Компактная р/сх

<u>Задача</u>: $y'' - g = 0$. Хотим аппр-ть с 4-м пор-м

С прошл. семинара: $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $\left(|M_+| + 1 = \frac{2}{1} + \frac{4}{2} \Rightarrow |M_+| = 2 \right)$

$$\Lambda_h = \left[\frac{4}{3}\left(y(x+h) + y(x-h)\right) - \frac{5}{2}y(x) - \frac{1}{12}\left(y(x+2h) + y(x-2h)\right) \right] \cdot \frac{1}{h^2}$$

<u>Вопрос</u>: А можем ли мы с 4-м пор-м аппр-ть $y'' - g = 0$ на шаблоне $M = \{-1, 0, 1\}$?

$$\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} - g(x) = 0 \Leftarrow \boxed{2-4} \text{ порядок аппр-ции}$$

<u>Идея</u>: „портим" аппроксимацию $g(x)$, аппроксимируем её на шаблоне $\{-1, 0, 1\}$. Т.е. $g(x) \rightsquigarrow \alpha_1 g(x+h) + \alpha_2 g(x) + \alpha_3 g(x-h)$.

Чтобы была аппр-я $g(x)$: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$

+ потребуем симметр-ть схемы: $\alpha_1 = \alpha_3$.

<u>Получим</u>:

$$\Lambda_h = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} - \alpha g(x+h) - \alpha g(x-h) - (1-2\alpha) g(x) = 0$$

<u>Смотрим пор-к аппр-ции на решении</u>:

$$y''(x) + \frac{h^2}{12}y^{(4)} + \frac{2}{6!}h^4 y^{(6)} + O(h^6) - \alpha\left(2g + h^2 g'' + \frac{1}{12}h^4 g^{(4)} + O(h^6)\right) -$$

$$-(1-2\alpha)g = (y''-g) + \underline{\frac{h^2}{12}y^{(4)} - \alpha h^2 g''} + \frac{2}{6!}h^4 y^{(6)} - \frac{\alpha}{12}h^4 g^{(4)} + O(h^6).$$

Хотим занулить <u>это</u> слагаемое.

<u>Знаем</u>: $y'' = g \Rightarrow y^{(4)} = g''$

<u>Получаем</u>: $\frac{h^2}{12}y^{(4)} - \alpha h^2 y^{(4)} = 0$ при $\boxed{\alpha = \frac{1}{12}}$

<u>Разностная схема</u>: $\Lambda_h = \dfrac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} - \dfrac{1}{12}\left(g(x+h) + g(x-h)\right) - \dfrac{5}{6}g(x) = 0$

<u>Главный член ошибки</u>: $\frac{2}{6!}h^4 y^{(6)} - \left(\frac{1}{12}\right)^2 h^4 g^{(4)}$ (Надо было проверить, что это не 0 на решении)

<u>Дома</u>: 1) $y'(x) - g(x) = 0$; аппр-ть с 4-м пор-м на шаблоне $\{-1, 0, 1\}$.

Общая теория

Есть дифф. ур-е: $y^{(n)}(x) - g(x) = 0$. + шаблон M

Разностная схема: $\frac{1}{h^n} \sum\limits_{j\in M} a_j y(x+jh) - \sum\limits_{j\in M} b_j g(x+jh) = 0$

Чтобы эта р. схема аппроксимир. с пор-м не ниже k-го:

1) $\sum\limits_{j\in M} a_j j^m = 0 \quad m = \overline{0, n-1}$

2) $\sum\limits_{j\in M} a_j j^n = n!$

3) $\sum\limits_{j\in M} b_j = 1$

4) $\frac{\sum\limits_{j\in M} a_j j^{n+m}}{(n+m)!} = \frac{\sum\limits_{j\in M} b_j j^m}{m!} \quad m = \overline{1, k-1}$ (при этом $n+m = \overline{n+1, n+k-1}$)

Чтобы был пор-к аппр-ции строго k:

5) $k! \sum\limits_{j\in M} a_j j^{n+k} \neq (n+k)! \sum\limits_{j\in M} b_j j^k$

Главный член ошибки:

$$\Delta_h [y(x), g(x)] = h^k \left(\frac{1}{(n+k)!} \sum_{j\in M} a_j j^{n+k} - \frac{1}{k!} \sum_{j\in M} b_j j^k \right) y^{(n+k)}(x)$$

Система разрешима, если

а) $n \le |M| - 1$

б) $k \le 2|M| - n - 1$

Если в б) равенство, то система разрешима однозначно

Задача Построить комп. р. схему, которая с 3-м пор-м аппр-т на $M = \{0, 1, 3\}$ диф. ур. $y'' - g = 0$.
Выписать главный член ошибки.

$k = 3, \quad n = 2, \quad |M| = 3.$ а): $n \le |M| - 1$: $2 \le 3 - 1$ ok

б) $k = 2|M| - n - 1$: $3 = 6 - 2 - 1$ ok

Система:

$$\begin{cases} m=0 & a_0 + a_1 + a_3 = 0 \\ m=1 & a_1 + 3a_3 = 0 \\ m=2=n & a_1 + 9a_3 = 2 \\ & b_0 + b_1 + b_3 = 1 \\ n+m=3!\ (m=1) & \dfrac{a_1 + 27a_3}{3!} = \dfrac{b_1 + 3b_3}{1!} \\ n+m=4\ (m=2) & \dfrac{a_1 + 81a_3}{4!} = \dfrac{b_1 + 9b_3}{2!} \end{cases}$$

1 блок $m = \overline{0, n-1} = \overline{0,1}$ и $m = n = 2$

2 блок $m = \overline{1, k-1} = \overline{1, 2}$

Решаем: $6a_3 = 2 \Rightarrow a_3 = \boxed{\frac{1}{3}} \Rightarrow a_1 = -3a_3 = \boxed{-1} \Rightarrow a_0 = 1 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$

Остается

$$\begin{cases} b_0 + b_1 + b_3 = 1 \\ 6(b_1 + 3b_3) = -1 + \frac{27}{3} = -1 + 9 = 8 \\ 12(b_1 + 9b_3) = -1 + 27 = 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 + 3b_3 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ b_1 + 9b_3 = \frac{26}{12} = \frac{13}{6} \end{cases}$$

$6b_3 = \frac{13}{6} - \frac{8}{6} = \frac{5}{6} \Rightarrow b_3 = \boxed{\frac{5}{36}} \Rightarrow \boxed{b_1 = \frac{11}{12}}$

$\Rightarrow \boxed{b_0 = \frac{-1}{18}}$

Получили р. схему: $\frac{1}{h^2}\left[\frac{2}{3}y(x) - y(x+h) + \frac{1}{3}y(x+3h)\right] +$

$+ \frac{1}{18}g(x) - \frac{11}{12}g(x+h) - \frac{5}{36}g(x+3h) = 0$

Гл. член ошибки:

$$\Delta_h = h^3\left(\frac{1}{(2+3)!}\left(\frac{2}{3}\cdot 0^5 - 1\cdot 1^5 + \frac{1}{3}\cdot 3^5\right) - \frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{18}\cdot 0^3 + \frac{11}{12}\cdot 1^3 + \frac{5}{36}\cdot 3^3\right)\right) y^{(2+3)}(x)$$

Надо бы проверить, что это не 0

<u>Задача</u> $y'(x) - g(x) = 0; \quad k = 4; \quad M = \{0, 1, 3\}$

1) $n \le |M| - 1$: $1 \le 2$ ok

2) $k \le 2|M| - n - 1$ $\quad 4 \le 6 - 1 - 1$ ok + разрешима однозн.

$$
\begin{array}{l}
m=0: \\
m=1=n: \\
\\
n+m=2: \\
(m=1) \\
n+m=3: \\
(m=2) \\
n+m=4: \\
(m=3)
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} a_0 + a_1 + a_3 = 0 \\ a_1 + 3a_3 = 1 \end{array}\right\} \text{блок } 1 \quad m = \overline{0, n-1} = \overline{0,0}, \quad m = n = 1 \\
b_0 + b_1 + b_3 = 1 \\
\left.\begin{array}{l}
\dfrac{a_1 + 9a_3}{2!} = \dfrac{b_1 + 3b_3}{1!} \\
\dfrac{a_1 + 27a_3}{3!} = \dfrac{b_1 + 9b_3}{2!} \\
\dfrac{a_1 + 81a_3}{4!} = \dfrac{b_1 + 27b_3}{3!}
\end{array}\right\} \text{блок } 2 \quad m = \overline{\phi, k-1} = \overline{\phi, 3}
\end{array}
\right.
$$

Тут мы не можем сначала найти a_j, а потом b_j, как в прошлой задаче. Так что пусть пока a_3 - это параметр. Тогда $a_1 = \boxed{1 - 3a_3}$

$a_0 = -1 + 3a_3 - a_3 = \boxed{-1 + 2a_3}$

$a_1 + 9a_3 = \underline{1 + 6a_3}$; $a_1 + 27a_3 = \underline{1 + 24a_3}$; $a_1 + 81a_3 = \underline{1 + 78a_3}$

Получаем систему из 4-х ур-й с 4 неизв-ми, решаем, получаем: $b_1 = \frac{9}{14}$; $b_3 = \frac{1}{14}$; $b_0 = \frac{2}{7}$

$a_1 = \frac{9}{14}$; $a_3 = \frac{5}{42}$; $a_0 = \frac{-16}{21}$.

<u>Схема:</u> $\frac{1}{h}\left[\frac{-16}{21}y(x) + \frac{9}{14}y(x+h) + \frac{5}{42}y(x+3h)\right] - \frac{2}{7}g(x) - \frac{9}{14}g(x+h) - \frac{1}{14}g(x+3h) = 0.$

<u>Гл. член ошибки:</u> $h^4\left[\frac{1}{(4+1)!}\left(\frac{9}{14}\cdot 1^5 + \frac{5}{42}\cdot 3^5\right) - \frac{1}{4!}\left(\frac{9}{14}\cdot 1^4 + \frac{1}{14}\cdot 3^4\right)\right]y^{(4+1)}(x)$

Домз: 2) $M = \{0, 2, 3\}$; $k=3$; $y'' - g = 0$

3) $M = \{0, 2, 3\}$; $k=4$; $y' - g = 0$

Симметричные компактные схемы

k = 2s

при чётном n: $a_j = a_{-j}$ ⊕ $b_j = b_{-j}$

нечётном n: $a_j = -a_{-j}$

неизвестных: 2*(1+ |M+|)

Неизвестных: |M+| + (1+|M+|) = 1 + 2|M+|

Блок 1

чёт n =2l

$$a_0 + 2\sum_{j\in M_+} a_j = 0$$

Уравнений: l + 1

$$\sum_{j\in M_+} a_j j^m = 0 \quad m = 2, 4, \dots, n-2$$

$$\sum_{j\in M_+} a_j j^n = n!/2$$

нечёт n = 2l - 1

$$\sum_{j\in M_+} a_j j^m = 0 \quad m = 1, 3, \dots, n-2$$

$$\sum_{j\in M_+} a_j j^n = n!/2$$

Уравнений: l

$$b_0 = 1 - 2\sum_{j\in M_+} b_j$$

Уравнений: 1

Уравнений: 1

Блок 2

$$\frac{\sum_{j\in M_+} a_j j^{n+m}}{(n+m)!} = \frac{\sum_{j\in M_+} b_j j^m}{m!} \quad m = 2, 4, \dots, k-2$$

Уравнений: s - 1

Уравнений: s - 1

Условие разрешимости

$$\frac{\sum_{j\in M_+} a_j j^{n+k}}{(n+k)!} \neq \frac{\sum_{j\in M_+} b_j j^k}{k!}$$

l + s + 1 <= 2 + 2|M+|

l + s <= 1 + 2|M+|

Условие разрешимости:
l + s <= 1 + 2|M+|

Задача $y''(x) - g(x) = 0$; $M = \{-1, 0, 1\}$, $k = 4$

$$\begin{cases} m=0: & a_0 + 2a_1 = 0 \\ m=2=n: & a_1 = n!/2 = 1 \end{cases} \quad \text{Блок 1} \quad m = 0, \dots, n-2 = 0 \; + m = n = 2$$

$$b_0 = 1 - 2b_1$$

$$\frac{a_1 \cdot 1^4}{4!} = \frac{b_1 \cdot 1^2}{2!} \quad \text{Блок 2} \quad m = 2, 4, \dots, k-2: \; m = 2$$

$\Rightarrow a_1 = 1$; $a_0 = -2$; $b_1 = \frac{a_1}{12} = \frac{1}{12}$; $b_0 = 1 - 2b_1 = \frac{5}{6}$

Задача $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $y^{(4)}(x) - g(x) = 0$.

Пишем блок 1:
$$\left.\begin{aligned} a_1 + 2a_2 &= 0 \\ a_1 + 8a_2 &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= -1 \\ a_2 &= 1/2 \end{aligned}$$

$$b_0 = 1 - 2b_1 - 2b_2$$

Чтобы система решалась однозн. отн. b_j, надо добавить ещё 2 ур-я: т.е. тогда ~~[illegible]~~ m будет принимать значения 2 и 4. при этом

$$4 = k - 2 \Rightarrow \boxed{k = 6}$$

Пишем ур-я:
$$\begin{cases} \dfrac{a_1 + 2^5 a_2}{5!} = \dfrac{b_1 + 4b_2}{2!} & m = 2 \quad (n+m=5) \\[2ex] \dfrac{a_1 + 2^7 a_2}{7!} = \dfrac{b_1 + 2^4 b_2}{4!} & m = 4 \quad (n+m=7) \end{cases}$$

Решая систему, находим: $b_1 = 7/30$; $b_2 = \dfrac{1}{240}$

$$b_0 = 1 - 2\left(\frac{7}{30} + \frac{1}{240}\right) = \frac{63}{120}$$

Р. схема:

$$\frac{1}{h^3}\left[-1\left(y(x+h) - y(x-h)\right) + \frac{1}{2}\left(y(x+2h) - y(x-2h)\right)\right] - \frac{63}{120}g(x) - \frac{7}{30}\left(g(x+h) + g(x-h)\right) - \frac{1}{240}\left(g(x+2h) + g(x-2h)\right) = 0$$

Гл. член ошибки:
$$h^6\left[\frac{1}{\underset{\underset{(n+k)!}{\uparrow}}{(6+3)!}} 2\sum_{j \in M_+} a_j j^{(n+k)} - \frac{1}{\underset{\underset{k!}{\uparrow}}{6!}} 2\sum_{j \in M_+} b_j j^k\right] y^{(6+3)}(x)$$

Дз: 4) Д/з № 1 решить вторым способом.

5) Построить комп. схему, аппроксим. с максимальным пор-м на шаблоне $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ дифф. ур. $y^{(4)}(x) - g(x) = 0$