

Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Часть 1.

Лабораторная работа
по курсу “Дискретные преобразования сигналов”

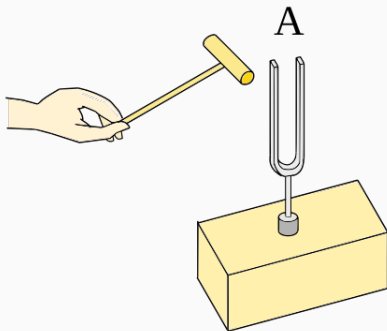
Составитель
Тормагов Т.А.
tormagov@phystech.edu

5 февраля 2019 г.

Практическая задача

Имеется аудиозапись tuning-fork.wav . Камертон издает звук эталонной высоты, а музыкант на слух подстраивает инструмент так, чтобы звук, издаваемый инструментом, звучал одинаково по высоте с камертоном.

Нужно по аудиозаписи понять, камертон какой эталонной частоты был записан.



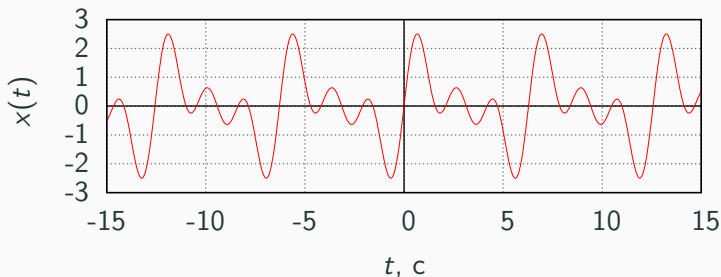
Классификация сигналов

Аналоговый сигнал

Будем рассматривать одномерные сигналы, заданные как функция времени $x(t)$.

Сигналы отражают состояние физической системы. Пример – напряжение на выходе RC-цепи интегрирующего типа.

Аналоговые сигналы описываются непрерывными и кусочно-непрерывными функциями времени $x(t)$.



Преобразование Фурье (ПФ)

Как известно из курса “Радиотехнические цепи и сигналы”, пара преобразования Фурье для сигнала $x(t)$ (если оно существует) определяется следующим образом:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt, \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt,$$

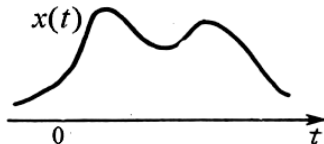
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(j\omega t) d\omega$$

(запись через частоту f ,
измеряемую в герцах (Гц, Hz));

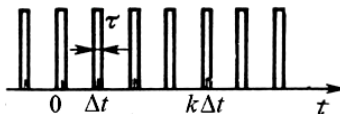
(запись через частоту $\omega = 2\pi f$,
измеряемую в рад/с).

Дискретизация сигналов

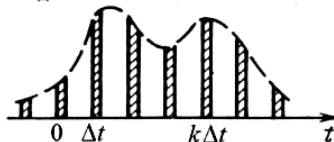
- Дискретные сигналы $x_d(t)$ образуются путем умножения аналогового сигнала $x(t)$ на функцию дискретизации $y(t)$.
- Функцией дискретизации может быть периодическая последовательность коротких импульсов, следующих с шагом дискретизации Δt .
- Частота дискретизации $f_d = 1/\Delta t$.



$$y(t) = \sum_k \Pi_\tau(t - k\Delta t)$$



$$x_d(t) = x(t) \cdot y(t)$$



Дискретизация сигналов

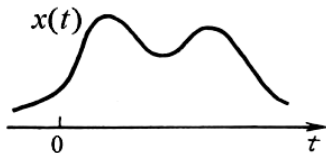
В идеальном случае функция дискретизации – периодическая последовательность дельта-функций.

$$y(t) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t)$$

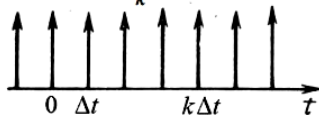
$$x_d(t) = x(t)y(t) =$$

$$= \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t)$$

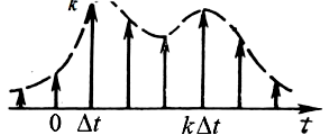
($x_d(t)$ – континуальная запись дискретного сигнала)



$$y(t) = \Delta t \sum_k \delta(t - k\Delta t)$$



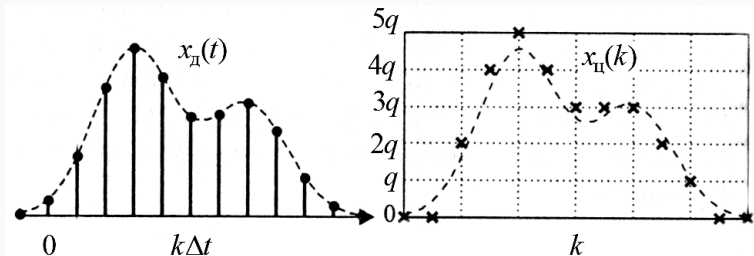
$$x_d(t) = \Delta t \sum_k x(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t)$$



Цифровые сигналы

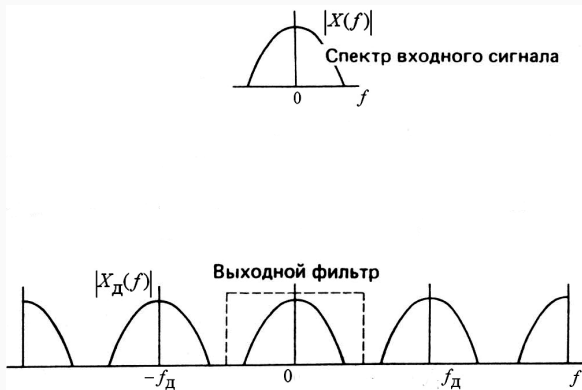
Цифровой сигнал, пригодный для цифровой обработки, помимо того, что он является дискретным, описывается квантованной решетчатой функцией, принимающей лишь ряд дискретных значений, называемых уровнями квантования.

В итоге цифровой сигнал представляется последовательностью чисел, имеющих ограниченное число разрядов.

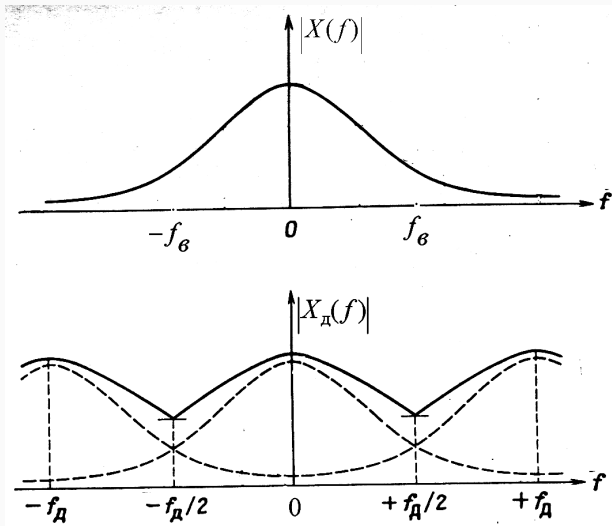


Повторение спектра при дискретизации

Дискретизация аналогового сигнала по времени с шагом Δt приводит к периодическому повторению его спектра по оси частот с периодом, равным частоте дискретизации f_d .



Эффект наложения ("aliasing")



ДВПФ

Для оценки спектра сигнала по последовательности его отчетов вводится дискретное по времени преобразование Фурье (ДВПФ)

$$X(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t}, \quad (1)$$

$$x(k\Delta t) = \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df. \quad (2)$$

Отметим, что прямое ДВПФ является периодической функцией частоты с периодом, равным частоте дискретизации f_d .

Запись ДВПФ через переменную ω (рад/с)

$$X(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t},$$

$$x(k\Delta t) = \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df.$$

Если принять $2\pi f = \omega$, а частоту дискретизации взять в рад/с ($\omega_d = 2\pi/\Delta t$), то

$$X(\omega) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \exp(-j\omega k \Delta t), \quad (3)$$

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} X(\omega) \exp(j\omega k \Delta t) d\omega. \quad (4)$$

Запись ДВПФ через переменную $\nu = f/f_d$

$$X(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t},$$
$$x(k\Delta t) = \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df.$$

Введем нормированные частоты $\nu = f/f_d$ и примем $\Delta t = 1$ ($f_d = 1/\Delta t$). Тогда пара ДВПФ может быть записана следующим образом:

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi \nu k}, \quad (5)$$

$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) e^{j2\pi \nu k} d\nu. \quad (6)$$

Запись ДВПФ через переменную $\theta = 2\pi\omega/\omega_d$

$$X(\omega) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \exp(-j\omega k\Delta t),$$

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} X(\omega) \exp(j\omega k\Delta t) d\omega.$$

Аналогично можно принять $\theta = 2\pi\omega/\omega_d$ и $\Delta t = 1$, тогда

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\theta k}, \quad (7)$$

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) e^{j\theta k} d\theta. \quad (8)$$

Формы записи ДВПФ ($\omega = 2\pi f$, $\nu = f/f_d$, $\theta = 2\pi\omega/\omega_d$)

$$X(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t}$$

$$X(\omega) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j\omega k \Delta t}$$

$$x(k\Delta t) = \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df$$

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} X(\omega) e^{j\omega k \Delta t} d\omega$$

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi \nu k}$$

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\theta k}$$

$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) e^{j2\pi \nu k} d\nu$$

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) e^{j\theta k} d\theta$$

Свойства ДВПФ

Предложим, что для последовательности $x(k)$ ДВПФ спектр будет $X(\nu)$, что символически будем обозначать следующим образом:

$$x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu).$$

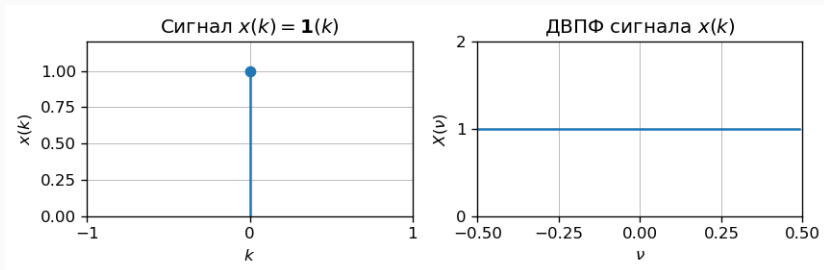
Рассмотрим далее свойства ДВПФ.

Единичный импульс

$$\mathbf{1}(k) = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{1}(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} 1 \quad (9)$$

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j2\pi\nu k} = x(0)e^0 = 1$$



Линейность ДВПФ

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$ и $y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} Y(\nu)$, то

$$\alpha x(k) + \beta y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \alpha X(\nu) + \beta Y(\nu), \quad (10)$$

где α, β - фиксированные числа.

Это свойство следует непосредственно из соответствующих свойств интеграла и суммы.

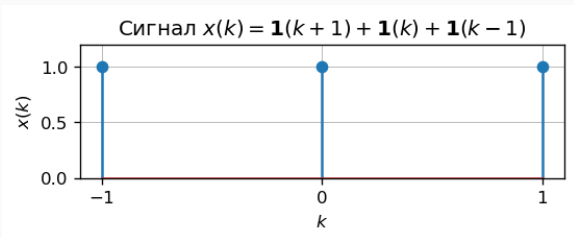
$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi\nu k}$$

$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) e^{j2\pi\nu k} d\nu$$

Пример. Три единичных импульса.

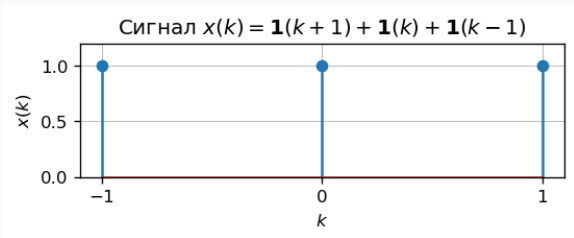
Рассмотрим в качестве примера последовательность единичных импульсов $x(k) = \mathbf{1}(k + 1) + \mathbf{1}(k) + \mathbf{1}(k - 1)$, где

$$\mathbf{1}(k) = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$



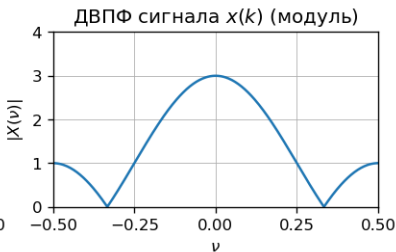
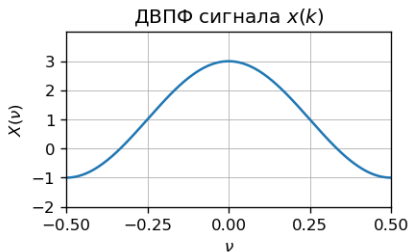
Пример. Три единичных импульса.

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j2\pi\nu k} = \\ &= \sum_{k=-1}^1 x_2(k)e^{-j2\pi\nu k} = x(-1)e^{j2\pi\nu} + x(0)e^0 + x(1)e^{-j2\pi\nu} = \\ &= \exp(j2\pi\nu) + 1 + \exp(-j2\pi\nu) = 1 + 2\cos(2\pi\nu); \end{aligned}$$



Пример. Три единичных импульса.

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j2\pi\nu k} = \\ &= \sum_{k=-1}^1 x_2(k)e^{-j2\pi\nu k} = x(-1)e^{j2\pi\nu} + x(0)e^0 + x(1)e^{-j2\pi\nu} = \\ &= \exp(j2\pi\nu) + 1 + \exp(-j2\pi\nu) = 1 + 2\cos(2\pi\nu); \end{aligned}$$



Равенство Парсеваля

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$ и $y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} Y(\nu)$, то

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 d\nu \quad (11)$$

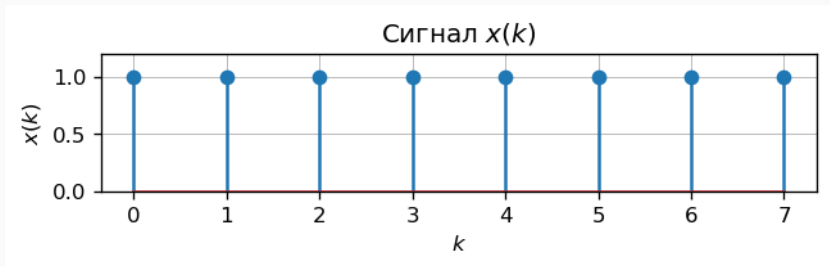
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y^*(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) Y^*(\nu) d\nu \quad (12)$$

Пример. Предположим, что имеется финитная последовательность $x(k) = \{1; \underbrace{1}_{k=0}; 1\}$. Тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 = 3.$$

При этом $\int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 d\nu = \int_{-1/2}^{1/2} |1 + 2 \cos(2\pi\nu)|^2 d\nu = 3$

Пример. Последовательность импульсов



$N=8$ последовательных единичных импульсов

$$x(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}(k - m)$$

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu k}$$

Пример. Последовательность импульсов

В точках $\nu = n$, где n -целое

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu k} = N$$

В точках $\nu \neq n$, где n -целое

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu k} = \frac{1 - e^{-j2\pi\nu N}}{1 - e^{-j2\pi\nu}} \\ &= \frac{e^{-j\pi\nu N}}{e^{-j\pi\nu}} \frac{e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N}}{e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}} = e^{-j(N-1)\pi\nu} \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \\ |X(\nu)| &= \left| \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right| \end{aligned}$$

Пример. Последовательность импульсов

$$x(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}(k-m)$$

$$|X(\nu)| = \left| \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right|$$

$$X(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) = 8$$

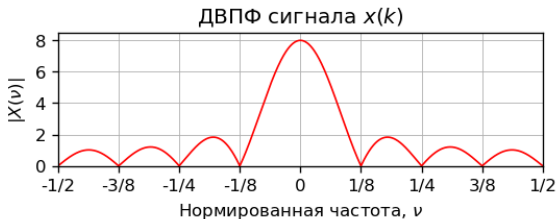
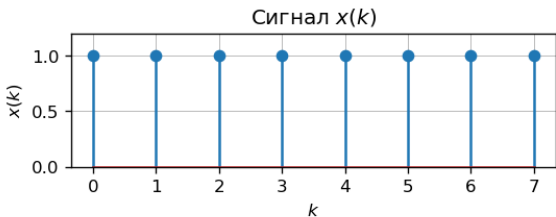
Прямоугольное

окно

ширина главного

лепестка

$$\Delta\nu = 2/N$$



Известно, что импульсная характеристика линейной дискретной системы

$$h(k) = \mathbf{1}(k) + \mathbf{1}(k - 1).$$

Как вычислить модуль частотной характеристики (модуль ДВПФ последовательности $h(k)$)?

Source:

<https://dsp.stackexchange.com/questions/34414/frequency-response-with-delta-function>

$$h(k) = \mathbf{1}(k) + \mathbf{1}(k - 1).$$

$$\begin{aligned} H(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=0}^1 h(k)e^{-j2\pi\nu k} = \\ &= h(0)e^0 + h(1)e^{-j2\pi\nu} = 1 + \exp(-j2\pi\nu) \end{aligned}$$

$$h(k) = \mathbf{1}(k) + \mathbf{1}(k - 1).$$

$$H(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=0}^1 h(k)e^{-j2\pi\nu k} =$$

$$= h(0)e^0 + h(1)e^{-j2\pi\nu} = 1 + \exp(-j2\pi\nu)$$

$$= \exp(-j\pi\nu)(\exp(j\pi\nu) + \exp(-j\pi\nu))$$

$$|H(\nu)| = |\exp(-j\pi\nu)| |\exp(j\pi\nu) + \exp(-j\pi\nu)| = 2|\cos(\pi\nu)|$$

(Модуль необходим – $\cos(\pi\nu)$ при $\nu = 1$ равен -1)

Теорема запаздывания

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$, то

$$x(k - m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)e^{-j2\pi\nu m} \quad (13)$$

Докажем это свойство.

Возьмем обратное ДВПФ для правой части выражения:

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)e^{-j2\pi\nu m}e^{j2\pi\nu k}d\nu = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)e^{j2\pi\nu(k-m)}d\nu = x(k-m).$$

Теорема запаздывания

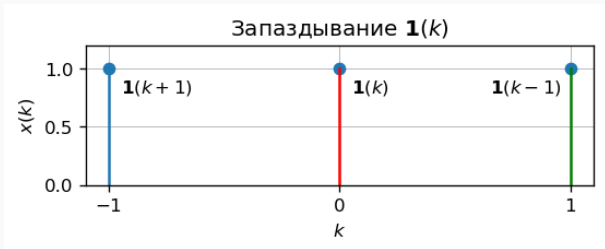
$$x(k - m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu) e^{-j2\pi\nu m} \quad (14)$$

При $m > 0$ $x(k - m)$ – это сигнал, запаздывающий относительно сигнала $x(k)$ на m временных отсчетов.

Пример. $x(k) = \mathbf{1}(k)$, $X(\nu) = 1$

$x(k - 1) = \mathbf{1}(k - 1)$, $Y(\nu) = e^{-j2\pi\nu}$

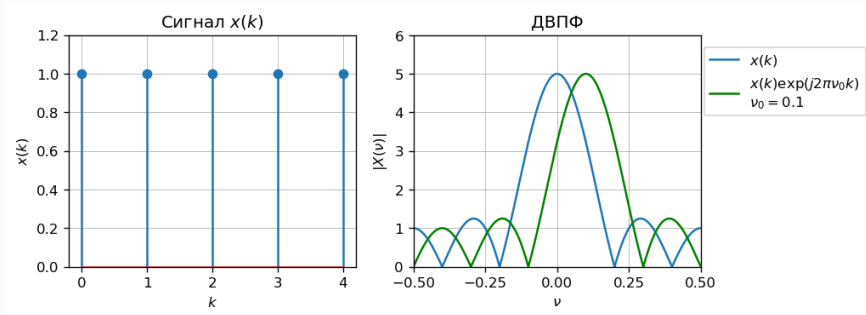
$x(k + 1) = \mathbf{1}(k + 1)$, $Z(\nu) = e^{j2\pi\nu}$



Теорема смещения

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$, то

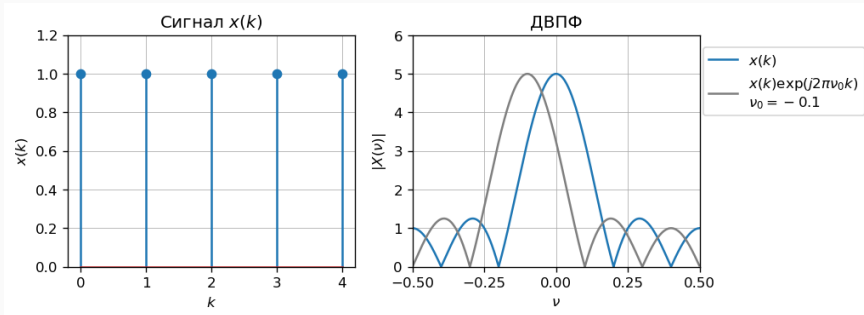
$$x(k)e^{j2\pi\nu_0 k} \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu - \nu_0) \quad (15)$$



Теорема смещения

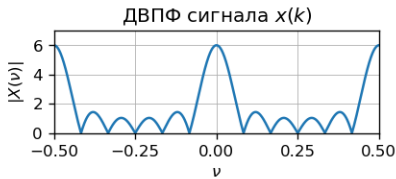
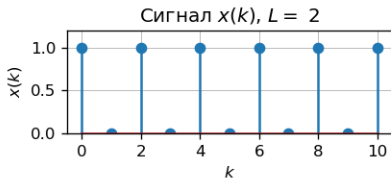
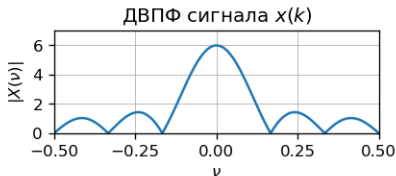
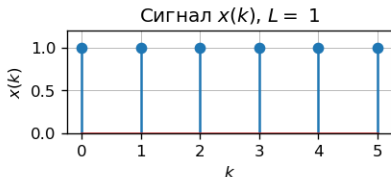
Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$, то

$$x(k)e^{j2\pi\nu_0 k} \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu - \nu_0)$$



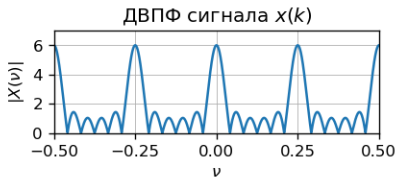
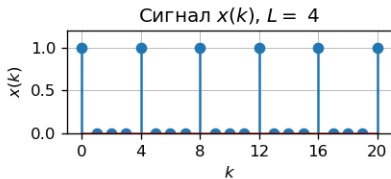
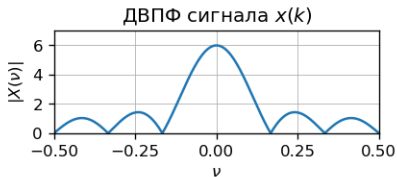
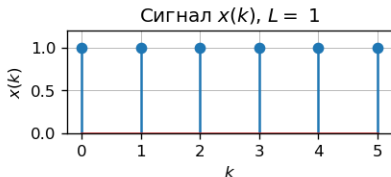
Изменение масштаба

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\mathbf{1}(k - mL) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu L) \quad (16)$$



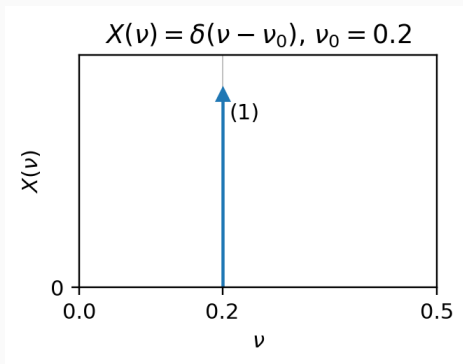
Изменение масштаба

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\mathbf{1}(k - mL) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu L)$$



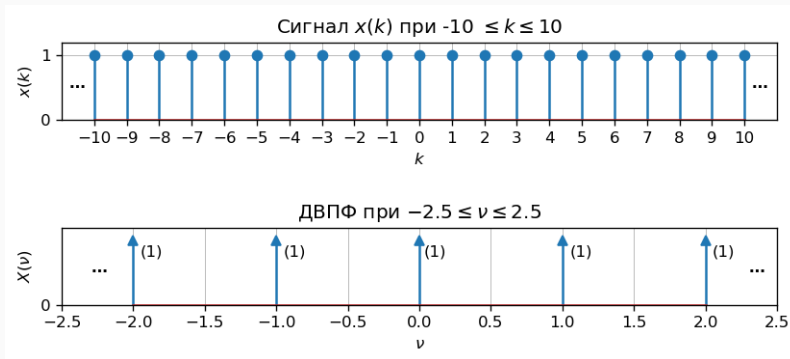
Дельта-функция

Для дельта-функции в точке ν_0 интеграл $\int_{\nu_0-\varepsilon}^{\nu_0+\varepsilon} \delta(\nu - \nu_0) = 1$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда площадь под графиком равна 1 и обозначается на графике как (1).



Периодическая последовательность единичных импульсов

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-n) \quad (17)$$



$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-n)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \right) \exp(-j2\pi\nu k) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu m) \end{aligned}$$

Периодическая последовательность единичных импульсов

$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu k)$ – ряд Фурье для периодической (по частоте) последовательности δ -функций с периодом 1:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{-m} \exp(-j2\pi\nu m),$$

где коэффициенты Фурье

$$C_{-m} = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(\nu) \exp(-j2\pi\nu m) d\nu = e^0 = 1.$$

Тогда $X(\nu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - m)$.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n)$$

Для ДВПФ

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \overset{\text{ДВПФ}}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-n).$$

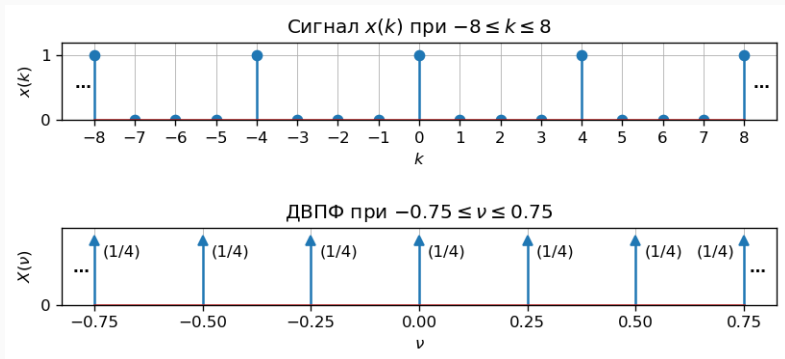
Верно ли, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \overset{\text{ДВПФ}}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu+n)?$$

Source: <https://dsp.stackexchange.com/questions/27101/why-sign-in-dtft-pair-for-constant>

Последовательность единичных импульсов с периодом L

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - mL) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right) \quad (18)$$



Последовательность единичных импульсов с периодом L

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - mL) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right) \quad (19)$$

Доказательство:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n)$$

по свойству (16) об изменении масштаба

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - mL) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu L - n)$$

Используя свойство δ -функции $\delta(at - t_0) = \frac{1}{|a|} \delta\left(t - \frac{t_0}{a}\right)$ получаем (19).

$$\exp(j2\pi\nu_0 k), \quad -\infty < k < +\infty \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n) \quad (20)$$

Доказательство:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n)$$

по теореме смещения (свойство (30))

$x(k)e^{j2\pi\nu_0 k} \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu - \nu_0)$ получаем, что

$$\exp(j2\pi\nu_0 k) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$

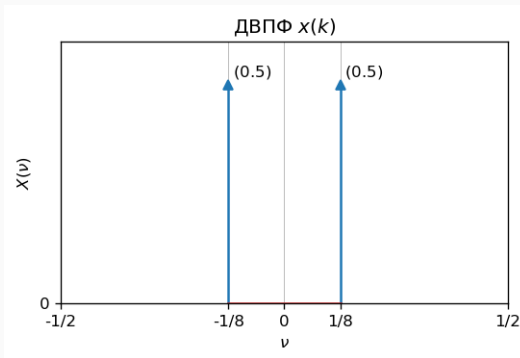
Пример. Косинусоидальный сигнал.

$$\exp(j2\pi\nu_0 k), \quad -\infty < k < +\infty \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n)$$

$$x(k) = \cos(2\pi k\nu_0), \quad \text{где } \nu_0 = 1/8$$

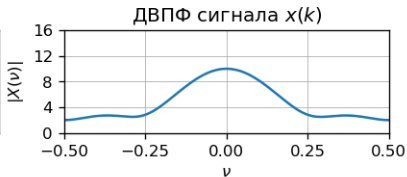
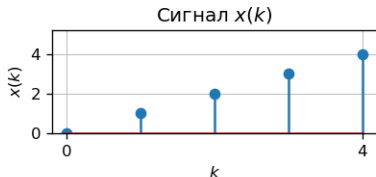
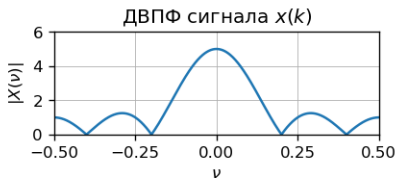
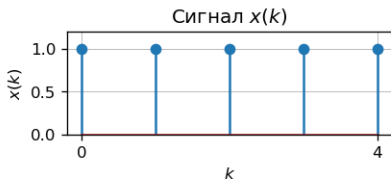
$$x(k) = \frac{1}{2} \exp(j2\pi k\nu_0) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi k\nu_0)$$

$$X(\nu) = 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - m) + 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu + \nu_0 - m)$$



Умножение на k и дифференцирование по частоте

$$kx(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \frac{j}{2\pi} \frac{dX(\nu)}{d\nu} \quad (21)$$



Теорема о свертке

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$ и $h(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} H(\nu)$, то

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(l-k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)H(\nu) \quad (22)$$

(в левой части стоит дискретная свертка сигналов, в правой – произведение спектров).

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$ и $y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} Y(\nu)$, то

$$x(k)y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{\nu})Y(\nu - \tilde{\nu})d\tilde{\nu} \quad (23)$$

(в левой части стоит произведение сигналов, в правой – свертка (циклическая) спектров).

Теоретический материал лабораторной работы

Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. В 3-х ч. Ч.1. Свойства и преобразования дискретных сигналов: Учебное пособие. – 2-е изд., перераб. – М.: МФТИ, 2007. – 332 с.

Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе. Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2007. – 120 с.

Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. В 3-х ч. Ч.1. Свойства и преобразования дискретных сигналов: Учебное пособие. – 2-е изд., перераб. – М.: МФТИ, 2007. – 332 с.

- 1.1 Классификация сигналов
- 2.1 Функция дискретизации. Модель дискредитированного сигнала
- 2.2 Спектр дискредитированного сигнала
- 2.3 Теорема Котельникова

Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе. Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2007. – 120 с.

- 2.1. Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов.
- 2.2. Конечное число выборок. Явление Гиббса.
- 2.3. Дискретное во времени преобразование Фурье.
- 5. Связь ДПФ и ДВПФ.
- 5.1 Интерполяция добавлением нулевых отсчетов.

Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе. Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2007. – 120 с.

- 6 Временная и частотная оси ДПФ
- 7.2 Растекание спектральных компонент
- 8 Особенности применения окон при спектральном анализе методом ДПФ
- 9.1 Влияние соседних спектральных компонент

- Текущая версия работы:
<https://yadi.sk/d/jtHbQtMe3T5SSw>