Übungsblatt 1 Folgen und Reihen

Aufgabe 1

a) Ein Sparer legt sich einen Sparplan zurecht. Seine erste Einzahlung auf einem Konto beträgt 500 €. Jeden weiteren Monat zahlt er 5 € mehr ein als im Vormonat. Berechnen Sie den Betrag B der 120. Einzahlung und die Summe S aller Einzahlungen (ohne irgendwelche Zinsen) von der ersten bis zur 120. Einzahlung.

b) in Versicherungsnehmer bezahlt bei Vertragsabschluss 1.000 € Prämie. Jedes weitere Jahr bezahlt er 8 € weniger. Berechnen Sie die Summe S der ersten 20 Zahlungen.

Aufgabe 2

Nach seinem Eintritt in das Berufsleben beschließt Herr E.X. Studierender von seinem Monatsgehalt jeweils einen kleinen Teil zur Seite zu legen, um sich in Zukunft ein neues Auto leisten zu können. Er legt im ersten Monat 200 € zur Seite und erhöht diesen Betrag jeden weiteren Monat um 2,5 % gegenüber dem Vormonat.

1. Nach drei Jahren möchte er einen Zwischenstand über seine Ersparnisse erstellen. Wie hoch sind diese und wie hoch ist der Betrag, den er zuletzt zur Seite gelegt hat?
2. Seinen Recherchen zufolge benötigt er für den Neuwagenkauf 20.000 €. Im wie vielten Monat muss er das letzte Mal Geld für das Auto zur Seite legen? Wie hoch muss diese letzte Ansparung ausfallen, um auf exakt 20.000 € zu kommen?

Hinweis: Verwenden Sie bei den Berechnungen die entsprechende Formel für die Reihe.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und geben Sie, falls existent, den jeweiligen Grenzwert an.

a) $a_n = \dfrac{n^3+1}{2n^2}$ b) $a_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2}$ c) $a_n = \dfrac{2^n+3}{4^n}$

d) $a_n = \sqrt{4n^2+14n+5} - 2n$ e) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{1+n}$

Aufgabe 4

Berechnen Sie den Wert der folgenden Summen:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4^n}{6^{n+2}}$

Aufgabe 5

Eine kleine Brauerei hat sich zum Ziel gesetzt, insgesamt 5.000 Liter einer neuen Biersorte herzustellen und abzusetzen. Hierzu werden monatlich Teilmengen gebraut und verkauft. Aufgrund des erwarteten zunehmenden Bekanntheitsgrades soll jeden Monat 10 % mehr als im Vormonat hergestellt werden. Im ersten Monat werden 100 Liter der neuen Biersorte gebraut.

a) Welche Menge wird im 10. Monat hergestellt?

b) Wie viele Liter Bier der neuen Sorte werden im ersten Jahr gebraut?

c) In welchem Monat erreicht die Brauerei ihr Produktionsziel?

Aufgabe 6

Zeigen Sie unter Verwendung des Zusammenhangs

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, n \in \mathbb{N},$$

dass im Falle $n \in \mathbb{N}_0$ für die Teilsumme (s_n) einer arithmetischen Reihe gilt:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = (n+1) \cdot \frac{a_0 + a_n}{2}$$

Aufgabe 7

Zeigen Sie unter Verwendung des Zusammenhangs

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, n \in \mathbb{N},$$

dass im Falle $n \in \mathbb{N}_0$ für die Teilsumme (s_n) einer geometrischen Reihe gilt:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Aufgabe 8

Sie sind an der Planung der Bestuhlung für einen neuen Theatersaal beteiligt. Es ist zunächst vorgesehen, dass die vorderste Zuschauerreihe aus 15 Plätzen besteht. In jeder weiteren Reihe erhöht sich die Anzahl um 4 Plätze je Reihe, sodass in der 2. Reihe 19 Plätze und in der 3. Reihe 23 Plätze entstehen. Der Theatersaal soll am Ende für 2.000 Gäste Platz bieten.

a) Welche Anzahl an Plätzen weist die 25. Reihe des Theatersaals auf?

b) Wie viele Plätze hat der Theatersaal insgesamt, wenn Sie genau 25 Reihen im Gebäude unterbringen?

c) Wie muss die Anzahl der Plätze in der ersten Reihe verändert werden, wenn Sie mit 25 Reihen und einer Erhöhung um 4 Plätze je Reihe die Vorgabe von 2.000 Plätzen erfüllen möchten?

d) Wie muss der Wert gewählt werden, um den sich die Platzanzahl je Reihe erhöht, wenn es stattdessen bei 15 Plätzen in der ersten Reihe bleibt und nicht mehr als 25 Reihen möglich sind?

Aufgabe 9

Gegeben ist die Zahlenfolge

$$a_n = \frac{4}{5^n}, n \in \mathbb{N}.$$

1. Welche Werte nehmen das zweite und das dritte Folgenglied an?
2. Zeigen Sie, dass es sich bei a_n um eine geometrische Folge handelt.

3. Aus der Zahlenfolge a_n lässt sich die zugehörige n-te Teilsumme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

bilden. Welchen Wert nimmt diese Summe für $n = 5$ an?

4. Zeigen Sie allgemein, dass für die Reihe $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ gilt:

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{5^{k-1}} = \frac{4}{5^0} + \frac{4}{5^1} + \frac{4}{5^2} + \ldots = 5$$