Двухточечные разностные схемы

Рассмотрим диф. задачу:

$$\begin{cases} y'(x) - y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

частное реш-е: $y=0$

Решение: $\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|y| = x + C \Rightarrow |y| = e^x \cdot e^C = e^x \cdot C_1, \ C_1 > 0.$

Избавляемся от модуля: $\boxed{y = e^x \cdot C_2, \quad c \in \mathbb{R}}$

Подставляем гран. условие: $y(0) = \boxed{C_2 = 1}$

Т.о. решение: $\boxed{y(x) = e^x}$

<u>Будем решать численно</u>

$$\Lambda_h[y(x)] = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - y(x) = 0 \quad (*)$$

Введём сетку $\{x_j = jh\}$, тогда $y_j = y(x_j) = y(jh)$

$(*)$ перепишется в (.) x_j как:

$$\boxed{\frac{y_{j+1} - y_j}{h} - y_j = 0} \quad (**)$$

$+$ аппроксимация гран. условия: $\boxed{y(0) = y_0 = 1.}$

Перепишем $(**)$: $y_{j+1} = (1+h)y_j$ - рекуррентная ф-ла.

Зная y_0, получим y_1, y_2 и т.д.

$y_1 = (1+h)y_0; \quad y_2 = (1+h)y_1 = (1+h)^2 y_0; \ y_3 = (1+h)^3 y_0 = (1+h)^3$

$y_j = (1+h)^j$

Хотим рассмотреть сх-ть y_h в (·) $x_j = jh \Rightarrow j = \frac{x_j}{h}$

т.о. от j переходим к x_j:

$y_h(x_j) \xrightarrow[h\to 0]{?} y(x_j)$

$$y_j \rightsquigarrow y_h(x) = (1+h)^{x/h}$$

$$y_j = (1+h)^j = (1+h)^{x_j/h}$$

Хотим посмотреть, куда стремится разностное реш-е $y_h(x)$ при $h\to 0$?

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{x/h} = \lim_{h\to 0}\left((1+h)^{1/h}\right)^x = e^x$$

← А это точное решение!

замеч. предел

$\Rightarrow$ сходимость численного реш-е к точному есть

(?) С каким порядком

Опр. Реш-е $y_h(x)$ разностной задачи с k-м пор-м сх-ся к реш-ю $y(x)$ диф. задачи, если

$$y_h(x) = y(x) + O(h^k)$$

$$y_h(x) = (1+h)^{x/h} = e^{\frac{x}{h}\ln(1+h)} \;(=)$$

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{h^k}{k} + O(h^{k+1}) \quad \text{при } h\to 0$$

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \ldots + \frac{h^k}{k!} + O(h^{k+1})$$

$$(=)\; e^{\frac{x}{h}\left(h - \frac{h^2}{2} + O(h^3)\right)} = e^{x - \frac{xh}{2} + O(h^2)} = e^x \cdot e^{-\frac{xh}{2} + O(h^2)} =$$

$$= e^x\left(1 + \left(-\frac{xh}{2} + O(h^2)\right) + O\left(\left(-\frac{xh}{2} + O(h^2)\right)^2\right)\right) =$$

$$= e^x\left(1 - \frac{xh}{2} + O(h^2)\right) = e^x - \frac{xh}{2}e^x + O(h^2)$$

главный член ошибки, порядок первый

Задача 2

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x+h) + y(x)}{2} = 0$$

1) $$\Lambda_h [y_j] = \frac{y_{j+1} - y_j}{h} - \frac{y_{j+1} + y_j}{2} = 0$$

$$y_{j+1} - y_j - \frac{h}{2} y_{j+1} - \frac{h}{2} y_j = 0$$

$$y_{j+1} = \frac{1 + h/2}{1 - h/2} y_j = \ldots = \left(\frac{1 + h/2}{1 - h/2}\right)^{j+1} \cdot y_0 \Rightarrow \boxed{y_j = (\ )^j y_0}$$

Аппроксим-м y_0 точно: $y_0 = 1$

2) $$y_h(x) = \left(\frac{1 + h/2}{1 - h/2}\right)^{x/h} = e^{\frac{x}{h}\ln\left(\frac{1+h/2}{1-h/2}\right)} =$$

$$= e^{\frac{x}{h}\left(\ln(1+\frac{h}{2}) - \ln(1-h/2)\right)}$$

$$\ln\left(1+\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{4} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{8} + O(h^4)$$

$$-\ \ln\left(1-\frac{h}{2}\right) = -\frac{h}{2} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{4} - \frac{1}{3}\frac{h^3}{8} + O(h^4)$$

$$\ln\left(1+\frac{h}{2}\right) - \ln(1-h/2) = h + \frac{2}{3}\frac{h^3}{8} + O(h^4) = h + \frac{1}{12}h^3 + O(h^4)$$

$$e^{x/h(\ln(1+h/2) - \ln(1-h/2))} = e^{x + \frac{1}{12}h^2 x + O(h^3)} =$$

$$= e^x \cdot e^{\frac{h^2 x}{12} + O(h^3)} = e^x\left(1 + \frac{h^2 x}{12} + O(h^3) + O\left(\left(\frac{h^2 x}{12} + O(h^3)\right)^2\right)\right) =$$

$$= e^x\left(1 + \frac{h^2 x}{12} + O(h^3)\right) = e^x + \frac{x}{12}e^x h^2 + O(h^3)$$

главный член ошибки, порядок второй

А что будет, если мы в <u>задаче 2</u> гран. условие аппроксимируем не точно?

$$y_0 = 1 + h^n. \quad (n \geq 1)$$

Тогда $$y_j = (1+h^n)\left(\frac{1+h/2}{1-h/2}\right)^j$$

$$y_h(x) = (1+h^n)\left(\frac{1+h/2}{1-h/2}\right)^{x/h}$$

$$y_h(x) = (1+h^n)\cdot\left(e^x + \frac{x}{12}e^x h^2 + O(h^3)\right) =$$

$$= e^x + h^n e^x + \frac{x}{12}e^x h^2 + O(h^3)$$

- при $n = 1$ получим <u>первый пор-к</u> сх-ти, ~~огр~~ главный член ошибки: $h^{\cancel{x}} e^x$
- при $n = 2$: <u>второй пор-к</u>, главный член ошибки: $$h^2 e^x + \frac{x}{12}e^x h^2$$
- при $n \geq 3$ <u>второй пор-к</u>, главный член ошибки: $$\frac{x}{12}e^x h^2$$

Снижение порядка аппроксимации гран условие приводит к снижению пор-ка сх-ти разн. реш-я.

пор. аппр	пор. урав. y	пор. сх-ти р. реш
2	3	2
2	2	2
2	1	1
4	1	1

Рассмотрим комбинир. р./сх

$$\Lambda_h[y_j] = \begin{cases} а)\ \dfrac{y_{j+1}-y_j}{h} - y_j = 0 & j=0 \leftarrow \text{схема 1 пор-ка} \\ б)\ \dfrac{y_{j+1}-y_j}{h} - \dfrac{y_{j+1}+y_j}{2} = 0 & j \geq 1 \leftarrow \text{схема 2-го пор.} \end{cases}$$

\+ аппроксимирует гран. усл. <u>точно</u> $y_0 = 1$

Из б: $y_{j+1} = \left(\dfrac{1+h/2}{1-h/2}\right) y_j = \dots = \left(\dfrac{1+h/2}{1-h/2}\right)^{j} y_1$ (*)

y_1 берём из а): $\dfrac{y_1 - 1}{h} - 1 = 0$

$$\boxed{y_1 = 1+h}$$

пор. схемы	пор. схемы в пригр. узлах	пор. сх-ти р. реш.
2	1	2
4	3	4
4	2	3
4	1	2
4	5	4

(*): $y_j = \left(\dfrac{1+h/2}{1-h/2}\right)^{j-1}(1+h)$

$$y_h = (1+h)\left(\frac{1+h/2}{1-h/2}\right)^{\frac{x}{h}-1} = (1+h)\, e^{(\frac{x}{h}-1)(\ln(1+h/2)-\ln(1-h/2))} =$$

$$= (1+h)\, e^{(\frac{x}{h}-1)(h+\frac{1}{12}h^3+O(h^4))} = (1+h)\, e^{x+\frac{x}{12}h^2+O(h^3)-h} =$$

$$= e^x \cdot (1+h)\, e^{-h+\frac{x}{12}h^2+O(h^3)} = e^x(1+h)\Big(1-h+\frac{x}{12}h^2+O(h^3)+$$

$$+\frac{1}{2}\big(-h+\frac{x}{12}h^2+O(h^3)\big)^2+O(h^3)\Big) =$$

$$= e^x(1+h)\Big(1-h+\frac{x}{12}h^2+\frac{1}{2}h^2+O(h^3)\Big) =$$

$$= e^x\Big(1-h+\frac{x}{12}h^2+\frac{1}{2}h^2+O(h^3)+h-h^2\Big) =$$

$$= e^x\Big(1+\frac{x}{12}h^2-\frac{h^2}{2}+O(h^3)\Big) = e^x + \underbrace{e^x\Big(\frac{x}{12}-\frac{1}{2}\Big)h^2}_{\text{второй пор-к, гл-й член ошибки}} + O(h^3)$$

Снижение на единицу порядка <u>схемы</u> в граничных и приграничных узлах разн. сетки <u>не приводит</u> к снижению пор-ка сх-ти разн. реш-я