آنالیز الگوریتم (۲۲۸۹۱)

مدرس: حسین بومری

[پاییز ۹۹]

تمرین ۱: تقسیم و حل، حریصانه و مرور ساختمان داده

نگارنده: ۹۷۱۰۰۵۷۹ فرزین نصیری

روابط بازگشتی

۱

$$T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + ۵n \qquad T(n) = ?$$

با جایگذاری $n = ۲^m$:

$$T(۲^m) = ۲^{m/۲}T(۲^{m/۲}) + ۵ \times ۲^m \xRightarrow{\div ۲^m} \frac{T(۲^m)}{۲^m} = \frac{T(۲^{m/۲})}{۲^{m/۲}} + ۵$$

با تعریف $\frac{T(۲^m)}{۲^m} = F(m)$

$$F(m) = F\left(\frac{m}{۲}\right) + ۵$$

حالا با توجه به قضیه اصلی [۱] مقادیر زیر را به‌دست می آوریم:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

در این مسئله:

$$a = ۱, b = ۲, f(n) = ۵, n^{\log_a b} = ۱$$

با توجه به شروط قضیه اصلی و مقادیر بالا:

$$F(m) = \theta(\log m) \Rightarrow T(۲^m) = ۲^m\Theta(\log m) \Rightarrow T(n) = \Theta(n \log\log n)$$

---

[1] master theorem

۲

میتوانیم رابطه بازگشتی را ادامه دهیم:

$$T(n) = T(n-1) + n^2 = T(n-2) + (n-1)^2 + n^2$$

واضح است که با ادامه فرآیند بالا به نتیجه زیر میرسیم:

$$T(n) = T(0) + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

از طرفی بخش دوم همان مجموع مربعات است که فرمول محاسبه آن را نیز میدانیم:

$$T(n) = T(0) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

از رابطه بالا واضح است که $T(n) = O(n^3)$

۳

از قضیه اصلی [2] استفاده می کنیم:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

در این مسئله:

$$a = ۲, b = ۲, f(n) = n^{۲}$$

حالا با تعریف کردن g(n) به صورت زیر آهنگ رشد آن را با f(n) مقایسه میکنیم.

$$g(n) = n^{\log_b a} = n^{\log_{۲} ۲} = n$$

از نتیجه بالا مشخص است که آهنگ رشد f(n) از g(n) بیشتر است. در واقع ϵ ایی میتوان یافت بطوریکه:

$$f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon}) \rightarrow T(n) = \Theta(n^{۲})$$

[2] master theorem

۴

در اینجا نیز میتوانیم از قضیه اصلی استفاده کنیم. اما برای اینکار باید از شروط بسط یافته آن استفاده کنیم. طبق یکی از این شروط:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) \quad If\ f(n) = \Theta(n \log^k n)\ and\ k = -۱ \quad Then\ \ T(n) = \Theta(n \log \log n)$$

$$a = ۲, b = ۲, f(n) = n \log^{-۱} n$$

که با توجه به قضیه اصلی $T(n) = \Theta(n \log \log n)$