بررسی خواص تجزیه SVD با استفاده از پردازش تصویر

۱ تعاریف

تعریف ۱.۱. Mn را یک فضای ماتریس مختلط $n \times n$ در نظر می‌گیریم، بعضی از نویسندگان از نماد $\mathbb{C}^{n\times n}$ استفاده می‌کنند. اکنون فرض کنید که $A \in Mn$ و بردار غیر صفر $x \in \mathbb{C}^n$ بردار ویژه A باشد آنگاه λ را مقدار ویژه A می‌نامیم

چنانچه

$$Ax = \lambda x$$

تعریف ۲.۱. فرض کنید $\infty > p \geqslant ۱$ و x یک بردار باشد، آنگاه p-نرم به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

تعریف ۳.۱. فضای برداری $\mathbb{R}^{m\times n}$ به‌دست آمده از $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ را می‌توانیم با ضرب داخلی به صورت زیر تعریف کنیم (نرم فربنیوس)

$$\langle R, S\rangle = \sum_{i=۱}^{m} \sum_{j=۱}^{n} r_{ij} s_{ij}$$

برای فضای برداری $\mathbb{R}^{m\times n}$ فرم نرم به‌دست آمده از ضرب داخلی را نرم فروبنیوس[۱] می‌نامیم و به صورت $\|.\|_F$ نمایش می‌دهیم. بنابراین اگر $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$ باشد آنگاه

$$\|G\|_F = (\langle G, G\rangle)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{\sum_{i=۱}^{m} \sum_{j=۱}^{n} g_{ij}^{۲}}.$$

SVD .2

تجزیه مقدار تکین مبنی بر دنباله ای از خواص قطری سازی معمولی است که می‌تواند برای ماتریس مستطیلی به کاربرده شود. مقادیر تکین A مجذور ریشه های مقادیر ویژه ATA هستند و با $\sigma ١, \cdots, \sigma n$ نشان داده می‌شوند و به صورت نزولی مرتب می‌شوند این بدان معناست که مقادیر تکین A، $\sigma i = \sqrt{\lambda i}$ برای $١ \leqslant i \leqslant n$ می‌باشد.

تجزیه A به صورت $U \Sigma V T$ تجزیه مقدار تکین می‌باشد که در آن U یک ماتریس متعامد $m \times m$ و V نیز یک ماتریس متعامد $n \times n$ و Σ یک ماتریس $m \times n$ است که عناصر خارج از قطر آن همگی صفر می‌باشد و عناصر روی قطر اصلی آن $\sigma i = \sqrt{\lambda i}$ برای $١ \leqslant i \leqslant n$ می‌باشد.

روش محاسبه:

$$V^T = eigenvectors(A^T A)^T = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} A v_1 & \frac{1}{\sigma_2} A v_2 & \frac{NS(A^T)}{|NS(A^T)|} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_n = \sqrt{\lambda_n}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} A v_1 & \frac{1}{\sigma_2} A v_2 & \frac{NS(A^T)}{|NS(A^T)|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [v_1 \quad v_2]^T$$

مثال:پیدا کردن مقدار تکین (Singular value decomposition)ماتریس A

$$A = U\Sigma V^T, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \{\lambda_1, \lambda_2\} = \{3,2\} \wedge \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\therefore V^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \frac{NS(A^T)}{|NS(A^T)|} \right]$$

$$NS(A^T) \Rightarrow A^T x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = free = 1 \therefore u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|u_3| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

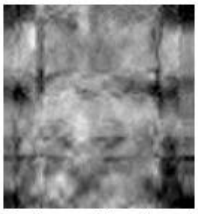
$$\Rightarrow U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad \therefore A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

۳ ترکیب مقادیر تکین

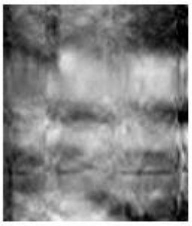
مقادیر تکین σiها منحصر به فرد هستند، اما ماتریس های U و V منحصر به فرد نیستند منحصر به فرد بودن مقادیر تکین به طور طبیعی به این مهم معطوف می شود که SVD دارای خواص مهمی از ماتریس تصویر می‌باشد و می‌تواند برای شناخت تصویر استفاده شود. با این حال با آزمایش بر روی مبادله D SV از ۲ تصویر به نتیجه قابل توجهی دست می‌یابیم و نشان می‌دهد که بردار تکین (چپ و راست) برای بازسازی تصویر از تصویر اصلی بسیار مهم است. در آزمایش اول از تصویر دو فرد استفاده می‌کنیم و D SV ماتریس متناظر با دو تصویر را محاسبه می‌کنیم.

یک مثال اولیه:

a.) Combination of
$U1*\Sigma_1*V1$



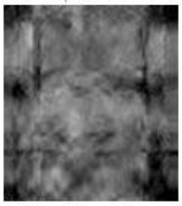
b.) Combination of
$U1*\Sigma_1*V2$



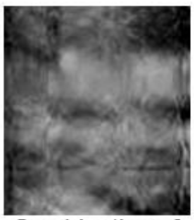
c.) Combination of
$U2*\Sigma_1*V1$

d). Combination of
$U2*\Sigma_1*V2$

e). Combination of
$U1*\Sigma_2*V1$



f.) Combination of
$U1*\Sigma_2*V2$



g). Combination of
$U2*\Sigma_2*V1$

h). Combination of
$U2*\Sigma_2*V2$

برای مثال تصویر

تصویر اول از (A_1) و تصویر دوم از (A_2) را به U، V و Σ تجزیه می کنیم لذا خواهیم داشت:

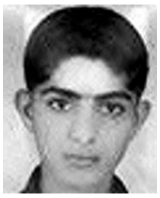
$$A_1 = U_1 \Sigma_1 V_1$$
$$A_2 = U_2 \Sigma_2 V_2$$

ترکیب تصویر 1 و 2 در شکل ۱ نشان داده شده است

شکل ۱. $U_1 \times \Sigma_1 \times V_1$

شکل ۲. $U_1 \times \Sigma_2 \times V_1$

شکل ۳. $U_2 \times \Sigma_2 \times V_2$



شکل ۴. $U_2 \times \Sigma_1 \times V_2$

شکل ۵. $U_1 \times \Sigma_1 \times V_2$

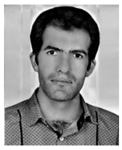
شکل ۶. $U_1 \times \Sigma_2 \times V_2$

شکل ۷. $U_2 \times \Sigma_1 \times V_1$

شکل ۸. $U_2 \times \Sigma_2 \times V_1$

با بررسی تصاویر بازسازی شده از ترکیب تصویر مجتبی و امیر در شکل ۱ مشاهده می‌شود که ماتریس U و V از تجزیه مقادیر تکین حاوی اطلاعات اصلی تصویر می‌باشد به گونه‌ای که اگر U و V در ترکیب مربوط به یک تصویر باشد آن تصویر در تصویر بازسازی شده از ترکیب مقادیر تکین ظاهر می‌شود و بسته به تیره یا روشن‌تر بودن تصویر متناظر با Σ به‌دست آمده از تجزیه مقدار تکین که درآن ترکیب حضور دارد کمی تیره یا روشن می‌شود به قسمت ۲ و ۴ شکل ۱ نگاه کنید و وقتی که U و V از مقادیر تکین در ترکیب هر کدام مربوط تصویرای متفاوت باشد تصویر نامفهومی شبیه یک شبه ظاهر می‌شود به قسمت ۵، ۶ ، ۷ و ۸ شکل ۱ توجه کنید. اکنون تصویر(A_1) را با یک تصویر طبیعت (A_2) ترکیب می‌کنیم

شکل ۱. $U_1 \times \Sigma_1 \times V_1$



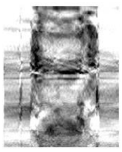
شکل ۲. $U_1 \times \Sigma_2 \times V_1$

شکل ۳. $U_2 \times \Sigma_2 \times V_2$

شکل ۴. $U_2 \times \Sigma_1 \times V_2$

شکل ۵. $U_1 \times \Sigma_1 \times V_2$

شکل ۶. $U_1 \times \Sigma_2 \times V_2$

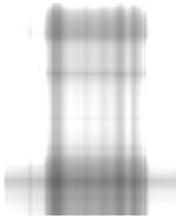


شکل ۷. $U_2 \times \Sigma_1 \times V_1$

شکل ۸. $U_2 \times \Sigma_2 \times V_1$

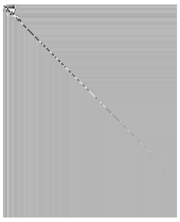
نتایج به‌دست آمده از شکل ۲ مشابه نتایج شکل ۱ می‌باشد. در ادامه تصویر 1 را با استفاده از تجزیه مقدار تکین با یک تصویر سفید ترکیب می‌کنیم و تصاویر بازسازی شده از این ترکیب را در شکل ۳ نشان داده‌ایم.

شکل ۱. $U_1 \times \Sigma_1 \times V_1$

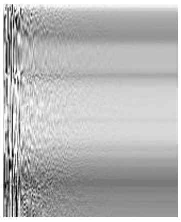


شکل ۲. $U_1 \times \Sigma_2 \times V_1$

شکل ۳. $U_2 \times \Sigma_2 \times V_2$



شکل ۴. $U_2 \times \Sigma_1 \times V_2$



شد ۵. $U_1 \times \Sigma_1 \times V_2$

شکل ۶. $U_1 \times \Sigma_2 \times V_2$

شکل ۷. $U_2 \times \Sigma_1 \times V_1$

شکل ۸. $U_2 \times \Sigma_2 \times V_1$

نتایج مشاهده شده در شکل ۳ در نگاه اول متفاوت از شکل ۱ و ۲ می‌باشد ولی در واقع این‌گونه نیست و چون با یک تصویر سفید ترکیب شده است و طبق قبل اگر Σi از یک تصویر روشن‌تر به جای Σi یک تصویر تیره تر قرار می‌گرفت موجب روشن تر شدن تصویر تیره می‌شد و همین طور برعکس. در شکل ۳ نیز چون مقادیر تکین تصویر اول با مقادیر تکین یک تصویر کاملا سفید ترکیب شده است در نتیجه تصویر را تا حد زیادی روشن کرده (در قسمت ۲ شکل ۳) که فقط قسمت‌هایی که خیلی تیره هستند هنوز مشخص است و در قسمت ۴ شکل ۳ تصویر به صورت قطری تیره‌تر شده است پس اگر در پردازش تصویر، مقادیر تکین به دست‌آمده از تجزیه ماتریس متناظر با یک تصویر را تغییر دهیم می‌توانیم تصویر را به صورت یکنواخت روشن یا تیره‌تر کنیم.

۴ نتایج اصلی

با بررسی نتایج به‌دست آمده از ترکیب مقادیر تکین به‌دست آمده از ماتریس متناظر ۲ تصویر نتیجه گرفتیم که:

1- بردارهای تکین چپ و راست به دست آمده از تجزیه مقدار تکین حاوی اطلاعات اصلی یک ماتریس‌است.

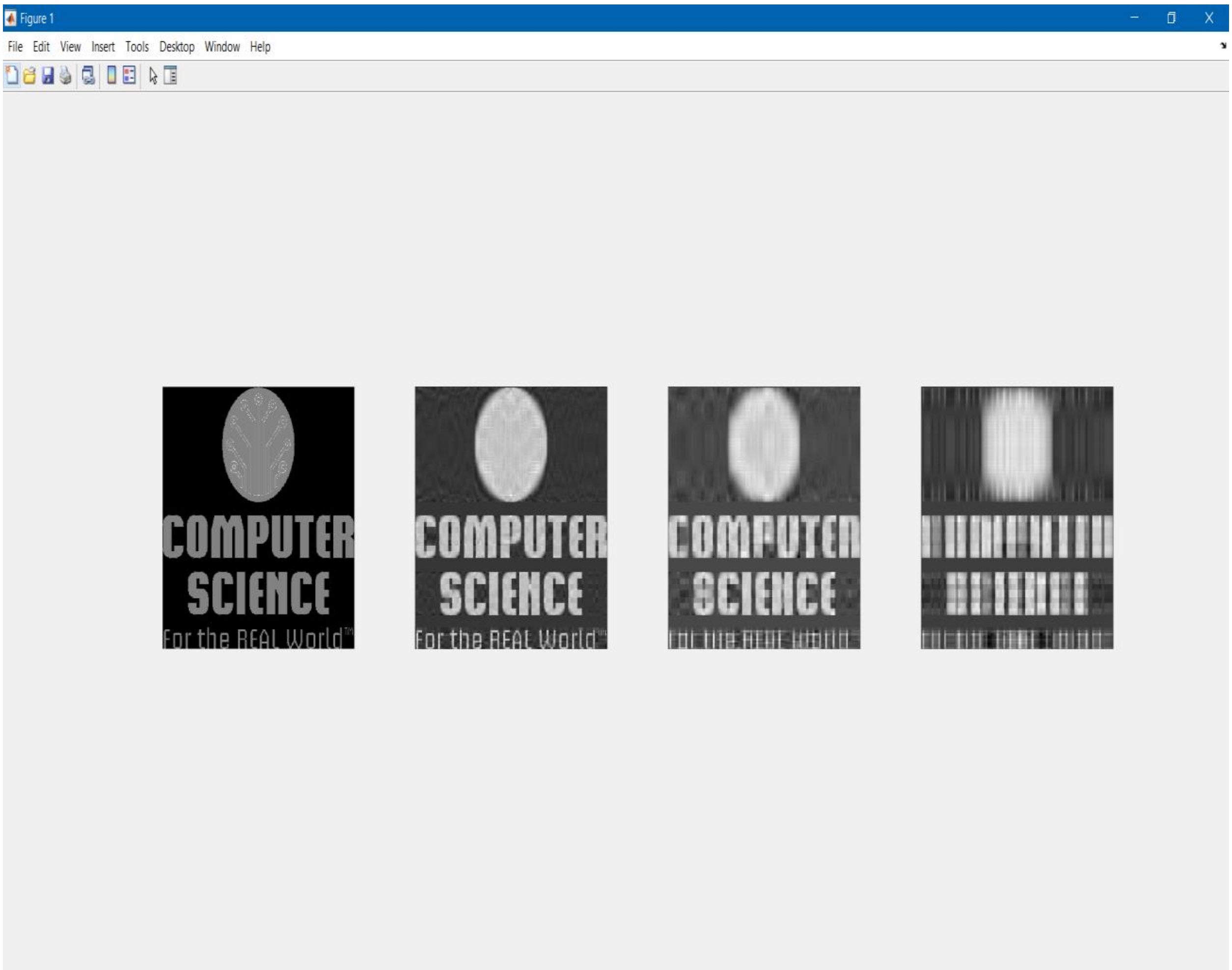
2- مقادیر تکین هر ماتریس در پردازش تصویر مانند وزن هستند که با تغییر آن‌ها کیفیت تصویر تغییر می‌کند اما شکل‌کلی تصویر ثابت است.

3- با تغییر مقادیر تکین یک ماتریس متناظر با یک تصویر می‌توان به صورت یکنواخت آن تصویر را روشن یا تیره کردهمچنین در تصویرهای رنگی شدت رنگ خاصی را زیاد یا کم کرد.

کد تجزیه SVD درمتلب:

```matlab
clc; clear;
rice = imread('cs.png');

%convert to double
I1 = im2double(rice);
%do SVD
[u,s,v]=svd(I1);
s2 = s;


%sefr kardan magadir vije
s2(20:end, :) = 0; %row
s2(:, 20:end) = 0; %column
%print image
D1=u*s2*v';

%sefr kardan magadir vije
s2(10:end, :) = 0; %row
s2(:, 10:end) = 0; %column
%print image
D2=u*s2*v';

%sefr kardan magadir vije
s2(5:end, :) = 0; %row
s2(:, 5:end) = 0; %column
%print image
D3=u*s2*v';

figure;
subplot(1,4,1);imshow(rice,[]);
subplot(1,4,2);imshow(D1,[]);
subplot(1,4,3);imshow(D2,[]);
subplot(1,4,4);imshow(D3,[]);
```

نتیجه تولید شده:



فرزاد ایمانپور

دانشجوی کارشناسی علوم کامپیوتر