Übungsblatt 5 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1

Geben Sie für die folgenden Gleichungssysteme $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ jeweils $rg(A)$ und $rg(A, \boldsymbol{b})$ an. Was bedeutet dies für die jeweilige Anzahl an Lösungen?

a) $$\begin{array}{rcrcr} 9x & - & 5y & = & 19 \\ x & - & y & = & 3 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcr} 13x & - & 11y & = & -11 \\ 65x & - & 55y & = & -55 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcrcr} 7x & - & y & = & 12 \\ 14x & - & 2y & = & 20 \end{array}$$

Aufgabe 2

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist folgendes lineares Gleichungssystem lösbar? Geben Sie jeweils die Lösungsmenge an.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & ax_3 & = & 13 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & b. \end{array}$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Inverse der Matrix A und lösen Sie damit das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für jeden Vektor b_i einmal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$
invertierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls die Inverse.

Aufgabe 5

a) Berechnen Sie im Falle der Existenz die Inverse A^{-1} der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 20 & 30 \end{pmatrix}.$$

b) Gegeben ist folgende erweiterte Matrix $(A, \boldsymbol{b})$:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2s \\ 0 & 0 & 0 & 4t & 0 \end{array}\right).$$

Für welche Werte der Parameter $s, t \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar? Geben Sie die Lösungsmenge an.

Aufgabe 6

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

sowie die Vektoren $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass die Ermittlung der Inversen von A zur Matrix A^{-1} führt, für welche gilt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{6} & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Ermitteln Sie für die beiden Vektoren $\boldsymbol{b}_1$ und $\boldsymbol{b}_2$ jeweils die Lösung $\boldsymbol{x}$ für das Gleichungssystem $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Aufgabe 7

Ein Unternehmen stellt in den drei Abteilungen „Reparatur“, „Stromerzeugung“ und „Wasserversorgung“ innerbetriebliche Leistungen für das gesamte Unternehmen zur Verfügung.

So hat das Unternehmen z. B. insgesamt $200\,\mathrm{m}^3$ Wasser verbraucht, davon $4\,\mathrm{m}^3$ in der Abteilung Reparatur und $80\,\mathrm{m}^3$ in der Abteilung Strom. Für die Bereitstellung der $200\,\mathrm{m}^3$ Wasser sind in der Abteilung 280 € an Kosten angefallen. Zusätzlich sind in dieser Abteilung die Kosten für 6 Reparaturstunden sowie die Kosten für 100 kWh Strom zu berücksichtigen.

Nachfolgende Tabelle fasst die entsprechenden Informationen für alle Abteilungen zusammen:

Leistungsgeber	Abteilungs-kosten	Gesamt-verbrauch	Leistungsempfänger „Wasser“	„Reparatur“	„Strom“
„Wasser“	280 €	$200\,\mathrm{m}^3$	$0\,\mathrm{m}^3$	$4\,\mathrm{m}^3$	$80\,\mathrm{m}^3$
„Reparatur“	792 €	20 h	6 h	8 h	4,8 h
„Strom“	304 €	960 kWh	100 kWh	32 kWh	0 kWh

Das Unternehmen möchte die innerbetrieblichen Leistungen der drei Abteilungen verursachungsgerecht mit Verrechnungspreisen bewerten. Es wird folglich nach je einem Verrechnungspreis für einen Kubikmeter Wasser, für eine Reparaturstunde und für eine Kilowattstunde Strom gesucht.

Formulieren und lösen Sie ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von leistungsgerechten Verrechnungspreisen für die drei Abteilungen.