جداسازی کور منابع

گزاش کار تمرین کامپیوتری اول

استاد اخوان

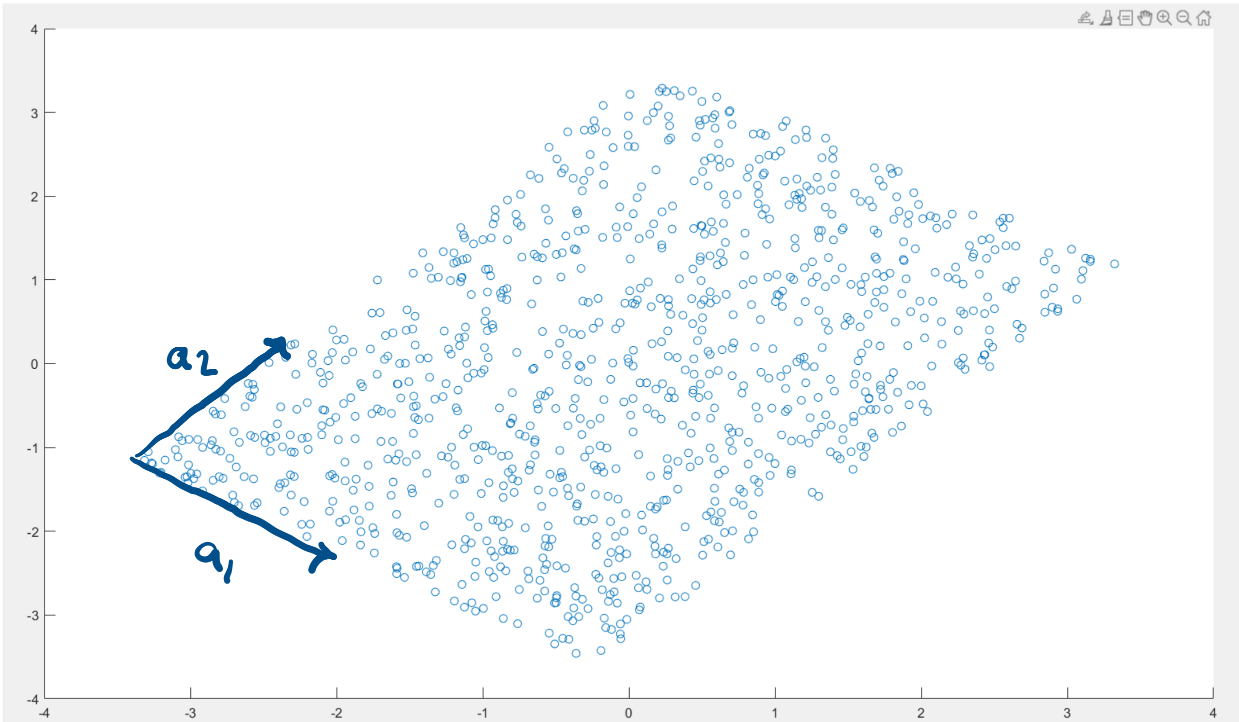
فاطمه جلیلی

شماره دانشجویی : 810199398

تاریخ تحویل : 1401/12/10

<u>**بخش اول :**</u>

سوال 1:



می توان نوشت :

$$\underset{=}{X}_{2\times T} = \underbrace{a_1}_{2\times 1} \underbrace{s_1^T}_{1\times T} + \underbrace{a_2}_{2\times 1} s_2^T$$

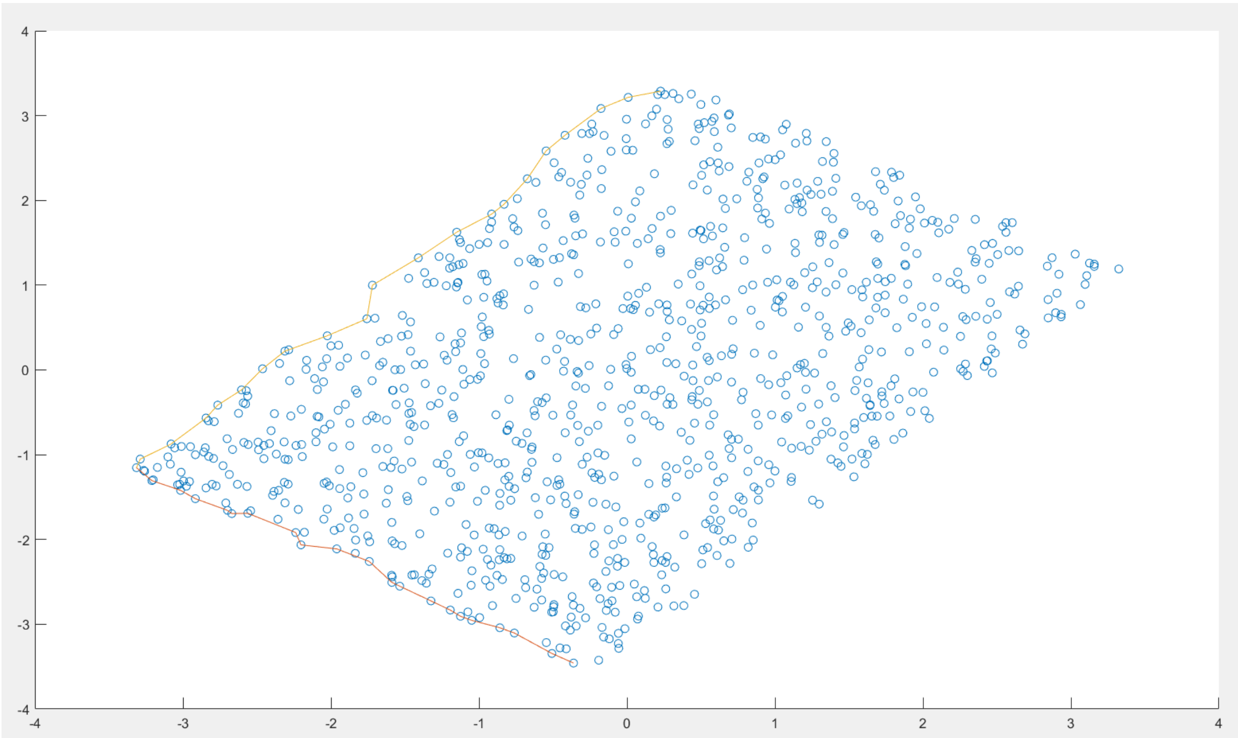
$$\rightarrow a_1 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{bmatrix}$$

که مطابق استدلال فوق نقاط روی scatter plot را می توان بر اساس مجموع ضرایبی از دو بردار a_1, a_2 بیان کرد ، بنابراین مرز های متوازی الاضلاع فوق نشان دهنده بردار های a_1, a_2 هستند .

با استفاده از مورد فوق می توان از روی مرز های scatter plot نسبت درایه های $\frac{a_{11}}{a_{21}}$ و $\frac{a_{12}}{a_{22}}$ را بدست آورد منتها علامت و اندازه ی دقیق مورد ابهام است.

سوال 2 :

مطابق توضیحات فوق با استفاده از تابع boundary نقاط دور تا دور scatter plot را مشخص می کنیم و با استفاده از نقاط گوشه ضلع های پایین و چپ را جدا می کنیم:

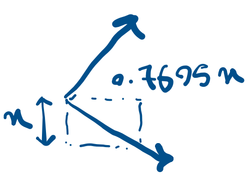


برای بدست آوردن شیب خطوط قرمز و نارنجی که همان $\frac{a_{11}}{a_{21}}$ و $\frac{a_{12}}{a_{22}}$ هستند با استفاده از رگرسیون خطی شیب دقیق خطوط را محاسبه می کنیم و در متغیر های aLoweSide, aLeftside ذخیره می کنیم ، این مقادیر به صورت زیر بدست می آیند:

aLeftSide 1.2997 $= \frac{a_{12}}{a_{22}}$

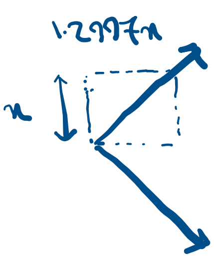
aLowerSide -0.7695 $= \frac{a_{11}}{a_{21}}$

همانطور که گفته شد این نسبت های بدست آمده اطلاعاتی راجب اندازه دقیق و علامت درایه های ماتریس mixture به ما نمی دهند ، با رفع ابهام جایگشت و اندازه به مقدار دقیق ماتریس A می رسیم .



$$\frac{1}{\sqrt{1+0.7695^2}} = 0.793 \quad ; \quad \frac{0.7695}{\sqrt{1+0.7695^2}} = 0.61$$

|a11| or |a21| → ابهام جایگشت

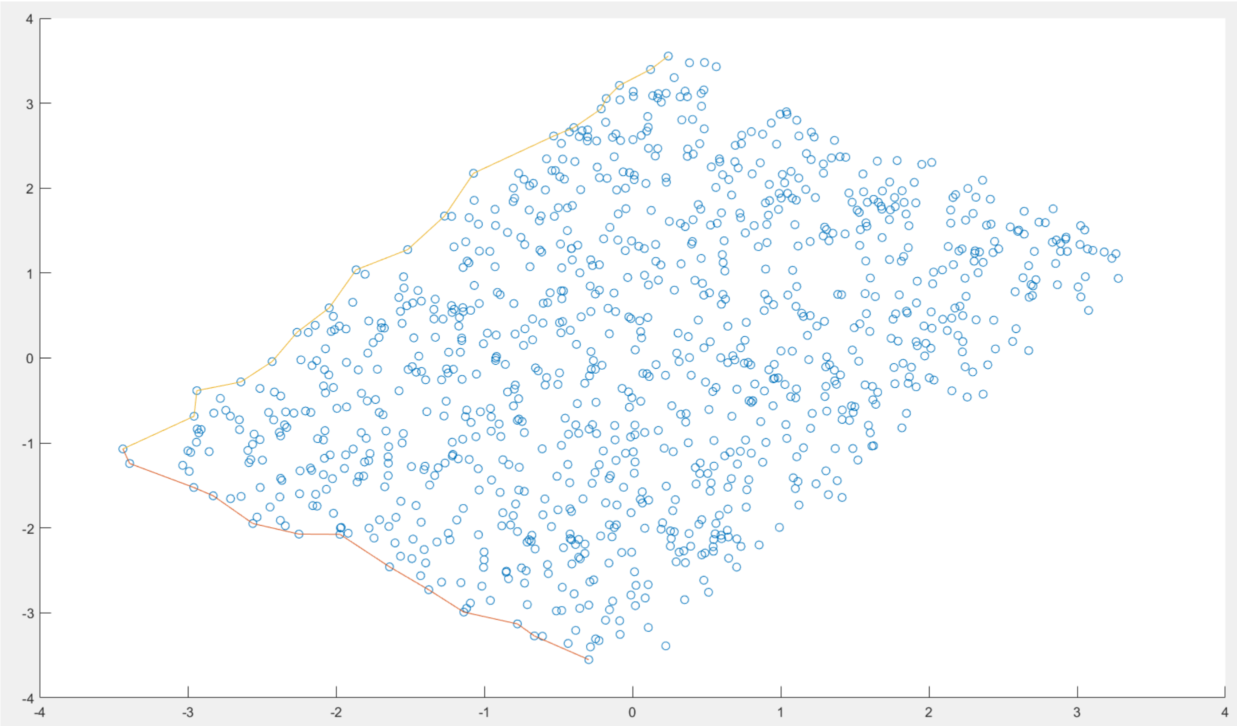


$$\frac{1}{\sqrt{1+1.2997^2}} = 0.61 \quad ; \quad \frac{1.2997}{\sqrt{1+1.2997^2}} = 0.793$$

|a12| or |a22|

سوال 3 :

نویزی با snr = 20 به مشاهدات اضافه می کنیم:



چون در مرحله ی بعدی با رگرسیون داده های مرزی را خطی می کنیم ، نقاط پرت که حاصل نویز هستند تا حد خوبی کم اثر می شوند و لذا این روش عملکرد مناسبی در حضور نویز هم دارد ، شیب مرز پایین و چپ را در متغیر های aLoweSideNoisy , aLeftSideNoisy ذخیره می کنیم:

aLeftSideNoisy 1.2964 $= \left(\dfrac{a_{12}}{a_{22}}\right)_{noisy}$

aLowerSideN... -0.7588 $= \left(\dfrac{a_{11}}{a_{21}}\right)_{noisy}$

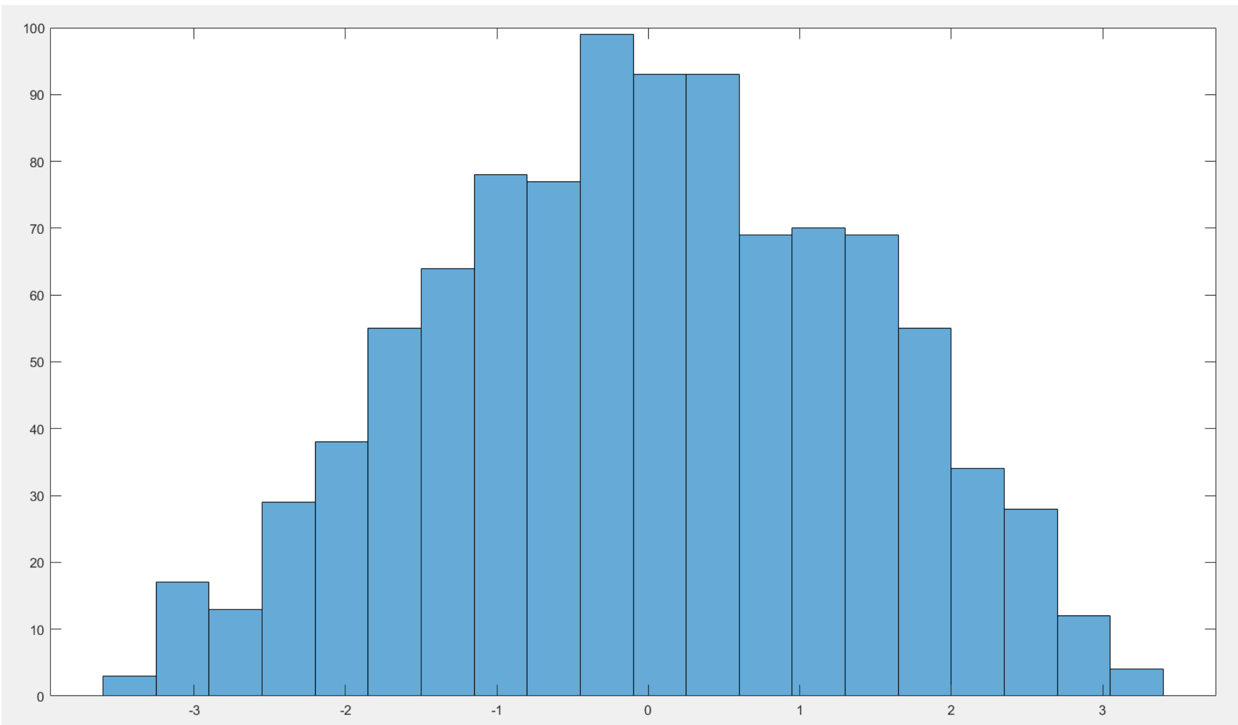
نرمالایز مطابق محاسبات بالا :

$|a_{12}|$ or $|a_{22}| = 0.611$ or 0.792

$|a_{11}|$ or $|a_{21}| = 0.797$ or 0.604

برای اینکه متوجه شویم آیا این روش عملکرد مناسبی در حضور نویز دارد یا نه می توان بردار های مرزی نرمالایز شده پایین و چپ را با بردار های اصلی که صورت سوال با ماتریس mixture به ما داده است ضرب داخلی کرد و میزان تطابق آن ها را بدست آورد (a_1, a_2) ، هر چه زاویه بین این دو کم تر باشد ضرب داخلی به صفر نزدیک تر می شود و در واقع روش مورد نظر تاثیر نویز را تا حد خوبی اصلاح می کند.

سوال 4 :



ثابت می کنیم تابع توزیع مجموع دو متغیر مستقل برابر کانولوشن ضرب تابع توزیع های تک تک آن ها است :

$$P(X+Y \leq t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t-x} f(x,y)\, dy\, dx$$

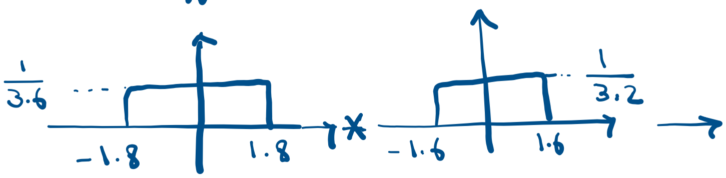
$$\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t-x} f_X(x)\, f_Y(y)\, dy\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \int_{-\infty}^{t-x} f_Y(y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, F_Y(t-x)\, dx$$

$$\xrightarrow{d/dt} f_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \frac{d}{dt} F_Y(t-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(t-x)\, dx = f_X(x) * f_Y(y)$$

پس برای بدست آوردن توزیع x_1 داریم :

$$x_1 = \underbrace{0.6 s_1}_{} + \underbrace{0.8 s_2}_{}$$



$$t < -3.4 \rightarrow 0$$

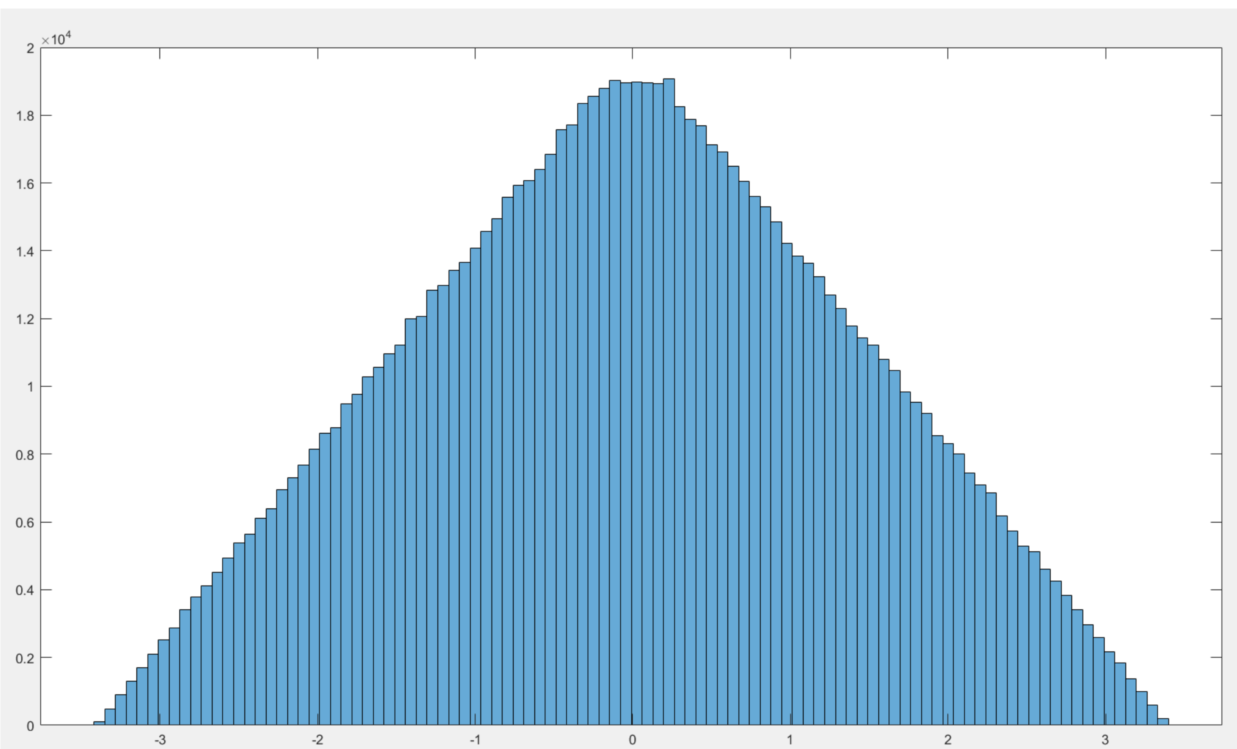
$$-3.4 < t < 0.2 \rightarrow \frac{1}{3.2} \times \frac{1}{3.6} (t + 1.8 + 1.6)$$

$$-0.2 < t < 0.2 \rightarrow \frac{1}{3.2} \times \frac{1}{3.6} \times 3.2 = \frac{1}{3.6}$$

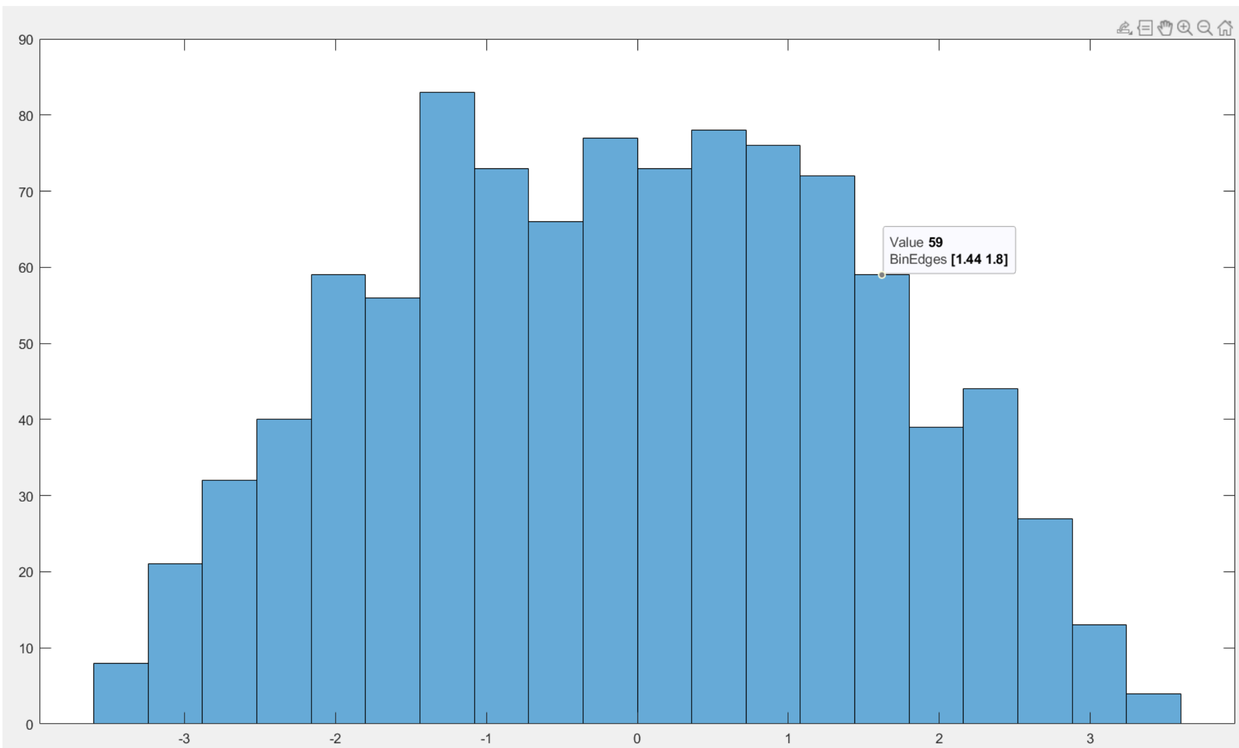
$$0.2 < t < 3.4 \rightarrow \frac{1}{3.2} \times \frac{1}{3.6} (-t + 1.8 + 1.6)$$

$$t > 3.4 \rightarrow 0$$

با زیاد کردن تعداد نمونه ها می بینیم تابع توزیع x_1 مطابق انچه که بدست اوردیم می شود:

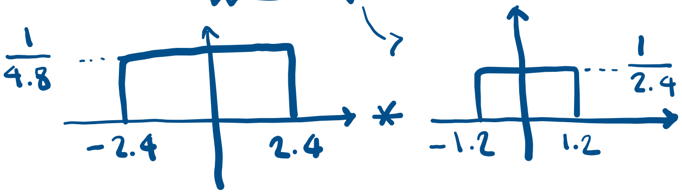


سوال 5:



برای بدست آوردن توزیع x_2 داریم :

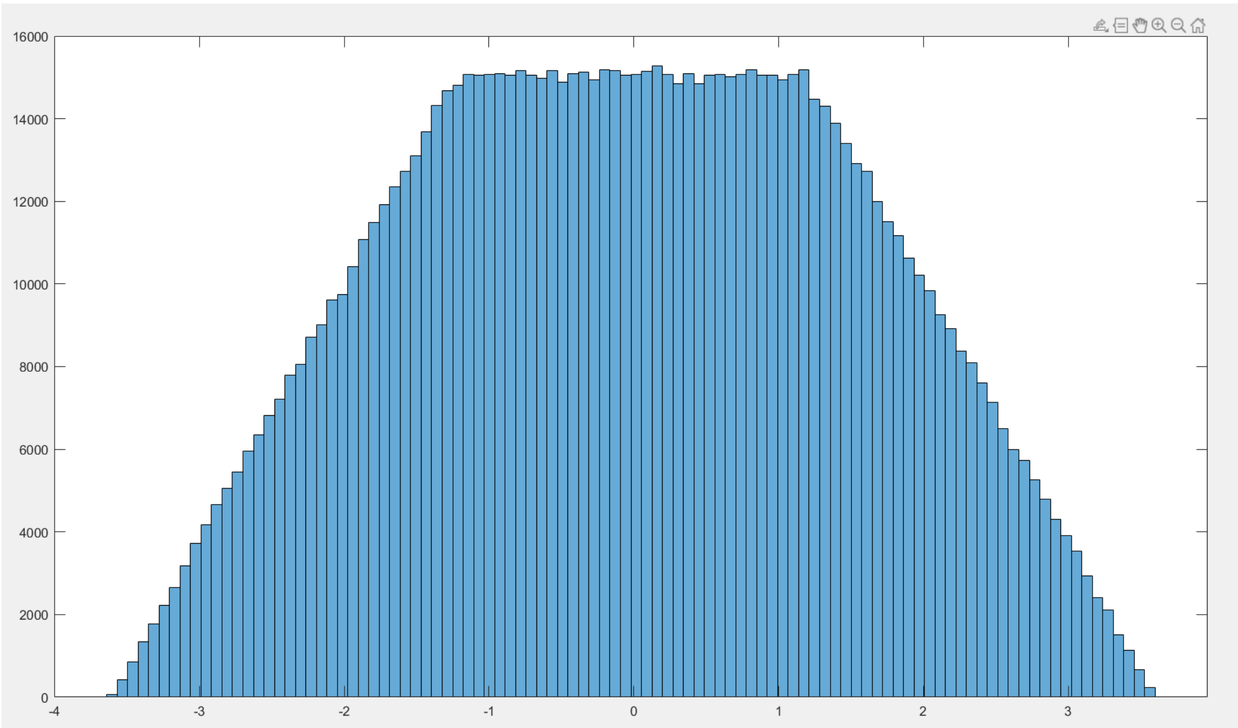
$$x_2 = 0.8s_1 - 0.6s_2$$



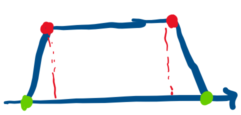
$t < -3.6 \to 0$ و $t > 3.6 \to 0$

$$= \begin{cases} -3.6 < t < -1.2 \to \frac{1}{4.8} \times \frac{1}{2.4}(t + 2.4 + 1.2) \\ -1.2 < t < 1.2 \to \frac{1}{4.8} \times \frac{1}{2.4} \times 2.4 = \frac{1}{4.8} \\ 1.2 < t < 3.6 \to \frac{1}{4.8} \times \frac{1}{2.4}(-t + 2.4 + 1.2) \end{cases}$$

با زیاد کردن تعداد نمونه ها می بینیم تابع توزیع x_2 مطابق انچه که بدست اوردیم می شود:



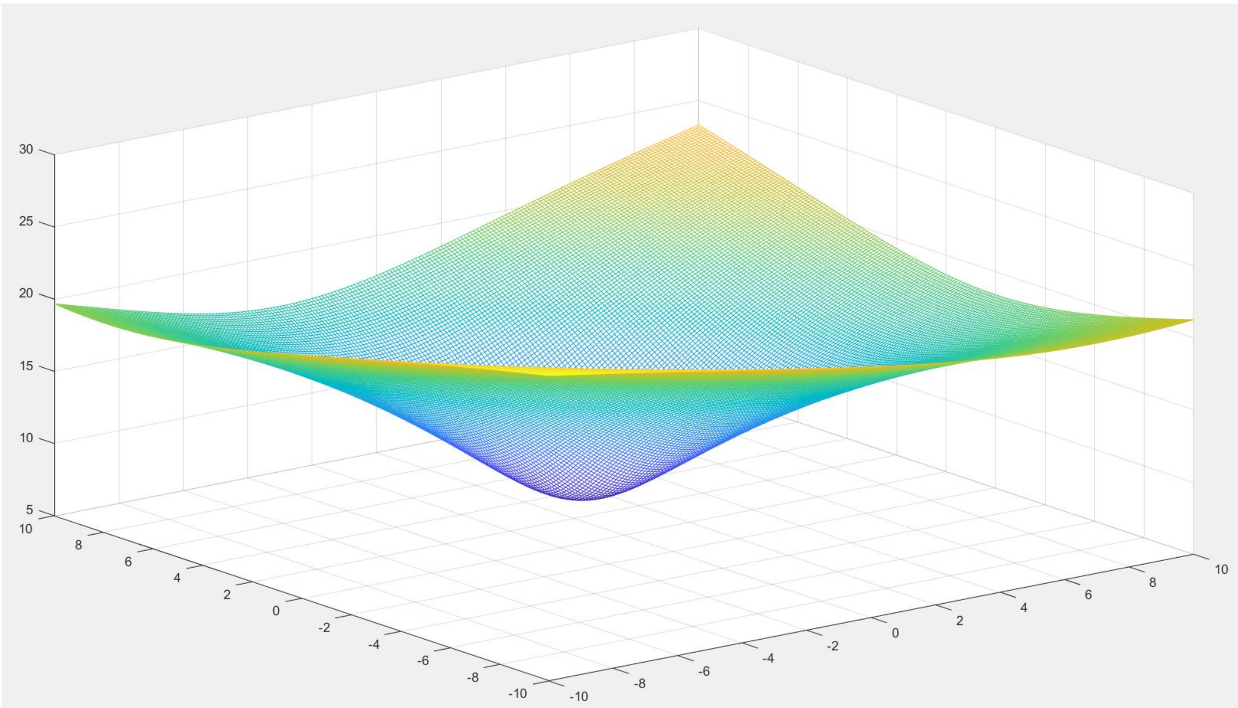
سوال 6:



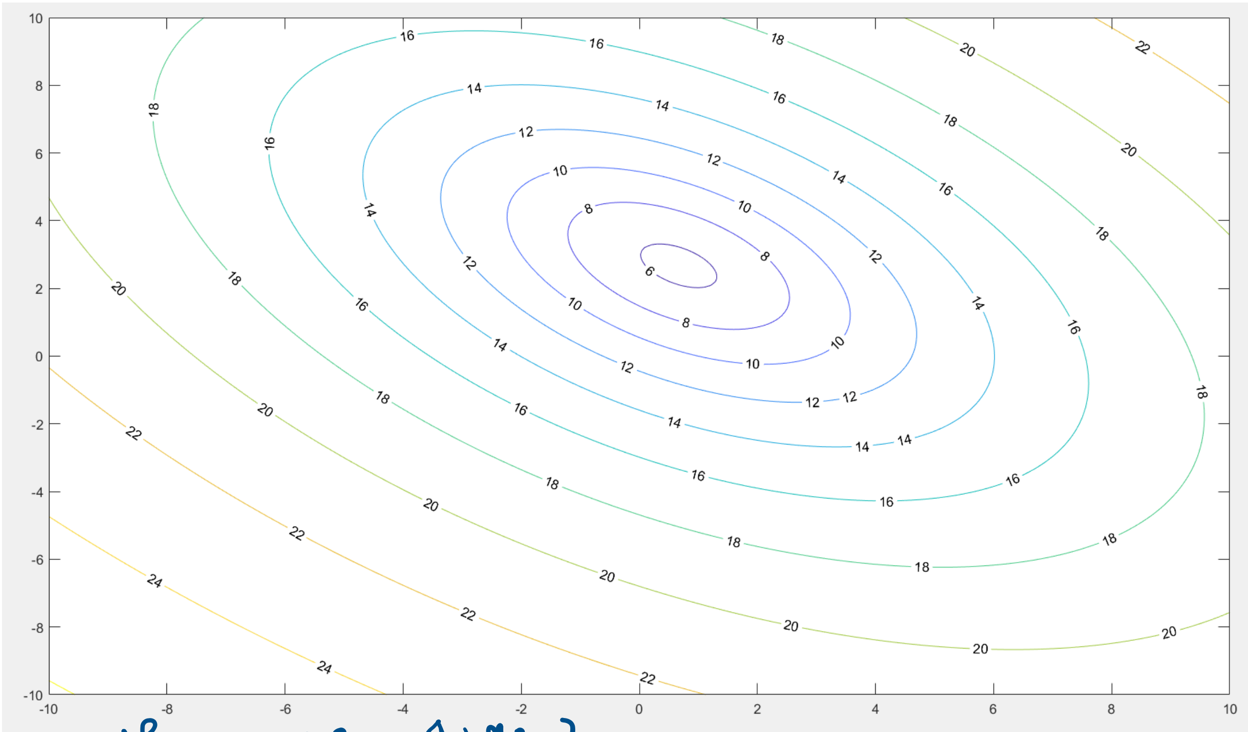
همانطور که دیدیم شکل توزیع های x_1, x_2 به صورت ذوزنقه است که برای مثال در توزیع x_1 نقاط گوشه آن (قرمز رنگ) در زمان کانوالو کردن $2a_{11}$ یا $2a_{21}$ هستند و همچنین نقاط سبز رنگ $2a_{11} + 3a_{12}$ یا $3a_{12}$ هستند ، با استفاده از این اطلاعات 4 جواب متفاوت برای حل دو به دو ی این دستگاه های معادلات 2 معادله 2 مجهول بدست می آید اما جواب نهایی به طور یکتا بدست نمی آید.

بخش 2 :

سوال 1:



سوال 2:



سوال 3:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4 + x_2 \\ 2x_2 - 6 + x_1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow H^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow x^T H x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 & x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2x_1^2 + x_2 x_1 + x_1 x_2 + 2x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 \geq 0$$

$$\rightarrow x^T H x \geq 0 \rightarrow \text{convex}$$

سوال 4:

$$\rightarrow 4x_1 - 8 + 2x_2 = 0$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4 + x_2 = 0 \\ 2x_2 - 6 + x_1 = 0 \rightarrow 2x_2 - 6 + x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow 3x_1 - 2 = 0 \rightarrow x_1 = \boxed{\frac{2}{3}} \text{ و } x_2 = \boxed{\frac{8}{3}}$$

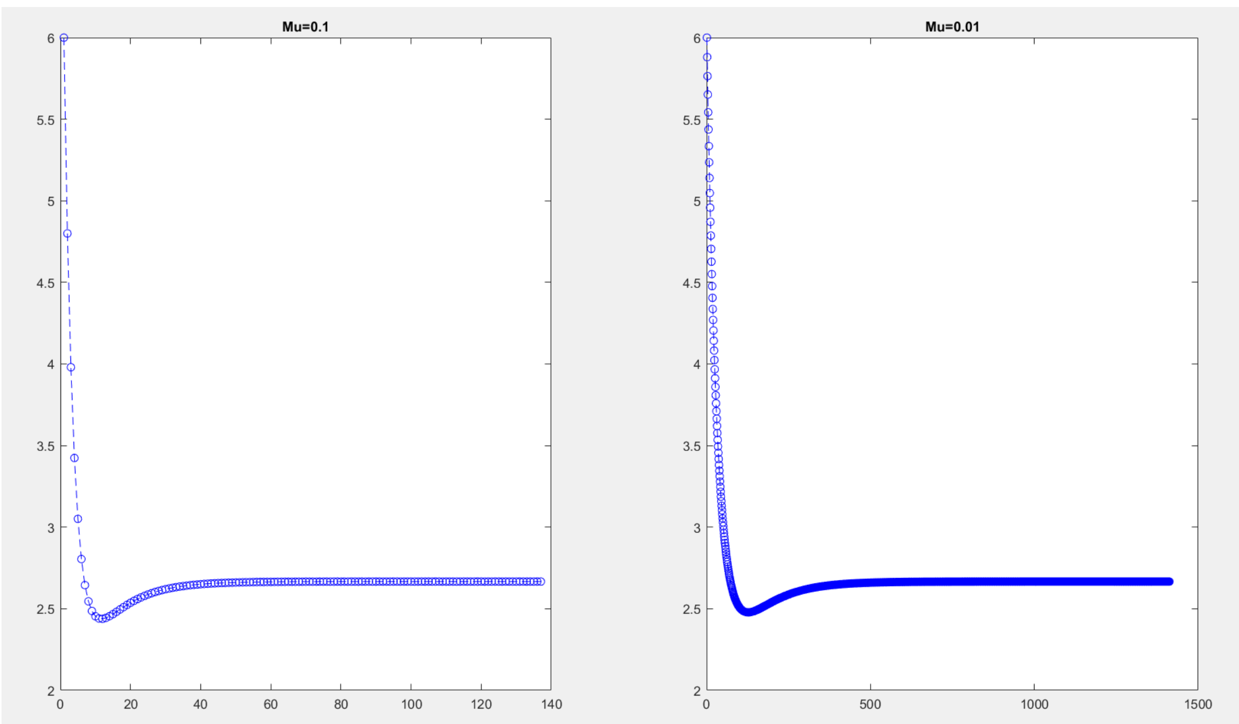
سوال 5:

تعداد iteration با $\mu = 0.1$: 136

تعداد iteration با $\mu = 0.01$: 1411

بنابراین $\mu = 0.1$ سریع تر همگرا شده است .

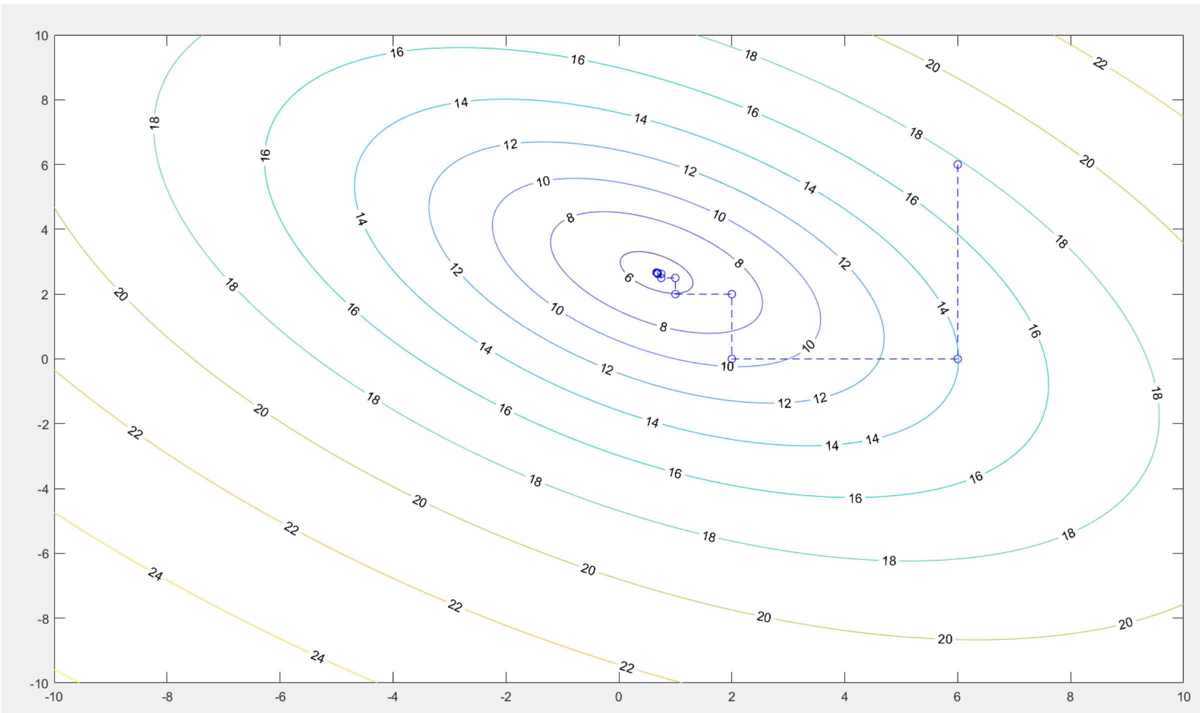
برای تشخیص همگرایی در تابع یک flag تعریف شده است که اگر تعداد iteration بیش از یک مقداری شود ولی tolerance به اندازه ی کافی کم نشود فعال می شود ، در هر دو حالت flag صفر ماند و لذا همگرا شده اند.



سوال 6:

با 2 iteration همگرا می شود ، iteration اول که نقطه ی اولیه چک می شود و iteration دوم که به min سهمی می رود ، دلیل این اتفاق این است که فرم تابع داده شده به شکل سهمی است و زمانی که با الگوریتم نیوتون سهمی فیت می کنیم با یک چرخه به مینیمم اصلی می رسیم.

سوال 7 :



سوال 8 :

مقدار بهینه بدست آمده:

minPointCond [0.4943;0.8693]

سوال 9:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + x_1 x_2 + 13$$

قید : $x_1^2 + x_2^2 = 1 \rightarrow 1 - x_1^2 + x_2^2 = 0$

$$\rightarrow \nabla \left(x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + x_1 x_2 + 13 + \lambda (1 - x_1^2 + x_2^2) \right) = 0$$

(3) $\frac{\partial}{\partial \lambda} \rightarrow 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0$

$$① \ \frac{\partial}{\partial x_1} \rightarrow 2x_1 - 4 + x_2 - 2\lambda x_1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{4 - x_2}{2 - 2\lambda} \quad (\mathrm{I})$$

$$② \ \frac{\partial}{\partial x_2} \rightarrow 2x_2 - 6 + x_1 - 2\lambda x_2 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{6 - x_1}{2 - 2\lambda} \quad (\mathrm{II})$$

جایگذاری (I) و (II) در ① و ②:

$$x_1 = \frac{-8\lambda + 2}{-1 + 4(1-\lambda)^2} \quad ; \quad x_2 = \frac{-12\lambda + 8}{-1 + 4(1-\lambda)^2}$$

جایگذاری در ③:

$$\frac{(-8\lambda + 2)^2 + (-12\lambda + 8)^2}{\left(-1 + 4(1-\lambda)^2\right)^2} = 1$$

$$\rightarrow \underbrace{\lambda = -2.17}_{\text{min}} \ ; \ 5.1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.4943 \\ x_2 = 0.8693 \end{cases}$$

min طول را بما دهد

که با جواب که با متلب بدست امد تطابق دارد.