Опр 1 Разностный оп-р $\Lambda_h[y]$ с к-м порядком аппроксимир. дифференц. оп-р $F[y]$, если для любых достаточно гладких функций y выполнено: $\Lambda_h[y] = F[y] + O(h^k)$

Опр. 2. Разностная схема $\boxed{\Lambda_h[y]=0}$ с к-м порядком аппр-т диффер. ур-е $\boxed{F[y]=0}$, если для всех достаточно гладких $\boxed{\text{решений}}$ уравнения $F[y]=0$ выполнено: $\Lambda_h[y] = O(h^k)$

Теорема. Если разностный оператор $\Lambda_h[y]$ с к-м порядком аппр-т диф. оп-р $F[y]$, то разностная схема $\boxed{\Lambda_h[y]=0}$ аппр-т ур-е $\boxed{F[y]=0}$ с порядком не ниже к-го

Задача 1 Хотим аппроксимировать диф. ур. $\boxed{y''-g(x)=0}$ со вторым порядком на шаблоне $\{-1, 0, 1\}$:

$$\Lambda_h[y,g] = \boxed{\underbrace{\frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2}}_{\substack{\text{стандартная схема}\\ \text{второго порядка,}\\ \text{аппрокс. 2-ю произв.}}} \underbrace{-g(x)}_{\substack{\text{оставляем как есть,}\\ \infty \text{ порядок аппр-ции}}} = 0}$$

← Получаем такую разностную схему

Найдём главный член ошибки: для этого из предыдущ. семинара мы знаем, что $\frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2} =$

$$= y'' + \frac{h^2}{12}y^{(4)}(x) + O(h^4)$$

$$\Rightarrow \Lambda_h[y,g] = \underbrace{y''(x) - g(x)}_{\text{на решении это } 0} + \frac{h^2}{12}y^{(4)}(x) + O(h^4) = \underbrace{\frac{h^{2}}{12}y^{(4)}(x)}_{\text{главный член ошибки}} + O(h^4)$$

порядок аппр-ции

Задача 2. Построить симм. р. схему, со 2 пор. аппр. следующее диф. ур-е:

$$y''(x) + g'(x) - \varphi(x) = 0$$

Решение: $\boxed{\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + \frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h} - \varphi(x) = 0}$

А что если хотим с 4-м порядком?

а) Смотрим $y''(x)$; $n=2$; $k=4$.

Пусть хотим симметричный шаблон.

Чтобы система решалась однозначно, нужно:

$|M_+|+1 = \frac{n}{2} + \frac{k}{2} = 1+2 = 3 \Rightarrow |M_+| = 2$

Подойдёт шаблон $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$; Система: $\begin{cases} a_0 + 2a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_1 + 4a_2 = 2!/2 \\ a_1 + 2^4 a_2 = 0 \end{cases}$

$+ \ a_{-i} = a_i$

б) Смотрим $g'(x)$: $n=1$, $k=4$

Всё ещё хотим симметр. шаблон; $n = 2\ell - 1 \to \ell = 1$
$k = 2s \to s = 2$

$|M_+|+1 = \ell + s = 3 \Rightarrow |M_+| = 2$

Всё ещё подходит $\{-2, -1, \cancel{0}, 2\}$ (пусть $a_0 = 0$ всегда)

Система: $\begin{cases} b_1 + 2b_2 = 1!/2 \\ b_1 + 2^3 b_2 = 0 \end{cases}$

Потом сложим 2 оператора + $\varphi(x)$ оставим как есть.

Получим схему $\frac{1}{h^2}\left[a_2 y(x+2h) + a_1 y(x+h) + a_0 y(x) + a_1 y(x-h) + a_2 y(x-2h)\right]$

$+ \frac{1}{h}\left[b_1 g(x+h) + b_2 g(x+2h) - b_1 g(x-h) - b_2 g(x-2h)\right]$

$+ \varphi(x) = 0$

Главный член ошибки будет складываться из двух главных членов ошибки y'' и g'

Задача 3 $y''(x) - g(x) = 0$. Хотим аппр-ть с 4-м порядком

(Упрощённая задача 2)

1) $g(x)$ всё так же без изменений

2) $y''(x)$; $n = 2$; $k = 4$ и... это предыдущ. задача, решим!

$$\begin{cases} a_0 + 2a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_1 + 4a_2 = 1 \\ a_1 + 16a_2 = 0 \end{cases} \quad -12a_2 = 1 \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{-1}{12}} \Rightarrow a_1 = -16a_2 \quad \boxed{a_1 = \frac{4}{3}} \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{-5}{2}}$$

Получим р. схему: $\Lambda_h[y,g] = \left[\frac{4}{3}\left(y(x+h) + y(x-h)\right) - \frac{5}{2}y(x) + \left(-\frac{1}{12}\right)\left(y(x+2h) + y(x-2h)\right)\right.$

$- g(x) = 0$

Главный член ошибки: $2 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot 1^6 + \left(-\frac{1}{12}\right) \cdot 2^6\right) \frac{y^{(6)}(x)}{6!} h^4$

Дома: 1) аппр-ть диф. ур-е $\boxed{y'(x) - g(x) = 0}$ со 2-м порядком на шаблоне $M = \{0, 1, 2\}$

2) Построить симметр. р. схему, со 2-м пор-м аппр. диф. ур:

а) ~~$y'''(x) + g''(x) + g(x) = 0$~~

б) $y^{(4)}(x) + g'(x) = 0$

Повышение порядка аппроксимации за счёт дифференциальных следствий.

Известно, что если у вас разностная схема $\Lambda_h[y(x)]=0$ аппроксимирует диф. ур-е $F[y]=0$ с k-м порядком и если вы в разностной схеме „сдвинете" x вправо/влево (замените x на $x \pm \Delta$), то порядок аппроксимации разностной схемой диффер. ур-я $\boxed{\text{не изменится}}$ (а вот порядок аппроксимации разностным оператором дифф. оп-р $\boxed{\text{изменится}}$).

Пример: смотрим Задачу 3. Порядок аппроксимации четвёртый. „Испортим" разностную схему:

$$\Omega_h[y,g] = \frac{1}{h^2}\left[\frac{4}{3}\left(y(x+2h)+y(x)\right) - \frac{5}{2}y(x+h) - \frac{1}{12}\left(y(x+3h)+y(x-h)\right)\right] - g(x+h).$$

Раскроем по ф. Тейлора в окр-ти (.) x:

$$\Omega_h = \frac{1}{h^2}\left[h^2 y'' + h^3 y''' + \frac{h^4}{2}y^{(4)} + \frac{h^5}{6}y^{(5)} + O(h^6)\right] - g - hg' - \frac{h^2}{2}g'' - \frac{h^3}{6}g''' = (y''-g) + h(y'''-g') + \frac{h^2}{2}(y^{(4)}-g'') + \frac{h^3}{6}(y^{(5)}-g''') + O(h^4)$$

Разностный опер-р аппр-т диф. опр с первым порядком.

А что происходит на решении?

Если $y'' - g = 0$, то $\left.\begin{aligned} y''' - g' &= 0 \\ y^{(4)} - g'' &= 0 \\ y^{(5)} - g''' &= 0 \end{aligned}\right\} \leftarrow$ это дифференциальные следствия

Получаем на решении $\Omega_h = O(h^4)$!

Всё как по теории!!

Ещё задача: $y'(x) - g(x) = 0$.

Хорошая схема: $\dfrac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} - g(x) = 0$ (2-й пор-к)

„Испорченная схема": $\dfrac{y(x+2h) - y(x)}{2h} - g(x+h) = 0$

$$\Omega_h = \frac{y + 2hy' + \frac{4h^2}{2}y'' + \frac{8h^3}{6}y''' + O(h^4) - y}{2h} - g - hg' - \frac{h^2}{2}g'' + O(h^3) =$$

$$= F[y] + h(y'' - g') + \frac{2}{3}h^2 y''' - \frac{h^2}{2}g'' + O(h^3) =$$

$\{$ т.к. $y' = g$, то $y'' = g'$, $y''' = g''$ $\}$ =

$$= 0 + 0 + h^2 y''' \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + O(h^3) = O(h^2)$$ – второй пор-к на решении

Дома: Проверить это св-во для $y''(x) - g(x) = 0$

при $\Omega_h = \dfrac{y(x) - 2y(x-h) + y(x-2h)}{h^2} - \dfrac{g(x-2h) + g(x)}{2} = 0$

(при этом проверить, с каким пор-м $\boxed{\Lambda_h = 0}$ при

$\Lambda_h = \dfrac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + \dfrac{g(x+h) + g(x-h)}{2}$ аппр-т дифф. ур. $y'' - g = 0$)

Выписать главный член ошибки