Differentialrechnung

Mathematik 1 für Wirtschaftsinformatiker

Prof. Dr. Jonas Offtermatt — 24. Oktober 2023

Funktionen und ihre Eigenschaften

Einführung

- Eine **Funktion** f ordnet jedem Element aus einer Definitionsmenge D genau ein Element aus einer Zielmenge Z zu.
- Schreibweise: $f : D \to Z$
- Beispiele:
  - $f(x) = 2x + 3$ ist eine lineare Funktion.
  - $g(x) = \sin(x)$ ist eine trigonometrische Funktion.
- Eigenschaften von Funktionen:
  - Definitionsbereich und Wertebereich
  - Injektivität, Surjektivität, Bijektivität
  - Differenzierbarkeit

Funktionen und ihre Eigenschaften

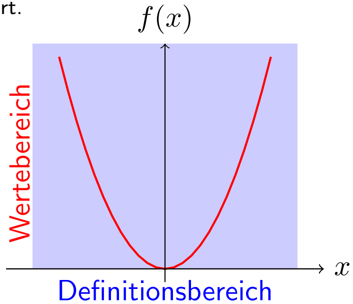
Definitionsbereich und Wertebereich

- Der **Definitionsbereich** einer Funktion ist die Menge aller Werte, für welche die Funktion definiert ist.

  Beispiel: Für die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist der Definitionsbereich $D = [0, \infty)$, da die Wurzel aus negativen Zahlen nicht definiert ist.

- Der **Wertebereich** einer Funktion ist die Menge aller Funktionswerte für die Elemente im Definitionsbereich.

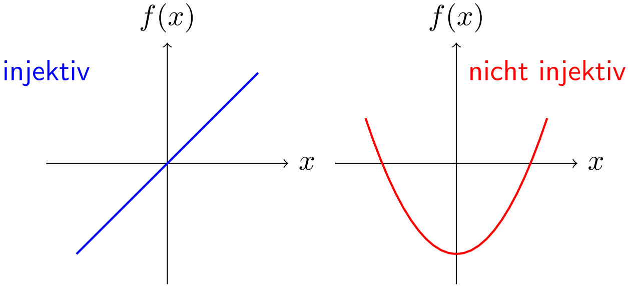
  Beispiel: Für die Funktion $f(x) = x^2$ ist der Wertebereich $W = [0, \infty)$, da die Funktion immer nicht-negative Werte liefert.



Funktionen und ihre Eigenschaften

Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

- Eine Funktion f ist **injektiv**, wenn jedem Funktionswert höchstens ein Element aus dem Definitionsbereich zugeordnet ist.
  Definition:
  $$f(x_1) \neq f(x_2) \text{ für alle } x_1 \neq x_2$$

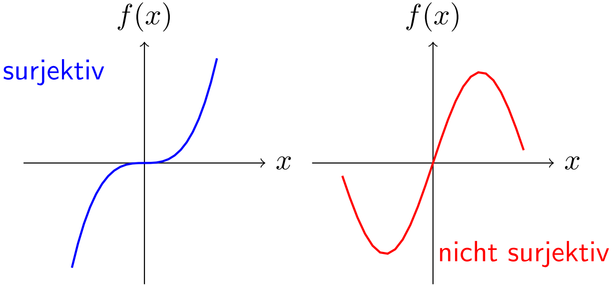


Funktionen und ihre Eigenschaften

Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

- Eine Funktion f ist **surjektiv**, wenn jeder Funktionswert mindestens einem Element aus dem Zielbereich zugeordnet ist. Definition:

$$\text{Für jedes } y \text{ gibt es ein } x \text{ mit } f(x) = y$$



Funktionen und ihre Eigenschaften

Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

- Eine Fuktion ist **bijektiv**, wenn sie sowohl injektiv, als auch surjektiv ist.

Funktionen und ihre Eigenschaften

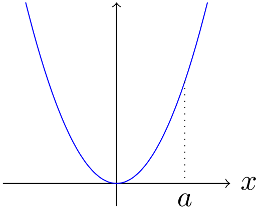
Grenzwerte und Stetigkeit

Der **Grenzwert** L einer Funktion $f(x)$ für x gegen einen bestimmten Wert a beschreibt das Verhalten der Funktion in der Nähe von a. Schreibweise:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

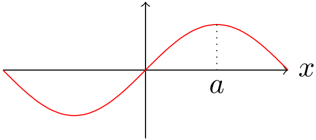
Beispiele für Funktionen und ihre Grenzwerte

$f(x) = x^2$



Grenzwert: $\lim_{x \to a} f(x) = a^2$

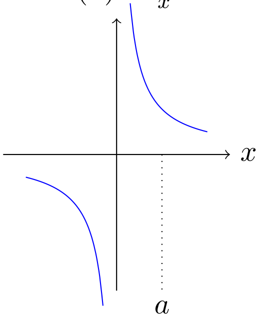
$g(x) = \sin(x)$



Grenzwert:
$\lim_{x \to a} g(x) = \sin(a)$

Beispiele für Funktionen und ihre Grenzwerte

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

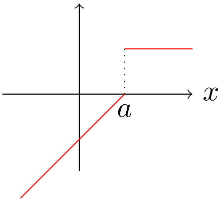


Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = 0$$

$$f(x) \begin{cases} x-1, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}$$



Grenzwert:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = 1$$

Stetigkeit

Stetigkeit einer Funktion:

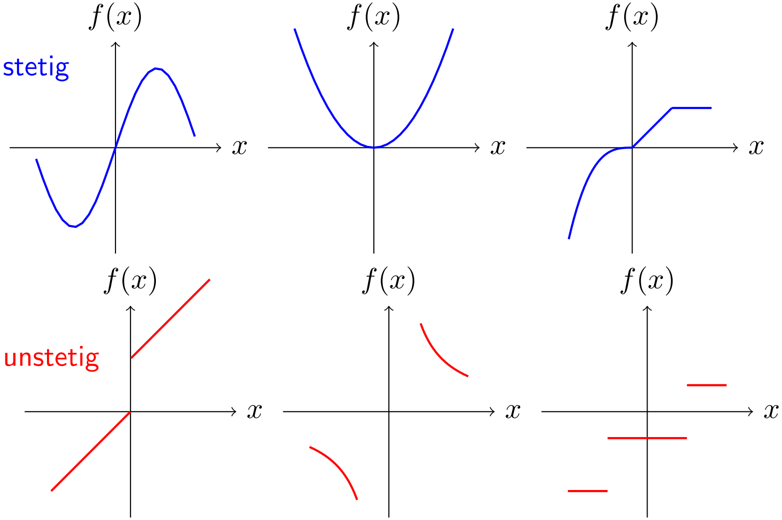
- Eine Funktion $f(x)$ heißt **stetig** an der Stelle a, wenn gilt

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a^-} x) = f(\lim_{x\to a^+} x) = f(a)$$

  und $f(a)$ definiert ist.
- Eine Funktion ist **stetig auf einem Intervall**, wenn sie an jeder Stelle in diesem Intervall stetig ist.

Funktionen und ihre Eigenschaften

Beispiele für stetige und unstetige Funktionen

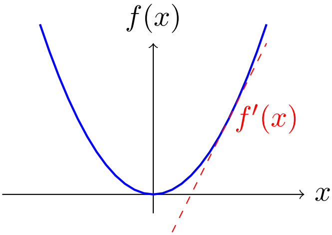


Differentialrechnung

Ableitungen und Ableitungsregeln

Die **Ableitung** einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle x_0 beschreibt die Steigung der Funktion an dieser Stelle.
Definition:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit

Eine Funktion f heißt:

- **differenzierbar** an der Stelle x_0, wenn $f'(x_0)$ existiert.
- **differenzierbar** auf dem Intervall D, wenn $f'(x_0)$ für alle $x_0 \in D$ existiert.
- **stetig differenzierbar**, falls f differenzierbar und f' stetig ist.

$f'(x_0)$ existiert, falls $f'(\lim_{x \to x_0^-})$ und $f'(\lim_{x \to x_0^+})$ existieren und es gilt:

$$f'(\lim_{x \to x_0^-} x) = f'(\lim_{x \to x_0^+} x)$$

Es gilt: Ist eine Funktion f an einer Stelle x_0 differenzierbar, dann ist f an dieser Stelle auch stetig.

Achtung: Die Umkehrung gilt nicht. Es gibt durchaus stetige Funktionen, die an bestimmten Stellen nicht differenzierbar sind.

Differentialrechnung

Ableitungsregeln

- **Konstantenregel**: Die Ableitung einer Konstanten c ist 0.
- **Faktorregel**: $c \cdot f(x) \longrightarrow c \cdot f'(x)$.
- **Potenzregel**: $f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.
- **Summenregel**: $f(x) + g(x) \longrightarrow f'(x) + g'(x)$.
- **Produktregel**: $f(x) \cdot g(x) \longrightarrow f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
- **Quotientenregel**: $\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.
- **Kettenregel**: $f(g(x)) \longrightarrow f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Differentialrechnung

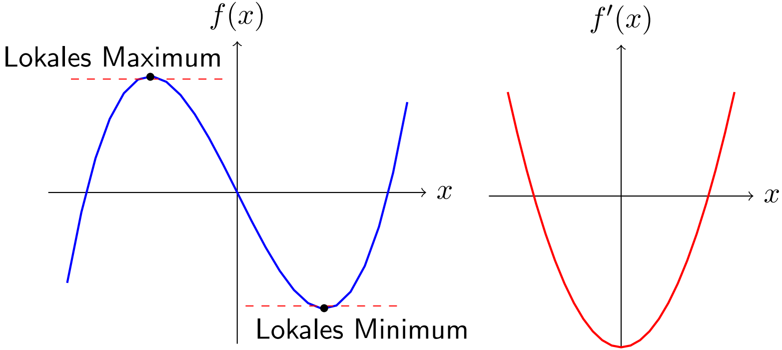
Beispiele von elementaren Funktionen und ihren Ableitungen

Funktion	**Ableitung**
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

Differentialrechnung

Die Bedeutung der ersten Ableitung für die Extremwertberechnung

Um Extremwerte einer Funktion zu finden, suchen wir nach Stellen, an denen die Steigung 0 ist oder nicht existiert.



Differentialrechnung

Die Bedeutung der zweiten und dritten Ableitung für Extremwerte

$$f''(x) = (f'(x))' = \frac{df'}{dx}(x)$$

Die **zweite Ableitung** $f''(x)$ einer Funktion gibt uns Informationen über die Krümmung der Funktion an verschiedenen Stellen. Ist die Krümmung positiv, so ist die Funktion nach oben gewölbt (lokales Minimum). Ist sie negativ, so ist die Funktion nach unten gewölbt (lokales Maximum).

Die **dritte Ableitung** einer Funktion gibt uns Informationen über die Änderung der Krümmung an verschiedenen Stellen.

Differentialrechnung

Beispiel: Maximierung der Studienleistung

Sie möchten ihre Studienleistung maximieren und fragen sich, wie viele Stunden pro Woche Sie fürs Lernen aufwenden sollten. Nehmen wir an für Ihre Studienleistung in Abhängigkeit der Stunden pro Woche gelte:

$$L(x) = -0.001x^3 - 0.059x^2 + 9.942x$$

Wie viele Stunden sollten Sie also pro Woche lernen?

Differentialrechnung

Anwendungen der Differentialrechnung in der Wirtschaftsinformatik

- Kostenfunktionen und Erlösfunktionen in der Wirtschaftsinformatik
- Marginalanalyse: Bestimmung des Grenznutzens, der Grenzkosten und des optimalen Outputs
- Optimierung: Finden von Extremstellen (Minimum oder Maximum) einer Funktion
- Anwendungen in der Datenanalyse, Modellierung von Geschäftsprozessen und Entscheidungsunterstützung

Numerische Verfahren

- Fast alle diese Anwendungen lassen sich durch Gleichungen modellieren.
- Lösungen dieser Gleichungen können komplex oder sogar nicht analytisch berechenbar sein.

$\Longrightarrow$ Solche Gleichungen können durch *numerische Verfahren* gelöst werden. (Also durch einen Algorithmus.)

Für die Nullstellenbestimmung wird oft das **Newton-Verfahren** verwendet.

Das Newton-Verfahren

Vorgehen beim Newton-Verfahren:

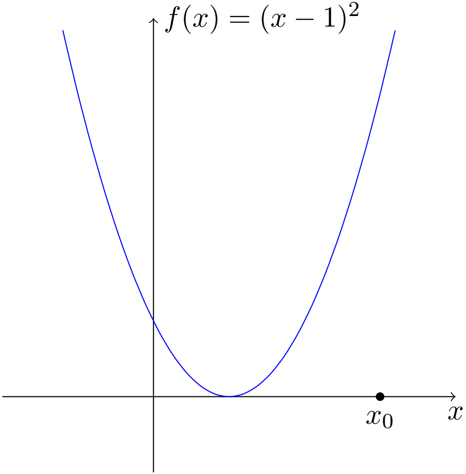
1. Beginnen Sie mit einer Schätzung x_0 der Nullstelle.
2. Verwenden Sie die Tangente an der Stelle x_0 als Annäherung an die Funktion.
3. Finden Sie den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse als nächste Schätzung x_1.
4. Wiederholen Sie diesen Prozess, bis eine ausreichend genaue Näherung erreicht ist.

Iterationsvorschrift:

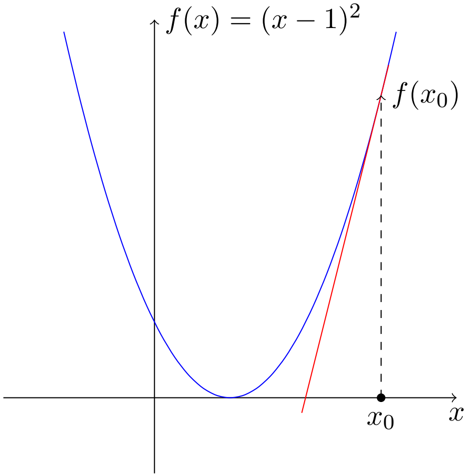
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, ...$$

wichtig $f'(x_n) \neq 0$.

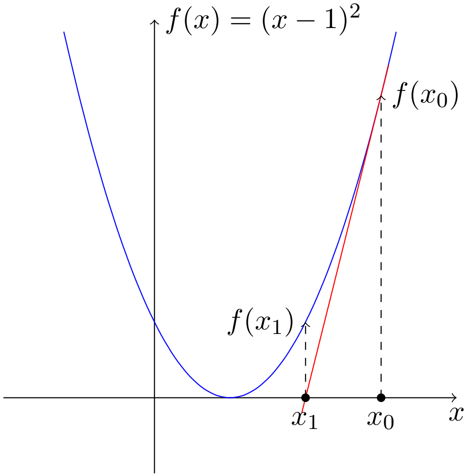
Newton-Verfahren: Grafische Darstellung



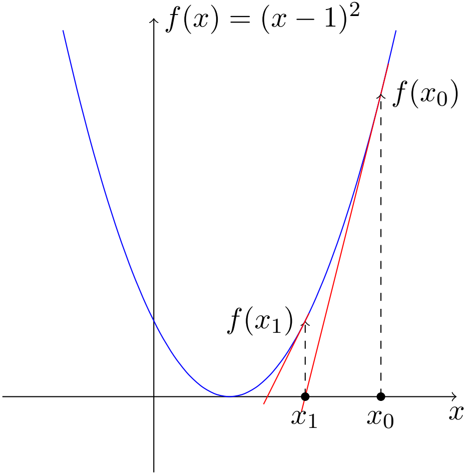
Newton-Verfahren: Grafische Darstellung



Newton-Verfahren: Grafische Darstellung



Newton-Verfahren: Grafische Darstellung



Newton-Verfahren: Grafische Darstellung