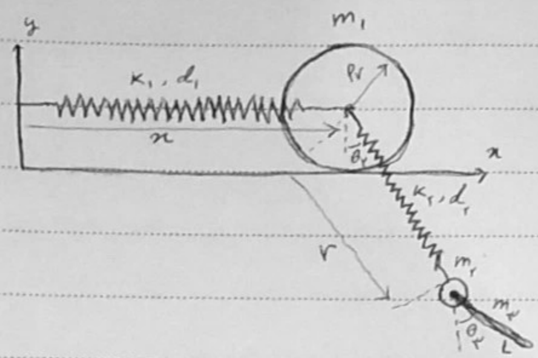
Year :......... Month :......... Day :.........

فرزام جهانی ۹۷۲۶۰۱۵



سیستم دارای ۴ درجه آزادی x و r و θ_2 و θ_3 است. چون دیسک دارای غلتش خالص است، پس دوران دیسک وابسته به x است و یک درجه آزادی مستقل نیست.

پس مختصات تعمیم یافته x و r و θ_2 و θ_3 را در نظر بگیریم

مشخصات سیستم:

$m_1 = 1.5\,Kg \qquad m_2 = 0.5\,Kg \qquad m_3 = 1\,Kg$

$K_1 = 75\,N/m \qquad K_2 = 50\,N/m \qquad L = 0.3\,m$

$P_2 = 0.2\,m \qquad d_1 = 1\,m \qquad d_2 = 0.4\,m$

شرایط اولیه:

$x(0) = d_1 + cmp_{k_2}$ $\quad -0.2\ ?$ $\qquad r(0) = d_2 + cmp_{k_2} = d_2 + \frac{(m_2+m_3)g}{K_2} \qquad \theta_2(0) = 0 \qquad \theta_3(0) = 0$

$\dot{x}(0) = 0 \qquad \dot{r}(0) = 0 \qquad \dot{\theta}_2(0) = 0 \qquad \dot{\theta}_3(0) = 0$

محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_1 \left(\frac{\dot{x}}{P_2}\right)^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_{G_2}^2 + \dot{y}_{G_2}^2) \; ; \quad \begin{cases} x_{G_2} = x + r\sin\theta_2 \rightsquigarrow \dot{x}_{G_2} = \dot{x} + \dot{r}\sin\theta_2 + r\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \\ y_{G_2} = P_2 - r\cos\theta_2 \rightsquigarrow \dot{y}_{G_2} = -\dot{r}\cos\theta_2 + r\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \end{cases}$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_{G_3}^2 + \dot{y}_{G_3}^2) + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}_3^2 \; ; \quad \begin{cases} x_{G_3} = x_{G_2} + \frac{L}{2}\sin\theta_3 \rightsquigarrow \dot{x}_{G_3} = \dot{x}_{G_2} + \frac{L}{2}\dot{\theta}_3\cos\theta_3 \\ y_{G_3} = y_{G_2} - \frac{L}{2}\cos\theta_3 \rightsquigarrow \dot{y}_{G_3} = \dot{y}_{G_2} + \frac{L}{2}\dot{\theta}_3\sin\theta_3 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$V_s = \frac{1}{2} K_1 (x - d_1)^2 + \frac{1}{2} K_2 (r - d_2)^2$$

$$V_g = (m_1 g P_2) + (m_2 g y_{G_2}) + (m_3 g y_{G_3})$$

$$\rightsquigarrow V = V_s + V_g$$

چون نیروی خارجی غیر پایستار به سیستم وارد نمی‌شود، پس Q_j برابر با صفر است ✓

$$\mathcal{L} = T - V \rightsquigarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$$

معادلات را در متلب تشکیل داده و سپس حل میکنیم

استخراج معادلات حرکت با MATLAB

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j \qquad \mathcal{L} = T - V$$

```
syms q1 q2 q3 q4 ...
     qd1 qd2 qd3 qd4 ...
       qdd1 qdd2 qdd3 qdd4 ...

L = T - V;

A(1,:) = jacobian(L, q1);
A(2,:) = jacobian(L, q2);
A(3,:) = jacobian(L, q3);
A(4,:) = jacobian(L, q4);
```

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}$$

```
B(1,:) = jacobian(L, qd1);
B(2,:) = jacobian(L, qd2);
B(3,:) = jacobian(L, qd3);
B(4,:) = jacobian(L, qd4);
```

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$$

```
C(1,:) = jacobian(B(1), [q1, qd1, q2, qd2, q3, qd3].')*[qd1, qdd1, qd2, qdd2, qd3, qdd3].';
C(2,:) = jacobian(B(2), [q1, qd1, q2, qd2, q3, qd3].')*[qd1, qdd1, qd2, qdd2, qd3, qdd3].';
C(3,:) = jacobian(B(3), [q1, qd1, q2, qd2, q3, qd3].')*[qd1, qdd1, qd2, qdd2, qd3, qdd3].';
C(4,:) = jacobian(B(4), [q1, qd1, q2, qd2, q3, qd3].')*[qd1, qdd1, qd2, qdd2, qd3, qdd3].';
```

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

```
D = C - A;
```

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}$$

نحوه Decouple کردن معادلات حرکت استخراج شده از معادله لاگرانژ:

برای Decouple کردن متغییرهای حالت و تبدیل آن‌ها به فرم State Space، فرم کلی معادله لاگرانژ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}=0$$

از آنجایی که امکان مشتق‌گیری به صورت Implicit در نرم‌افزار MATALAB وجود ندارد، برای محاسبه $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)$، با استفاده از قاعده Chain Rule به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)=\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}+\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\ddot{q}$$

برای ساده‌سازی معادلات، دو متغییر A و B را که ترم‌های سمت راست تساوی معادله فوق هستند، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j})$$

$$B=\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

در نهایت $\ddot{q}$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\ddot{q}=\frac{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}-B\dot{q}}{A}$$

به اینصورت در هر معادله تنها مشتق دوم یکی از مختصه‌های تعمیم‌یافته نسبت به زمان حضور دارد و به سادگی می‌توان آن را به فرم State Space تبدیل نمود.

برای کدنویسی این بخش در MATLAB مشابه زیر عمل می‌کنیم:

```
dL_dq = simplify(transpose(jacobian(L, q)));
dL_dqd = simplify(transpose(jacobian(L, qd)));
A = simplify(jacobian(dL_dqd, qd));
B = simplify(jacobian(dL_dqd, q));
```

و در تعریف تابعی که ode45 آن را فراخوانی می‌کند، مطابق زیر عمل می‌کنیم:

```
function Zdot = Decoupled_Equation(t, z, A, B, dL_dq)
q1 = z(1);
q2 = z(2);
q3 = z(3);
q4 = z(4);

qd1 = z(5);
qd2 = z(6);
qd3 = z(7);
qd4 = z(8);


qd = z(5: end);
qdd = A\(dL_dq - B*qd);

Zdot = zeros(8, 1);
Zdot(1:4) = qd;
Zdot(5:end) = qdd;

end
```