2 Instrumental Variables Regression

Instrumental variables estimation is a leading example of generalized method of moments estimation. Consider the linear regression model $y = \mathbf{x}\beta + u$, with the complication that some components of $\mathbf{x}$ are correlated with the error term so that OLS is inconsistent for β.

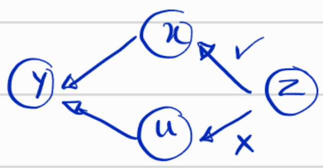
$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

2.1 Exclusion Restriction

Assume the existence of instruments $\mathbf{z}$ that are correlated with $\mathbf{x}$ but satisfy $E[u|\mathbf{z}] = 0$. Assume that $\mathbf{z}$ is $J \times 1$ vector. Then $E[y - \mathbf{x}'\beta|\mathbf{z}] = 0$. Recall the exclusion restriction and please explain these conditions in 3 sentences. You may graphically explain the exclusion restriction assumption.

z غیر از طریق x، از سایر طرق که u هستند نباید با y مرتبط باشد. به عبارت دیگر z نباید با u همبستگی داشته باشد.

همچنین لازم است z با x همبستگی داشته باشد.



2.2 Method of Moment

Again use law of iterated expectations to show that the single conditional moment restriction $E[u|\mathbf{z}] = 0$ leads to J unconditional moment conditions

$$E[\mathbf{z}(y - \mathbf{x}'\beta)] = \mathbf{0}$$

The method of moments estimator solves the corresponding sample moment conditions. Please write down those sample moment conditions. Under what condition, these equations have a unique solution? The solution is called IV estimator.

$$E[u|z]=0 \rightarrow E[zu|z] = zE[u|z]=0 \rightarrow E[E[zu|z]] = E[zu]=0 \rightarrow E[z(y-x'\beta)]=0$$

$$\begin{cases} E[z_1(y-x'\beta)]=0 \\ \vdots \\ E[z_J(y-x'\beta)]=0 \end{cases}$$

Sample Moment Conditions:
$$\begin{cases} \frac{1}{n}\sum_i z_{i1}(y_i - x_i'\hat\beta) = 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{n}\sum_i z_{iJ}(y_i - x_i'\hat\beta) = 0 \end{cases}$$

اگر معادلات تکراری نباشند (z ها هم خطی نباشند) و تعداد معادلات و مجهولات یکسان باشد ($J=K$)

جواب بهینه سازی یکتا خواهد بود.

2.3 GMM

No unique solution exists if there are more potential instruments than regressors. Please explain why? One possibility is to use just K instruments only, but there is then an efficiency loss. The GMM estimator instead chooses β to make the sample moments as small as possible using quadratic loss. Using a weighting matrix $\mathbf{W}$ write down the quadratic loss function that GMM solves. What is the size of the weighting matrix $\mathbf{W}$?

اگر $J>K$ باشد تعداد پاسخ های مسئله که همه معادلات را 0 کند، یا یک خواهد بود و یا 0. در حالت حدی، θ_0 می تواند

همه معادلات را 0 کند اما در حالت غیرحدی، معادلات فرم تقریبی دارند و به همین دلیل هیچ θای نمی تواند

تمام معادلات را 0 کند. بسته به وزنی که به معادلات مختلف در بهینه سازی بدهیم، $\hat\theta$ متفاوتی محاسبه خواهد شد.

$$\left.\begin{array}{l} y = x'\beta + u \rightarrow zy = zx'\beta + zu \\ E[u|z]=0 \rightarrow E[zu] = 0_{J\times 1} \end{array}\right\} E[zy] = E[zx'\beta] \xrightarrow[\text{moments}]{\text{sample}} Z'Y = Z'X\hat\beta$$

$$\text{moments}: \; Z'(Y - X\hat\beta) = 0 \rightarrow \text{GMM} \quad \boxed{\min_{\beta} \, (Z'(Y-X\hat\beta))' \, W \, (Z(Y-X\hat\beta)) \qquad W \text{ is } J\times J}$$