Линейное ур-е переноса
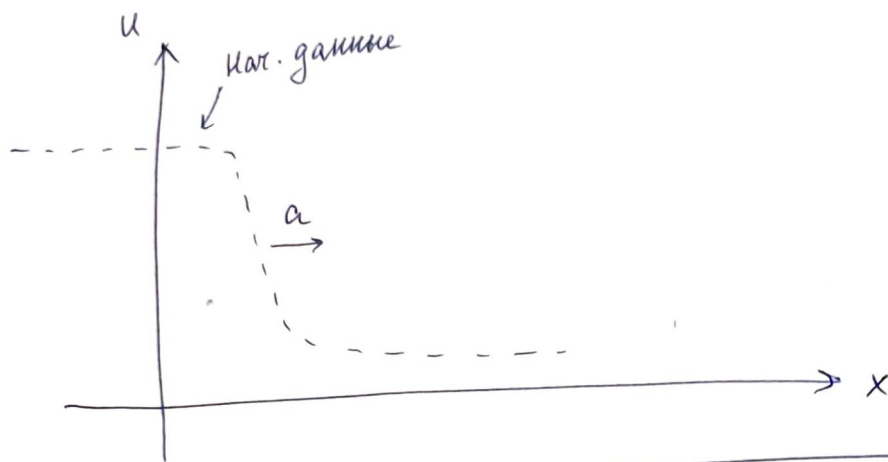
$$u_t + au_x = 0 \qquad u = u(x,t) \qquad (\text{и пусть } a > 0)$$
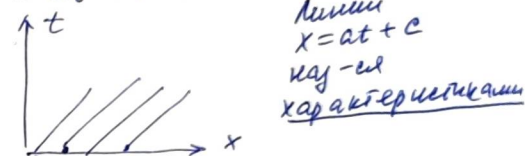
З. Коши: $\quad u(x,0) = v_0(x)$

Точное решение: $\quad u(x,t) = v(x - at)$

На лекциях показано,
что $u = const$
вдоль линий $x = at + c$

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{x=at} = u_t + u_x \cdot x_t =$$

$$= u_t + au_x = 0$$

Линии
$x = at + c$
наз-ся
характеристиками

Схемы для лин. ур. переноса

Шаблон

1) Разность вперёд

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0$$

2) Схема Годунова

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0$$

3) Симметрич. по пр-ву схема

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

4) Схема Лакса – Вендроффа (1960)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\, \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \frac{\tau}{2} a^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$
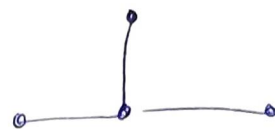
5) Схема с искусств. вязкостью

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\, \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = C\,ah\, \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$
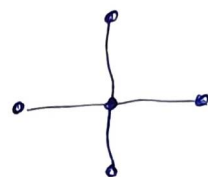
При $C = \frac{1}{2}$ – схема Годунова

При $C = \frac{1}{2r}$ (где $r = \frac{a\tau}{h}$) – схема Лакса

6) Схема крест

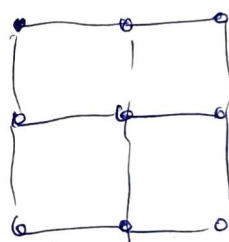$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} + a\, \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

7) Компактная схема 4 пор-ка

$$A_h \circ \Lambda_\tau \circ u + \Lambda_h \circ A_\tau \circ (au) = 0$$
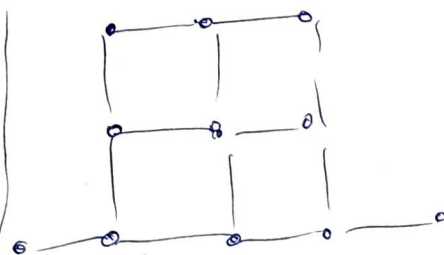
$$\Lambda_\tau = \frac{T^\tau - T^{-\tau}}{2\tau}; \quad A_\tau = \frac{T^\tau + 4E - T^{-\tau}}{6}$$

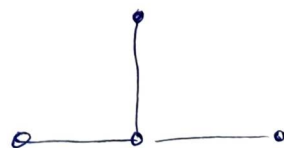$$\Lambda_h = \frac{T_h - T_{-h}}{2h}; \quad A_h = \frac{T_h + 4E - T_{-h}}{6}$$

8) по ней считать нельзя, в неё добавляют искусств. вязкость, получают:

$$\Lambda_h \circ \Lambda_\tau \circ u + \Lambda_h \circ A_\tau \circ (au) = -C\, \frac{h^4}{\tau}\, \underbrace{\Delta_{xx\bar{x}\bar{x}}}_{}\, T^{-\tau} \circ u$$

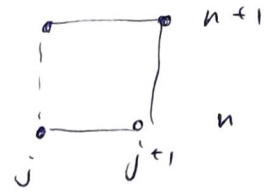оператор, аппрокс. 4-ю произв. по x

9) Схема Лакса

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{\tau} - a\, \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$
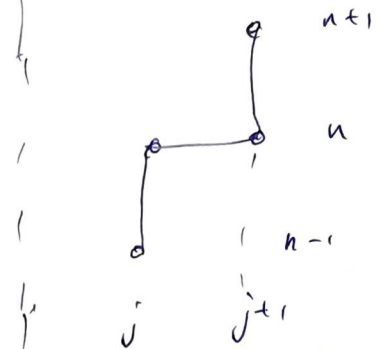
10) Схема „прямоугольник" или „коробочка"

$$u_t + a u_x = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n}}{\tau} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^{n}}{\tau}\right) + \frac{a}{2}\left(\frac{u_{j+1}^{n} - u_j^{n}}{h} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h}\right) = 0$$

11) Схема „Кабаре"

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^{n}}{\tau} + \frac{u_j^{n} - u_j^{n-1}}{\tau}\right) + a\frac{u_{j+1}^{n} - u_j^{n}}{h} = 0$$

12) Неявная схема (2-х сл. по времени)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n}}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0$$

/3/