Duale Hochschule Baden-Württemberg

Funktionen mehrerer Veränderlicher

Mathematik 1 für Wirtschaftsinformatiker

Prof. Dr. Jonas Offtermatt — 12. Juli 2023

Funktionen mehrerer Veränderlicher

Mathematik 1 für Wirtschaftsinformatiker

Prof. Dr. Jonas Offtermatt

12. Juli 2023

Ableitung von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Grundlagen

Funktionen mehrerer Veränderlicher ordnen jedem Punkt im Definitionsbereich einen Funktionswert zu.

- Schreibweise: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Beispiele:
  - $f(x, y) = x^2 + y^2$ ist eine Funktion von zwei Veränderlichen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
  - $g(x, y, z) = \sin(x) + \cos(y) - z^2$ ist eine Funktion von zwei Veränderlichen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
- Die Ableitung einer Funktion mehrerer Veränderlicher gibt die Änderungsrate der Funktion in einer bestimmten Richtung an.

Ableitung von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Partielle Ableitungen

Partielle Ableitungen werden verwendet, um die Ableitung einer Funktion mehrerer Veränderlicher nach einer einzelnen Veränderlichen zu berechnen.

- Die partielle Ableitung nach einer Veränderlichen wird berechnet, indem alle anderen Veränderlichen als Konstanten behandelt werden.
- Schreibweise: $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, etc.

Beispiele:

- Für $f(x, y) = x^2 + y^2$ ist $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$.
- Für $g(x, y, z) = \sin(x) + \cos(y) - z^2$ ist $\frac{\partial g}{\partial x} = \cos(x)$, $\frac{\partial g}{\partial y} = -\sin(y)$ und $\frac{\partial g}{\partial z} = -2z$.

Ableitung von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Totale Ableitung und Gradient

- Die totale Ableitung einer Funktion mehrerer Veränderlicher berücksichtigt die Änderungen aller Veränderlichen gleichzeitig.
- Der Gradient einer Funktion ist ein Vektor, der aus den partiellen Ableitungen besteht und die Richtung des steilsten Anstiegs angibt.
- Schreibweise: $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots\right)$
- Beispiele:
  - Für $f(x, y) = x^2 + y^2$ ist $\nabla f = (2x, 2y)$.
  - Für $g(x, y, z) = \sin(x) + \cos(y) - z^2$ ist $\nabla g = (\cos(x), -\sin(y), -2z)$.

Ableitung von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Die Hesse-Matrix

Die Hesse-Matrix ist eine Matrix, die Informationen über die Krümmung einer Funktion mehrerer Veränderlicher liefert. Sie wird aus den zweiten partiellen Ableitungen der Funktion gebildet.

Die Hesse-Matrix H einer Funktion $f(x, y)$ mit den partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sieht wie folgt aus:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Die Hesse-Matrix kann verwendet werden, um die Krümmung der Funktion an bestimmten Punkten zu analysieren und auf diese Weise Extremwerte zu identifizieren.

Ableitung von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Die Hesse-Matrix

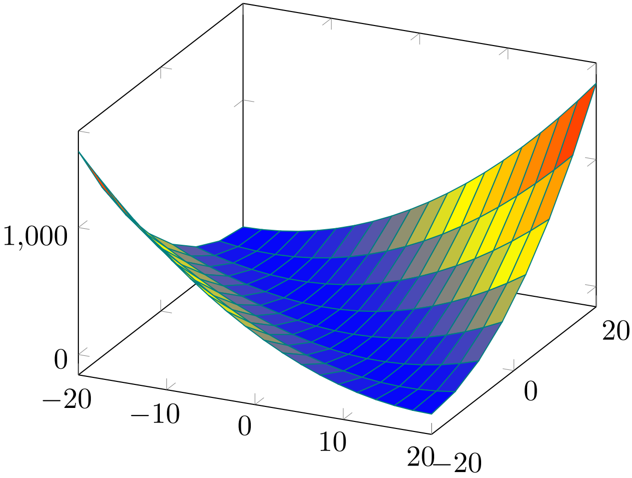
Beispiel: Betrachten wir die Funktion $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$.
Die Hesse-Matrix von f lautet:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Ableitung von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Beispiel-Schaubilder

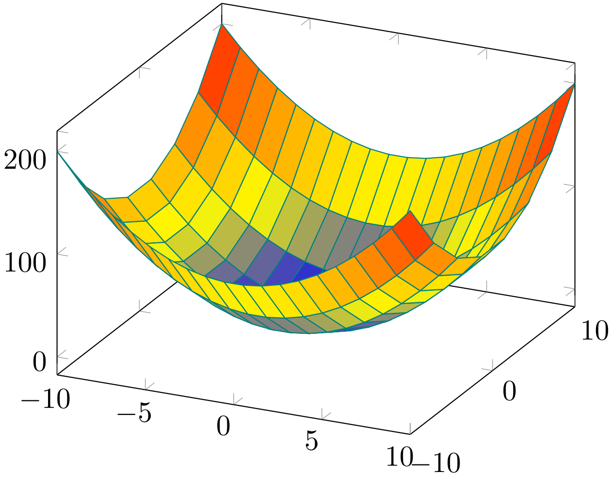
$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$$



Ableitung von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Beispiel-Schaubilder

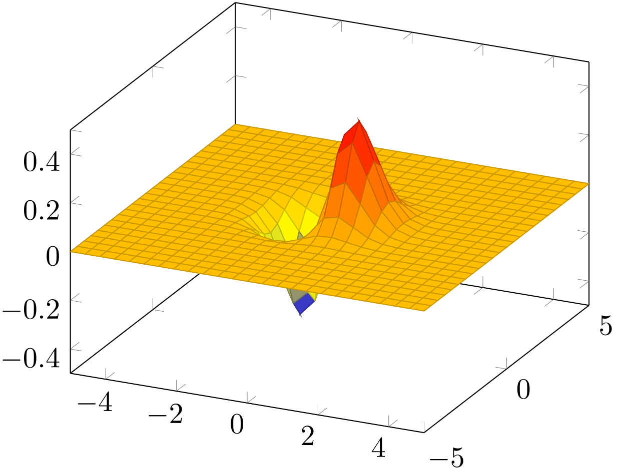
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



Ableitung von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Beispiel-Schaubilder

$$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2) \cdot x$$



Ableitung von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Berechnung von Extremwerten

Um Extremwerte einer Funktion mehrerer Veränderlicher zu berechnen, gehen wir wie folgt vor:

1. Berechnung der partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. Bestimmung der kritischen Punkte durch Lösen der Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.
3. Überprüfung der Kandidaten für Extremwerte, indem man die Hesse-Matrix verwendet.
4. Interpretation der Ergebnisse:
   - Falls die Hesse-Matrix positiv definit ist und $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, handelt es sich um ein lokales Minimum.
   - Falls die Hesse-Matrix negativ definit ist und $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, handelt es sich um ein lokales Maximum.
   - Falls die Hesse-Matrix indefinit ist, handelt es sich um einen Sattelpunkt.
   - Falls die Hesse-Matrix semi-definit ist, sind weitere Untersuchungen erforderlich.

Ableitung von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Positive und negative Definitheit der Hesse-Matrix

Die Definitheit der Hesse-Matrix gibt Auskunft über die Krümmung einer Funktion mehrerer Veränderlicher an einem kritischen Punkt. Es gibt drei mögliche Fälle:

- **Positiv definit:** Die Hesse-Matrix H ist positiv definit, wenn für alle Vektoren $v \neq 0$ gilt: $v^T H v > 0$. Dies bedeutet, dass die Funktion an diesem Punkt ein lokales Minimum aufweist.
- **Negativ definit:** Die Hesse-Matrix H ist negativ definit, wenn für alle Vektoren $v \neq 0$ gilt: $v^T H v < 0$. Dies bedeutet, dass die Funktion an diesem Punkt ein lokales Maximum aufweist.
- **Indefinit:** Die Hesse-Matrix H ist indefinit, wenn es Vektoren v_1 und v_2 gibt, für die $v_1^T H v_1 > 0$ und $v_2^T H v_2 < 0$ gelten. Dies bedeutet, dass die Funktion an diesem Punkt einen Sattelpunkt aufweist.