т. Лакса: аппроксимация + устойчивость → сходимость

Спектральный критерий устойчивости

Схема устойчива, если небольшие изменения нач. данных приводят к небольшим изменениям разн. реш-я

$\boxed{\text{Необходимый}}$ признак уст-ти:

[Если апп-м ур. вида $u_t + au_x = 0$; $u_{tt} + u_{xx} = 0$; $u_t - a^2 u_{xx} = 0$)

Если подставим в схему $\boxed{u_j^n = \lambda^n e^{ij\alpha}}$, и если схема устойчива, то будет выполнено:

$$|\lambda(\alpha)| \le 1 \quad \forall \alpha \in [0, 2\pi]$$

(т.е. надо $u_j^n = \lambda^n e^{ij\alpha}$ подставить в схему, выразить λ ч/з α и смотреть $|\lambda(\alpha)|$).

Если $\exists \alpha \; |\lambda(\alpha)| > 1$, то схема не устойчива, по ней считать нельзя!

Если $\forall \alpha \; |\lambda(\alpha)| \le 1$, то есть шанс, что по ней считать можно

Схема 1. Разность вперёд

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0 \qquad \text{Обозначим } \; r = \frac{a\tau}{h}$$

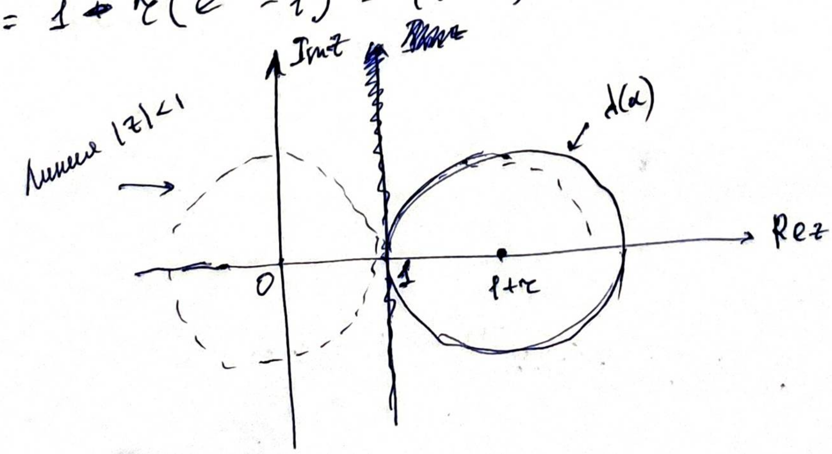
$$u_j^{n+1} = u_j^n + r(u_{j+1}^n - u_j^n)$$

$$u_j^n = \lambda^n e^{ij\alpha}:$$

Подставляем

$$\lambda^{n+1} e^{ij\alpha} = \lambda^n e^{ij\alpha} + r\left(\lambda^n e^{i(j+1)\alpha} - \lambda^n e^{ij\alpha}\right) \qquad \text{сокр. на } \lambda^n e^{ij\alpha}$$

$$\lambda = 1 + r(e^{i\alpha} - 1) = (1 + r) - re^{i\alpha}$$



$\lambda(\alpha)$ выходит за единичную окр-ть $\Rightarrow$ схема не уст.

Схема 2 Разность назад

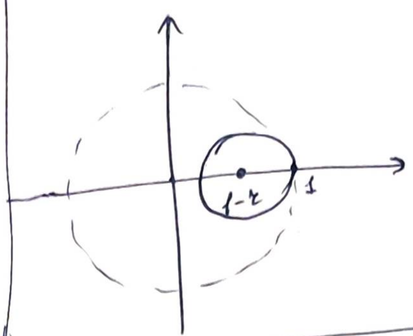
$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} + a\,\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0$$

$$\frac{\lambda-1}{\tau} + a\,\frac{1-e^{-i\alpha}}{h} = 0$$

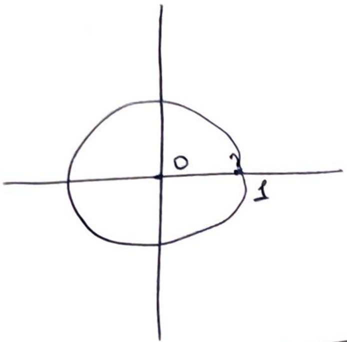
$$\lambda - 1 + r(1-e^{-i\alpha}) = 0$$

$$\lambda = (1-r) + r e^{i\alpha}$$

$0<r<1$

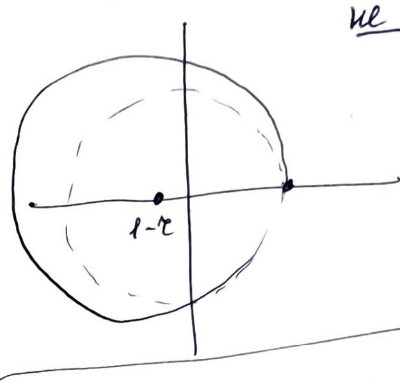


$r=1$: $\lambda(\alpha)$ совпадает с ед. окр-тью



$r>1$ выходит за ед. окр-ть

<u>не устойчив</u>



$\Rightarrow$ можно попробовать считать при $r \le 1$

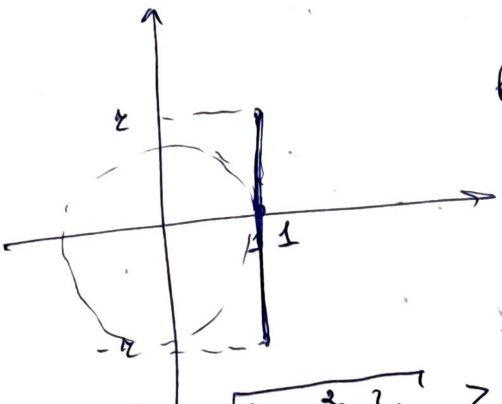
Схема 3 симметр. по пр-ву

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} + a\,\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{r}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)$$

$$\lambda = 1 - \frac{r}{2}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) = 1 - \frac{r}{2}\left(\cos\alpha + i\sin\alpha - \cos\alpha + i\sin\alpha\right) =$$

$$= 1 - ir\sin\alpha$$



выходит за ед. окр-ть

Или аналитически: $|\lambda| = \sqrt{1 + r^2\sin^2\alpha} > 1 \quad \forall\alpha$

Схема 12 : неявная симм. схема

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\,\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2h}=0$$

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{r}{2}\left(u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}\right)$$

$$\lambda=1-\frac{r}{2}\lambda\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)=1-ir\sin\alpha\cdot\lambda$$

$$\lambda=\frac{1}{1+ir\sin\alpha}$$

$$|\lambda|^2=\frac{1}{|1+ir\sin\alpha|^2}=\frac{1}{1+r^2\sin^2\alpha}\leq 1\quad\forall\alpha,\ \forall r$$

(„Безусловно устойчивая" схема)

Схема 10 : прямоугольник

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j+1}^n}{\tau}\right)+\frac{a}{2}\left(\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h}+\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}}{h}\right)=0$$

$$\left(u_j^{n+1}-u_j^n+u_{j+1}^{n+1}-u_{j+1}^n\right)+r\left(u_{j+1}^n-u_j^n+u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}\right)=0$$

$$\underline{\lambda}-1+\underline{\lambda e^{i\alpha}}-e^{i\alpha}+r\left(e^{i\alpha}-1+\underline{\lambda e^{i\alpha}}-\underline{\lambda}\right)=0$$

$$\lambda\left(1+e^{i\alpha}+re^{i\alpha}-r\right)+re^{i\alpha}-r-1-e^{i\alpha}=0$$

$$\lambda\left(1+e^{i\alpha}+re^{i\alpha}-r\right)=1+e^{i\alpha}-re^{i\alpha}+r$$

$$\lambda=\frac{1+r+(1-r)e^{i\alpha}}{(1-r)+(1+r)e^{i\alpha}}$$

Обозначим $b=(1+r)$; $c=(1-r)$

$$\lambda=\frac{b+c(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{c+b(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=\frac{(b+c\cos\alpha)+i\cdot c\sin\alpha}{(c+b\cos\alpha)+i\cdot b\sin\alpha}$$

$$|\lambda|^2=\frac{b^2+2bc\cos\alpha+c^2\cos^2\alpha+c^2\sin^2\alpha}{c^2+2bc\cos\alpha+b^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}=1$$

Эта схема хорошая только в линейном случае

Схема 6, крест

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

$$\lambda - \lambda^{-1} + r(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) = 0$$

$$\lambda^2 + 2ir\sin\alpha - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -ir\sin\alpha \pm \sqrt{1 - r^2\sin^2\alpha}$$

Рассмотрим 2 случая

1) $r \leq 1$ тогда $1 - r^2\sin^2\alpha \geq 1 - r^2 \geq 0 \quad \forall \alpha$

тогда $\sqrt{1-r^2\sin^2\alpha}$ - веществ. число

$$|\lambda|^2 = r^2\sin^2\alpha + 1 - r^2\sin^2\alpha = 1$$

2) $r > 1$ $\exists \alpha$ (к-р $\alpha = \frac{\pi}{2}$) $|$ $1 - r^2\sin^2\alpha < 0$, возьмём $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Тогда $\sqrt{1-r^2} = i\sqrt{r^2-1}$

$$|\lambda_{1,2}| = |-ri \pm i\sqrt{r^2-1}| = |r \pm \sqrt{r^2-1}|$$

$$|\lambda_2| = \underbrace{r}_{>1} + \underbrace{\sqrt{r^2-1}}_{>0} > 1 \quad \text{при } r > 1$$

$\Rightarrow$ при $r > 1$ схема неустойчива

Схема 5, Лакса

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{r}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = u_{j+1}^n\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{2}\right) + u_{j-1}^n\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2}\right)$$

Обозначим $b = \frac{1-r}{2}$; $c = \frac{1+r}{2}$ $\Rightarrow u_j^{n+1} = b u_{j+1}^n + c u_{j-1}^n$

$\lambda = be^{i\alpha} + ce^{-i\alpha} = \cos\alpha\cdot(b+c) + i\sin\alpha\cdot(b-c)$

$b+c=1;\quad b-c=-r$

$\Rightarrow \lambda = \cos\alpha - ir\sin\alpha$

$|\lambda|^2 = \cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha \overset{?}{\le} 1$

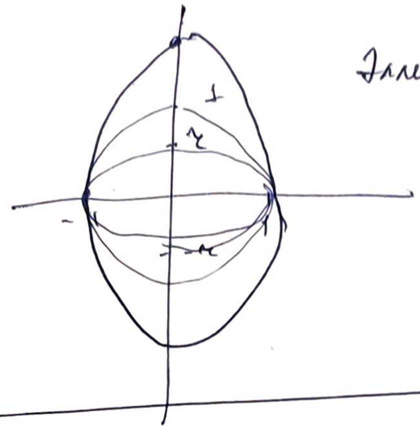
$\cancel{\cos^2\alpha} + r^2\sin^2\alpha \overset{?}{\le} \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha$

$r^2\sin^2\alpha \le \sin^2\alpha$

$\boxed{r^2 \le 1}$

График. $Re\, z = \cos\alpha$

$Im\, z = -r\sin\alpha$



Эллипсы

Дом.з.: 1) Попробуйте схему Лакса-Вендроффа для $u_t + au_x = 0$

2) Схема

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} + a^2\,\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = 0 \quad \text{для} \quad u_t - a^2u_{xx} = 0$$

~~[illegible]~~ex.

Схема 5 (с искусств. вязкостью)

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} + a\,\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = Cah\,\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{r}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + Cr\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)$$

$$\lambda = 1 - \frac{r}{2}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) + Cr\left(e^{i\alpha} - 2 + e^{i\alpha}\right)$$

$$\lambda = 1 - ir\sin\alpha + 2Cr(\cos\alpha - 1) = 1 + \underbrace{2Cr}_{b}(\cos\alpha - 1) - i\cdot r\sin\alpha$$

$$= 1 + b(\cos\alpha - 1) + ir\sin\alpha$$

$$|\lambda|^2 = (1 + b(\cos\alpha - 1))^2 + \tau^2 \sin^2\alpha = \cancel{1} + 2b(\cos\alpha - 1) + b^2(\cos\alpha-1)^2 + \tau^2\sin^2\alpha \overset{?}{\leq} \cancel{1}$$

$$2b(\cos\alpha - 1) + b^2(\cos\alpha - 1) + \tau^2(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha) \overset{?}{\leq} 0$$ Сокращ. на $(\cos\alpha - 1 \leq 0)$

$$2b + b^2(\cos\alpha - 1) - \tau^2(1+\cos\alpha) \overset{?}{\geq} 0$$

$b = 2c\tau$

$$4c + 4\tau c^2(\cos\alpha - 1) - \tau(1+\cos\alpha) \overset{?}{\geq} 0$$

$$-4c - 4\tau c^2(\cos\alpha - 1) + \tau(1+\cos\alpha) \overset{?}{\leq} 0$$

$$\tau\Big(\underbrace{(1+\cos\alpha)}_{\geq 0} + \underbrace{4c^2}_{>0}\underbrace{(1-\cos\alpha)}_{>0}\Big) \overset{?}{\leq} 4c$$

$$\tau \overset{?}{\leq} \frac{4c}{(1+\cos\alpha) + 4c^2(1-\cos\alpha)}$$

Смотрим, когда знаменатель максимален

$$z = 4c^2(1-\cos\alpha) + 1 + \cos\alpha = \left\{\begin{array}{l}\cos\alpha = x \\ -1 < x < 1\end{array}\right\} = 4c^2 - 4c^2x + (1+x) =$$

$$= x(1-4c^2) + (1+4c^2)$$

1) $1 - 4c^2 = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

$$\tau \leq \frac{4c}{4c^2+1} = \frac{2}{2} = 1$$

2) $c > \frac{1}{2} \rightarrow (1 - 4c^2 < 0)$

z моног. $\downarrow$ $\Rightarrow$ макс. при $x = -1$

$$\max(z) = -(1-4c^2) + 1 + 4c^2 = 8c^2$$

$$\tau \leq \frac{4c}{8c^2} = \frac{1}{2c} \longleftrightarrow \boxed{c \leq \frac{1}{2\tau}}$$

Итак: если $c > \frac{1}{2}$, то τ должно быть ≤ 1

3) $c < \frac{1}{2} \rightarrow (1 - 4c^2 > 0)$ макс. при $x = 1$

$$\max(z) = (1-4c^2) + 1 + 4c^2 = 2$$

$$\tau \leq \frac{4c}{2} = 2c \longleftrightarrow \boxed{c \geq \frac{\tau}{2}}$$

Итак: $\tau < 2c < \{c < \frac{1}{2}\} < 1$

Если τ фиксир (но < 1), то получаем ограничения на c для устойчивости

Монотонность разн. схем

Разн. схема наз-ся монотонной, если:

$$\forall j \quad u_{j+1}^n \geq u_j^n \Rightarrow u_{j+1}^{n+1} \geq u_j^{n+1} \quad \forall j$$

и $\forall j \quad u_{j+1}^n \leq u_j^n \Rightarrow u_{j+1}^{n+1} \leq u_j^{n+1}$

(Переносит св-во монотонности разностного реш-я со слоя на слой)

<u>Критерий</u>: 2-х слойная по времени схема

$$u_j^{n+1} = \sum_{m \in M} C_m u_{j+m}^n$$

является монотонной $\Leftrightarrow$ $C_m \geq 0 \quad \forall m$

Проверим все известные нам ~~[illegible]~~ 2-х слойные явные схемы

<u>Схема 1, разность вперёд</u>

$$u_j^{n+1} = u_j^n - r(u_{j+1}^n - u_j^n) = (1+r)u_j^n - r u_{j+1}^n$$

при $r>0$ $(-r)<0$ $\Rightarrow$ схема <u>не</u> монотонна

<u>Схема 2, разность назад</u>

$$u_j^{n+1} = u_j^n - r(u_j^n - u_{j-1}^n) = u_j^n(1-r) + r u_{j-1}^n$$

Схема монот $\Leftrightarrow$ $(1-r) \geq 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{r \leq 1}$

<u>Схема 3, симметр. по пр-ву</u>

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{r}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = u_j^n \overset{<0}{-\frac{r}{2}} u_{j+1}^n + \frac{r}{2} u_{j-1}^n$$

$\Rightarrow$ не монот

Схема Лакса

$$u_j^{n+1} = u_{j+1}^n \left(\frac{1-r}{2}\right) + u_{j-1}^n \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2}\right)$$

Монот $\leftrightarrow$ $(1-r) \geqslant 0$ $\leftrightarrow$ $\boxed{r \leq 1}$

Схема с искусств. вязкостью.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{r}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + Cr\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) =$$

$$= u_j^n \underbrace{(1 + 2Cr)}_{>0} + u_{j+1}^n \left(Cr - \frac{r}{2}\right) + u_{j-1}^n \underbrace{\left(\frac{r}{2} + Cr\right)}_{>0}$$

Монот $\leftrightarrow$ $Cr - \frac{r}{2} \geqslant 0$

$$\boxed{C \geqslant \frac{1}{2}}$$

Получается, если $(r<1)$ фиксир, то:

$$\left\{ \frac{r}{2} < \frac{1}{2} < \frac{1}{2r} \right\}$$

при $C \in \left[\frac{r}{2}; \frac{1}{2r}\right]$ схема устойчива,

но монотонна при $C \geqslant \frac{1}{2}$

(А мы знаем, что при $C = \frac{1}{2r}$ это схема Лакса,

а при $C = \frac{1}{2}$ это схема Годунова),

Дома: докажите эти утверждения

Запрет Годунова

Среди явных 2х слойных по времени линейных р. схем, аппроксим. линейное ур. переноса не $\exists$ схем повышенного порядка аппроксимации (т.е. порядка выше 1го)