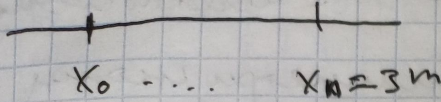
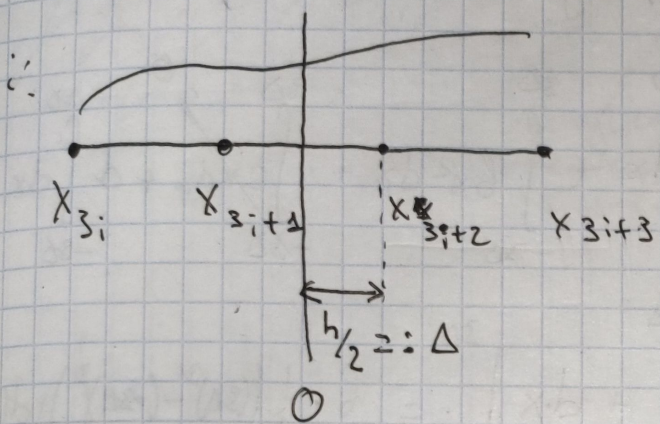
„Кубическое Интегрирование"

m-интервал длины $3h$





$$J_i = \int_{x_{3i}}^{x_{3i+3}} f(x)\,dx \to \int_{-3\Delta}^{3\Delta} f(x)\,dx$$

$$S_i = \int_{x_{3i}}^{x_{3i+3}} P_3(x)\,dx \to \int_{-3\Delta}^{3\Delta} P_3(x)\,dx$$

$$P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$P_3(\Delta) = f(\Delta) = f_1$$
$$P_3(-\Delta) = f(-\Delta) = f_{-1}$$
$$P_3(3\Delta) = f(3\Delta) = f_3$$
$$P_3(-3\Delta) = f(-3\Delta) = f_{-3}$$

$$\begin{cases} 1)\; a\Delta^3 + b\Delta^2 + c\Delta + d = f_1 \\ 2)\; -a\Delta^3 + b\Delta^2 - c\Delta + d = f_{-1} \\ 3)\; 27\Delta^3 + 9b\Delta^2 + 3c\Delta + d = f_3 \\ 4)\; -27\Delta^3 + 9b\Delta^2 - 3c\Delta + d = f_{-3} \end{cases}$$

$① + ② \to !\; 2b\Delta^2 + 2d = f_1 + f_{-1}$

$③ + ④ \to !\; 18b\Delta^2 + 2d = f_3 + f_{-3}$

$\Downarrow$

$$16b\Delta^2 = f_3 + f_{-3} - f_1 - f_{-1}$$

$$b = \frac{f_3 + f_{-3} - f_1 - f_{-1}}{16\Delta^2}$$

$$d = \frac{f_1 + f_{-1} - 2b\Delta^2}{2} = \frac{f_1 + f_{-1} - 2\frac{f_3 + f_{-3} - f_1 - f_{-1}}{16\Delta^2}\Delta^2}{2} =$$

$$= \frac{f_1 + f_{-1} - \frac{f_3 + f_{-3} - f_1 - f_{-1}}{8}}{2} = \frac{8f_1 + 8f_{-1} - f_3 - f_{-3} + f_1 + f_{-1}}{16} =$$

$$= \frac{9f_1 + 9f_{-1} - f_3 - f_{-3}}{16}$$

// Коэффициенты a и c нах-ся при x с нечетн. степенью,
// что при интегрировании по симметричному
// отрезку (относительно нуля) дает ноль(?)

$$\int_{-3\Delta}^{3\Delta} [ax^3 + bx^2 + cx + d]\,dx = \underbrace{\cancel{\int_{-3\Delta}^{3\Delta} ax^3 dx}}_{0} + \int_{-3\Delta}^{3\Delta} bx^2 dx + \underbrace{\cancel{\int_{-3\Delta}^{3\Delta} cx\,dx}}_{0} + d\int_{-3\Delta}^{3\Delta} dx =$$

$$= \int_{-3\Delta}^{3\Delta} bx^2 dx + d\int_{-3\Delta}^{3\Delta} dx = b\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-3\Delta}^{3\Delta} + d\cdot x\Bigg|_{-3\Delta}^{3\Delta} = b\cdot\frac{1}{3}\left((3\Delta)^3 - (-3\Delta)^3\right) + d(3\Delta + 3\Delta)$$

$$= \frac{b}{3}\left[27\Delta^3 + 27\Delta^3\right] + d\cdot 6\Delta \overset{\text{подставляем}}{=\!=}$$

$$= \frac{f_3 + f_{-3} - f_1 - f_{-1}}{3\cdot 16\Delta^2}\cdot 2\cdot 27\Delta^3 + \frac{9f_1 + 9f_{-1} - f_3 - f_{-3}}{16}\cdot 6\Delta =$$

$$= \frac{f_3 + f_{-3} - f_1 - f_{-1}}{8}\,9\Delta + \frac{9f_1 + 9f_{-1} - f_3 - f_{-3}}{8}\,3\Delta =$$

$$= \frac{[3f_3 + 3f_{-3} - 3f_1 - 3f_{-1}]\cdot 3\Delta + [9f_1 + 9f_{-1} - f_3 - f_{-3}]\,3\Delta}{8} =$$

$$= \frac{3\Delta[3f_3 + 3f_{-3} - 3f_1 - 3f_{-1} + 9f_1 + 9f_{-1} - f_3 - f_{-3}]}{8} =$$

$$= \frac{3\Delta[2f_3+2f_{-3}+6\cdot f_1+6\cdot f_{-1}]}{8} = \frac{[6f_3+6f_{-3}+18f_1+18f_{-1}]\Delta}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_i = \frac{[6f_3+6f_{-3}+18f_1+18f_{-1}]}{8}\cdot\frac{h}{2}$$

В ряд МакЛорена:

$$\cancel{f_{-3}+f_{-1}+f_1+f_3 = 4f_0+4f_0''}$$

~~пропускаем нечетные степени, т.к. при интегрировании~~ $\to 0$

$$f_{-3} = f_0 + f_0'\cdot\left(-\frac{3h}{2}\right) + f_0''\cdot\left(-\frac{3h}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + f_0'''\cdot\left(-\frac{3h}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3!} + \ldots + O(h^8)$$

$$f_3 = f_0 + f_0'\cdot\frac{3h}{2} + f_0''\cdot\left(\frac{3h}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + f_0'''\cdot\left(\frac{3h}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3!} + \ldots + O(h^8)$$

$$f_{-1} = f_0 + f_0'\cdot\left(-\frac{h}{2}\right) + f_0''\cdot\left(-\frac{h}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + f_0'''\cdot\left(-\frac{h}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3!} + \ldots + O(h^8)$$

$$f_1 = f_0 + f_0'\cdot\left(\frac{h}{2}\right) + f_0''\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + f_0'''\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3!} + \ldots + O(h^8)$$

$$f_{-3} + f_3 + 3f_{-1} + 3f_1 = 8f_0 + 3f_0''\left(\frac{h}{2}\right)^2 + f_0''\left(\frac{3h}{2}\right)^2 + 2f_0^{(IV)}\left(\frac{3h}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{4!} +$$

$$+ 2f_0^{(IV)}\left(\frac{h}{2}\right)^4\cdot\frac{3}{4!} + 2f_0^{(VI)}\left(\frac{3h}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{6!} + 2f_0^{(VI)}\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^6\cdot\frac{3}{6!} + O(h^8)$$

2

$$J := \int_{-\frac{3h}{2}}^{\frac{3h}{2}} \Big[f_0 + f'(0)\,x + f''(0)\cdot\frac{x^2}{2} + f'''(0)\,\frac{x^3}{6} + f_0^{IV}\,\frac{x^4}{4!} +$$

$$+ f_0^{V}\,\frac{x^5}{5!} + f_0^{VI}\,\frac{x^6}{6!} + f_0^{VII}\,\frac{x^7}{7!} + O(x^8) \Big]\,dx =$$

$$= f_0 x \Big|_{-\frac{3h}{2}}^{\frac{3h}{2}} + 0 + f_0''\cdot\frac{1}{2!\cdot 3}\cdot x^3 \Big|_{-\frac{3h}{2}}^{\frac{3h}{2}} + 0 + f_0^{IV}\cdot\frac{1}{4!\cdot 5}\cdot x^5 \Big|_{-\frac{3h}{2}}^{\frac{3h}{2}} +$$

симметрич
ср-ят ∫ на
симм. участке

$$+ 0 + f_0^{VI}\cdot\frac{1}{6!\cdot 7}\cdot x^7 \Big|_{-\frac{3h}{2}}^{\frac{3h}{2}} + 0 + O(h^8)$$

$$= 3 f_0 h + \frac{9}{8} f_0'' h^3 + \frac{81 h^5}{640}\cdot f_0^{IV} + \frac{243}{35840}\cdot f_0^{VI}\cdot h^7 + O(h^8)$$

$\cancel{S_i - \frac{1}{2} \cdot ... = 8 f_0}$

Приведу к нормальному виду!

$$S_1 = \frac{6 \cdot h}{8 \cdot 2}\left[f_{-3} + f_3 + 3f_{-1} + 3f_1\right] =$$

$$= \frac{6h}{16}\left[8 f_0 + 12 f_0'' \frac{h^2}{4} + \frac{7}{16} f_0^{IV} h^4 + \frac{61}{1920} f_0^{VI} h^6 + O(h^8)\right] =$$

$$= \frac{3h}{8}\left[- // - \right] =$$

$$= 3 f_0 h + \frac{9}{8} f_0'' h^3 + \frac{21}{128} f_0^{IV} h^5 + \frac{61}{5120} f_0^{VI} h^7 + O(h^9) = ?$$

$$\Rightarrow \left|S_i - J_i\right| = \left|\frac{24}{640} f_0^{IV} h^5 + \frac{184}{35840} f_0^{VI} h^7 + O(h^9)\right| =$$

$$= \left|\frac{3}{80} f_0^{IV} h^5 + \frac{23}{4480} f_0^{VI} h^7 + O(h^9)\right| \Rightarrow$$ Ошибка в общем виде:

$$\frac{\left(\frac{3}{80}h\right)^5 \cdot f^{IV}(0)}{1} + O(h^7) =$$

$$= \frac{(3h)^5 \cdot f^{IV}(0)}{3{,}2768 \cdot 10^9} + O(h^7)$$

$$\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{M_4 h^5 \cdot 3^5}{80^5} + O(h^7)\right) =$$

$$= m \cdot \left(\frac{M_4 h^5 \cdot 3^5}{80^5} + O(h^7)\right) = \left[m = \frac{n}{3} = \frac{b-a}{3h}\right] =$$

$$= \frac{M_4 \cdot h^5 \cdot 3^5}{80^5} \cdot \frac{(b-a)}{3 \cdot h} + O(h^6) = \frac{M_4 \cdot h^4 \cdot 3^4 \cdot (b-a)}{80^5} + O(h^6)$$

Лучше новая ф-ла, т.к. ошибка меньше