодическая последовательность единичных импульсов

$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu k)$ – ряд Фурье для периодической (по частоте) последовательности $\delta$-функций с периодом 1:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{-m} \exp(-j2\pi\nu m),$$

где коэффиценты Фурье

$$C_{-m} = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(\nu) \exp(-j2\pi\nu m) d\nu = e^0 = 1.$$

Тогда $X(\nu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - m)$.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n)$$

# FAQ

Для ДВПФ

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n).$$

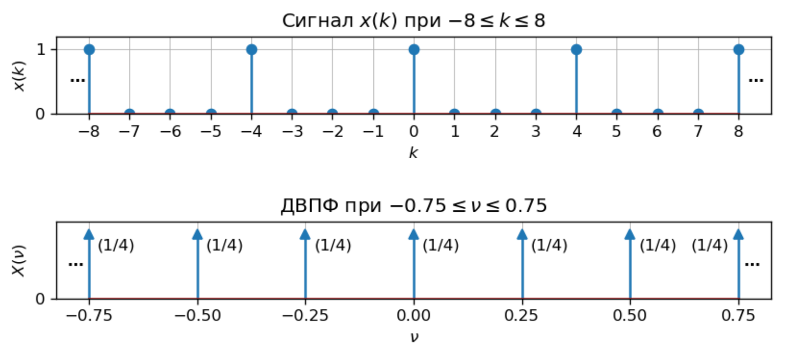
Верно ли, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu + n)?$$

Source: https://dsp.stackexchange.com/questions/27101/why-sign-in-dtft-pair-for-constant

# Последовательность единичных импульсов с периодом $L$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - mL) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right) \qquad (18)$$



# Последовательность единичных импульсов с периодом $L$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\left(k - mL\right) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right) \tag{19}$$

Доказательство:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\left(k - m\right) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - n\right)$$

по свойству (16) об изменении масштаба

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\left(k - mL\right) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu L - n\right)$$

Используя свойство $\delta$-функции $\delta(at - t_0) = \frac{1}{|a|}\delta(t - \frac{t_0}{a})$ получаем (19).

# Гармонический сигнал

$$\exp\left(j2\pi\nu_0 k\right), \ -\infty < k < +\infty \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \nu_0 - n\right) \tag{20}$$

Доказательство:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\left(k - m\right) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - n\right)$$

по теореме смещения (свойство (30))

$x(k)e^{j2\pi\nu_0 k} \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu - \nu_0)$ получаем, что

$$\exp\left(j2\pi\nu_0 k\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\left(k - m\right) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \nu_0 - n\right).$$

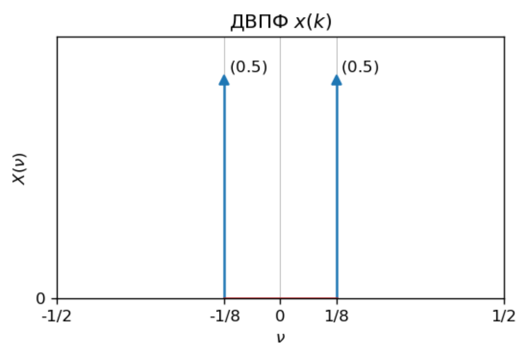
# Пример. Косинусоидальный сигнал.

$$\exp\left(j2\pi\nu_0 k\right), \ -\infty < k < +\infty \ \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \nu_0 - n\right)$$

$x(k) = \cos(2\pi k\nu_0)$, где $\nu_0 = 1/8$

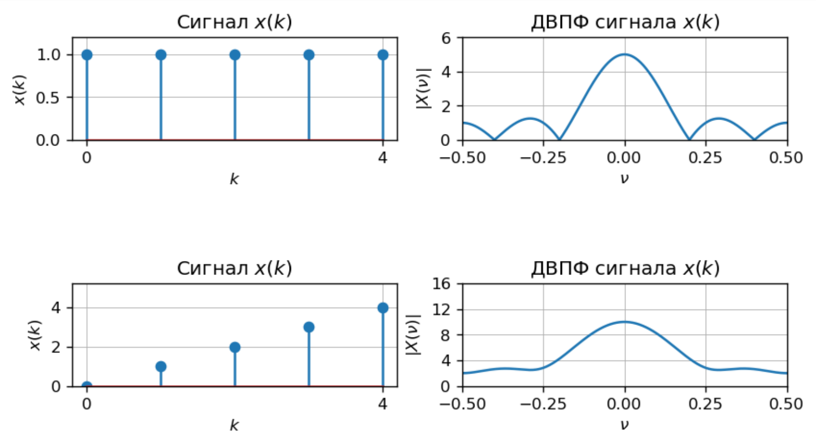
$$x(k) = \frac{1}{2}\exp(j2\pi k\nu_0) + \frac{1}{2}\exp(-j2\pi k\nu_0)$$

$$X(\nu) = 0.5\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - m) + 0.5\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu + \nu_0 - m)$$



# Умножение на $k$ и дифференцирование по частоте

$$kx(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \frac{j}{2\pi}\frac{dX(\nu)}{d\nu} \tag{21}$$



# Теорема о свертке

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$ и $y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} Y(\nu)$, то

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(l-k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)H(\nu) \tag{22}$$

(в левой части стоит дискретная свертка сигналов, в правой – произведение спектров),

$$x(k)y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \int_{-1/2}^{1/2} X(\widetilde{\nu})Y(\nu-\widetilde{\nu})d\widetilde{\nu} \tag{23}$$

(в левой части стоит произведение сигналов, в правой – свертка (циклическая) спектров).

# Теоретический материал лабораторной работы

# Теоретический материал

Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. В 3-х ч. Ч.1. Свойства и преобразования дискретных сигналов: Учебное пособие. – 2-е изд., перераб. – М.: МФТИ, 2007. – 332 с.
Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе. Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2007. – 120 с.

# Теоретический материал

Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. В 3-х ч. Ч.1. Свойства и преобразования дискретных сигналов: Учебное пособие. – 2-е изд., перераб. – М.: МФТИ, 2007. – 332 с.

- 1.1 Классификация сигналов
- 2.1 Функция дискретизации. Модель дискредитированного сигнала
- 2.2 Спектр дискредитированного сигнала
- 2.3 Теорема Котельникова

# Теоретический материал

Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе. Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2007. – 120 с.

- 2.1. Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов.
- 2.2. Конечное число выборок. Явление Гиббса.
- 2.3. Дискретное во времени преобразование Фурье.
- 5. Связь ДПФ и ДВПФ.
- 5.1 Интерполяция добавлением нулевых отсчетов.

# Теоретический материал

Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе. Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2007. – 120 с.

- 6 Временная и частотная оси ДПФ
- 7.2 Растекание спектральных компонент
- 8 Особенности применения окон при спектральном анализе методом ДПФ
- 9.1 Влияние соседних спектральных компонент

# Заключение

- Текущая версия работы: https://yadi.sk/d/jtHbQtMe3T5SSw