Übungsblatt 3 Differentialrechnung einer Veränderlichen

Aufgabe 1

Überprüfen Sie folgende Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

a) $f(x) = x, \quad D = \mathbb{R}, W = \mathbb{R}$ b) $f(x) = x^2, \quad D = \mathbb{R}, W = \mathbb{R}$

c) $f(x) = x^2, \quad D = \mathbb{R}, W = \mathbb{R}^+$ d) $\begin{cases} x & , x \leq 0 \\ x+1 & , x > 0 \end{cases} \quad D = \mathbb{R}, W = \mathbb{R}$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^3(x^3 - 4x)$ b) $f(x) = \dfrac{13}{x^4}$ c) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

d) $f(x) = (x^3 + x)^{25}$ e) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{(x^2 - 1)^2}$ f) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$

g) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{e^x x^3}$ h) $f(x) = (ax)^x$ i) $f(x) = e^{x^3} \cdot \ln x^2$

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2|x|} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4

Ein Unternehmen produziere ein Gut gemäß folgender Produktionsfunktion:

$$x(r) = -r^3 + 12r^2 + 60r (x : \text{Ertrag, Output } [ME_x]; r : \text{Input } [ME_r]).$$

Bestimmen Sie die Nullstellen, die Extremwerte und die Wendepunkte und interpretieren Sie diese inhaltlich.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Parametern $a, c \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & x \leq 3 \\ (x-a)^{\frac{1}{2}} + c & x > 3 \end{cases}$$

1. Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion im Bereich $0 \leq x \leq 6$ für den Fall $a = 2$ und $c = \frac{3}{2}$.
2. Bestimmen Sie alle Werte der Parameter a und c, so dass die Funktion f an der Stelle $x_0 = 3$ stetig ist.
3. Bestimmen Sie alle Werte der Parameter a und c, so dass die Funktion f an der Stelle $x_0 = 3$ differenzierbar ist.

Aufgabe 6

Gegeben sind eine Erlösfunktion $E(x) = x^4 + 2x^2$ sowie eine Kostenfunktion $K(x) = e^{\sqrt{x}}$ in Abhängigkeit von einer Menge x.

1. Wie lautet die Gewinnfunktion $G(x)$?
2. Ermitteln Sie für die Gewinnfunktion die erste Ableitung $G'(x)$.
3. Ermitteln Sie für die Gewinnfunktion die zweite Ableitung $G''(x)$.
4. Gesucht ist das Gewinnmaximum und es ist bekannt, dass es in der Nähe von $x = 600$ liegen muss. Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus b) und c), um mit Hilfe des Newton-Verfahrens das Maximum der Gewinnfunktion anzunähern.
Hinweis: Es sind zwei Iterationen durchzuführen.