Group Theory

NingZhuan

目录

引言：群论与对称性

（待施工）

第一章　数学准备

（待施工）

第二章　群的基本概念

2.1　群的相关概念

定义 2.1 (群) 集合 G 中有二元运算，并且满足如下四条群公理，则称为群：

1. 封闭性：$\forall R, S \in G, \quad RS \in G$
2. 结合律：$\forall R, S, T \in G, \quad R(ST) = (RS)T$
3. 恒元：$\exists E \in G, \forall R \in G, \quad ER = R$
4. 逆元：$\forall R \in G, \exists R^{-1} \in G, \quad R^{-1}R = E$

在群的定义中，对恒元和逆元只要求左乘成立，但其实从此定义出发可以证明，上述性质在右乘时也成立：

性质 2.1 (恒元和逆元的右乘)

- $ER = RE = R$
- $R^{-1}R = RR^{-1} = E$

由此出发可以证明群中恒元和逆元的唯一性：

性质 2.2 (恒元和逆元的唯一性)

- 恒元唯一性：若 $TR = R$，则 $T = E$
- 逆元唯一性：若 $TR = E$，则 $T = R^{-1}$

关于幂运算，还有如下性质

性质 2.3 (幂运算)

- $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$
- $R^m R^n = R^{m+n}$
- $(R^m)^n = R^{mn}$