Тема 1: Апроксимация с k-м порядком n-й производной

Теорию и примеры можно либо посмотреть в лекциях, либо посмотреть doc файл лекций Остапенко, Глава 1, стр. 3–5.

Самое важное в этой главе это формулы (2.4)–(2.6) и формула (2.6a). Формула (2.4) при m от 0 до n-1 + формула (2.5) отвечает за то, что вы аппроксимируете n-ю производную. Формула (2.4) при m от n+1 до n+k-1 отвечает за то, что вы аппроксимируете **не менее** чем с k-м порядком. Формула (2.6) отвечает за то, что вы аппроксимируете именно с k-м порядком. Формула (2.6a) – вид главного члена ошибки (невязки).

Запомните, что система (2.4)–(2.5) однозначно разрешима, если $|M| = n + k$, где $|M|$ – количество точек в шаблоне.

Внимательно посмотрите разобранные примеры:
1) $n = 1$; $k = 2$; $M = \{0, 1, 2\}$
2) $n = 2$; $k = 2$; $M = \{0, 1, 2, 3\}$
3) $n = 1$; $k = 2$; $M = \{-1, 0, 1, 2\}$. Здесь $|M| > n+k$. Решений у системы будет бесконечно много.

Задачи на дом (сдать мне в письменном виде):
1) $M = \{0, 1, 2, 3\}$, $k = 3$, $n = 1$
2) $M = \{-1, 0, 1\}$, $k = 1$, $n = 2$. Не забудьте проверить формулу (2.6). Оказывается, если шаблон симметричный, то можно добиться порядки не $k = |M| - n$, а а на единичку больше.
3) $M = \{-1, 0, 1, 10\}$, $k = 2$, $n = 2$. Можете взять даже $M = \{-1, 0, 1, p\}$ и показать, что a_p всегда равен 0. И вы должны получить стандартный оператор, аппроксимирующий вторую производную со вторым порядком на шаблоне $\{-1, 0, 1\}$.
4) $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $k = 2$, $n = 3$.

Нужно решить систему, выписать оператор и главный член ошибки.

Тема 2: Симметричные разностные операторы

Давайте считать, что шаблон у нас симметричный, т.е. если в шаблоне есть число i, то там же есть и $-i$. Обозначим через M_+ все положительные элементы шаблона, через M_- – все отрицательные элементы и рассмотрим $\sum_{j\in M} a_j j^m$.

$$\sum_{j\in M} a_j j^m = a_0 0^m + \sum_{j\in M_+} a_j j^m + \sum_{j\in M_-} a_j j^m$$

Во втором слагаемом сделаем замену $j = -i$, получим:

$$\sum_{j\in M} a_j j^m = a_0 0^m + \sum_{j\in M_+} a_j j^m + \sum_{i\in M_+} a_{-i}(-i)^m = a_0 0^m + \sum_{j\in M_+} a_j j^m + \sum_{i\in M_+} a_{-i}(-1)^m (i)^m$$

Для удобства сделаем "замену" $i = j$ и объединим суммы:

$$\sum_{j\in M} a_j j^m = a_0 0^m + \sum_{j\in M_+} \left(a_j j^m + a_{-j}(-1)^m j^m\right) = a_0 0^m + \sum_{j\in M_+} \left(a_j + a_{-j}(-1)^m\right) j^m$$

I) Рассмотрим случай, когда

$$a_j = a_{-j}. \tag{1}$$

Тогда $a_j + a_{-j}(-1)^m = a_j + a_j(-1)^m$. Последнее выражение равно 0, когда m – **нечётно** и $2a_j$, когда m – **чётно**.

Вспомним, что для аппроксимации n-й производной нам нужно уравнение $\sum_{j\in M} a_j j^n = n!$. При условии (1) оно будет иметь смысл, только если n – **чётно**. Кроме того, условие $\sum_{j\in M} a_j j^{n+k} \neq 0$ будет выполняться, только если $(n+k)$ – **чётно**.

Получаем, что при условии (1) мы можем аппроксимировать на симметричном шаблоне **чётную** производную n с **чётным** порядком k.

При этом система будет выглядеть следующим образом:
1) $a_0 + 2\sum_{j\in M_+} a_j = 0 \leftrightarrow a_0 = -2\sum_{j\in M_+} a_j$ Отдельно вынесла случай $m = 0$
2) $\sum_{j\in M_+} a_j j^m = 0$ при $m = 2, 4, ..., n-2$ и $n+2, n+4, ..., n+k-2$ Только чётные степени!!
3) $\sum_{j\in M_+} a_j j^n = n!/2$
3) $\sum_{j\in M_+} a_j j^{n+k} \neq 0$

Число уравнений: $(n+k)/2$, число неизвестных: $|M_+|+1$. Если $n = 2l, k = 2s$, получим, что для того, чтобы система однозначно решалась, нужно: $s + l = |M_+| + 1$.

II) Рассмотрим случай, когда
$$a_j = -a_{-j}. \tag{2}$$
Тогда $a_j + a_{-j}(-1)^m = a_j - a_j(-1)^m$. Последнее выражение равно 0, когда m - **чётно** и $2a_j$, когда m - **нечётно**. Кроме того, чему равно a_0? Из условия (2) получаем: $a_0 = -a_0$, значит, $a_0 = 0$.

Снова вспомним, что для аппроксимации n-й производной нам нужно уравнение $\sum_{j\in M} a_j j^n = n!$. При условии (2) оно будет иметь смысл, только если n – **нечётно**. Кроме того, условие $\sum_{j\in M} a_j j^{n+k} \neq 0$ будет выполняться, только если $(n+k)$ – **нечётно.** .

Получаем, что при условии (2) мы можем аппроксимировать на симметричном шаблоне **нечётную** производную n с **чётным** порядком k. Да, порядок тут чётный, снова.

При этом система будет выглядеть следующим образом:
1) $\sum_{j\in M_+} a_j j^m = 0$ при $m = 1, 3, ..., n-2$ и $n+2, n+4, ..., n+k-2$ Только нечётные степени!!
3) $\sum_{j\in M_+} a_j j^n = n!/2$
3) $\sum_{j\in M_+} a_j j^{n+k} \neq 0$

Число уравнений: $(n+k-1)/2$, число неизвестных: $|M_+|$. Если $n = 2l-1, k = 2s$, получим, что для того, чтобы система однозначно решалась, нужно: $s + l = |M_+| + 1$.

Заметьте, что системы получаются очень похожими. В случае (1) мы идёт только по чётным степеням, в случае (2) только по нечётным, а остальное всё идентично.

Примеры посмотрите у Остапенко в лекциях, стр. 7–8 (Теорию там смотреть не надо).

Задачи на дом (сдать мне в письменном виде):
1) $M = \{-1, 0, 1\}$, $k = 2$, $n = 2$
2) $M = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$, $k = 2$, $n = 4$
3) $M = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$, $k = 4$, $n = 3$

Нужно решить систему, выписать оператор и главный член ошибки.