به نام خدا

تمرین دوم کامپیوتری

آمار و احتمال مهندسی

استاد ابوالقاسمی

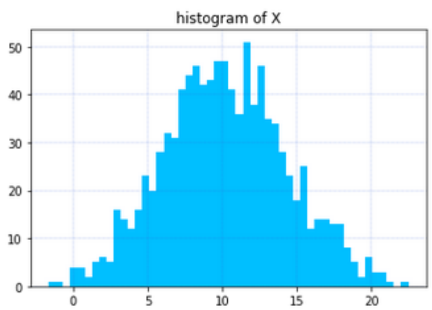
فاطمه جلیلی

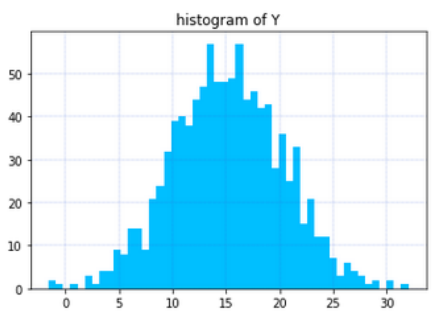
به شماره دانشجویی:810199398

زمان تحویل : 1400/9/14

سوال اول :

1) متغیر های X,Y را به ترتیب با میانگین 10,15 و واریانس 16,25 در نظر می گیریم ، میانگین ها را در متغیر mu_X,mu_Y و واریانس ها را در متغیر های var_X,var_Y ذخیره می کنیم ، از روی واریانس های متغیر ها انحراف معیار را با استفاده از تابع sqrt در کتابخانه math که قبلا آن را import کرده ایم بدست می آوریم و در متغیر های sima_X,sigma_Y ذخیره می کنیم
اکنون با استفاده از random.normal(mean,std,size) به تعداد دلخواه (1000) عدد با توزیع نرمال با میانگین و انحراف معیار از پیش تعیین شده تولید می کنیم و به عنوان data_X ,data_Y ذخیره می کنیم.





2) برای رسم هیستوگرام از plt.histکمک می گیریم و با دادن data مورد نظر و تعیین تعداد ستون های هیستوگرام در ورودی دوم و تابع و همچنین رنگ آن به دلخواه هیستوگرام X,Y را رسم می کنیم
نام plot و ویژگی های جدول بندی آن را هم به دلخواه تعیین می کنیم و شکل خروجی نمودار ها به صورت رو به رو خواهند بود:

3) برای جمع کردن هر دو جفت از اعضا data_X,data_Y و تولید data_Z از zipped_lists استفاده می کنیم که شامل جفت اعضا هر کدام از دو لیست است پس x,y های موجود در zipped_lists را با هم جمع می کنیم و در لیست جدید data_Z ذخیره می کنیم.

4) می دانیم اگر X,Y مستقل باشند تابع مشخصه ی X+Y برابر ضرب تابع مشخصه ی X,Y است چرا که :

$$\varphi_{X+Y} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega(x+y)} F'_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega x} e^{\omega y} f_X(x) f_Y(y) dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega x} f_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega y} f_Y(y) dy = \varphi_X \varphi_Y$$

همچنین تابع مشخصه ی متغیر X با توزیع نرمال مطابق رابطه ی زیر بدست می آید:

$$\varphi_X = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{\omega x} dx = e^{\mu\omega + \frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \qquad (*)$$

حال با استفاده از توضیحات فوق داریم :

$$\varphi_Z = \varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y = e^{\mu_X \omega + \frac{\sigma_X^2 \omega^2}{2}} e^{\mu_Y y + \frac{\sigma_Y^2 \omega^2}{2}} = e^{\omega(\mu_X + \mu_Y) + \frac{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)\omega^2}{2}}$$

که همان فرم تابع مشخصه ی بدست آمده در $(*)$ را دارد و از آن جایی که تابع مشخصه همان تبدیل فوریه است پس معکوس آن نیز یکتاست بدین معنا که زمانی که :

$$\varphi_Z = e^{i\omega(\mu_X + \mu_Y) - \frac{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)\omega^2}{2}}$$

Z تنها می تواند متغیری با توزیع نرمال و میانگین و واریانس به صورت زیر باشد :

$$\mu_Z = \mu_X + \mu_Y = 10 + 15 = 25$$

$$\sigma_Z^2 = (\sigma_X^2 + \sigma_Y^2) \rightarrow Var_Z = Var_X + Var_Y = 16 + 25 = 41$$

بنابراین میانگین و واریانس Z برابر مجموع میانگین و واریانس X,Y خواهد بود

5) مطابق کد با 1000 بار شبیه سازی مقدار میانگین Z برابر *25.382116200103987* و مقدار واریانس آن برابر *40.4023045298513*7 بدست می آید که با تقریب خوبی نزدیک به مقدار نظری بدست آمده آن در بخش 4 است .

سوال دوم :

1) از آن جایی که دو متغیر تصادفی U,V مستقل هستند پس داریم :

$$f_{U,V}(u,v)=f_U(u)f_V(v)=\begin{cases}1 & 0\le u,v\le 1\\ 0 & o.w\end{cases}$$

طبق فرض سوال داریم (❉)

$$X=\sqrt{-2ln(V)}\,cos(2\pi U)$$

$$Y=\sqrt{-2ln(V)}\,sin(2\pi U)$$

طبق تعریف 24 فصل 3 ام در اسلاید های تدریس شده داریم :

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{f_{U,V}(u,v)}{|\,J\,|}$$

که منظور از *J* همان ژاکوبین است پس مطابق زیر آن را محاسبه می کنیم :

$$J=\det\begin{bmatrix}\frac{\partial X}{\partial U} & \frac{\partial X}{\partial V}\\ \frac{\partial Y}{\partial U} & \frac{\partial Y}{\partial V}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}-\frac{1}{V}\frac{\cos(2\pi U)}{\sqrt{-2\ln(V)}} & -2\pi\sqrt{-2l\,n(V)}\sin(2\pi U)\\ -\frac{1}{V}\frac{\sin(2\pi U)}{\sqrt{-2\ln(V)}} & 2\pi\sqrt{-2l\,n(V)}\cos(2\pi U)\end{bmatrix}=$$

$$-\frac{2\pi}{V}[\cos^2(2\pi U)+\sin^2(2\pi U)]=\frac{-2\pi}{V}$$

بنابراین داریم :

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{f_{U,V}(u,v)}{|\,J\,|}=\frac{V}{2\pi}\qquad\qquad 0\le u,v\le 1$$

با استفاده از قسمت (❉) ، *V* را براساس *x,y* می نویسیم داریم (دو رابطه را به توان دو می رسانیم با هم جمع می کنیم)

$$V=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\rightarrow\ f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

حال توابع مارجینال را از *pdf* مشترک *x,y* بدست می آوریم :

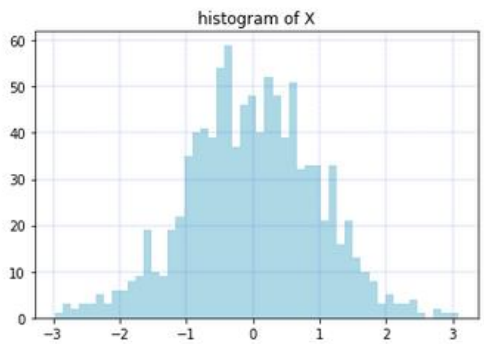
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

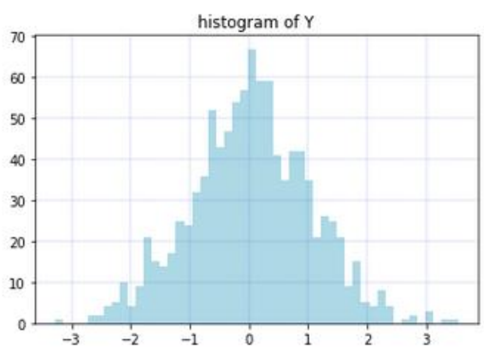
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

نحوه محاسبه انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}$:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dxdy \xrightarrow{polar\ coordinates} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-\frac{1}{2}r^2} drd\theta .$$
$$= 2\pi$$

همانطور که دیده می شود *CDF* ، *X,Y* داری فرم *CDF* متغیرهایی با توزیع نرمال هستند پس *X,Y* دارای توزیع نرمال هستند و همچنین ضرب $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ برابر $f_{X,Y}(x,y)$ است پس مستقل نیز هستند





2) با استفاده از *random.uniform* 1000 عدد با توزیع یکنواخت در بازه ی 0 تا1 تولید می کنیم و در متغیر *data_U* ذخیره می کنیم و هم چنین به طور مشابه لیست *data_V* را تعریف می کنیم

طبق فرض سوال *R* را تعریف می کنیم و *data_X , data_Y* را بر اساس تعریف سوال می نویسیم

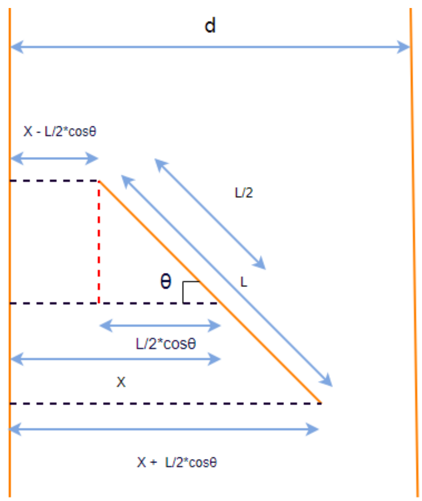
برای رسم هیستوگرام هم مطابق توضیحات سوال اول از plt.histکمک می گیریم و با دادن data مورد نظر و تعیین تعداد ستون های هیستوگرام در ورودی دوم و تابع و همچنین رنگ آن به دلخواه هیستوگرام X,Y را رسم می کنیم

نام plot و ویژگی های جدول بندی آن را هم به دلخواه تعیین می کنیم و شکل خروجی نمودار ها به صورت رو به رو خواهند بود:

همانطور که دیده می شود هیستوگرام X,Y دارای فرم زنگوله ای مانند است و شبیه تابع چگالی احتمال توزیع نرمال است چرا که طبق اثبات قسمت 1 X,Y دارای توزیع نرمال هستند.

سوال سوم :

1) متغیر های تصادفی X,θ را به ترتیب به صورت زاویه ی سوزن با محور افق و فاصله ی مرکز سوزن با نزدیک ترین خطوط کف اتاق تعریف می کنیم



فضای نمونه ای آزمایش با توجه به شکل مطابق زیرتعیین می شود :

$$\Omega = \begin{cases} 0 \le X \le \frac{d}{2} \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

این دو متغیر دارای توزیع یکنواخت هستند بنابراین داریم :

$$f_X(x) = \frac{2}{d}$$

$$f_\theta(\theta) = \frac{2}{\pi}$$

از آن جایی مستقل نیز هستند پس داریم :

$$f_{X,\theta}(X,\theta) = f_X(x) f_\theta(\theta) = \frac{4}{\pi d} \qquad (*)$$

همچنین تنها در صورتی سوزن خطوط را قطع می کند که :

$$X < \frac{l}{2} sin\theta$$

بنابراین از رابطه ی $(*)$ در ناحیه ی بالا انتگرال می گیریم تا احتمال خواسته شده را بدست آوریم :

$$P\left(X < \frac{l}{2} sin\theta\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{l}{2}sin\theta} f_{X,\theta}(X,\theta) dX d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{l}{2}sin\theta} \frac{4}{\pi d} dX d\theta = \frac{2l}{\pi d}$$

که در صورت پروژه داریم : $l = 2cm, d = 5cm$

بنابراین :

$$P = \frac{4}{5\pi} \quad (**)$$

2) دقیقا مطابق استدلال مطرح شده در قسمت تئوری شبیه سازی می کنیم به این صورت که متغیر های رندم x,theta را در بازه ی فضای نمونه ای تعریف شده در قسمت قبل 5000 بار یعنی به تعداد سوزن های خواسته شده تولید می کنیم و هر بار در یک حلقه for چک می کنیم که آیا برخوردی صورت می گیرد یا نه یعنی آیا$X < \frac{l}{2} sin\theta$ برقرار هست یا و اگر برقرار بود یکی به متغیر از پیش تعریف شده ای که تعداد بار های برخورد را شمارش می کند اضافه می کنیم و در آخر مقدار این متغیر را پرینت می کنیم

3) رابطه ی بدست آمده در قسمت تئوری $(**)$ را به صورت $\pi = \frac{4}{5P}$ بازنویسی می کنیم و P را از شبیه سازی قسمت 2 جایگزین می کنیم

در قسمت 2 دیده شد به ازای 5000 بار شبیه سازی 1277 برخورد صورت گرفت پس $P = \frac{1277}{5000}$ با جایگذاری در رابطه بیان شده مقدار عددπ به صورت تقریبی مطابق زیر به دست خواهد آمد:

$$\pi \approx \frac{4}{5 \times \frac{1277}{5000}} = \frac{4000}{1277} \approx 3.13234$$

4) اختلاف مقدار بدست آمده برابر خواهد بود با :

$$\pi - \frac{4000}{1277} \approx 0.00925$$

پس خطای نسبی برابر خواهد بود با :

$$\frac{\pi - \frac{4000}{1277}}{\pi} \approx 0.00294$$