Линейные разностные ур-я

Решаем: $\sum\limits_{m=0}^{n} a_m(h)\, y_{j+m} = 0$, a_m не зависит от j

Подставляем вместо $y_j = \lambda^j$, $\lambda \neq 0$

Получим характеристич. ур-е $P_n(\lambda) = \sum\limits_{m=0}^{n} a_m \lambda^m = 0$

Корни этого ур-я задают частные реш-я ур-я.

Случай 1) Если ~~дитератор~~ λ - корень кратности s, то у нас s линейно независимых решений

$$y_j^k = j^k \cdot \lambda^j \qquad k = \overline{0, s-1}$$

В частности, если корень простой ($s=1$), то у нас только одно частное реш-е: λ^k

Случай 2) У нас есть комплексный корень $\mu = \rho e^{i\alpha}$ кратности s. $\Rightarrow$ $\exists$ корень $\bar{\mu} = \rho e^{-i\alpha}$ кратности s

Получаем действительные частные решения:

$$\tilde{y}_j^k = \frac{y_j^k + \bar{y}_j^k}{2} = j^k \rho^j \cos(j\alpha); \qquad \tilde{\tilde{y}}_j^k = \frac{y_j^k - \bar{y}_j^k}{2i} = j^k \rho^j \sin(j\alpha) \qquad k = \overline{0, s-1}$$

Задачи

- $y_{j+3} - 2y_{j+2} - y_{j+1} + 2y_j = 0$

Гран. усл.: $y_0 = 0$
$y_1 = -1$
$y_2 = 2$

$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ $\lambda = 1$ — корень

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 & \lambda - 1 \\ \hline -\lambda^3 - \lambda^2 & \lambda^2 - \lambda - 2 \\ \quad -\lambda^2 - \lambda & \\ \quad -\lambda^2 + \lambda & \\ \qquad -2\lambda + 2 & \end{array}$$

$\lambda_1 = 2$ 2 кр

$\lambda_2 = i + 7$ 1 кр

$y_j = \lambda_1^j \cdot C_1 + \lambda_1^j \cdot j \cdot C_2 +$

$+ C_3 \cdot \cos(j\alpha) + C_4 \sin(j\alpha)$

$i + 7 = \sqrt{8}\left(\frac{i}{\sqrt{8}} + \frac{7}{\sqrt{8}}\right) = \sqrt{8}\, e^{i\alpha}$

$\sin\alpha$ $\cos\alpha$

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$; $D = 9 \Rightarrow \lambda = 2$ и $\lambda = -1$

Получаем: $y_j = C_1 \cdot 1^j + C_2 \cdot 2^j + C_3(-1)^j$

Подставляем гран. усл.:
$$\left.\begin{aligned} y_0 &= C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ y_1 &= C_1 + 2C_2 - C_3 = -1 \\ y_2 &= C_1 + 4C_2 + C_3 = 2 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{cases} C_2 - 2C_3 = -1 \\ 2C_2 + 2C_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow 3C_2 = 2 \quad \boxed{C_2 = \frac{2}{3}} \quad \ldots$$

- $y_{j+3} + y_{j+2} - y_{j+1} - y_j = 0 \Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$y_0 = 1$; $y_1 = y_2 = 0$

$\lambda = 1$ — корень

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ \hline -\lambda^3 - \lambda^2 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 \\ \quad 2\lambda^2 - \lambda & \\ \quad -2\lambda^2 - 2\lambda & \\ \qquad \lambda - 1 & \end{array}$$

$(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = (\lambda + 1)^2 = 0$

(-1) — корень 2й кр.

т.о. $y_j = C_1 \cdot 1^j + C_2 \cdot (-1)^j + C_3(-1)^j \cdot j$

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= C_1 + C_2 + \cancel{C_3} = 1 \\ y_1 &= C_1 - C_2 - C_3 = 0 \\ y_2 &= C_1 + C_2 + 2C_3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 2C_1 - C_3 = 1 \\ 2C_1 + C_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4C_1 = 1 \quad C_1 = \frac{1}{4} \ldots$$

• $y_{j+2} + y_j = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm i$; $i = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 1 \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ – компл. корень кр. 1

<u>Получаем действит. реш-е</u> $C_1\rho \cdot \cos(j\alpha) + C_2\rho\sin(j\alpha) =$

$= C_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}j\right) + C_2\sin\left(\frac{\pi}{2}j\right)$

Дом: 1) $y_{j+4} + 2y_{j+3} - 3y_{j+2} - 4y_{j+1} + 4y_j = 0$

2) $y_{j+4} + 2y_{j+2} + y_j = 0$

3) $y_{j+4} + 5y_{j+3} + 9y_{j+2} + 7y_{j+1} + 2y_j = 0$

$2i + 5 = ?$

$3i + 4 = ?$