Итерационные методы решения СЛАУ

Решаем: $Ax = f$

Опр. Вид итерац. процесса $x^{m+1} = x^m - \tau B^{-1}(Ax^m - f)$ или

эквивал. ему $B\dfrac{x^{m+1} - x^m}{\tau} + Ax^m = f$ (*)

наз-ся каноническим видом стационарного двухслойного итерационного метода.

Если метод не итерационный, то $\tau \rightsquigarrow \tau_{m+1}$

Матрица B и параметр τ_{m+1} выбирается так, чтобы уравнение $Bx^{m+1} = g^m$ решалось легче, чем изначальная система.

Итерац. процесс наз-ся сходящимся к x, если $\forall$ начального приближения x^0 $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x^n - x\| = 0$

Обозначим:
$z^m = x^m - x$ погрешность
$r^m = Ax^m - f$ вектор невязки
$(r^m = Az^m)$

Подставим $x^m = z^m + x$ в (*):

$$B\frac{z^{m+1} - z^m}{\tau_{m+1}} + Az^m + \cancel{Ax} = \cancel{f} \Rightarrow B\frac{z^{m+1} - z^m}{\tau_{m+1}} + Az^m = 0$$

т.о. $z^{m+1} = (E - \tau_{m+1}B^{-1}A)z^m = S_m z^m$, где S_m – матрица перехода

$$z^{m+1} = S_m z^m = S_m S_{m-1} \ldots S_0 z^0$$

Если $\tau_{m+1} = \tau$, то $\boxed{z^{m+1} = S^{m+1} z^0}$

1. <u>Достаточное условие стационарного процесса</u>

Если $\|S\| < 1$, то итер. пр-цесс сходится

2. Для того, чтобы стац. процесс сходился, <u>необходимо и достаточно</u>, чтобы все собств. числа матр. S были < 1:

$|\lambda(S)| < 1$

3. <u>Теорема Самарского</u> (стр. 126)

Пусть $A = A^T > 0$ и $\tau_{k+1} = \tau > 0$

Тогда условие $B > 0.5\tau A$ влечёт за собой сходимость метода (*)

4. <u>Метод простой итерации</u>

$B = E$; $S = E - \tau A$ + считаем, что $A = A^T > 0$

Этот метод сх-ся при $0 < \tau < \frac{2}{\lambda(A)}$ $\forall \lambda(A)$

т.е при $0 < \tau < \frac{2}{\lambda_{max}(A)}$

(тут используется, что $\lambda(E - \tau A) = 1 - \tau\lambda(A)$)

Кроме того, чтобы процесс сходился максимально быстро:

$$\tau_{опт} = \frac{2}{\lambda_{min}(A) + \lambda_{max}(A)}$$

Как получаем (*)? $F(x) = Ax - f$

$F(x) = 0 \Leftrightarrow -\tau B^{-1} F(x) = 0 \Leftrightarrow x - \tau B^{-1}F(x) = x \Leftrightarrow x = \Phi(x) = x - \tau B^{-1}F(x)$

Решение $F(x) = 0$ эквив. нах-ю неподвижной точки $x = \Phi(x)$.

А для него применим метод послед. приближений:

$$x^{m+1} = \Phi(x^m) = x^m - \tau B^{-1}F(x^m) = x^m - \tau B^{-1}(Ax^m - f)$$

Задача 1 Дан итерац. процесс

$$\begin{cases} 2x_1^{k+1} - x_2^{k} = 1 \\ -x_1^{k+1} + 2x_2^{k+1} = 1 \end{cases}$$

- Записать в канонич. виде. Если процесс сх-ся, то к реш-ю какой системы? (Не надо док-ть сх-ть)

Шаг 1 пусть $x^m \to x$, тогда $x^{k+1} \to x$, убираем индексы,

получаем: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$

Если x^m сх-ся, то к решению этой системы, т.е. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Шаг 2 Пусть ит. процесс выглядит так:

$$Dx^{k+1} + Cx^k = f$$

Канонич. вид: $B\dfrac{x^{k+1} - x^k}{\tau} + Ax^k = f$

Возьмём $\tau = 1$: $Bx^{k+1} - Bx^k + Ax^k = f$

$$Bx^{k+1} + (A - B)x^k = f$$

Получаем: $D = B$, $C = A - B$ $\Rightarrow$ $B = D$, $A = C + D$

т.о. для нашей задачи: $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \cancel{-1}\,0 & \cancel{2}\,0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $A = C + D = \begin{pmatrix} 2 & \cancel{0}\,-1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Задача 2 Для решения системы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

применяется стационарный двухслойный итерац. метод

$$B\frac{x^{m+1}-x^m}{\tau} + Ax^m = f \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ \tau = 1$$

а) Используя т. о дост. усл. показать, что метод сх-ся

б) Используя т. о необх. и дост. усл. док-ть сх-ть

в) Используя т. Самарского . . . .

г) Вычислить x^2 для $x^0 = 0$

а) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\det B = 4$; $B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\tau = 1$

$$S = E - \tau B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$\|S\|_\infty = 1/2 < 1 \rightarrow$ сх-ся

б) $|S - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 0 & 1/4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1/4 - \lambda) = 0 \rightarrow \begin{matrix} \lambda = 0 \\ \lambda = 1/4 \end{matrix}$ $|\lambda(S)| < 1$ $\rightarrow$ сх-ся

в) Проверяем $A = A^T > 0$: $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$ $\Rightarrow A > 0$

Смотрим $C = B - \frac{A}{2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$

Нельзя исп-ть критерий Сильвестра, $C \neq C^T$!

Смотрим $C + C^T = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ - полож. опр.

$\Rightarrow$ метод сх-ся

г) $x^{k+1} = x^k - \tau B^{-1}(Ax^k - f)$ $\tau = 1$

$x^0 = 0$

$x^1 = B^{-1}f = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

$x^2 = x^1 - B^{-1}Ax^1 + \underbrace{B^{-1}f}_{x^1} = 2x^1 - B^{-1}Ax^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 - 3/8 \\ 9/16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/8 \\ 15/16 \end{pmatrix}$

Заметим, что применять общую ф-лу сложно.

Смотрим на итерац. алгоритм:

$$\begin{cases} 2x_1^{m+1} - x_2^m = 1 \\ -x_1^{m+1} + 2x_2^{m+1} = 1 \end{cases}$$

Зная x^m, легко находим x^{m+1}: $\begin{cases} x_1^{m+1} = \frac{1 + x_2^m}{2} \\ x_2^{m+1} = \frac{1 + x_1^{m+1}}{2} \end{cases}$

<u>Или так</u>:

<u>Берём</u> $x^0 = 0$: , подставляем $m = 0$

- $\begin{cases} 2x_1^1 - 0 = 1 \\ -x_1^1 + 2x_2^1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1^1 = 1/2 \\ x_2^1 = 3/4 \end{matrix}$

- берём $m = 1$

$\begin{cases} 2x_1^2 - 3/4 = 1 \\ -x_1^2 + 2x_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1^2 = 7/8 \\ x_2^2 = \frac{1 + 7/8}{2} = \frac{15}{16}. \end{matrix}$

Заметим, что метод, когда в качестве B берётся нижне-треугольная часть матрицы A наз-ся методом $\boxed{\text{Зейделя}}$ $(B = L + D)$

$x^{m+1} = x^m - 1\,(L + D)^{-1}(Ax^m - f)$

Для метода Зейделя есть 2 теоремы о сх-ти ~~[illegible]~~ по строкам

- Если A – матрица с диагональным преобладанием по строкам, то метод Зейделя сходится
- Если $A = A^T > 0$, то метод Зейделя сх-ся (это выводится у теоремы Самарского)

Опр. Матр. A наз-ся матрицей с диаг. преобл. по строкам, если $\exists\, q: \; 0 < q < 1$ и

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < q|a_{ii}|$$

Смотрим задачу 2:

$a_{11} = 2 > 1 = |a_{12}|$? $2q > 1$ где $q \in (0,1)$

$a_{22} = 2 > 1 = |a_{21}|$? $2q > 1$

Можем взять $q = 3/4$

$\Rightarrow A$ – матр. с диаг. преобл. $\Rightarrow$ метод Зейделя сх-ся

Или из частного случая т. Самарского: $A = A^T > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ метод Зейделя сх-ся

Задача 3 Написать метод Зейделя для

$$\begin{cases} 11x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 11 \end{cases}$$

Посчитать x^2 при $x^0 = 0$

$$x^{m+1} = x^m - (L+D)^{-1}(Ax^m - f)$$

или

$$(L+D)\frac{x^{m+1} - x^m}{\tau = 1} + Ax^m = f$$

эквив: $(L+D)x^{m+1} + (A-L-D)x^m = f$

Индексы $(m+1)$ будут стоять у диаг. элементов и тех, что ниже

Индексы m будут стоять у эл-в выше диагонали

Метод Якоби

В методе Якоби $B = D$ (диагональные элементы матр. A), $\tau = 1$

$$x^{m+1} = x^m - 1 \cdot D^{-1}(Ax^m - f)$$

или $$D\frac{x^{m+1} - x^m}{\tau = 1} + Ax^m = f$$

$$Dx^{m+1} + (A - D)x^m = f$$

Индексы $(m+1)$ будут стоять у диагон. эл-в,
у всех остальных будет стоять индекс m

Задача 4 Написать метод Якоби для задачи 3 + найти x^2 при $x^0 = 0$

Ответ:
$$\begin{cases} 11x_1^{m+1} + x_2^m + x_3^m = 3 \\ x_1^m + 7x_2^{m+1} + 2x_3^m = 10 \\ x_1^m + 2x_2^m + 8x_3^{m+1} = 11 \end{cases}$$

Не надо применять общую ф-лу для вычисления x^k!

Тут есть явные формулы, простые

$$x_1^{m+1} = \frac{1}{11}(3 - x_2^m - x_3^m) \ldots$$

У метода Якоби тоже есть теоремы:

- Если у матр A есть диаг. преобладание по строкам, то метод сх-ся
- (На основе т. Самарского):
  Если $A = A^T > 0$ и $2D > A$, то метод Якоби сходится

Задача 5 Для ~~[illegible]~~ системы $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

выписать метод простой итерации, найти оптимальный пар-р τ

Реш-е: $B = E$; $A = A^T > 0$

$$E\frac{x^{m+1} - x^m}{\tau} + Ax^m = f$$

$$\frac{1}{\tau}x^{m+1} + \left(A - \frac{1}{\tau}E\right)x^m = f$$

$$\tau_{опт} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$$

Ищем $\lambda(A)$:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (2-\lambda) = \pm 1 \Rightarrow \begin{array}{l}\lambda = 1 \\ \lambda = 3\end{array}$$

$$\Rightarrow \tau_{опт} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

Доп 1) Для решения $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ применить метод Якоби

- выписать расчетные ф-лы, вычислить x^2 для $x^0 = 0$
- Четырьмя способами д-ть сх-ть метода

2) Доказать сх-ть итерац. метода

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\tau} + A\frac{x^{k+1} + x^k}{2} = f,$$

применяемого для решения СЛАУ $Ax = f$ с матр $A = A^T > 0$ и пар-м $\tau > 0$

3)* (Не обязательно)

Д-ть, что для матриц 2-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ метод Якоби и метод Зейделя сх-ся и расх-ся одновременно.