Уравнения с частными производными

Пусть $y = y(x,t)$ и допустим хотим решить ур-е

$\boxed{a y_x + y_t = 0}$ численно. $(a>0)$

Для начала научимся аппроксимировать диф. ур-е и находить порядок ошибки.

+ Будем пользоваться оператором сдвига:

$$\left.\begin{aligned} T_h(y(x,t)) &= y(x+h, t) \\ T_{-h}(y(x,t)) &= y(x-h, t) \end{aligned}\right\} \text{сдвиг по пространству}$$

$$\left.\begin{aligned} T^{\tau}(y(x,t)) &= y(x, t+\tau) \\ T^{-\tau}(y(x,t)) &= y(x, t-\tau) \end{aligned}\right\} \text{сдвиг по времени}$$

$$E(y(x,t)) = y(x,t).$$

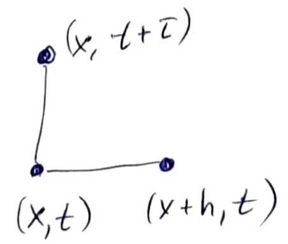
Аппроксимируем y_x: $\dfrac{y(x+h,t) - y(x,t)}{h} = \dfrac{(T_h - E)}{h} \circ y(x,t)$

Аппроксимируем y_t: $\dfrac{y(x,t+\tau) - y(x,t)}{\tau} = \dfrac{(T^{\tau} - E)}{\tau} \circ y(x,t)$

Получаем схему:

$$a\,\frac{y(x+h,t) - y(x,t)}{h} + \frac{y(x,t+\tau) - y(x,t)}{\tau} = 0$$

Шаблон схемы:



Чтобы найти порядок аппроксимации, нужно разложить всё по ф. Тейлора в (.) (x,t)

Многомерная ф. Тейлора:

$$y(x_0+\Delta x,\ t_0+\Delta t) = y(x_0,t_0) + \Delta x \cdot y_x(x_0,t_0) + \Delta t \cdot y_t(x_0,t_0) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left((\Delta x)^2 y_{xx}(x_0,t_0) + 2\Delta x \Delta t\, y_{xt}(x_0,t_0) + (\Delta t)^2 y_{tt}(x_0,t_0)\right) +$$

$$+ \cancel{\ldots} + o\left(\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta t)^2}\right)^2\right)$$ ← или $O((\Delta x^2 + \Delta y)^3)$

Задача 1: разложить $a\dfrac{y(x+h,t)-y(x,t)}{h} + \dfrac{y(x,t+\tau)-y(x,t)}{\tau}$,

найти порядок аппроксимации на решении.

$$(\ast) = a\frac{\cancel{y(x,t)} + h y_x(x,t) + \frac{h^2}{2} y_{xx}(x,t) - \cancel{y(x,t)} + O(h^3)}{h} +$$

$$+ \frac{\cancel{y(x,t)} + \tau y_t(x,t) + \frac{\tau^2}{2} y_{tt}(x,t) - \cancel{y(x,t)} + O(\tau^3)}{\tau} =$$

$$= \underbrace{(a y_x + y_t)}_{0} + \underbrace{a\frac{h}{2} y_{xx}(x,t) + \frac{\tau}{2} y_{tt}(x,t)}_{y_t = -a y_x \Rightarrow y_{tt} = -a(y_x)_t = -a(y_t)_x = a^2 y_{xx}} + O(h^2+\tau^2) = \frac{a}{2}(h + a\tau) y_{xx} \neq 0$$

$$= O(h+\tau)$$ – 1-й пор-к по h и 1-й по τ

Задача 2 Схема $\dfrac{y(x,t+\tau)-y(x,t)}{\tau} + \dfrac{y(x+h,t)-y(x-h,t)}{2h} = 0$

(1-й пор-к по τ, 2-й по h)

При разложении в ряд получим: $y_t + \frac{\tau}{2} y_{tt} + a y_x + O(\tau^2+h^2)$

На решении пор-к: $O(\tau+h^2)$

Идея: хотим изменить схему, добавив в правую часть что-то, что уничтожило бы $\frac{\tau}{2}y_{tt}$.

Пользуемся диф. следствием: $y_{tt} = a^2 u_{xx}$

Добавляем в прав. часть $\frac{\tau}{2}a^2\frac{y(x+h,t)-2y(x,t)+y(x-h,t)}{h^2}$

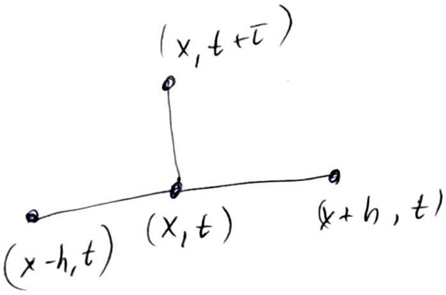
Проверить: на решении y схемы

$$\frac{y(x,t+\tau)-y(x,t)}{\tau}+\frac{y(x+h,t)-y(x-h,t)}{2h}=\frac{\tau}{2}a^2\left(\frac{y(x+h,t)-2y(x,t)+y(x-h,t)}{h^2}\right)$$

порядок аппр-ции $O(\tau^2+h^2)$

Эта схема наз-ся схемой Лакса – Вендроффа.

Шаблон:



Дома: нарисовать шаблон, найти порядок аппроксимации схемы „коробочка“:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y(x,t+\tau)-y(x,t)}{\tau}+\frac{y(x+h,t+\tau)-y(x+h,t)}{\tau}\right)+$$
$$+\frac{a}{2}\left(\frac{y(x+h,t)-y(x,t)}{h}+\frac{y(x+h,t+\tau)-y(x,t+\tau)}{h}\right)=0$$

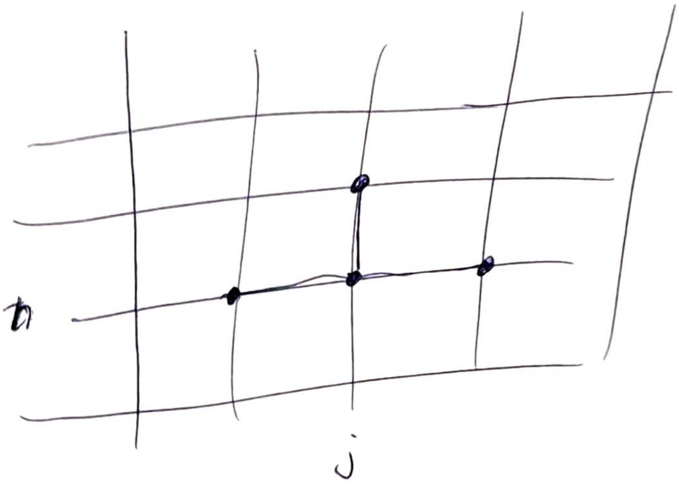
Разл. в т. (x, t) или $\left(x+\frac{h}{2}, t+\frac{\tau}{2}\right)$

Сейчас: найти пор-к аппроксимации схемы Лакса:

$$\frac{y(x,t+\tau)-\dfrac{y(x-h,t)+y(x+h,t)}{2}}{\tau}+a\,\frac{y(x+h,t)-y(x-h,\tau)}{2h}=0$$

// Замечание: в будущем, чтобы находить разностное реш-е, мы ~~так~~ область расчёта будем разбивать на точки:

$$(x_j, t^n) = (jh, \tau n)$$



и тогда можем польз-ся обозначением

$$y(x_j, t^n) = y_j^n$$

Схема примет вид (если расписываем в (.) (x_j, t^n))

$$\frac{y_j^{n+1}-\dfrac{y_{j-1}^n+y_{j+1}^n}{2}}{\tau}+a\,\frac{y_{j+1}^n-y_{j-1}^n}{2h}=0$$

И тогда, зная численное решение при $t=t^n$, мы бы получили численное реш-е при $t=t^{n+1}$:

$$y_j^{n+1}=\frac{y_{j-1}^n+y_{j+1}^n}{2}-\frac{a\tau}{2h}\left(y_{j+1}^n-y_{j-1}^n\right)$$

(Про краевые условия пока не говорим)

Ищем порядок:

$$\frac{y(x-h,t)+y(x+h,t)}{2} = \frac{y(x,t) - \cancel{h y'_x} + \frac{h^2}{2} y''_{xx} + O(h^3) + y + \cancel{h y_x} + \frac{h^2}{2} y_{xx}}{2}$$

$$= \underbrace{y + \frac{h^2}{2} y_{xx} + O(h^4)}$$

$$y(x,t+\tau) = y + \tau y_t + \frac{\tau^2}{2} y_{tt} + O(\tau^3)$$

$$\frac{y(x,t+\tau) - \frac{y(x-h,t)+y(x+h,t)}{2}}{\tau} = \frac{\cancel{y} + \tau y_t + \frac{\tau^2}{2} y_{tt} - \cancel{y} - \frac{h^2}{2} y_{xx} + O(h^3+\tau^3)}{\tau}$$

$$= \underbrace{y_t + \frac{\tau}{2} y_{tt} - \frac{h^2}{2\tau} y_{xx} + O\left(\frac{h^3}{\tau}+\tau^2\right)}.$$

$$\frac{y(x+h,t)-y(x-h,t)}{2h} = \frac{y + h y_x + \frac{h^2}{2} y_{xx} - y + h y_x - \frac{h^2}{2} y_{xx} + O(h^3)}{2h} =$$

$$= y_x + O(h^2)$$

Получаем $\Lambda_h(y(x,t)) = \underbrace{y_t + a y_x}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \frac{\tau}{2} y_{tt} - \frac{h^2}{2\tau} y_{xx} + O\left(\frac{h^3}{\tau}+\tau^2\right) =$

$$= O\left(\underbrace{\tau + \frac{h^2}{\tau}}\right)$$

$\downarrow$

Чтобы это $\to 0$ при $h, \tau \to 0$, ~~нужно~~ можно взять

$$\frac{h^{\cancel{2}}}{\tau} = \text{const}.$$

Если оно к 0 не стремится, то ~~...~~ смысла такую схему брать нет.

Компактные схемы

Решаем диф. ур-е $\frac{\partial^n u}{\partial t^n} - \frac{\partial^m f(u)}{\partial x^m} = 0$ (*)

где $u = u(x,t)$

Введём обозначения $y(x,t) = u(x,t)$

$$g(x,t) = \frac{\partial^m f(u)}{\partial x^m}$$

1) (*) имеет вид $\frac{\partial^n y(x,t)}{\partial t} - g(x,t) = 0$

Считаем, что x - параметр (фиксир.), t - переменная

Аппроксимируем компактной схемой (с k-м пор-м)

$$\Lambda_k^n(\tau) \circ y(x,t) - \Omega_k^n(\tau)\, g(x,t) = 0 \quad (**)$$

$$\Lambda_k^n(\tau) = \frac{1}{\tau^n} \sum_{j \in M_\tau} a_j T^{j\tau} \qquad \Omega_k^n(\tau) = \sum_{j \in M_\tau} b_j T^{j\tau}$$

$$T^{j\tau}(y(x,t)) = y(x, t + j\tau)$$

Смотрим: $\Omega_k^n(\tau) \circ g = \Omega_k^n(\tau) \circ \frac{\partial^m}{\partial x^m}(g) =$

$$= \frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(\Omega_k^n(\tau) \circ f(u)\right)$$

Перепиш-м (**):

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\Big(\underbrace{\Omega_k^n(\tau) \circ f(u)}_{\tilde{y}(x,t)}\Big) - \underbrace{\Lambda_k^n(\tau) \circ u}_{\tilde{g}(x,t)} = 0$$

Получим: $\dfrac{\partial^m \tilde{y}(x,t)}{\partial x^m} - \tilde{g}(x,t) = 0$ $\qquad \tilde{y}^{(m)}_{x} - \hat{g} = 0$

Тут уже переменная (x). Аппроксимируем компактной схемой с порядком (ℓ)

$$\Lambda_\ell^m(h)\circ\tilde{y} - \Omega_\ell^m(h)\circ\tilde{g} = 0.$$

$$\Lambda_\ell^m(h) = \frac{1}{h^m}\sum_{j\in M_h}\tilde{a}_j T_{jh}\ ; \quad \Omega_\ell^m(h) = \sum_{j\in M_h}\tilde{b}_j T_{jh}$$

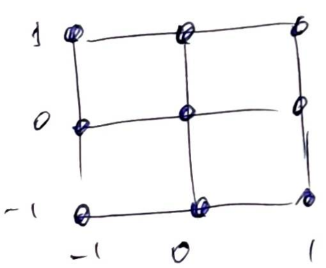
Получаем:

$$\boxed{\Lambda_\ell^m(h)\circ\Omega_k^m(\tau)\circ f(u) - \Omega_\ell^m(h)\circ\Lambda_k^n(\tau)\circ u = 0}$$

Схема содержит $|M_\tau|$ слоёв по времени и $|M_h|$ слоёв по пр-ву

Задача $\quad u_t - (f(u))_{xx} = 0 \quad (n=1;\ m=2)$

Апр-м с $k=\ell=4$ на шаблоне $M = M_\tau \otimes M_h$, где $M_\tau = M_h = \{-1, 0, 1\}$



1) Решаем $y'_t - g = 0$ $\qquad M = \{-1, 0, 1\}$, $k = 4$:

Это схема

$$\frac{y(x,t+\tau) - y(x,t-\tau)}{2\tau} - \frac{g(x,t+\tau) + 4g(x,t) + g(x,t-\tau)}{6} = 0$$

Здесь $\Lambda_4^1(\tau) = \dfrac{T^\tau - T^{-\tau}}{2\tau}$ $\quad \Omega_4^1(\tau) = \dfrac{T^\tau + 4E + T^{-\tau}}{6}$

2) Решаем $\tilde{y}''_{xx} - \tilde{g} = 0$

Схема: $\Lambda_4^2(h) = \dfrac{T_h - 2E + T_{-h}}{h^2}$; $\Omega_4^2(h) = \dfrac{T_h + 10E + T_{-h}}{12}$

Т.о. итог:

$$\frac{T_h + 10E + T_{-h}}{12} \circ \frac{T^{\tau} - T^{-\tau}}{2\tau} \circ u - \frac{T^{\tau} + 4E - T^{-\tau}}{6} \circ \frac{T_h - 2E + T_{-h}}{h^2} \circ f(u) = 0$$

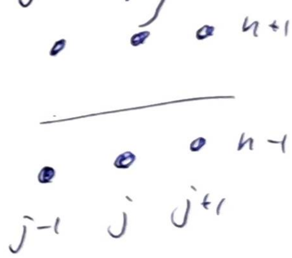
Давайте распишем при $f(u) = u$:

- $\dfrac{T^{\tau} - T^{-\tau}}{2\tau} \circ u = \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau}$

$$\left(\frac{T_h + 10E + T_{-h}}{12}\right)\left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\tau}\left(\frac{1}{12}\left(u_{j+1}^{n+1} + 10u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\right) - \frac{1}{12}\left(u_{j+1}^{n-1} + 10u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}\right)\right)$$

Шаблон

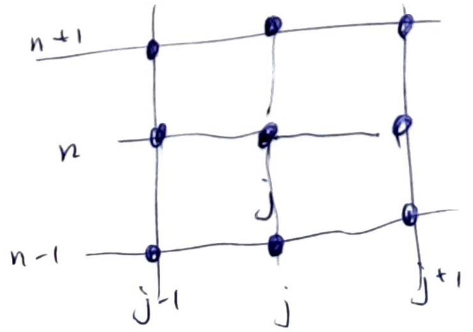


- $\dfrac{T_h - 2E + T_{-h}}{h^2} \circ u = \dfrac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$

$$\left(\frac{T^{\tau} + 4E + T^{-\tau}}{6}\right)\left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{6h^2}\left(\left(u_{j+1}^{n+1} + 4u_{j+1}^n + u_{j+1}^{n-1}\right) - 2\left(u_j^{n+1} + 4u_j^n + u_j^{n-1}\right) + \left(u_{j-1}^{n+1} + 4u_{j-1}^n + u_{j-1}^{n-1}\right)\right)$$

Шаблон:



Задача: Написать комп. схему для

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u_x = 0$$

При этом $M_\tau = M_h = \{0, 1, 3\}$

Решение 1) $y''_{tt} - g = 0$

$$\Lambda_3^2(\tau) = \frac{1}{\tau^2}\left(\frac{2}{3}E - T^{\tau} + \frac{1}{3}T^{3\tau}\right)$$

$$\Omega_3^2(\tau) = \left(\frac{1}{18}E + \frac{11}{12}T^{\tau} + \frac{5}{36}T^{3\tau}\right)$$

2) $\tilde{y}'_x - \tilde{g} = 0$

$$\Lambda_3^1(h) = \frac{1}{h}\left(\frac{-16}{21}E + \frac{9}{14}T_h + \frac{5}{42}T_{3h}\right)$$

$$\Omega_3^1(h) = \frac{2}{7}E + \frac{9}{14}T_h + \frac{1}{14}T_{3h}$$

Т.о. схема: $\Omega_3^1(h)\circ\Lambda_3^2(\tau)\circ u - \Lambda_3^1(h)\circ\Omega_3^2(\tau)\circ u = 0$

Домз: Решаете $u_t + au_x = 0$ $M_\tau = M_h = \{-1, 0, 1\}$

$k = l = 4.$

Найти схему, раскрыть операторы.