Решение СЛАУ

1. Векторные нормы в $\mathbb{R}^n$

$\|x\|_\infty = \max\limits_i |x_i|$ — равномерная норма

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ — евклидова норма

$\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ — гёльдерова

$\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ — октаэдрическая

2. Опр.

Функция $\|A\|$, которая каждой матрице $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие число по правилу

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

наз-ся нормой матрицы A, подчиненной векторной норме $\|x\|$

(Есть нормы матричные, которые не подчинены никакой векторной)

- $\|A\|_\infty = \max\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ максимум суммы по строке
- $\|A\|_1 = \max\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ суммир-е идёт по столбцу

Докажем ф-лу для $\|A\|_\infty$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}; \quad Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \quad \text{при} \quad i = \overline{1, n}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{x \neq 0} \frac{\max |Ax|_i}{\max\limits_i |x_i|} = \max_{x \neq 0} \frac{\max\limits_{1 \le i \le n} \left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right|}{\max\limits_i |x_i|} \le$$

$$\le \max_{x \neq 0} \frac{\max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j|}{\max\limits_i |x_i|} \le \left\{\begin{matrix} \text{ограничим} \\ \text{каждый } |x_j| \\ \max\limits_i |x_i| \end{matrix}\right\} \le \max_{x \neq 0} \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \text{от } x \text{ не} \\ \text{завис.} \end{matrix}\right\} = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Теперь надо $\|A\|_\infty$ ограничить снизу этим же числом

Возьмём $i^* \mid \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum\limits_{j=1}^n |a_{i^*j}|$

Обозначение: $i^* = \operatorname{argmax} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$

$$\|A\|_\infty = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \geq \left\{ \begin{array}{l} \max\limits_x f(x) \text{ всегда} \\ \text{больше либо} = \\ f(x^*) \text{ при фиксир} \\ x^* \text{ из } X \end{array} \right\} \geq \frac{\|Ax^*\|_\infty}{\|x^*\|_\infty} =$$

$$= \frac{\max\limits_{1\leq i\leq n} \left|\sum\limits_{j=1}^n a_{ij} x_j^*\right|}{\max\limits_{1\leq i\leq n} |x_j^*|} = \left\{ \begin{array}{l} \text{будем считать, что} \\ x_i^* \text{ состоит из} \\ \pm 1 \text{ и } 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \max_{1\leq i\leq n} \left|\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^*\right| \geq \left\{ \begin{array}{l} \cancel{\text{[illegible]}} \\ \cancel{\text{[illegible]}} \\ \max \text{ по } i \text{ от } 1 \text{ до } n \\ \text{огранич. снизу} \\ \text{функцией при } i = i^* \end{array} \right\} \geq$$

$$\geq \left|\sum_{j=1}^n a_{i^*j} x_j^*\right| = \left\{ \begin{array}{l} \text{Выберем } x_j^* \mid a_{i^*j} x_j^* = |a_{i^*j}| \\ x_j^* = \operatorname{sgn}(a_{i^*j}) \end{array} \right\}$$

$$= \left|\sum_{j=1}^n |a_{i^*j}|\right| = \sum_{j=1}^n |a_{i^*j}| = \left\{ \begin{array}{l} \text{вспоминаем, что} \\ \text{такое } i^* \end{array} \right\} =$$

$$= \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| .$$

т.о. $\|A\|_\infty \geq \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$ и $\|A\|_\infty \leq \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$

$$\Rightarrow \boxed{\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|}$$

Задача 1

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Вычислить $\|A\|_1$ и $\|A\|_\infty$

Решение: $\|A\|_1 = \max\big((4+2+1), (2+4+1), (1+1+4)\big) = 7$

$\|A\|_\infty = \max\big((4+2+1), (2+4+1), (1+1+4)\big) = 7$

$\boxed{\text{Дом:}}$ Вычислить $\|A\|_1$ и $\|A\|_\infty$ для:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 7 \\ 16 & 5 & 2 & 24 \end{pmatrix}$$

Решение СЛАУ

Хотим найти решение системы $Ax = y$

- Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+10^{-4} \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Решение: $x = (2, 0)$

- Пусть теперь $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+10^{-4} \end{pmatrix}$, но $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-4} \end{pmatrix}$ маааленькая ошибочка

Решаем, получаем $x = (1, 1)$

(?) Почему такое огромное отличие?

Есть оценка, что если x - решение системы $Ax = f$ и $(x + \delta x)$: решение $A(x + \delta x) = f + \delta f$, то:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\delta f\|}{\|f\|}$$

$\nu(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$ - число обусловленности матрицы A

Посчитаем $\nu_1(A)$ и $\nu_2(A)$ при $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+10^{-4} \end{pmatrix}$

Если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то $A^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

то $A^{-1} = \frac{1}{10^{-4}}\begin{pmatrix} 1+10^{-4} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\|A\|_1 = 2+10^{-4}$ $\quad \|A^{-1}\|_1 = 10^4 \cdot (2+10^{-4}) \Rightarrow \nu_1(A) \approx 4 \cdot 10^4$

$\|A\|_\infty = 2+10^{-4}$ $\quad \|A^{-1}\|_\infty = 10^4 (2+10^{-4}) \Rightarrow \nu_\infty(A) \approx 4 \cdot 10^4$

Что это дает? Смотрим оценку

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \nu(A) \cdot \frac{\|\delta f\|}{\|f\|}$$

У нас $\|\delta f\|_\infty = 10^{-4}$; $\|f\|_\infty = 2$; $\nu_\infty(A) \approx 4 \cdot 10^4$

$$\Rightarrow \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq 2$$

т.е. $\|\delta x\|$ может быть того же порядка, что и $\|x\|$!

(?) Какое отклонение от f мы можем себе позволить, чтобы $\|\delta x\|$ было в 100 раз меньше, чем $\|x\|$?

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \nu(A) \cdot \frac{\|\delta f\|}{\|f\|} \approx 2 \cdot 10^4 \|\delta f\| \leq \frac{1}{100} \quad \text{при } \|\delta f\| \leq \frac{1}{2 \cdot 10^6}$$

Отметим, что $\nu(\alpha A) = \nu(A)$

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

т.е. определитель умножаем на константу и делаем каким хотим, а обусловленность при умножении не меняется: была плохой — плохой и останется.

Вывод: малость определителя не характеризует „плохость“ матрицы

Теория • Для симметричной матрицы A (т.е. $A = A^T$)

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max|\lambda(A)|$$

$\lambda(A)$ — собственные числа матрицы, т.е. такие λ, для которых $\exists x$, что $Ax = \lambda x$.

• Для любой матрицы

$$\lambda(A^m) = \lambda^m(A); \quad \lambda(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda(A)}$$

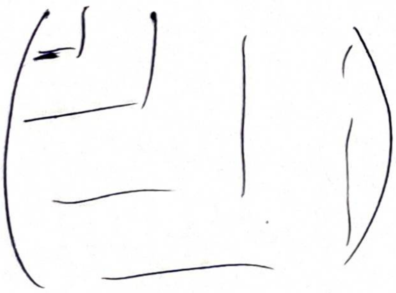
$\Rightarrow$ можно доказать, что для симметричной матрицы

$$\nu_2(A) = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2 = \frac{\max|\lambda(A)|}{\min|\lambda(A)|}$$

• $A > 0$ (матр. положительно определена), если

$\forall x \neq 0 \quad (Ax, x) > 0$

Есть критерий Сильвестра положит. опр. матр. для симметр. матриц!
Если $A = A^T$, то $A > 0 \Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$, где



Δ_k — определитель матрицы, составленной из „уголка" матрицы A размера k на k

$\boxed{\text{Домз}}$ • Доказать, что $A > 0 \Leftrightarrow A + A^T > 0$ (по определению)

Задача 2 Исследовать на полож. опред. матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Смотрим: $Ax = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 10x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$(Ax, x) = x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$?

Если >0 — надо док-ть, если нет, то надо найти $x_1, x_2 \mid (Ax, x) < 0$.

Пусть $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (Ax, x) = -8 < 0 \Rightarrow A$ не полож. опред.

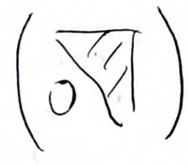
Или используя ДЗ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \quad A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 2 > 0$
$\Delta_2 = 4 - 100 < 0$ $\Rightarrow$ не полож. опред.

Когда легко решить $Ax = f$?

Пусть каким-то образом нашли разложение

$A = LU$, где L:  , U: 

тогда $Ax = f$ $(LUx = f)$ сводится к:
- $Ly = f$
- $Ux = y$

} Обе эти системы решаются легко

Пример: $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = LU$$

Решить $Ax = f$ при $f = (1, 1)^T$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x}_{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Из б): $y_1 = 1/2$
$y_2 = (1 + y_1) \cdot \frac{2}{3} = 1$

Из а): $\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2} x_2 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{x_2 = 1; \quad x_1 = 1}$

Теорема Если все главные миноры матрицы A отличны от нуля, то $\exists$ LU разложение

Задача 3 Проверить выполнение условий Теоремы для

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 5 > 0$

$\Delta_2 = 25 - 1 > 0$

$\Delta_3 = 125 + 0 + 0 - 0 - 5 - 5 = 115 > 0.$

$\boxed{\text{Домой}}$ прочитать алгоритм нахождения LU-разложения (стр. 40-43 лекций Сорокина)

Метод Гаусса

стр. 35

(схема единств. деления)

Решаем
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = f_1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n = f_n \end{cases}$$

Шаг 1. Делим 1-ю строку на a_{11}, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{f}_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & f_2 \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & f_n \end{pmatrix}$$

Шаг 2

Умножаем первое ур. на a_{21} и вычитаем из второго

Умножаем первое ур. на a_{n1} и вычитаем из n-го

Получаем
$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{f}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{f}_2 \\ \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{n2} & \dots & \tilde{a}_{nn} & \tilde{f}_n \end{pmatrix}$$

Шаг 3. Делим второе ур. на $\tilde{a}_{22}$ ... и так далее

Чем плох?

- Если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ алгоритм ~~не работает~~!

- Решим $\begin{cases} 10^{-8}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ методом Гаусса

Шаг 1 $\begin{cases} x_1 + 10^8 x_2 = 10^8 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

Шаг 2 $\begin{cases} x_1 + 10^8 x_2 = 10^8 \\ (1-10^8)x_2 = 2-10^8 \end{cases}$

Шаг 3 $\begin{cases} x_1 + 10^8 x_2 = 10^8 \\ x_2 = \dfrac{2-10^8}{1-10^8} \end{cases}$

Если мы округлим, то тогда из первого уравнения

Получим $x_2 \approx 1$, $x_1 \approx 0$, но это не решение системы!! Оно не удовлетворяет $x_1 + x_2 = 2$!

Если решаем аналитически, а не приближенно, получим нормальный ответ.

Посчитаем $\nu_1(A)$:

$A = \begin{pmatrix} 10^{-8} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\|A\|_1 = 2$ $A^{-1} = \dfrac{1}{10^{-8}-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 10^{-8} \end{pmatrix}$

$\|A^{-1}\|_1 = 2 \cdot \dfrac{1}{1-10^{-8}} \Rightarrow \nu_1(A) = \dfrac{4}{1-10^{-8}} \approx 4$

Но в этом алгоритме $U = \begin{pmatrix} 1 & 10^8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, при этом

$\cancel{\quad} = U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -10^8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dfrac{1}{1} \Rightarrow \nu_1(U) = (1+10^8)^2 \approx 10^{16}$

А что если мы в алгоритме поменяем строчки местами в самом начале?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 10^{-8} x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Шаг 1 делать не надо

Шаг 2: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2(1-10^{-8}) = 1 - 2\cdot 10^{-8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = \dfrac{1-2\cdot 10^{-8}}{1-10^{-8}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{1-2\cdot 10^{-8}}{1-10^{-8}} \approx 1 \\ x_1 \approx 1 \end{cases}$$

Тут $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\nu_1(U) = 2 \cdot 2 = 4$

В первом случае обусловленность испортилась ужасно, а во втором практически не изменилась. Поэтому в 1-м случае округления приводят к катастрофич. изменению решения, а во втором не оказывают влияния.

$\Rightarrow$ Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу

Прежде чем исключать очередное неизвестное из ниже расположенных ур-й, в качестве уравнения, с помощью которого будем его исключать, надо выбрать то, в котором коэффициент при этом неизвестном (ведущий элемент <u>максимален по модулю</u>)

Домз Решить систему методом Гаусся и методом Гаусся с выбором главного эл-та по столбу

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\
6x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 12 \\
x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 7
\end{cases}
$$

$$\boxed{(Ax, y) = (x, A^T y)}$$