Group Theory

NingZhuan

目录

引言：群论与对称性

（待施工）

教材与参考书：

定义 0.1 (对称变换) 保持一个体系不变的变换叫做对称变换。

定义 0.2 (对称性) 一个体系对某种变换保持不变的性质叫做对称性。

第一章　数学准备

（待施工）

1.1　集合论

1.1.1　集合

1.1.2　等价关系与等价类

1.1.3　映射

1.2　抽象代数中结构简介

1.3　线性代数

第二章　群的基本概念

2.1　群的相关概念

定义 2.1 (群) 集合 G 中有二元运算，并且满足如下四条群公理，则称为群：

1. 封闭性：$\forall R, S \in G, \quad RS \in G$
2. 结合律：$\forall R, S, T \in G, \quad R(ST) = (RS)T$
3. 恒元：$\exists E \in G, \forall R \in G, \quad ER = R$
4. 逆元：$\forall R \in G, \exists R^{-1} \in G, \quad R^{-1}R = E$

在群的定义中，对恒元和逆元只要求左乘成立，但其实从此定义出发可以证明，上述性质在右乘时也成立：

性质 2.1 (恒元和逆元的右乘)

- $ER = RE = R$
- $R^{-1}R = RR^{-1} = E$

由此出发可以证明群中恒元和逆元的唯一性：

性质 2.2 (恒元和逆元的唯一性)

- 恒元唯一性：若 $TR = R$，则 $T = E$
- 逆元唯一性：若 $TR = E$，则 $T = R^{-1}$

关于幂运算，还有如下性质

性质 2.3 (幂运算)

- $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$
- $R^m R^n = R^{m+n}$
- $(R^m)^n = R^{mn}$

群中元素与单位元、自己的逆元以及自己的幂都对易，但是其他情况一般不对易。而如果群内任意两元素乘积都可交换，则称该群为**阿贝尔群**，否则称为**非阿贝尔群**。

除了按照二元运算的交换性来分类，群也可以按元素数目来分：群元素的数目有限称为**有限群**，群元素的数目无限称为**无限群**。按元素形式分类：群内元素可数称为**分立群**，不可数（一定是无限群）但是可以用一组连续变换的参数描述，称为**连续群**。下面我们主要讨论有限群。

定义 2.2 (有限群的阶) *有限群的元素数目称为有限群的阶。*

定义 2.3 (群元素的阶) *$\forall R \in G$，总是存在最小的正整数 n，使得 $R^n = E$，则 n 称为群元素的阶。*