Трёхточечные разн. схемы

Пример 1

$$\begin{cases} y'(x) - y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Аппроксимируем:
$$\begin{cases} \dfrac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} - y_j = 0 \quad j \geq 1 \quad (2\text{й пор-к}) & (*) \\[2ex] \dfrac{y_{j+1} - y_j}{h} - y_j = 0 \quad j = 0 \quad (1\text{-й пор-к}) & (**) \end{cases}$$

$$+ \boxed{y_0 = 1}$$

(*) перепишем: $y_{j+1} - 2hy_j - y_{j-1} = 0 \quad j \geq 1$

или: $\boxed{y_{j+2} - (2h)y_{j+1} - y_j = 0 \quad j \geq 0}$

Решение ищем в виде $y_j = \lambda^j \ (\lambda \neq 0)$ (~~[illegible]~~)

Получим: $\lambda^2 - (2h)\lambda - 1 = 0$

Корни: $\lambda_1 = h - \sqrt{1+h^2}$; $\lambda_2 = h + \sqrt{1+h^2}$

По λ_1, λ_2 строится ~~общее~~ реш-е:

$(\lambda_1)^j, (\lambda_2)^j$ – линейно-независ. реш-я

$$y_j = \underline{C_1 \cdot (\lambda_1)^j + C_2 \cdot (\lambda_2)^j}$$

Подставляем ~~это~~ в (**) и $y_0 = 1$:

1) (**) это $\dfrac{y_1 - 1}{h} - 1 = 0 \Rightarrow y_1 = 1 + h$

с др. стороны, $y_1 = \boxed{C_1 \cdot \lambda_1 + C_2 \lambda_2 = 1 + h}$

2) $y_0 = \boxed{1 = C_1 + C_2}$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 1+h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 C_1 + \lambda_1 C_2 = \lambda_1 \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 1+h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 C_1 + \lambda_2 C_2 = \lambda_2 \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 1+h \end{cases} \ominus$$

$$C_2(\lambda_2 - \lambda_1) = 1 + h - \lambda_1 = 1 + \sqrt{1+h^2} = d + 1 \qquad C_1(\lambda_2 - \lambda_1) = \lambda_2 - 1 - h$$

$$C_2 = \frac{d+1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{d+1}{2d} \qquad C_1 = \frac{d-1}{2d}$$

т.о. $y_h(x) = C_1 \lambda_1^{x/h} + C_2 \lambda_2^{x/h} = \frac{d-1}{2d}(h-d)^{x/h} + \frac{d+1}{2d}(h+d)^{x/h}$

1) $d = \sqrt{1+h^2} = (1+h^2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot h^2 + O(h^4)$

2) $C_1 = \frac{d-1}{2d} = \frac{\left(\frac{1}{2}h^2 + O(h^4)\right)}{2}\cdot\frac{1}{d} \; (=)$

$\frac{1}{d} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}h^2+O(h^4)\right)} = 1 - \frac{1}{2}h^2 + O(h^4) + O\left(\left(\frac{1}{2}h^2+O(h^4)\right)^2\right)$

$(=)\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}h^2+O(h^4)\right)\left(1-\frac{1}{2}h^2+O(h^4)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}h^2+O(h^4)\right) = \boxed{\frac{1}{4}h^2+O(h^4)}$

3) $C_2 = \frac{d+1}{2d} = \frac{2+\frac{1}{2}h^2+O(h^4)}{2}\left(1-\frac{1}{2}h^2+O(h^4)\right) =$

$= \left(1+\frac{1}{4}h^2+O(h^4)\right)\left(1-\frac{1}{2}h^2+O(h^4)\right) = 1+\frac{1}{4}h^2+O(h^4)-\frac{1}{2}h^2 =$

$= \boxed{1-\frac{h^2}{4}+O(h^4)}$

4) $\lambda_1 = h-d = -1+h-\frac{h^2}{2}+O(h^4)$ $\qquad \lambda_1 < 0$

$\lambda_2 = h+d = 1+h+\frac{h^2}{2}+O(h^4)$ $\qquad \lambda_2 > 0$

5) $\lambda_1^{j} = (-|\lambda_1|)^j = (-1)^j e^{j\ln|\lambda_1|}$

$\lambda_1^{x/h} = (-1)^{x/h} e^{\frac{x}{h}\ln|\lambda_1|} = (-1)^{x/h} e^{\frac{x}{h}\ln\left(1-h+\frac{h^2}{2}+O(h^4)\right)} =$

$= (-1)^{x/h}\cdot e^{\frac{x}{h}\left(-h+\frac{h^2}{2}+O(h^4)-\frac{1}{2}h^2+O(h^3)\right)} = (-1)^{x/h} e^{-x}\cdot e^{O(h^2)} = (-1)^{x/h} e^{-x}\left(1+O(h^2)\right)$

6) $\ln\lambda_2 = \ln\left(1+h+\frac{h^2}{2}+O(h^4)\right) = h+\frac{h^2}{2}-\frac{1}{2}(h^2)-\frac{h^3}{2}+\frac{h^3}{3}+O(h^4) =$

$= h-\frac{h^3}{6}+O(h^4)$

$\frac{x}{h}\ln\lambda_2 = x-\frac{xh^2}{6}+O(h^3)$

$e^{\frac{x}{h}\ln\lambda_2} = e^x\left(1-\frac{xh^2}{6}+O(h^3)\right)$

$y_h = (-1)^{x/h} e^{-x}\left(1+O(h^2)\right)\cdot\left(\frac{1}{4}h^2+O(h^4)\right) + e^x\left(1-\frac{xh^2}{6}+O(h^3)\right)\cdot\left(1-\frac{h^2}{4}+O(h^4)\right) =$

$= e^x + e^x h^2\left(-\frac{1}{4}-\frac{xh}{6}\right) + O(h^2) + O(h^3)$

главный член ошибки: $e^x h^2\left(-\frac{1}{4}-\frac{xh}{6}+(-1)^{x/h}e^{-x}\cdot\frac{1}{4}\right)$

Пример 1 ещё раз подтверждает, что снижение на единицу порядка аппроксимации диф. ур. в граничном узле не приводит к снижению порядка сх-ти разн. реш-я

Пример 2

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Ищем реш-е в виде $y(x) = e^{\lambda x}$:

$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = i(\pm 1)$; $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Общее реш-е: $C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x = y(x)$

$y(0) = C_1 = 0$

$y'(0) = C_2 = 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{y(x) = \sin x}$

Аппроксимируем диф. ур-е симметр. р. схемой 2 пор:

$$\Lambda_h[y_j] = \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + y_j = 0 \qquad j \geq 1$$

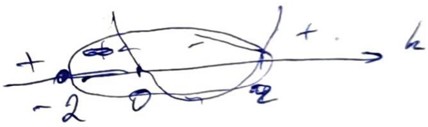
Которое эквив.: $y_{j+2} - (2-h^2)\,y_{j+1} + y_j = 0$ $\boxed{j \geq 0}$ (*)

Гран. условие $y(0)=0$ переходит в $\boxed{y_0 = 0}$

Гран. усл. $y'(0) = 1$ аппрокс-м $\dfrac{y_1 - y_0}{h} = 1 \Rightarrow \boxed{y_1 = y_0 + h = h}$

Решаем (*): $\lambda^2 - (2-h^2)\lambda + 1 = 0$

$D = (2-h^2)^2 - 4 = 4 - 4h^2 + h^4 - 4 = h^4 - 4h^2$



$D < 0$ т.к. $h > 0$ и $h \ll 1$.

т.о. $$\lambda_{1,2} = \frac{(2-h^2) \pm i\sqrt{4h^2 - h^4}}{2} = \left(1 - \frac{h^2}{2}\right) \pm i h \sqrt{1 - h^2/4}$$

т.е. $\lambda = a \pm ib$ при $a = \left(1 - \frac{h^2}{2}\right)$; $b = h\sqrt{1 - h^2/4}$

$$|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2} = \left(1 - \frac{h^2}{2}\right)^2 + h^2\left(1 - \frac{h^2}{4}\right) = 1 - h^2 + \frac{h^4}{4} + h^2 - \frac{h^4}{4} = 1$$

т.о. $a + ib = 1 \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$, при этом

$\cos\alpha = a = \left(1 - \frac{h^2}{2}\right)$; $\sin\alpha = b = h\sqrt{1 - h^2/4}$

т.о. $$\boxed{\alpha = \arccos\left(1 - \frac{h^2}{2}\right)}$$

Общее решение ур-я будет:

$$y_j = C_1 \cdot \cos(j\alpha) + C_2 \cdot \sin(j\alpha)$$

Подставляем $y_0 = 0$: $C_1 = 0$

Подставляем $y_1 = h$: $C_2 \cdot \sin(\alpha) = h \Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{h}{\sin\alpha}}$

$$\Rightarrow \quad y_j = \frac{h}{\sin\alpha} \sin(j\alpha)$$

$$y_h = \frac{h}{\sin\alpha} \sin\left(\frac{x\alpha}{h}\right)$$

Используем:
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

~~Разло~~ Найдём разложение для α, $\sin\alpha$, $\sin\left(\frac{x\alpha}{h}\right)$

1) Знаем: $\cos\alpha = 1 - \frac{h^2}{2}$. При $h \to 0$ $\cos\alpha \to 1 \Rightarrow \alpha \to 0 \Rightarrow$ можем исп-ть разложение для $\cos\alpha$:

$$1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} + O(\alpha^6) = 1 - \frac{h^2}{2} \qquad (**)$$

Ищем разложение для α как $a_0 + a_1 \cdot h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + a_4 h^4 + O(h^5)$, подстав. в $(**)$

$$1 - \frac{1}{2}\Big(a_0^2 + a_1^2 \cdot h^2 + a_2^2 \cdot h^4 + 2a_0a_1h + 2 \cdot a_0a_2h^2 + 2a_0a_3h^3 + 2a_0a_4h^4 + 2a_1a_2h^3 + 2a_1a_3h^4 + O(h^5)\Big) + \frac{1}{24}\Big(a_0^4 + a_1 \cdot h^4 + 4a_0^3a_1h + 4a_0^3a_2h^2 + 4a_0^3a_3h^3 + 4a_0^3a_4h^4 + 4a_1^3h^3 \cancel{\cdot a_2h^2} + 6a_0^2a_1^2h^2 + 6a_0^2a_2^2h^4 + 6a_1^2h^2 \cancel{\cdot a_2^2} h^4\Big) + O(\alpha^6) = 1 - \frac{h^2}{2}$$

Надо было сразу заметить, что $a_0 = 0$, т.к. $\alpha \to 0$ при $h \to 0$

Приравн. коэфф-ты слева и справа при $h^2; h^3, h^4$:

$h^2: \ -\frac{1}{2} \cdot a_1^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 1$

$h^3: \ -\frac{1}{2} \cdot 2 a_1 a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

$h^4: \ -\frac{1}{2}\left(a_2^2 + 2 a_1 a_3\right) + \frac{1}{24} a_1 = 0$

$\cancel{-a_2^2}_{0} + 2 a_1 a_3 + \frac{1}{12} a_1 = 0$, подст. $a_1 = 1$:

$2 a_3 + \frac{1}{12} = 0 \Rightarrow 2 a_3 = -\frac{1}{12} \Rightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{24}}$

т.о. $\boxed{\alpha = h + \frac{h^3}{24} + O(h^4)}$ (видимо дальнейшими выкладками можно показать, что там не $O(h^4)$, а $O(h^5)$)

2) $\sin\alpha = \sin\left(h + \frac{h^3}{24} + O(h^5)\right) = h + \frac{h^3}{24} + O(h^5) - \frac{1}{6}\left(h + \frac{h^3}{24} + O(h^5)\right)^3$
$+ O\left(\left(h + \frac{h^3}{24} + O(h^5)\right)^5\right) = h + \frac{h^3}{24} - \frac{h^3}{6} + O(h^4) = h - \frac{h^3}{8} + O(h^5)$

$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{h}{h + O(h^3)} = \frac{1}{1 + O(h^2)} = \left\{ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + O(x^3) \right\} =$

$= 1 + O(h^2) + O\left(O(h^2)^2\right) = \boxed{1 + O(h^2)}$

3) $\frac{x\alpha}{h} = x + \frac{h^2 x}{24} + O(h^4)$

$\sin\left(\frac{x\alpha}{h}\right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{нельзя просто взять и} \\ \text{подставить в ф. Тейлора} \\ \text{для } \sin y \text{ при } y \to 0, \\ \text{потому что } \frac{x\alpha}{h} \\ \text{\underline{не} стремится к 0 при } h \to 0 \end{array} \right\} = \sin\left(x + \frac{h^2 x}{24} + O(h^4)\right) =$

$= \{\text{сумма синусов}\} = \sin x \cdot \cos\left(\frac{xh^2}{24} + O(h^4)\right) + \cos x \cdot \sin\left(\frac{xh^2}{24} + O(h^4)\right) =$

$= \sin x\left(1 + O(h^4)\right) + \cos x \cdot \left(\frac{xh^2}{24} + O(h^4)\right) = \boxed{\sin x + \frac{xh^2}{24}\cos x + O(h^4)}$

$y_h = \frac{h}{\sin\alpha} \sin\left(\frac{x\alpha}{h}\right) = \left(1 + O(h^2)\right)\left(\sin x + \frac{xh^2}{24}\cos x + O(h^4)\right) =$

$= \sin x + O(h^2)$

Получили второй порядок сх-ти. Главный член ошибки <u>не</u> получили.

Пример 3 Компактная р. схема. $\boxed{\text{4-го порядка}}$

$$\frac{y_{j+1}-y_{j-1}}{2h} - \frac{y_{j+1}+4y_j+y_{j-1}}{6} = 0 \qquad j \geq 1$$

аппрокс.
$$\begin{cases} y'-y=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

Умножаем на $6h$, сдвигаем индекс:

$$\boxed{(3-h)\,y_{j+2} - 4h\,y_{j+1} - (3+h)\,y_j = 0 \qquad j \geq 0} \quad (V)$$

Можем по y_0, y_1 найти все ост. y_j при $j \geq 2$

Граничные условие: $y_0 = 1$

+ нужно доп. условие, чтобы ~~найти~~ замкнуть разностную ~~~~ задачу ~~~~.

Будем так! а) в узле 1: $\frac{y_1-y_0}{h} - y_0 = 0$ аппрокс. с 1 пор.

б) в узле 1: $\frac{y_1-y_0}{h} - \frac{y_1+y_0}{2} = 0$ аппр. со 2 пор

в) в узле 1: $\frac{y_1-y_0}{h} - \frac{8y_1+5y_0-y_2}{12} = 0$ 3 пор.

Решаем (V): $(3-h)\lambda^2 - 4h\lambda - (3+h) = 0$

$$\frac{D}{4} = (2h)^2 + (3-h)(3+h) = 3h^2+9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2h \pm \sqrt{3h^2-9}}{3-h}$$

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{2h-\sqrt{3h^2-9}}{3-h}; \quad \lambda_2 = \frac{2h+\sqrt{3h^2-9}}{3-h}}$$

$$y_j = C_1\cdot\lambda_1^j + C_2\lambda_2^j$$

При $j=0$: $y_0 = \boxed{C_1+C_2=1}$

Как найти C_2? Пусть $y_1 = a = \boxed{C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = a}$

~~~~ $\Rightarrow$ $\boxed{C_1 = \frac{\lambda_2-a}{\lambda_2-\lambda_1}}$; $\boxed{C_2 = \frac{a-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}}$
~~~~

Как найти a?

При а) $y_1 - y_0 - hy_0 = 0 \Rightarrow \boxed{y_1 = 1+h}$

б) $2(y_1 - y_0) + h(y_1 + y_0) = 0 \Rightarrow \boxed{y_1 = \frac{2-h}{2+h} = \frac{1-h/2}{1+h/2}}$

$y_1(2+h) + y_0(h-2) = 0$

в) $\frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{8y_1 + 5y_0 - y_2}{12} = 0$

Но тут есть и y_2! Мы знаем, что ~~y_2~~ $(3-h)y_2 - 4hy_1 = (3+h)$, используем это и решаем систему, находим y_1

$12(y_1 - 1) - h(8y_1 + 5 - y_2) = 0$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} +hy_2 + (12-8h)y_1 = 12+5h & /\cdot(3-h) \\ (3-h)y_2 - 4hy_1 = (3+h) & /\cdot(-h) \end{cases}$$ и ~~...~~ отнимем

$(12-8h)\cdot(3-h)y_1 + 4h^2y_1 = (12+5h)(3-h) - 3h - h^2$

$(36 - 12h - 24h + 8h^2 + 4h^2)y_1 = 36 - 12h + 15h - 5h^2 - 3h - h^2$

~~$(...)y_1 = ...$~~

$(12h^2 - 36h + 36)y_1 = 36 - 6h^2$

$(2h^2 - 6h + 6)y_1 = 6 - h^2$

$\Rightarrow \boxed{y_1 = \frac{6-h^2}{2(h^2 - 3h + 3)}}$

Найдём разложения для λ_1 и λ_2:

1) $\lambda_2 = \frac{2h + \sqrt{3h^2+9}}{3-h} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1-h/3)}\cdot\left(2h + 3\sqrt{1+h^2/3}\right) =$

$\left\{ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + O(x^3);\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + O(x^3) \right\} =$

$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{h}{3} + \frac{h^2}{9} + O(h^3)\right)\left(2h + 3\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{3} - \frac{1}{8}\frac{h^4}{9} + O(h^6)\right)\right) =$

$= \left(\frac{1}{3} + \frac{h}{9} + \frac{h^2}{27} + O(h^3)\right)\left(3 + 2h + \frac{h^2}{2} + O(h^4)\right) = \boxed{1 + h + \frac{h^2}{2} + O(h^3)} =$

$$\lambda_1 = \frac{2h - \sqrt{3h^2+9}}{3-h} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{h}{3}\right)\left(2h - 3\sqrt{1+h^2/3}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{h}{9} + \frac{h^2}{27} + O(h^3)\right) \cdot \left(2h - 3\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h^2}{3} + O(h^4)\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{h}{9} + \frac{h^2}{27} + O(h^3)\right)\left(2h - 3 - \frac{h^2}{2} + O(h^4)\right) =$$

$$= -1 + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{9}\right)h + \left(-\frac{1}{6} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9}\right)h^2 + O(h^3) =$$

$$= \boxed{-1 + \frac{1}{3}h - \frac{h^2}{18} + O(h^3)}$$

Если раскладывать точнее (вдруг понадобится):

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_2 &= 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + O(h^4) \\ \lambda_1 &= -1 + \frac{h}{3} - \frac{h^2}{18} - \frac{1}{54}h^3 + O(h^4) \end{aligned}}$$

2) $\lambda_2 - \lambda_1 = 2 + \frac{2}{3}h + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{18}\right)h^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{54}\right)h^3 + O(h^4) =$

$$= 2 + \frac{2}{3}h + \frac{5}{9}h^2 + \frac{5}{27}h^3 + O(h^4)$$

$$\boxed{\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{1}{3}h + \frac{5}{18}h^2 + \frac{5}{54}h^3}_{y} + O(h^4)} =$$ ~~хотя тут только до $O(h^2)$ нужно будет~~

$$= \cancel{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}h + \frac{5}{18}h^2 + \frac{5}{54}h^3 + O(h^4)\right)} = \frac{1}{2}\Big($$

$$\frac{1}{2}\left(1 - y + y^2 - y^3 + y^4 + O(y^4)\right) = \ldots = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}h - \frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{36\cdot [illegible]}h^3 + O(h^4)}$$

3) т.к. $\lambda_1 < 0$, то $\lambda_1^{x/h} = (-1)^{x/h} \cdot e^{\frac{x}{h}\ln|\lambda_1|}$

$$|\lambda_1| = 1 - \frac{h}{3} + \frac{h^2}{18} + \frac{1}{54}h^3 + O(h^4)$$

$$\ln|\lambda_1| = \ln\left|1 - \frac{h}{3} + \frac{h^2}{18} + \frac{1}{54}h^3 + O(h^4)\right| =$$

$$= -\frac{h}{3} + \frac{h^2}{18} + \frac{1}{54}h^3 + O(h^4) - \frac{1}{2}\left(-\frac{h}{3} + \frac{h^2}{18} + \frac{1}{54}h^3 + O(h^4)\right)^2 + \frac{1}{3}(\ldots)^3 + O((\ )^4)$$

$$\cancel{-\frac{1}{4}(\ldots)} = \ldots = -\frac{1}{3}h + \frac{4}{27\cdot 3!}h^3 + O(h^4)$$

$$\frac{x}{h}\ln|\lambda_1| = -\frac{x}{3} + \frac{4x}{27\cdot 6}h^2 + O(h^3)$$

$$e^{\frac{x}{h}\ln|\lambda_1|} = e^{-\frac{x}{3} + \frac{4x}{27\cdot 6}h^2 + O(h^3)} = \boxed{e^{-\frac{x}{3}}\left(1 + \frac{4x}{27\cdot 6}h^2 + O(h^3)\right)}$$

На самом деле тут не надо было так подробно расписывать, потому что потом это слагаемое в разностном решении пойдёт в $O(h^k)$, но мы же сейчас это не знаем!

4) $\lambda_2 = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + O(h^4)$

$$\ln\lambda_2 = h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + O(h^4) - \frac{1}{2}(\quad)^2 + \frac{1}{3}(\quad)^3 + O(h^4) =$$

$$= h + O(h^4)$$

$$\boxed{e^{\frac{x}{h}\ln\lambda_2} = e^{x + O(h^3)} = e^x\left(1 + O(h^3)\right)}$$

А теперь давайте считать, что мы решаем задачу а) при $y_1 = a = 1 + h$

Тогда $C_1 = \dfrac{\lambda_2 - 1 - h}{\lambda_2 - \lambda_1} = \left(\frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + O(h^4)\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}h - \frac{1}{12}h^2 + O(h^3)\right) =$

$$= \frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{12}h^3 + \frac{1}{12}h^3 + O(h^4) = \boxed{\frac{1}{4}h^2 + O(h^4)}$$

$$C_2 = \frac{a - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \left(2 + \frac{2}{3}h + \frac{h^2}{18} + \frac{1}{54}h^3 + O(h^4)\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}h - \frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{36\cdot}h^3 + O(h^4)\right)$$

$$= \ldots = \boxed{1 - \frac{1}{4}h^2 + O(h^4)}$$

$$O(h^2)$$

$$y_h = C_1\cdot\lambda_1^{x/h} + C_2\lambda_2^{x/h} = \left(\frac{1}{4}h^2 + O(h^4)\right)\cdot(-1)^{x/h}\cdot e^{-x/3}\left(1 + O(h^2)\right) +$$

$$+ \left(1 - \frac{h^2}{4} + O(h^4)\right)\left(1 + O(h^3)\right)e^x = O(h^2) + e^x$$

<u>Второй порядок сходимост</u>

Если бы решали задачу б)!

Согласно лекциям Остапенко

$$a = \frac{1 + h/2}{1 - h/2}; \quad C_1 = -\frac{h^3}{24} + O(h^4); \quad C_2 = 1 + \frac{h^3}{24} + O(h^4)$$

$$y_h(x) = e^x - \frac{h^3}{24}\left((-1)^{x/h} e^{-x/3} - e^x\right) + O(h^4) = e^x + O(h^3)$$

Это ваше Д/З

Получили третий порядок сх-ти

Если бы решали задачу в)!

$$a = \frac{6 - h^2}{2(3 - 3h + h^2)}; \quad C_1 = \frac{h^4}{48} + O(h^5); \quad C_2 = 1 - \frac{h^4}{48} + O(h^5)$$

$$y_h(x) = e^x + \frac{h^4}{720}\left(15(-1)^{x/h} e^{-x/3} + (4x - 15)e^x\right) + O(h^5) =$$

$$= e^x + O(h^4)$$

Использовали в гран. узле р-сх. 1пор => пор. сх-ти 2-й

2пор => пор. сх-ти 3-й

3пор => пор. сх-ти 4-й