Übungsblatt 5 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1

Geben Sie für die folgenden Gleichungssysteme $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ jeweils $rg(A)$ und $rg(A, \boldsymbol{b})$ an. Was bedeutet dies für die jeweilige Anzahl an Lösungen?

a) $$\begin{array}{rcrcr} 9x & - & 5y & = & 19 \\ x & - & y & = & 3 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcr} 13x & - & 11y & = & -11 \\ 65x & - & 55y & = & -55 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcrcr} 7x & - & y & = & 12 \\ 14x & - & 2y & = & 20 \end{array}$$

Aufgabe 2

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist folgendes lineares Gleichungssystem lösbar? Geben Sie jeweils die Lösungsmenge an.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & ax_3 & = & 13 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & b. \end{array}$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Inverse der Matrix A und lösen Sie damit das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für jeden Vektor b_i einmal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Studierende planen eine Party und müssen Getränke einkaufen. Sie haben die Wahl zwischen Bier, Wein und Limonade. Die Preise pro Flasche sind wie folgt:

- Eine Flasche Bier kostet 2 Euro.
- Eine Flasche Wein kostet 9 Euro.
- Eine Flasche Limonade kostet 1 Euro.

Insgesamt sollen 80 Flaschen gekauft werden und dafür genau 100 Euro ausgeben werden. Außerdem soll die Anzahl der Bierflaschen doppelt so groß sein wie die Anzahl der Weinflaschen.

a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, das die Bedingungen des Problems beschreibt.

b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem und bestimmen Sie, wie viele Flaschen Bier, Wein und Limonade die Studierenden kaufen.

c) Die Beschränkung das doppelt so viele Bierflaschen benötigt werden war doof. Wenn Sie diese weglassen, wie viele Bierflaschen können die Studierenden maximal einkaufen?

Aufgabe 5

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

invertierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls die Inverse.

Aufgabe 6

a) Berechnen Sie im Falle der Existenz die Inverse A^{-1} der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 20 & 30 \end{pmatrix}.$$

b) Gegeben ist folgende erweiterte Matrix $(A, \boldsymbol{b})$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2s \\ 0 & 0 & 0 & 4t & 0 \end{array}\right).$$

Für welche Werte der Parameter $s, t \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar? Geben Sie die Lösungsmenge an.

Aufgabe 7

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

sowie die Vektoren $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass die Ermittlung der Inversen von A zur Matrix A^{-1} führt, für welche gilt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{6} & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Ermitteln Sie für die beiden Vektoren $\boldsymbol{b}_1$ und $\boldsymbol{b}_2$ jeweils die Lösung $\boldsymbol{x}$ für das Gleichungssystem $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.