



**DHBW**

Duale Hochschule  
Baden-Württemberg

# Folgen und Reihen

**Mathematik 1 für Wirtschaftsinformatiker**

Prof. Dr. Jonas Offtermatt — 28. November 2024

# Einführung in Folgen

## Definition einer Folge

Eine Folge ist eine geordnete Liste von Zahlen, die bestimmten Regeln folgt.

## Mathematische Definition

Eine Abbildung  $(a_n)$ , die jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  eine reelle Zahl  $a_n$  zuordnet, heißt reelle Zahlenfolge.

## Beispiele von Folgen

- $a_n = n^2$ : Die quadratische Folge  $1, 4, 9, 16, \dots$
- $b_n = \frac{1}{n}$ : Die harmonische Folge  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
- $c_n = (-1)^n$ : Die alternierende Folge  $-1, 1, -1, 1, \dots$

# Arithmetische und Geometrische Folgen

## Arithmetische Folgen

Eine arithmetische Folge ist eine Folge, in der die Differenz zwischen aufeinanderfolgenden Gliedern konstant ist.

### Definition einer arithmetischen Folge

Eine Folge  $a_1, a_2, a_3, \dots$  heißt arithmetische Folge, wenn die Differenz  $d$  zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern konstant ist. Das heißt, für alle  $n \geq 1$  gilt:  $a_{n+1} - a_n = d$ .

### Beispiel einer arithmetischen Folge

Die Folge  $2, 5, 8, 11, 14, \dots$  ist eine arithmetische Folge mit der Differenz  $d = 3$ .

# Arithmetische und Geometrische Folgen

## Geometrische Folgen

Eine geometrische Folge ist eine Folge, in der das Verhältnis zwischen aufeinanderfolgenden Gliedern konstant ist.

### Definition einer geometrischen Folge

Eine Folge  $a_1, a_2, a_3, \dots$  heißt geometrische Folge, wenn das Verhältnis  $q$  zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern konstant ist. Das heißt, für alle  $n \geq 1$  gilt:  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ .

### Beispiel einer geometrischen Folge

Die Folge  $3, 6, 12, 24, 48, \dots$  ist eine geometrische Folge mit dem Verhältnis  $q = 2$ .

# Konvergenz von Folgen

## Definition der Konvergenz

Eine Folge  $a_1, a_2, a_3, \dots$  konvergiert gegen den Grenzwert  $L$ , wenn für jede positive Zahl  $\epsilon > 0$  ein Index  $n_0$  existiert, so dass für alle  $n \geq n_0$  gilt:

$$|a_n - L| < \epsilon$$

.

Schreibweise:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ .

## Beispiel einer konvergenten Folge

Die Folge  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$  konvergiert gegen den Grenzwert 0.

## Divergenz einer Folge

Eine Folge, die nicht gegen einen Grenzwert konvergiert, wird als divergent bezeichnet.

Die Folge  $1, 2, 3, 4, \dots$  ist eine divergente Folge.

# Rechenregeln für Grenzwerte bei Folgen

Für konvergente Folgen gelten folgende Rechenregeln für Grenzwerte:

## Konstantenregel

Für eine konstante Zahl  $c$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$

## Summenregel

Für zwei konvergente Folgen  $a_n$  und  $b_n$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

## Produktregel

Für zwei konvergente Folgen  $a_n$  und  $b_n$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

# Rechenregeln für Grenzwerte bei Folgen

## Quotientenregel

Für zwei konvergente Folgen  $a_n$  und  $b_n$  mit  $b_n \neq 0$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

## Potenzregel

Für eine konvergente Folge  $a_n$  und eine natürliche Zahl  $k$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^k) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k$$

## Korridor

Gilt  $a_n \leq c_n \leq b_n$  und  $\lim a_n = \lim b_n$ , dann folgt  $\lim c_n = \lim a_n$ .

# Reihen

Eine Reihe ist die Summe aller Glieder einer Folge  $(a_n)$ :

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=0}^n a_i$$

## Endliche Reihen

Eine endliche Reihe ist eine Reihe, die nur eine begrenzte Anzahl von Gliedern hat.

Die endliche Reihe  $1 + 2 + 3 + 4 + 5$  hat 5 Glieder, und die Summe beträgt 15.

## Unendliche Reihen

Eine unendliche Reihe hat eine unendliche Anzahl von Gliedern.

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i$$

.



# Arithmetische und Geometrische Reihen

**Arithmetische Reihe** Für die Partialsummen der arithmetischen Reihe  $\sum_{i=0}^n i$  gilt:

$$s_n = \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

.

**Geometrische Reihe** Die Partialsummen der geometrischen Reihe  $\sum_{i=0}^n q^i$  mit  $q \in \mathbb{R}$  und  $q \neq 1$  lassen sich vereinfachen zu:

$$s_n = \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

.

# Konvergenz von Reihen

Offensichtlich gilt für die arithmetische Reihe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

Es gibt aber durchaus auch unendliche Reihen die konvergieren. So gilt bspw.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1}{1-q}$$

für  $q \in \mathbb{R}$  und  $|q| < 1$ .