گزارش پروژه نهایی
نظریه بازی‌ها

Pool Strategies Selection in PoW-based Blockchain Networks: Game-Theoretic Analysis

بهار ۱۳۹۹

فاطمه غفاری ۸۱۰۱۹۸۳۱۷ – حجت وثوقی ۸۱۰۱۹۷۴۱۷

پردیس دانشکده‌های فنی

فهرست مطالب

مقدمه

در بلاکچین، مکانیزم توافق معمولا **PoW** است. به این معنا که ماینرها برای ساخت یک بلاک و بردن جایزه آن، با یکدیگر در حل یک مسئله سخت رقابت می‌کنند. از آن‌جایی که مسئله مورد نظر بسیار سخت است و در طول زمان سخت‌تر هم می‌شود،معمولا حل آن برای ماینرها زمان زیادی، حتی سال‌ها، به طول می‌انجامد. این حقیقت انگیزه ماینرها را برای پیوستن به یکدیگر و تشکیل استخرهای باز بیشتر می‌کند. در استخرها تعداد زیادی ماینر می‌توانند با هم برای حل مسئله تلاش کنند. استخرباز به استخری گفته می‌شود که عضویت در آن برای تمام ماینرها آزاد است. با اینکه یک استخر باز به وضوح بهره‌وری بیشتری نسبت به یک استخر بسته دارد اما درمعرض حمله از جانب سایر استخرها قرار دارد. در مقاله مورد بررسی، انتخاب استراتژی از جانب استخرها را به صورت یک بازی دو مرحله‌ای مدل کرده است که در آن استخرها انتخاب می‌کنند که باز یا بسته و حمله‌گر یا غیرحمله‌گر باشند.

از بین چند ایده مطرح شده، دو ایده تکمیلی برای ادامه کار مقاله دنبال شد. در ایده اول، احتمال برنده شدن استخرها اعداد ثابتی غیر از صفر و یک در نظر گرفته شد. یعنی به جای رویکرد مقاله که درمورد بردن استخر با توان بیشتر، قطعیت وجود داشت، ما برای احتمال برد استخر قوی تر احتمال ثابت a و برای احتمال برد استخر ضعیف‌تر احتمال ثابت b را در نظرگرفتیم که a > b. در ادامه فرض را حتی بیشتر از این حد گسترش دادیم و احتمال برد هر استخر را متناسب با توان آن استخر در نظر گرفتیم.

کلمات کلیدی

استخر حمله‌گر، استخر قربانی، جریمه حمله، جایزه ساخت بلاک، اختلاف طبقاتی

کارهای مشابه

مقالات متعدی در زمینه بررسی اتخاذ استراتژی استخرها با استفاده از نظریه بازی‌ها نوشته شده‌اند. در مقاله **[1]**یک بررسی کیفی از تعادل نش در حالتی که استخرها از برخی همکاران خود برای نفوذ به استخرهای دیگر استفاده می‌کنند انجام داده است و همچنین وجود تعادل نش برای هر تعداد استخر را نشان داده است. در مقاله **[2]** از پایداری تکاملی برای بررسی این‌که ماینرها کدام استخر را برای پیوستن انتخاب می‌کنند استفاده شده است. همچنین مقاله **[3]** انتخاب استخر توسط ماینرها را به صورت یک بازی همکارانه مدل کرده‌است که در آن اعضای هر استخر با یکدیگر همکار هستند.

توضیح مقاله

در این بخش مسئله مورد بحث در مقاله مطرح شده و بازی دو مرحله‌ای طرح شده در مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس نتایج شبیه‌سازی مقاله ارایه می‌شود و نتایج شبیه‌سازی خود را با نتایج بدست آمده در مقاله مقایسه می‌کنیم. پس از آن چند ایده‌ی تکمیلی برای ادامه کار مقاله مطرح می‌شود.

بیان صورت مسئله

این مقاله به انتخاب استراتژی توسط استخرها در بلاکچین می‌پردازد. همانطور که میدانیم، در بلاکچین ماینرها برای ساخت بلاک با یکدیگر رقابت می‌کنند تا بتوانند جایزه مربوط به ساخت آن بلاک را بگیرند. برای ساخت یک بلاک، ماینرها باید یک مسئله سخت را حل کنند. این مسئله یک مسئله **sha256** است که حل آن سخت است اما بررسی صحت جواب آن ساده است. به علت سخت بودن این مسئله، حل آن توان محاسباتی زیادی لازم دارد که معمولا از توان محاسباتی ماینرها بسیار بیشتر است. یعنی ساخت یک بلاک برای یک ماینر معمولی ممکن است حتی تا سالها طول بکشد. به همین دلیل، ماینرها برای این که درآمد پایدارتری داشته باشند، ترجیح می‌دهند که در گروه‌های بزرگ به یکدیگر بپیوندند تا توان محاسباتی‌شان با یکدیگر جمع شود. استخر باز استخری است که عضویت در آن برای تمام ماینرها آزاد است. این ویژگی باعث می‌شود که تعداد بیشتری ماینر به استخر بپیوندند و در نتیجه ریواردهای کسب شده بیشتر شود. اما از طرفی این باز بودن استخر را در معرض حمله قرار می‌دهد.

یکی از حملات ممکن، حمله‌ی نگهداری بلاک (**Block Withholding Attack**) است. در این حمله ابتدا استخر حمله‌گر تعدادی از ماینرهای خود را وارد استخر قربانی می‌کند. استخر قربانی بخشی از کار پردازش برای حل مسئله **PoW** را برعهده این ماینرهای نفوذی می‌گذارد. این ماینرها **PPoW**[1] خود را برای استخر اولیه خود، یعنی استخر حمله‌گر می‌فرستند. **PPoW** معیاری است که استخرها به کمک آن می‌توانند توان پردازشی یک ماینر را تخمین بزنند تا به همان نسبت بار محاسباتی به آن اختصاص دهند. استخر حمله گر **PPoW** ماینرهای نفوذی را برای استخر قربانی می‌فرستد تا استخر قربانی تخمینی از توان محاسباتی ماینرها داشته باشد و به آن‌ها بخشی از بار محاسبات را اختصاص دهد. سپس ماینرها نتایج اصلی محاسبات خود **FPoW**[2] را برای استخر حمله‌گر می‌فرستند. اما استخر حمله‌گر این بار دیگر این نتایج را برای استخر قربانی نمی‌فرستد. به عبارت دیگر، بخشی از توان محاسباتی‌ای که استخر قربانی تصور می‌کند برای حل مسئله صرف شده است در واقع به هدر رفته است.

[1] **Partial Proof of Work**
[2] **Full Proof of Work**

با اینکه استخرها می‌توانند درآمد خود را با حمله به سایر استخرها افزایش دهند، اما اگر تمام استخرها تصمیم بگیرند به یکدیگر حمله کنند، از حالتی که هیچ استخری حمله نکند درآمد کمتری خواهند داشت. که این مسئله، مسئله زندانی را به ذهن می‌آورد. یعنی حمله بهترین استراتژی برای یک استخر است اما برای کل سیستم استراتژی بهینه نیست.
استخرها می‌توانند به صورت آزادانه انتخاب کنند که باز یا بسته و حمله‌گر یا ناحمله گر باشند. پروسه ماینینگ در مقاله به وسیله یک بازی دو مرحله‌ای مدل می‌شود. در مرحله اول بازیگران بین باز یا بسته بودن انتخاب می‌کنند که برای بررسی این بازی از پایداری تکاملی استفاده می‌شود. در مرحله دوم نیز بازیگران انتخاب می‌کنند که حمله‌گر یا ناحمله‌گر باشند که در این مرحله نیز تعادل نش بررسی می‌شود.
فرض می‌کنیم M استخر داریم که توان هرکدام برابر با P_i است. و همچنین فرض می‌کنیم که توان محاسباتی استخرها دارای یک توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ است. ریوارد استخر برنده را برابر با ۱ و ریوارد سایر استخرها را برابر ۰ در نظر می‌گیریم. استخر حمله‌گر به طور مستقیم درآمد سایر استخرها را تحت تاثیر قرار نمی‌دهد، با این حال، چون بخشی از توان محاسباتی خود را صرف حمله می‌کند (ماینرهای نفوذی)، مقداری از ریواردی که به دست می‌آورد کاسته می‌شود که این مقدار را جریمه حمله می نامیم و با m نشان می‌دهیم و آن را یک مقدار ثابت در بازه ۰ تا ۱ فرض می‌کنیم. همچنین توانی که استخر قربانی از دست می‌دهد را نیز با d نشان داده که این را نیز یک مقدار ثابت در بازه ۰ تا ۱ در نظر می‌گیریم.

در ادامه، برای به دست آوردن مصالحه بین بازدهی بهتر ناشی از باز بودن استخر و آسیب پذیر بودن نسبت به حملات، مسئله به صورت یک بازی دو مرحله‌ای مدل می‌شود. از آن‌جایی که تصمیمات اتخاذ شده در این دو مرحله از یکدیگر مستقلند، در مقاله ابتدا مرحله دوم و سپس مرحله اول بررسی شده‌اند که ما نیز در اینجا به همین ترتیب به آن‌ها می‌پردازیم.

بازی مرحله دوم

در مرحله دوم بازی، استخرها انتخاب می‌کنند که حمله‌گر یا ناحمله‌گر باشند. مسئله برای حالتی بررسی می‌شود که تنها دو استخر موجود باشند. بدون از دست دادن کلیت، فرض می کنیم که $p_1 > p_2$ (حالت تساوی در مرحله دوم حائز اهمیت نیست). با توجه به این فرضیات، سه حالت ممکن است به وجود آید:

حالت اول: $p_1 - d > p_2$

در این‌صورت استخر دوم حتی در صورت حمله به استخر اول نیز توان لازم برای برنده شدن را ندارد. در این حالت استراتژی استخرها باعث تغییر خروجی نمی‌شود.

حالت دوم: $p_1 - d = p_2$

در این حالت، بازی ماتریسی زیر را داریم:

	A	N
A	1 - m, -m	1 − m, m
N	$\frac{1}{2}$ + m, $\frac{1}{2}$ - m	1, 0

با توجه به ماتریس بالا، بازیگر دوم تنها وقتی حمله می‌کند که $\frac{1}{2} < m$ باشد.چون اگر $\frac{1}{2} > m$ باشد، خواهیم داشت:

$$-m < m \quad \rightarrow \quad N \ is \ better \ than \ A, for \ player \ 2.$$

$$\frac{1}{2} - m < 0 \quad \rightarrow \quad N \ is \ better \ than \ A, for \ player \ 2.$$

و استراتژی غالب بازیگر دوم، **N** خواهد بود.

و بازیگر اول نیز تنها وقتی حمله می‌کند که $\frac{1}{4} < m$ باشد. چون اگر $\frac{1}{4} > m$ باشد، خواهیم داشت:

$$1 - m < \frac{1}{2} + m \quad \rightarrow \quad N \ is \ better \ than \ A, for \ player \ 1.$$

$$1 - m < 1 \quad \rightarrow \quad N \ is \ better \ than \ A, for \ player \ 1.$$

و استراتژی غالب بازیگر اول، **N** خواهد بود.

این حالت بر بازی مرحله اول تاثیری ندارند. در نتیجه عمده تمرکز مقاله بر بررسی حالت سوم است:

حالت سوم: $p_1 - d < p_2$

در این حالت نیز بازی به صورت بازی ماتریسی زیر است:

	A	N
A	1 − m, -m	1 − m, m
N	m, 1 - m	1, 0

برای بازی بالا یک نقطه تعادل مخلوط در نظر گرفته شده است. مقدار η_1 احتمال حمله استخر ۱ و η_2 احتمال حمله استخر ۲ است که به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\eta_1 = \frac{1 - m}{1 + m}, \eta_2 = \frac{m}{1 - m}$$

قضیه ۱: مقدار m با احتمال حمله استخر ضعیف رابطه مستقیم و با احتمال حمله استخر قوی رابطه عکس دارد.

قضیه بالا که اثبات آن در متن مقاله وجود دارد، نشان می‌دهد که این باور که افزایش جریمه از وقوع حمله جلوگیری می‌کند درست نیست. در واقع هرچه مقدار آن بیشتر باشد احتمال برد استخر ضعیف بیشتر می‌شود.

قضیه ۲: وقتی مقدار جریمه بیش از $\sqrt{2}-1$ باشد، با افزایش m بهره کل سیستم (= مجموع سود بازیگران) کاهش می‌یابد.

از قضیه بالا نتیجه می‌شود که با افزایش m رفاه اجتماعی کل سیستم (= مجموع سود بازیگران) کاهش می‌یابد و در نتیجه به کل سیستم آسیب وارد می‌شود.

بازی مرحله اول

در بازی مرحله دوم استخرها انتخاب می‌کنند که باز یا بسته باشند. در این‌جا نیز با توجه به استراتژی‌های اتخاذ شده توسط استخرها حالت‌های مختلفی داریم:

حالت اول: (سود ناشی از O بازی کردن، وقتی حریف O بازی کند)

$$U_{oo}=\left(d-\frac{d^2}{2}\right)(1-m)+\left(\frac{1}{2}-d+\frac{d^2}{2}\right).1+\left(d-\frac{d^2}{2}\right)\left(\frac{m-m^2}{1+m}\right)=\frac{1}{2}-(d-\frac{d^2}{2})(\frac{2m^2}{1+m})$$

حالت دوم: (سود ناشی از O بازی کردن، وقتی حریف C بازی کند)

$$U_{oc}=d.(0+m)+(1-d).1=1-d+md$$

حالت سوم: (سود ناشی از C بازی کردن، وقتی حریف O بازی کند)

$$U_{co}=d.(1-m)+(1-d).0=d(1-m)$$

حالت چهارم: (سود ناشی از C بازی کردن، وقتی حریف C بازی کند)

$$U_{cc}=\frac{1}{2}$$

در نتیجه بازی ماتریسی به صورت زیر خواهد شد:

	O	C
O	$\frac{1}{2}-\left(d-\frac{d^2}{2}\right).\frac{2m^2}{1+m}$, $\frac{1}{2}-\left(d-\frac{d^2}{2}\right).\frac{2m^2}{1+m}$	$1-d+md, d(1-m)$
C	$d(1-m), 1-d+md$	$\frac{1}{2},\frac{1}{2}$

برای ماتریس بالا، پایداری تکاملی را می‌یابیم. برای پیاده‌سازی مدل تکاملی، فرض می‌کنیم که سیستمی با **M** استخر وجود دارد و در هر بازه ماینینگ، هر استخر استخر دیگری را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنند. برای هر استخری دو استراتژی باز و یا بسته بودن وجود دارد. فرض می‌شود که x_1 و x_2 به ترتیب فرکانس استراتژی‌های باز و بسته باشد و واضح است که $x_1 + x_2 = 1$. در نتیجه میانگین بهره استخرها به صورت زیر خواهد بود:

$$P_1 = x_1\left[\frac{1}{2}-\left(d-\frac{d^2}{2}\right).\frac{2m^2}{1+m}\right] + x_2(1-d+md)$$

$$P_2 = x_1[d(1-m)] + 1/2x_2$$

حال ***RD***[3] را می‌نویسیم:

$$\dot{x}_i = x_i\left(P_i - \overline{\mathrm{P}}\right), i = 1, 2$$

$$\overline{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{2} x_i(P_i)$$

[3] Replicator Dynamics

با جاگذاری و مشتق گیری به ماتریس ژاکوبین زیر می‌رسیم:

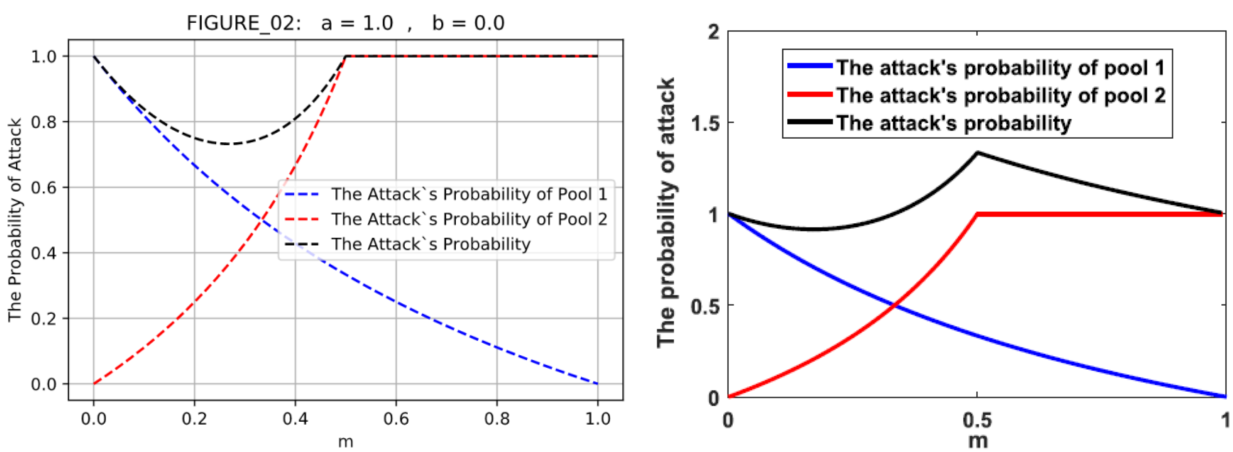
$$J_{|x_1=0,x_2=1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - d + md & 0 \\ 1 - d + md & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} + md - d \end{cases} \Rightarrow \lambda_2 < 0 \Rightarrow m < 1 - \frac{1}{2d}$$

$$\Rightarrow close\ strategy\ is\ ESS$$

نتایج شبیه سازی

مقاله با در نظر گرفتن سیستمی تشکیل شده از ۵۰۰۰ ماینر و ۵۰۰ استخر، برای ویژگی های مختلف سیستم نمودار رسم کرده است. در اینجا ما نیز با پیاده سازی روابط ذکر شده در مقاله، به نمودارهایی مشابه با نمودارهای رسم شده در مقاله رسیدیم که در این‌جا آنها را کنار هم نشان می‌دهیم.



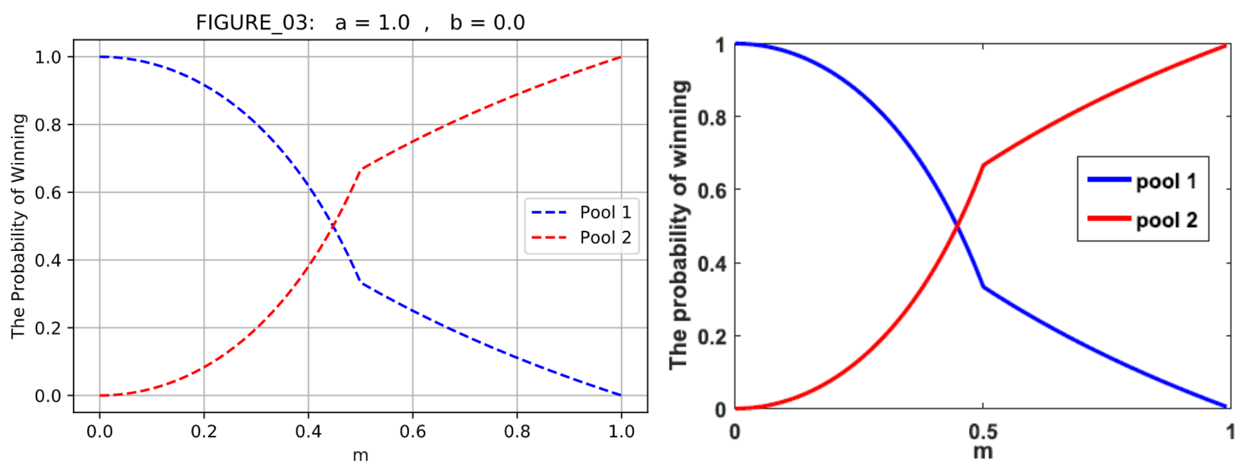
ب. شبیه‌سازی ما الف. شبیه‌سازی مقاله

شکل ۱: احتمال حمله برای استخرها در حالتی‌که: $p_2 < p_1 < p_2 + d$

اگر تعریف پیشامدهای E_i را به شکل روبرو در نظر بگیریم، به نظر می‌رسد در متن مقاله، عبارت قرمز رنگ اشتباهاً از قلم افتاده و باعث شده نمودار مشکی رنگ در شکل بالا، مقادیر بزرگ‌تر از 1 را برای احتمال نشان دهند که ما این ایراد را شناسایی و برطرف کردیم.

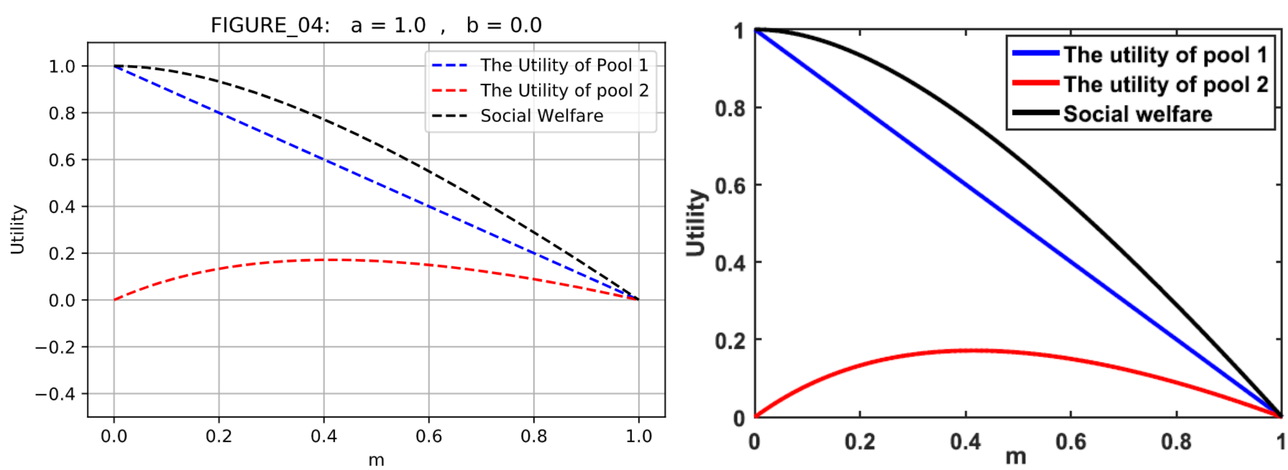
E_i: *Player i attacks.*

$$P\{attack\} = P\{E_1 \cup E_2\} = P\{E_1\} + P\{E_2\} - P\{E_1 \cap E_2\} = P\{E_1\} + P\{E_2\} - P\{E_1\}.P\{E_2\}$$



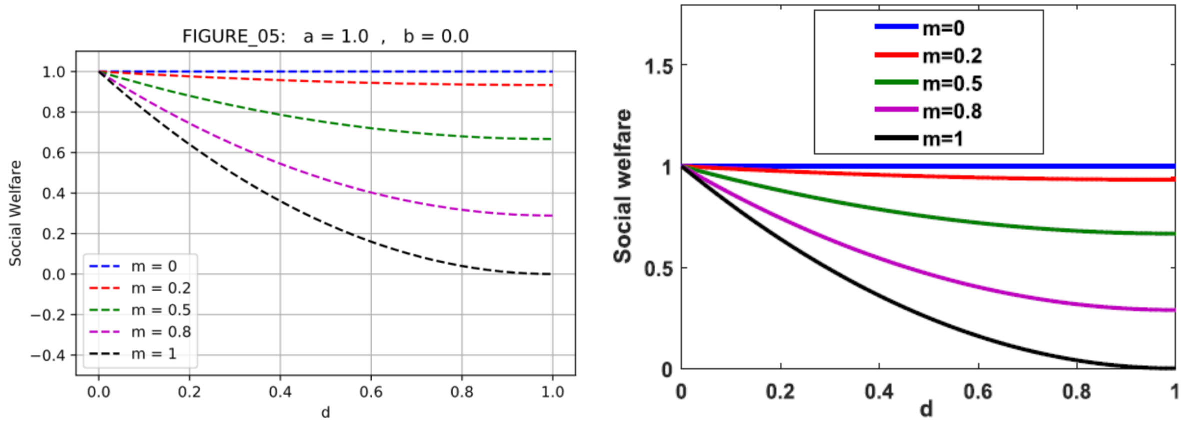
الف. شبیه‌سازی مقاله ب. شبیه‌سازی ما

شکل ۲: احتمال برد برای استخرها در حالتی که: $p_2 < p_1 < p_2 + d$



الف. شبیه‌سازی مقاله ب. شبیه‌سازی ما

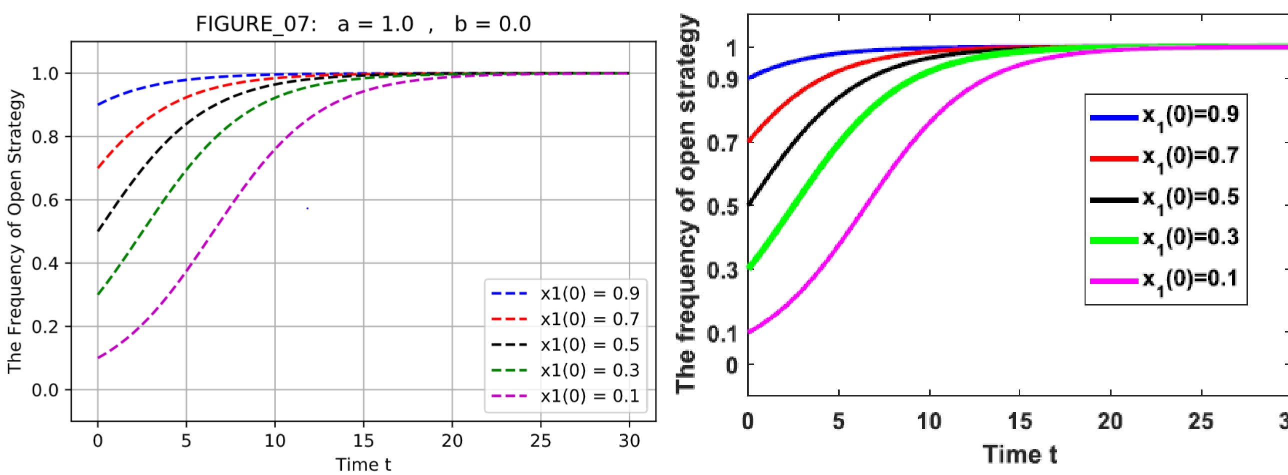
*شکل ۳: **Utility** استخرها در حالتی که:* $p_2 < p_1 < p_2 + d$



الف. شبیه‌سازی مقاله

ب. شبیه‌سازی ما

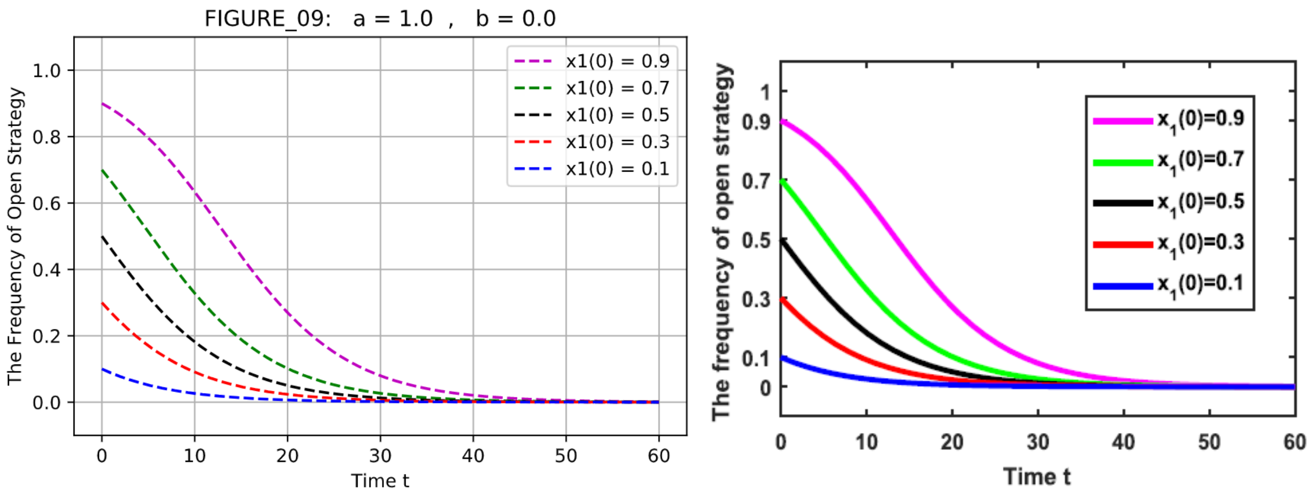
شکل ۴: رفاه اجتماعی سیستم



الف. شبیه‌سازی مقاله

ب. شبیه‌سازی ما

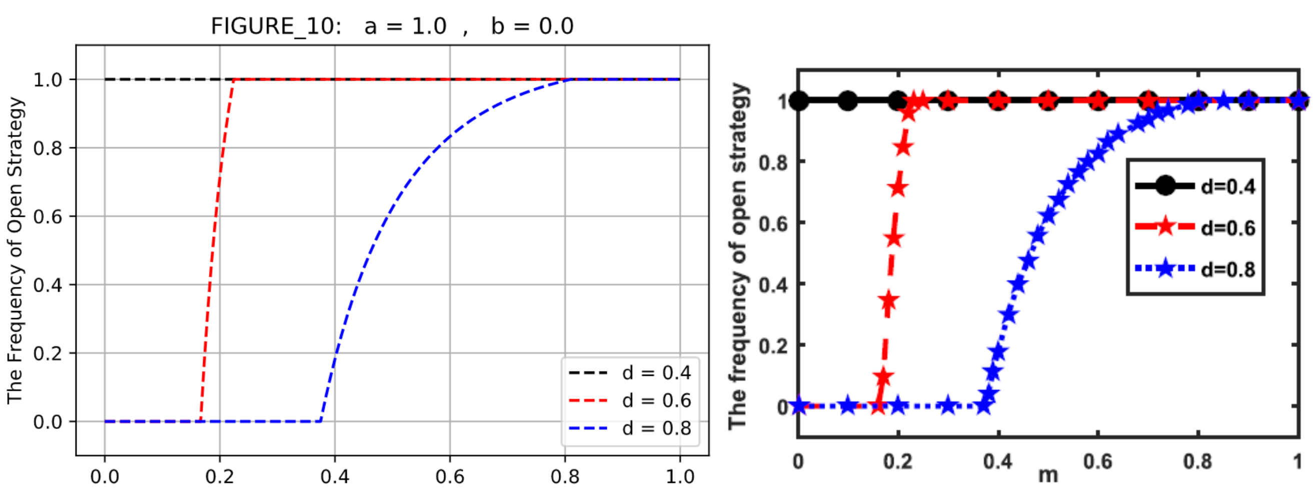
شکل ۵: تکامل جمعیت استخر : $d = 0.2\,,\quad m = 0.2$



الف. شبیه‌سازی مقاله

ب. شبیه‌سازی ما

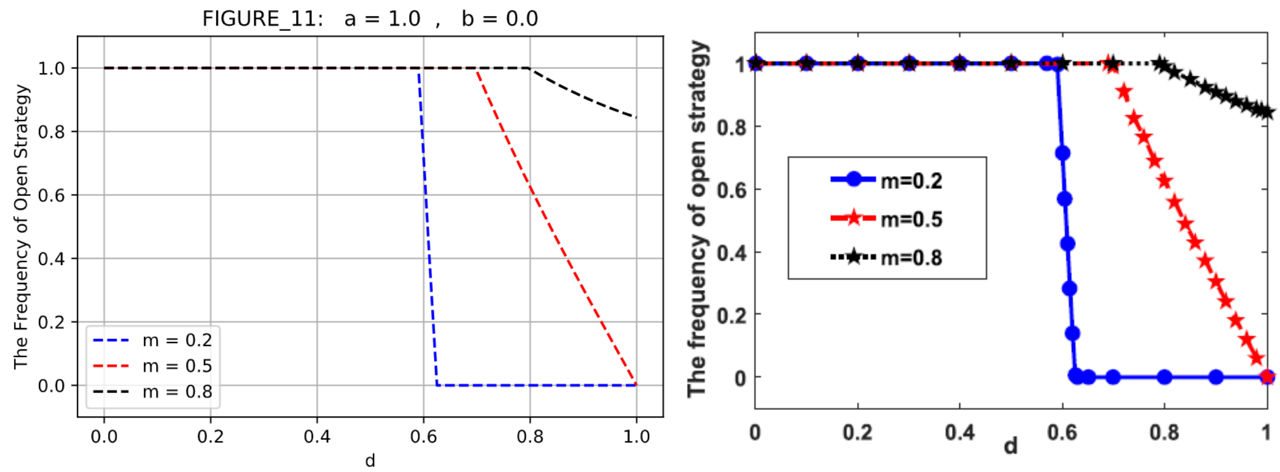
شکل ۶: تکامل جمعیت استخر : $d = 0.8\,, \quad m = 0.2$



الف. شبیه‌سازی مقاله

ب. شبیه‌سازی ما

شکل ۷: فرکانس استراتژی **O** به ازای **d** های مختلف



الف. شبیه‌سازی مقاله

ب. شبیه‌سازی ما

شکل ۸: فرکانس استراتژی **O** به ازای **m** های مختلف

ایده‌های تکمیلی

پس از مطالعه مقاله و شبیه‌سازی آن، تعدادی مسیر برای ادامه آن در نظر گرفتیم و درنهایت دو مسیر را برای ادامه دادن انتخاب کردیم.

- هر دو مرحله بازی برای تعداد دو استخر در نظر گرفته شده‌اند. درحالی که در واقع تعداد استخرها از این مقدار بیشتر است. یک مسیر منطقی برای ادامه مقاله این است که راه‌حل مسئله را برای تعداد بیشتری از استخرها تعمیم دهیم.
- در مدل‌سازی مقاله استخری که توان بیشتری دارد برنده شده و جایزه بلاک را دریافت می‌کند، درحالی‌که در واقعیت این امکان نیز وجود دارد که استخر ضعیف‌تر برنده شود که در مقاله این احتمال در نظر گرفته نشده است. برای ادامه کار می‌توان احتمال ثابتی نیز برای برنده شدن استخر ضعیف‌تر در نظر گرفت.
- در مورد بالا در نظر گرفته شده‌است که در همه موارد، استخر با توان کمتر یک احتمال ثابت برای برد دارد. اما در واقعیت این احتمال در هر حالت متفاوت بوده و بستگی به توان دو استخر دارد. می توان احتمال برد هر استخر را متناسب با توان محاسباتی آن در نظر گرفت.
- در مقاله برای بررسی بازی مرحله اول از پایداری تکاملی استفاده شده است. می‌توان به جای این روش از **fictitious play** استفاده کرد. طوری که در هر مرحله با توجه به نتایج همان مرحله، استخرها انتخاب کنند که باز یا بسته باشند.
- در مقاله مقدار **d** که همان ضرر وارد شده به توان محاسباتی استخر قربانی است در تمامی حالات یکسان انتخاب شده است درحالی‌که این مقدار به تعداد ماینرهای اولیه هر استخر و همچنین توان محاسباتی‌ای که استخر حمله‌گر به عنوان ماینرهای نفوذی وارد استخر قربانی می‌کند بستگی دارد.

پیاده‌سازی ایده تکمیلی اول

در این بخش می‌خواهیم یکی از فرضیات سخت‌گیرانه مقاله را ریلکس کرده و اثرات آن را بررسی کنیم. در فرایند ماینینگ که بین دو استخر رخ می‌دهد، فرض شده‌بود که استخر قوی‌تر همواره برنده است و جایزه‌ای به مقدار **R = 1** برنده می‌شود. شرایطی که تا حدودی به واقعیت نزدیک‌تر است، این است که احتمالی نیز برای برنده شدن استخر ضعیف‌تر در نظر بگیریم. یعنی به جای این که استخر قوی‌تر با احتمال ۱ و استخر ضعیف‌تر با احتمال ۰ برنده شود، احتمال برنده شدن استخر قوی‌تر برابر با **a** و احتمال برنده شدن استخر ضعیف‌تر **b = 1 – a** است که **a > b**. این مسئله تعمیم ساده‌ای از تحلیل‌های خود مقاله است و درحالتی که **a = 1** دقیقا حالت مطرح شده در مقاله را خواهیم داشت.

بازی مرحله دوم

بازی ماتریسی‌ای که قبل‌تر در توضیح مقاله در توضیح مرحله دوم شرح داده شده بود، حال به شکل زیر در می‌آید.

	A	N
A	**a – m, b - m**	**a – m, b + m**
N	**b + m, a – m**	**a, b**

حال استراتژی مخلوط بازی بالا را بدست می‌آوریم.

$$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{m})\boldsymbol{\eta}_1+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{m})(\mathbf{1}-\boldsymbol{\eta}_1)=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{m})\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{b}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\eta}_1)$$
$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{m})\boldsymbol{\eta}_2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{m})(\mathbf{1}-\boldsymbol{\eta}_2)=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{m})\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{a}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\eta}_2)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{m}},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{m}}$$

و تعادل نش مخلوط بازی به صورت زیر می‌شود.

$$\boldsymbol{\sigma}=(\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2)=\big((\boldsymbol{\eta}_1,\mathbf{1}-\boldsymbol{\eta}_1),(\boldsymbol{\eta}_2,\mathbf{1}-\boldsymbol{\eta}_2)\big)$$

اگر ماتریس سود بازیگران ۱و ۲ را به ترتیب با ماتریس‌های **A** و **B** نشان دهیم داریم:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{m} & \boldsymbol{a}-\boldsymbol{m}\\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{m} & \boldsymbol{a}\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{m} & \boldsymbol{b}+\boldsymbol{m}\\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{m} & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}$$

در نتیجه متوسط سود بازیگران در صورتی‌که هر دو استراتژی نش مخلوط را بازی کنند برابر خواهد بود با:

$$\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{\sigma}_1^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma}_2=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{m}$$

$$u_2 = \sigma_1^T B\sigma_2 = \frac{ab + am - b^2 - m^2}{a - b + m}$$

نقطه بیشینه سود بازیگر ۲ که در مقاله به ازای $m = \sqrt{2} - 1$ رخ داده بود، اکنون به این ترتیب تغییر می‌کند:

$$\frac{du_2}{dm} = 0 \rightarrow (a - m)(a - b + m) = (ab + am - b^2 - m^2)$$

$$\rightarrow \ m^2 + 2(a - b) - (a - b)^2 = 0 \rightarrow$$

$$m = (\sqrt{2} - 1)(a - b)$$

بازی مرحله اول

مقادیر جدید سود در بازی مرحله اول به صورت زیر است:

$$u_{oo} = \left(d - \frac{d^2}{2}\right)(a - m) + \left(\frac{1}{2} - d + \frac{d^2}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - d + \frac{d^2}{2}\right)b$$

$$+ \left(d - \frac{d^2}{2}\right)\left(\frac{ab + am - b^2 - m^2}{a - b + m}\right)$$

$$= \left(d - \frac{d^2}{2}\right)\left(a - m + \frac{ab + am - b^2 - m^2}{a - b + m}\right) + \frac{(1 - d)^2}{2}$$

$$u_{oc} = d(b + m) + (1 - d)a$$

$$u_{co} = d(a - m) + (1 - d)b$$

$$u_{cc} = \frac{1}{2}$$

و بازی ماتریسی به صورت زیر خواهد بود:

	O	C
O	u_{oo}, u_{oo}	u_{oc}, u_{co}
C	u_{co}, u_{oc}	u_{cc}, u_{cc}

برای شبیه سازی معادله **RD** و نیز بررسی این که کدام یک از تعادل‌های نش بازی تکاملی فوق، می‌تواند **ESS** باشد، روابط زیر را داریم:

I. $u_{oo} > u_{co} \rightarrow (O, O)$ *is ESS*

II. $u_{cc} > u_{oc} \rightarrow (C, C)$ *is ESS*

III. **No pure Nash equilibrium.**

برای نشان دادن حالت‌های سه‌گانه بالا، کدی را نوشته‌ایم که هربار به ازای یک مقدار ثابت برای **a** و **b**، فضای تمام زوج مرتب‌های **(m, d)** ممکن را بررسی می‌کند تا ببیند که آن **(m, d)** به‌خصوص منجر به کدام یک از سه حالت گفته شده می‌شود.

شبیه سازی

نواحی‌ای که با رنگ سبز مشخص شده‌اند، نشان دهنده **(m, d)**هایی است که به ازای آنها، **(O, O)** استراتژی پایدار تکاملی خواهد شد.

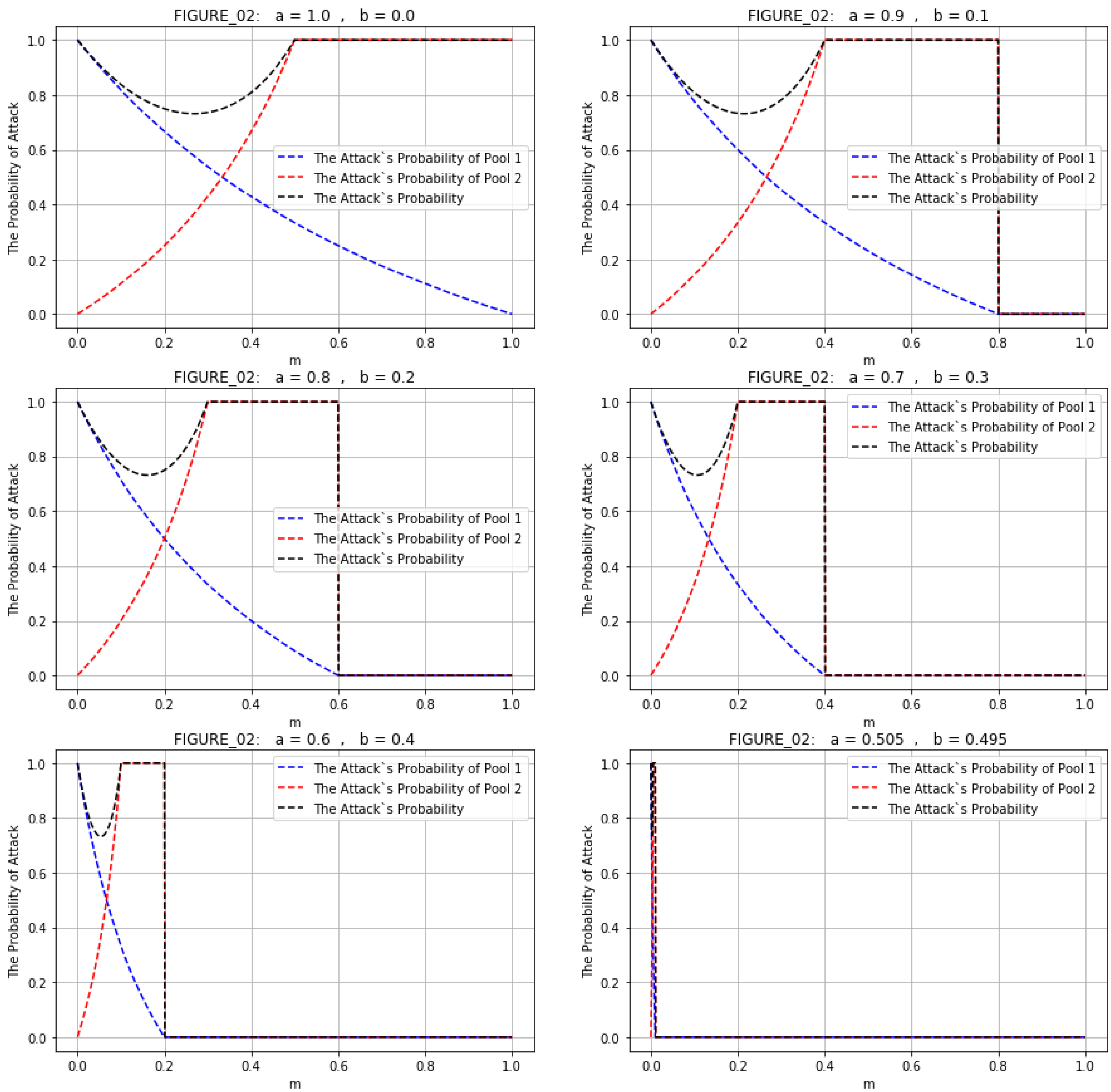
ناحیه صورتی نشان دهنده **(m, d)**هایی است که به ازای آنها، **(C, C)** استراتژی پایدار تکاملی خواهد شد.

و ناحیه زرد نیز تمام **(m, d)**هایی است که به ازای آنها، استراتژی پایدار تکاملی یک استراتژی مخلوط شامل درصدی از **O** و درصدی از **C** است.

این نمودار سه رنگ به ازای **a** و **b** های مختلف ترسیم شده‌اند. معادله **RD** را نیز به ازای **a** و **b** های مختلف و به ازای شرایط یکسان با مقاله شبیه‌سازی و ترسیم کرده‌ایم.

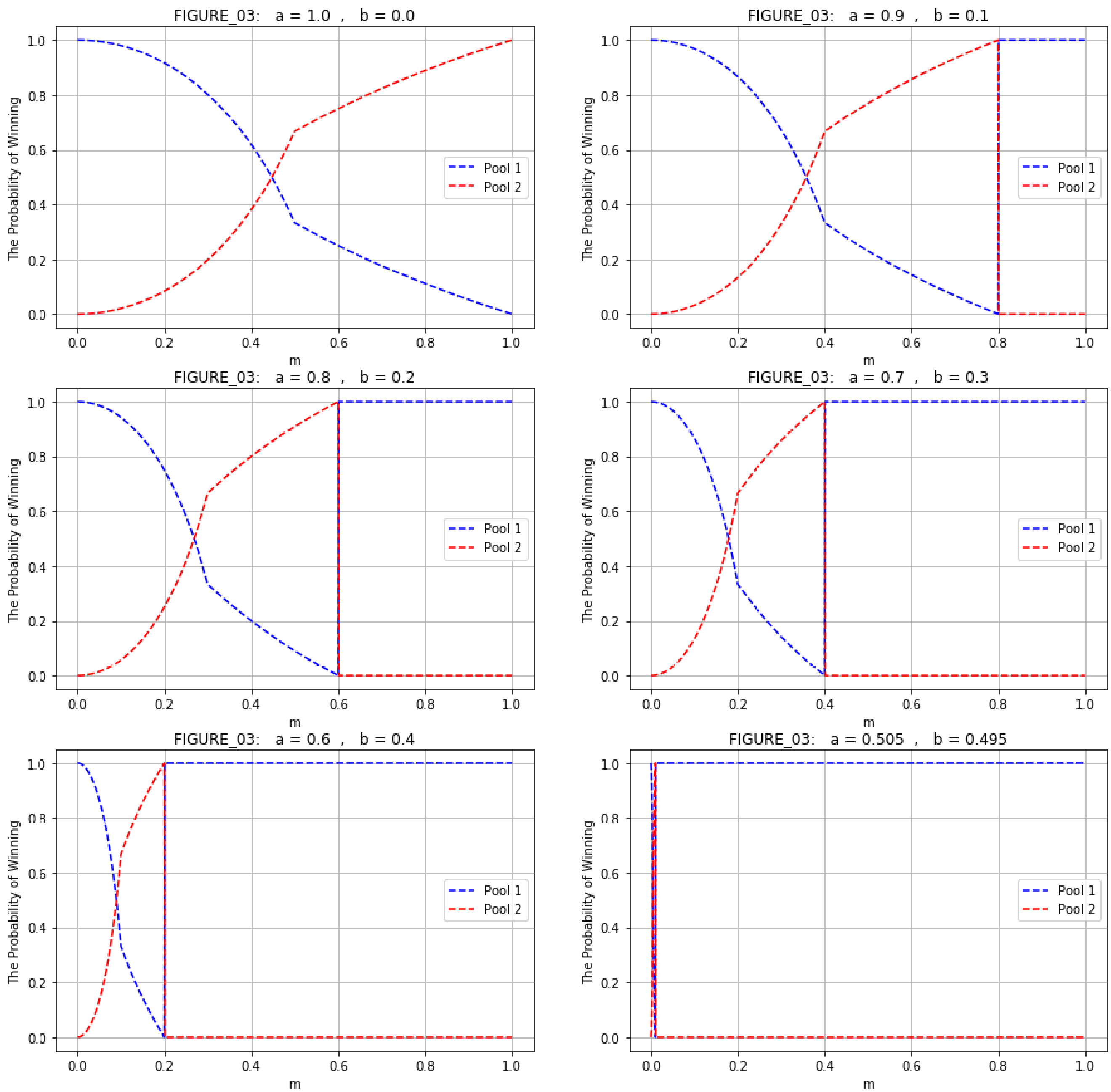
روابط پیچیده غیرخطی که در محاسبات ظاهر می‌شوند ما را تشویق می‌کنند که به جای تمرکز روی روابط ریاضی، به شبیه‌سازی‌ها رجوع کرده و تغییرات هر نمودار به ازای **a** و **b** های مختلف تفسیر کنیم.

توجه داریم که هر چقدر **a** کوچک‌تر شود به معنای آن است که شانس برنده شدن بازیگر قوی‌تر کاهش می‌یابد و بالعکس. برای تفسیر نمودارها روند پیش روی ما همواره کاهش **a** است.



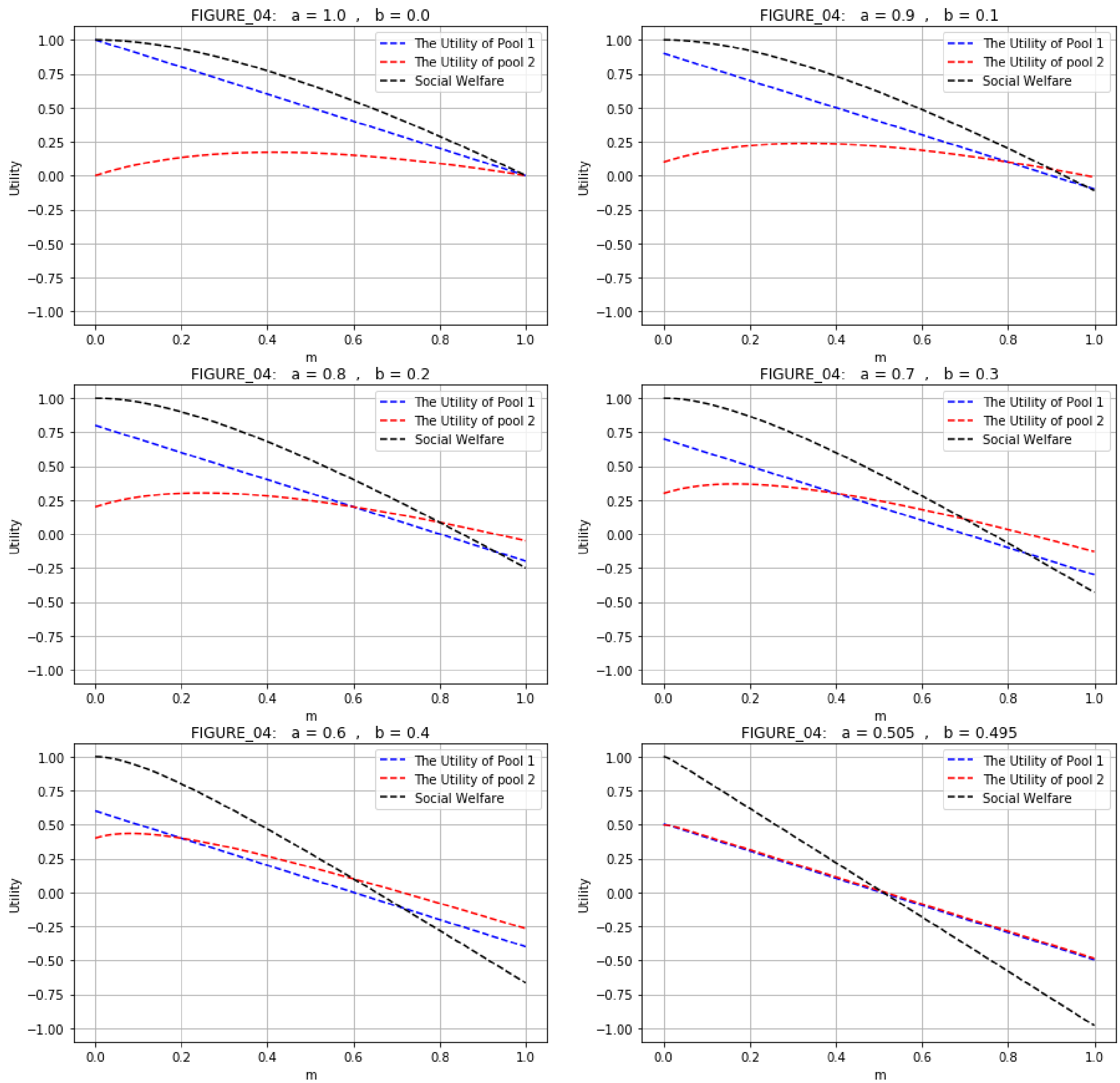
شکل ۹: احتمال حمله برای استخرها در حالتی‌که: $p_2 < p_1 < p_2 + d$

در شکل ۹ هرچه **a** کوچک‌تر شود، به ازای بازه بزرگ‌تری از جریمه‌ی **m**، احتمال حمله صفر خواهد بود که نتیجه درستی است. در واقع وقتی به سمت برابری سود دو بازیگر میل کنیم انگیزه حمله رفته کاهش می‌یابد.



شکل ۱۰: احتمال برد برای استخرها در حالتی که: $p_2 < p_1 < p_2 + d$

در شکل ۱۰ هرچه **a** کوچک‌تر شود به ازای بازه بزرگتری از جریمه‌ی**m**، بازیگر قوی برنده، و بازیگر ضعیف بازنده خواهد بود.

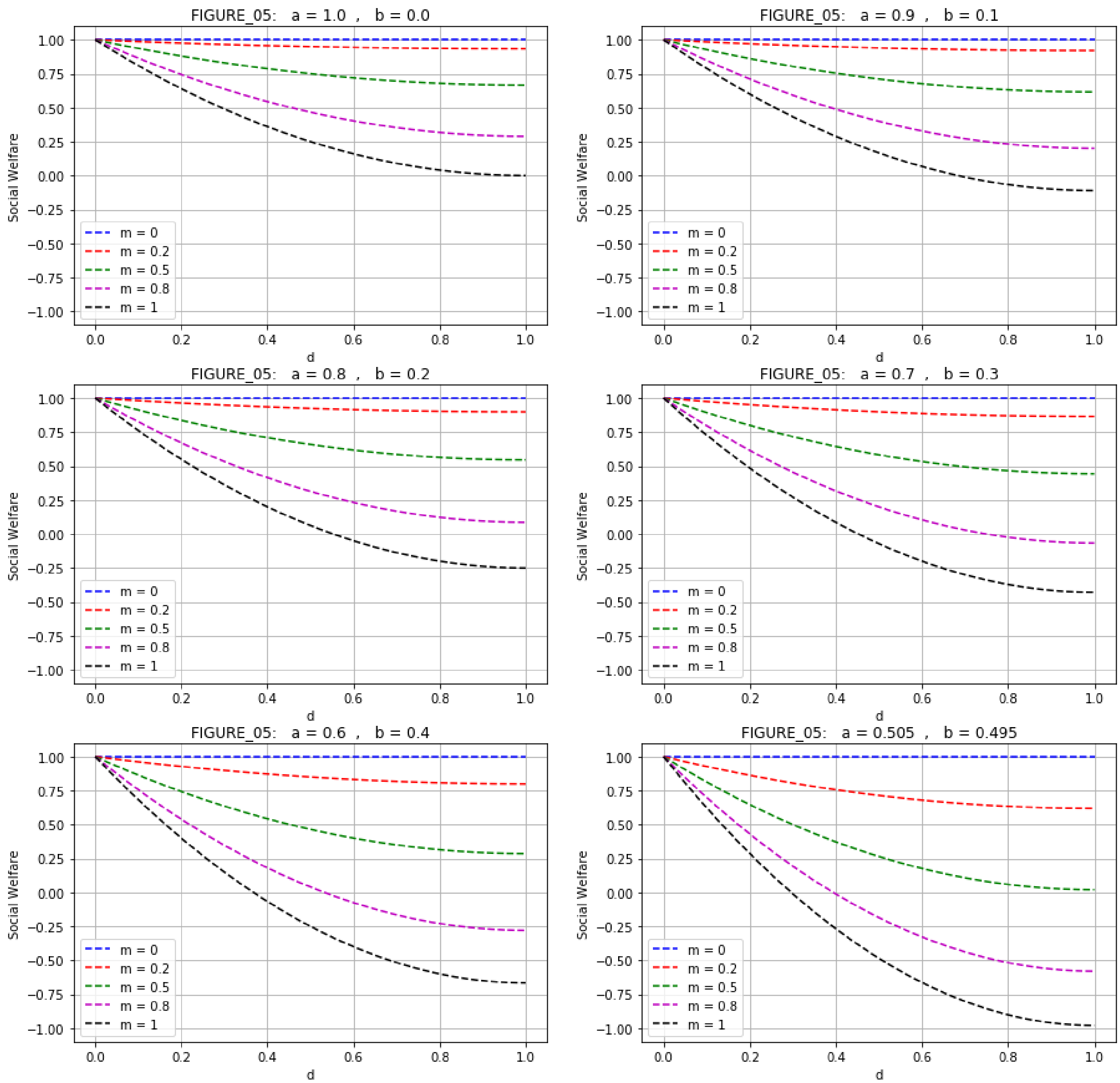


شکل ۱۱: **Utility** استخرها در حالتی‌که: $p_2 < p_1 < p_2 + d$

در شکل ۱۱ هرچه **a** کوچک‌تر شود، سود بازیگران (نمودارهای آبی و قرمز) به یکدیگر نزدیک می‌شود. به طوری که در $a = b = \frac{1}{2}$ دو نمودار بر هم منطبق می‌شوند.

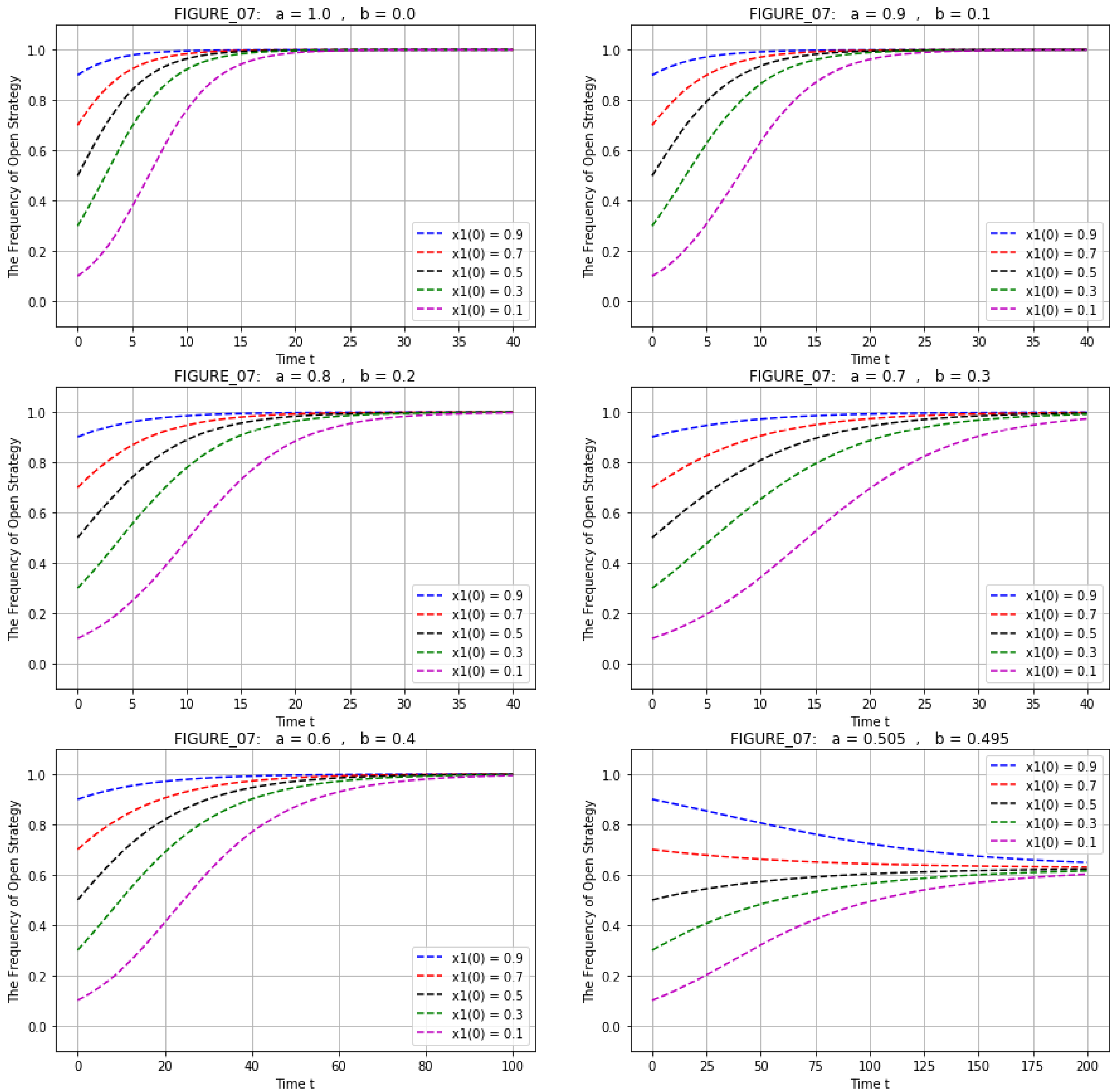
$$u_1|_{a=b=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - m \ , u_2|_{a=b=\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}m - \frac{1}{4} - m^2}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + m} = \frac{1}{2} - m$$

که باز هم نتیجه قابل انتظاری است: برابری شرایط به برابری سودها می‌انجامد.



شکل ۱۲: رفاه اجتماعی سیستم

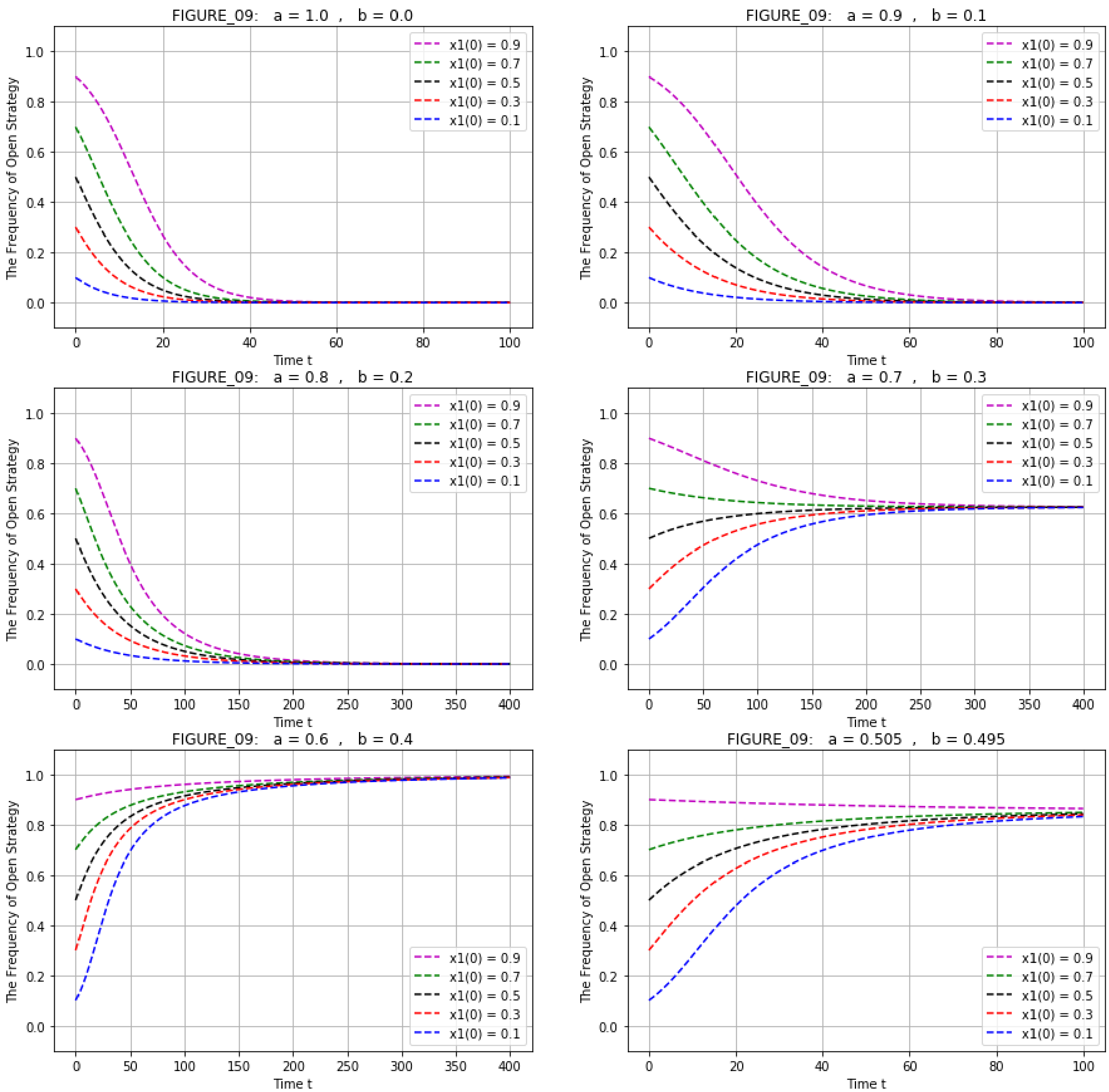
به ازای هر **d** و **m** مشخص، کاهش **a** باعث کاهش رفاه جامعه شده است. ضمنا نکته جالب اینکه به‌ازای جریمه‌های بسیار کوچک ($m \to 0$)، مستقل از مقادیر **a** و **b**، رفاه اجتماعی حداکثر مقدار خود را داشته و برابر با ۱ است.(منظور خطوط آبی رنگ در هر نمودار است.)



شکل ۱۳: تکامل جمعیت استخر : $d = 0.2\,, \quad m = 0.2$

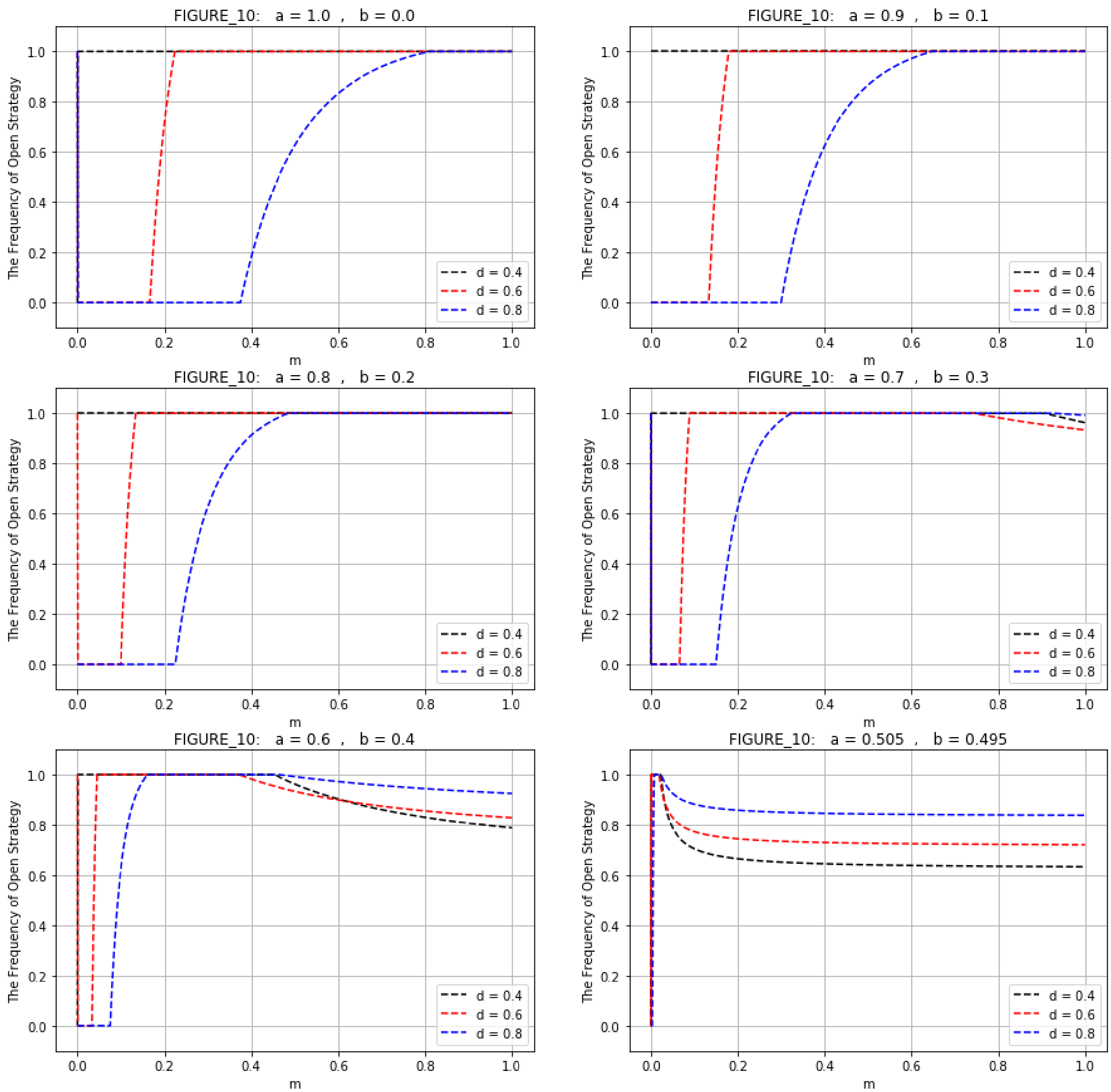
مشاهده می‌شود که برای برخی مقادیر a و b، استراتژی پایدار تکاملی چیزی غیر از (O, O) بدست آمده است. مثلا در شکل آخر،فراوانی استراتژی (یا گونه) O، چیزی حدود ۰.۶۵ است. رخ دادن همین حالت بود که این انگیزه را ایجاد کرد که بررسی کنیم به ازای هر a و b دلخواه و البته ثابت، هرکدام از زوج مرتب‌های (m, d) منجر به چه نوع استراتژی پایدار تکاملی‌ای خواهند شد؟

نتیجه‌ی مفصل این بررسی‌ها در شکل ۱۷ آمده است.

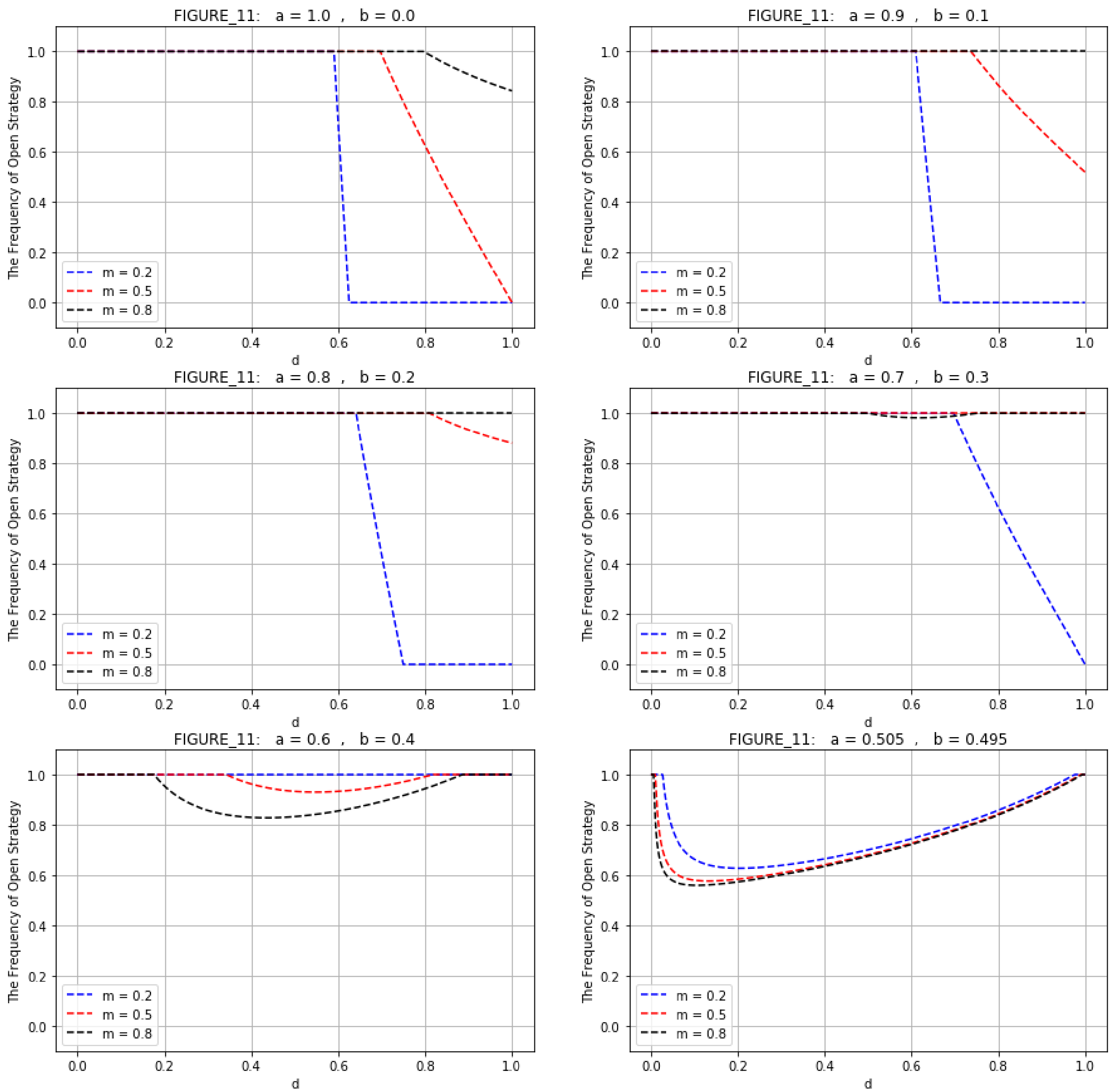


شکل ۱۴: تکامل جمعیت استخر : $d = 0.8 , \quad m = 0.2$

توضیحات شکل ۱۴ نیز مشابه با شکل ۱۳ است. نکته تکمیلی این که به خاطر متفاوت بودن سرعت همگرایی در هر کدام از ۶ حالت، برای نمایش بهتر شکل‌ها، محور افقی را در هر شکل متفاوت انتخاب کرده‌ایم که برای بررسی‌های احتمالی، بهتر است به این نکته توجه شود.



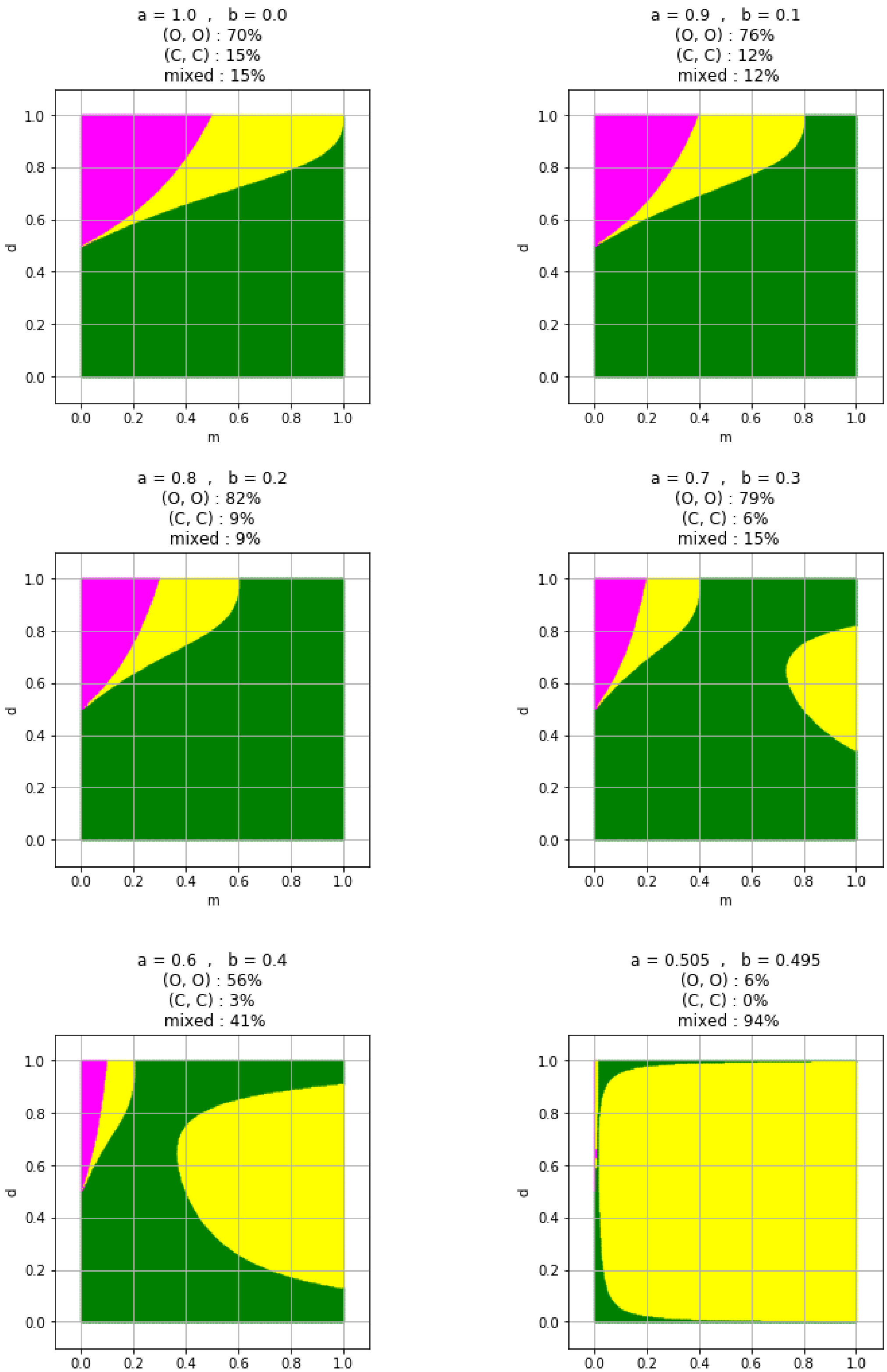
شکل ۱۵: فرکانس استراتژیO به ازای d های مختلف



شکل ۱۶: فرکانس استراتژی**O** به ازای ***m*** های مختلف

در شکل ۱۵، **d** های ثابت و تمام **m**های ممکن و در شکل ۱۶، **m** های ثابت و تمام **d** های ممکن را بررسی کرده‌ایم تا مشخص شود در هر حالت به ازای **a** و **b** های مختلف، نقطه همگرایی معادله **RD** چه خواهد بود. یعنی فراوانی استراتژی **O** (و متمم آن که فراوانی استراتژی یا گونه **C** است.) به چه عددی میل خواهد کرد.

واضح است در مواردی که یک نمودار تماما منطبق بر خط افقی **y = 1** است، به معنای **ESS** بودن استراتژی **(O, O)** است. به طور معادل وقتی که یک نمودار تماما منطبق بر خط افقی **y = 0** است، به معنای **ESS** بودن استراتژی **(C, C)** است. و وقتی هیچ یک ازین دو حالت رخ ندهد، استراتژی پایدار تکاملی یک استراتژی مخلوط شامل درصدی از **O** و درصدی از **C** خواهد بود. می‌توان حالت‌های موجود در شکل‌های ۱۵و شکل‌های ۱۶ را با شکل ۱۷ هم مطابقت داد.



شکل ۱۷: بررسی استراتژی‌های تکاملی بر حسب ***m*** *و* ***d***

در شکل ۱۷، در هرکدام از مقادیر ثابت برای **a** و **b** ، مربعی مشاهده می‌شود که شامل سه رنگ است: سبز، صورتی و زرد. همان‌طور که قبلا هم گفته شد مثلا ناحیه سبز نشان‌دهنده **(m, d)** هایی است که در آن **a** و **b**ی مشخص منجر به استراتژی پایدار تکاملی **(O, O)** میشوند و همینطور برای سایر نواحی رنگی تعبیر خاص خودشان را داریم.

برای مثال: در شکل ۱۵ حالتی را که **a = 1** و **b = 0** است را در نظر بگیرید. در نمودار قرمز رنگ این قسمت که مربوط به حالت **d = 0.6** است، در نقطه‌ای که **m = 0.2** باشد، فراوانی استراتژی **O** برابر با **0.8** است. یعنی یک استراتژی نش مخلوط **ESS (O = 0.8, C = 0.2)** بوده است. حال در شکل پایانی حالت **a = 1** و **b = 0** را در نظر بگیرید. به وضوح دیده می‌شود که نقطه‌ی $(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = (\mathbf{0.2}, \mathbf{0.6})$ ، در ناحیه زرد رنگ قرار دارد. یعنی به ازای این **a** و **b** و این **m** و **d**، با یک استراتژی پایدار تکاملی مخلوط مواجهیم. ملاحظه می‌شود که با کاهش **a**، مساحت ناحیه سبز رنگ**(O, O)**، ابتدا افزایش و سپس کاهش یافته است. مساحت ناحیه صورتی رنگ**(C, C)**، به طور یکنوا کاهش یافته است. و مساحت ناحیه زرد رنگ**(mixed)**، ابتدا کاهش و سپس افزایش یافته است.

به طور مثال هر چه مساحت ناحیه سبز بیشتر باشد، به معنای آن است که در درصد مواقع بیشتری (بر حسب انتخاب‌های ممکن برای **m** و **d**)، استراتژی **(C, C)** پایدار تکاملی خواهد بود.همین مطالب را می‌توان برای سایر نواحی نیز گفت.

یک نتیجه جالب که از شش شکل اخیر به دست می‌آید این است که نقطه‌ی **(m, d) = (0, 0)**، مستقل از مقدار **a**، همواره در ناحیه سبز واقع شده و به تعادل **(O,O)** منجر می‌شود. وقتی **m** بسیار کوچک باشد، بی‌تاثیر بودن حمله برای بازیگر حمله‌کننده نمود پیدا می‌کند و وقتی **d** بسیار کوچک باشد، بی‌تاثیر بودن حمله برای بازیگر حمله‌شونده نمود پیدا می‌کند.

منظور از حمله‌کننده، کسی است که حمله می‌کند و منظور از حمله‌شونده، کسی است که مورد حمله قرار می‌گیرد.

نتیجه‌ی فوق نشان می‌دهد در چنین حالتی که **m** و **d**، هر دو بسیار کوچک باشند، فرآیند تکامل به گونه‌ای پیش می‌رود که به خاطر امنیت بالا در مقابل حمله، در آن همه مایل‌اند **Open** بازی کنند.

به طور مشابه نقطه‌ی **(m, d) = (0, 1)** را بررسی می‌کنیم. این نقطه مستقل از **a**، همواره منجر به تعادل **(C, C)** شده است. (در شکل آخر به دلیل خطای ناشی از گرد کردن درصدها، برای **(C, C)**، عدد صفر لحاظ شده که در واقع چیزی کمتر از یک درصد بوده است و ناحیه صورتی رنگ با مساحت بسیار کم، البته حضور دارد). باز هم دلیل واضح است: وقتی **d=1** باشد، حمله شونده همواره بازنده است، چون حداکثر ضرر را متحمل می‌شود. از طرفی **m=0** است و حمله‌کردن، هیچ نتیجه‌ی سوئی برای حمله‌کننده به دنبال ندارد. پس چرا حمله نکند؟؟؟ نتیجه این خواهد بود که هر دو بازیگر تمایل به حمله دارند و نتیجه‌ی بازی تکاملی به سمت **(C, C)** میل خواهد کرد.

پیاده‌سازی ایده تکمیلی دوم

در این بخش، می‌خواهیم شرایط مسئله را کمی واقع گرایانه‌تر کنیم. به این صورت که سعی می کنیم اطلاعات استخرها از شرایط مسئله را به حداقل برسانیم و اکثر متغیر هایی را که در مقاله دانسته در نظر گرفته شده بود، متغیر تصادفی فرض کردیم. علاوه بر این شانس برنده شدن هر استخر را نیز مستقیما متناظر با توان آن در نظر گرفتیم.

دو بازیگر (استخر) با توان‌های **P** و **Q** در نظر می‌گیریم. از آنجا که رفتار این دو بازیگر متقارن است تنها در مورد دومی توضیح می‌دهیم. تمام تحلیل‌ها و روابط برای بازیگر اول نیز صادق است. فرض می‌کنیم **Q** یک متغیر تصادفی یکنواخت روی بازه $[Q_{min}, Q_{max}]$ باشد. می‌خواهیم یک نگاشت خطی (نوعی نرمالیزه سازی) روی **Q** اعمال کنیم. به این شکل که **q = AQ** بوده و در این رابطه پارامتر **Q** مقدار توان نرمالیزه نشده و پارامتر **q** مقدار توان نرمالیزه شده است. از آمار و احتمال می‌دانیم که **q** نیز یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت خواهد بود. می‌خواهیم کاری کنیم که طول بازه ساپورت متغیر تصادفی **q** برابر واحد شود. یعنی $\boldsymbol{q \sim U[L, L+1]}$ که در آن **L** کمترین مقدار ممکن برای **q** بوده و **L+1** بیشترین مقدار برای **q** خواهد بود.

در این صورت داریم:

$$\boldsymbol{L = AQ_{min}}$$

$$\boldsymbol{L + 1 = AQ_{max}}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\boldsymbol{A = \frac{1}{Q_{max} - Q_{min}}}$$

یعنی:

$$\boldsymbol{q = \frac{1}{Q_{max} - Q_{min}} Q}$$

از طرفی داشتیم:

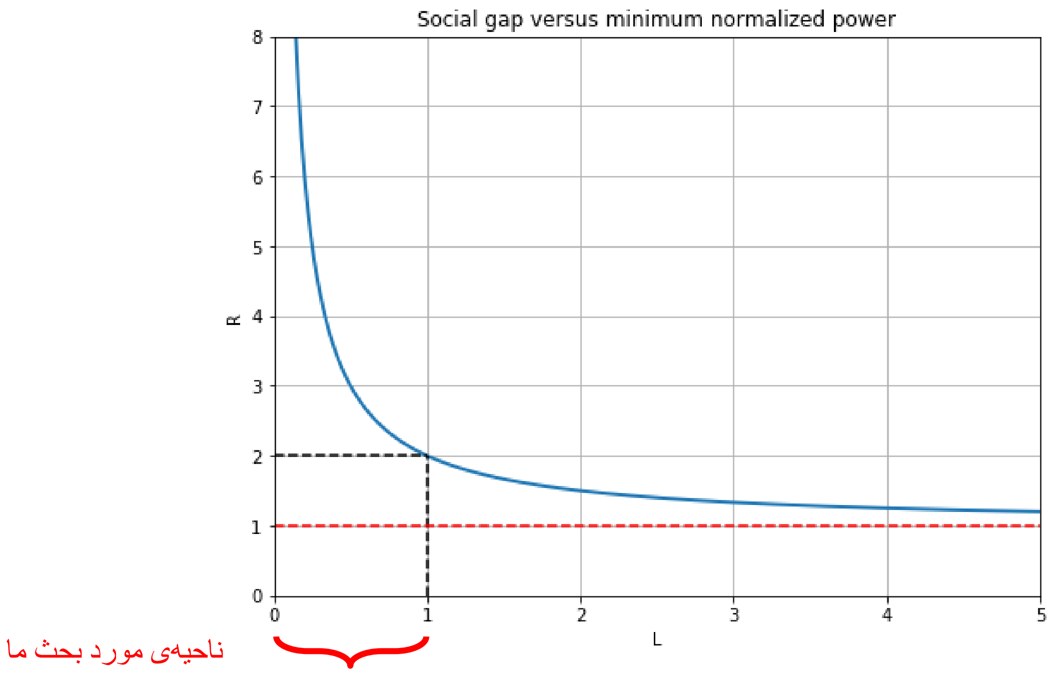
$$\boldsymbol{q_{min} = L\,, q_{max} = L + 1 \to q \sim U[L, L+1]}$$

$$\boldsymbol{R \triangleq \frac{q_{max}}{q_{min}} = \frac{Q_{max}}{Q_{min}} = \frac{L+1}{L}}$$

در رابطه‌ی بالا R چه مفهومی دارد و ارتباط آن با L (کمترین توان نرمالیزه شده) چیست؟

R که نسبت بین بیشترین و کمترین توان است به نوعی نشان دهنده فاصله یا اختلاف طبقاتی در جامعه متشکل از استخرهاست. هرچه R بیشتر باشد، اختلاف طبقاتی بیشتر و هرچه R کمتر باشد اختلاف طبقاتی کمتر است.

اما رابطه بین L و R چگونه است؟ مشاهده می‌شود که رابطه بین L و R یک رابطه معکوس است.



*شکل ۱۸: رابطه بین **R** و **L***

ما علاقمندیم جوامعی را بررسی کنیم که در آن‌ها نسبت بین بیشترین و کمترین توان (یا در واقع همان **R**)از حد مشخصی کمتر نباشد. (چون وقتی جامعه از حد بیشتری یک‌دست باشد، این تحلیل و بررسی‌ها بی‌معنی به نظر می‌رسد). این مقدار آستانه برای **R** را برابر با ۲ درنظر می‌گیریم. یعنی تنها حالات $R \geq 2$ برای ما مطلوبند. یا برحسب **L**، تنها حالات $L \leq 1$ را بررسی می‌کنیم.

$$R = \frac{L+1}{L} \geq 2 \rightarrow L+1 \geq 2L \rightarrow L \leq 1$$

ازطرفی **L** ذاتا نامنفی است. پس $0 \leq L \leq 1$.

از رابطه معکوس **L** و **R** نتیجه می‌شود که هرچه **L** کمتر باشد. اختلاف طبقاتی بیشتر و هرچه **L** بیشتر باشد، اختلاف طبقاتی کمتر است. حالت حدی $L \rightarrow 0$ متناظر با بیشترین اختلاف طبقاتی $R \rightarrow \infty$ بوده و حالت $L \rightarrow 1$ نیز معادل کمترین اختلاف طبقاتی مجاز $R = 2$ است.

فرض میکنیم هر استخری که مورد حمله قرار گیرد مقدار ثابتی از توان نرمالیزه آن کم شود. این مقدار ثابت را برابر با کمترین توان موجود در جامعه در نظر می‌گیریم (یعنی **L**). با این توضیح اگر استخری که توان نرمالیزه نشده‌ی **Q** ، و توان نرمالیزه شده‌ی **q** دارد مورد حمله قرار بگیرد توان موثر آن عبارت است از: $q_e \triangleq q - L$ و اگر مورد حمله قرار نگیرد توان موثر آن برابر با $q_e \triangleq q$ است. برای نزدیک شدن به وضعیت واقعی فرض می‌کنیم شانس برنده شدن

در فرایند استخراج یک بلوک متناسب با توان موثر باشد. ضمنا جریمه (m) را هم یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال دلخواه در نظر می‌گیریم که البته واضح است که بازه ساپورت آن، تنها مقادیر نامنفی است. یعنی باید داشته باشیم:

$$m \in [0, \infty).$$

در این‌جا آماده‌ایم تا یک بازی بیزی را تعریف کنیم. در این بازی تایپ هر بازیگر مقدار توان نرمالیزه شده‌ی اوست. بازیگران از تایپ دیگران اطلاع دقیق ندارند و تنها می‌دانند که یک متغیر تصادفی روی بازه‌ی [L, L+1] است. قاعدتا بازیگران از مقدار L نیز مطلع هستند . استراتژی هر بازیگر می‌تواند یکی از دو انتخاب A یعنی حمله و یا N یعنی عدم‌حمله باشد.

پس از انتخاب استراتژی برای هر بازیگر هرکدام با توجه به توان موثرشان (وابسته به این که مورد حمله قرار گرفته‌اند یا نه.)، اقدام به استخراج بلاک می‌کنند و متناسب با توان موثرشان از جایزه کل که مقدار واحد دارد، سهم می‌برند. اگر هر دو حمله‌کنند، هر دو جریمه می‌شوند و اگر فقط یکی حمله کند، حمله کننده به میزان m جریمه می‌شود و قربانی به میزان m پاداش می‌گیرد. با توجه به توضیحات و فرض‌های گفته شده، جدول payoff ها به شرح زیر است. (تایپ بازیگر ۱ را با p و تایپ بازیگر ۲ را با q نشان داده‌ایم.)

	A	N
A	$\frac{p_e}{p_e+q_e}-m, \frac{q_e}{p_e+q_e}-m$	$\frac{p_e}{p_e+q_e}-m, \frac{q_e}{p_e+q_e}+m$
N	$\frac{p_e}{p_e+q_e}+m, \frac{q_e}{p_e+q_e}-m$	$\frac{p_e}{p_e+q_e}, \frac{q_e}{p_e+q_e}$

یا به طور معادل:

	A	N
A	$\frac{(p-L)}{(p-L)+(q-L)}-m, \frac{(q-L)}{(p-L)+(q-L)}-m$	$\frac{p}{p+(q-L)}-m, \frac{(q-L)}{p+(q-L)}+m$
N	$\frac{(p-L)}{(p-L)+q}+m, \frac{q}{(p-L)+q}-m$	$\frac{p}{p+q}, \frac{q}{p+q}$

با یک نمادگذاری می‌توان ماتریس سود بازیگر ۱ **(A)** و ماتریس سود بازیگر ۲ **(B)** را نمایش داد:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A_{11}} & \boldsymbol{A_{12}}\\ \boldsymbol{A_{21}} & \boldsymbol{A_{22}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha_{11}(p,q)-m} & \boldsymbol{\alpha_{12}(p,q)-m}\\ \boldsymbol{\alpha_{21}(p,q)+m} & \boldsymbol{\alpha_{22}(p,q)}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B_{11}} & \boldsymbol{B_{12}}\\ \boldsymbol{B_{21}} & \boldsymbol{B_{22}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta_{11}(p,q)-m} & \boldsymbol{\beta_{12}(p,q)+m}\\ \boldsymbol{\beta_{21}(p,q)-m} & \boldsymbol{\beta_{22}(p,q)}\end{bmatrix}$$

برای مثال:

$$\boldsymbol{\alpha_{12}(p,q)=\frac{p}{p+(q-L)}}$$

$$\boldsymbol{\beta_{22}(p,q)=\frac{q}{p+q}}$$

فرض می‌کنیم تابع چگالی احتمال توام **m** و **p** و **q** به صورت زیر باشد:

$$\boldsymbol{f_{pqm}(p,q,m)=f_p(p)f_q(q)f_m(m)}$$

یعنی این سه متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. تابع چگالی احتمال توام بالا، در واقع همان چیزی است که در بازی‌های بیزی با نام **belief** شناخته می‌شود. متغیر تصادفی **m** نیز می تواند همان مفهومی را داشته باشد که از آن به عنوان **state** یاد می‌شد. یعنی آن بخشی از عدم قطعیت که برای همه‌ی بازیگران به شکل یکسانی بروز می‌کند. توزیع **p** و **q** روی بازه‌ی **[L, L+1]** یکنواخت است اما **m** می‌تواند توزیع دلخواهی داشته باشد.

فرض کنید $\boldsymbol{a_{ij}(p)}$ و $\boldsymbol{b_{ij}(q)}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boldsymbol{a_{ij}(p)=\iint A_{ij}\,f_q(q)\,f_m(m)\,dq\,dm}$$

$$\boldsymbol{b_{ij}(q)=\iint B_{ij}\,f_p(p)\,f_m(m)\,dp\,dm}$$

که در آن $\{1,2\}\ni \boldsymbol{i}$ و $\{1,2\}\ni \boldsymbol{j}$ است. درواقع $\boldsymbol{a_{ij}}$ ها و $\boldsymbol{b_{ij}}$ ها امید ریاضی سود بازیگران است که تنها تابعی از تایپ خودشان است (یعنی نسبت به تمام **state** ها و هم چنین تمام تایپ‌های ممکن حریف میانگین گیری کرده‌ایم.) برای مثال:

$$a_{11}(p) = \iint A_{11}\, f_q(q)\, f_m(m)\, dq\, dm$$
$$= \iint (\alpha_{11}(p,q) - m) f_q(q)\, f_m(m)\, dq\, dm$$
$$= \iint \alpha_{11}(p,q) f_q(q)\, f_m(m)\, dq\, dm$$
$$- \iint m f_q(q)\, f_m(m)\, dq\, dm$$
$$= \int_{q=L}^{q=L+1} \alpha_{11}(p,q) f_q(q) dq \int_{m=0}^{m=\infty} f_m(m)\, dm$$
$$- \int_{q=L}^{q=L+1} f_q(q) dq \int_{m=0}^{m=\infty} m f_m(m)\, dm$$
$$= E_q\{\alpha_{11}(p,q)\} - E\{m\}$$

که در آن منظور از $E\{m\}$ میانگین یا امید ریاضی جریمه **m** است و منظور از $E_q\{.\}$ امید ریاضی آرگومانش نسبت به **q** است:

$$E_q\{\alpha_{11}(p,q)\} = \int_{q=L}^{q=L+1} \alpha_{11}(p,q) f_q(q) dq$$
$$E\{m\} = \int_{m=0}^{m=\infty} m f_m(m)\, dm$$

نکته جالب این که از متغیر تصادفی **m**، تنها دانستن مقدار میانگین آن برای تحلیل‌های ما کافی به‌نظر می‌رسد و نیازی به دانستن توزیع آن نداریم. قبل از مساوی اخیر، توجه داریم که دو تا از انتگرال های معین، مقداری برابر با 1 دارند و به همین دلیل ساده‌سازی کرده ایم.

در نمادگذاری از این جا به بعد، $E\{m\}$ را با **M** نشان می‌دهیم. پس برای هشت عبارت اول جدول **payoff** ها داریم:

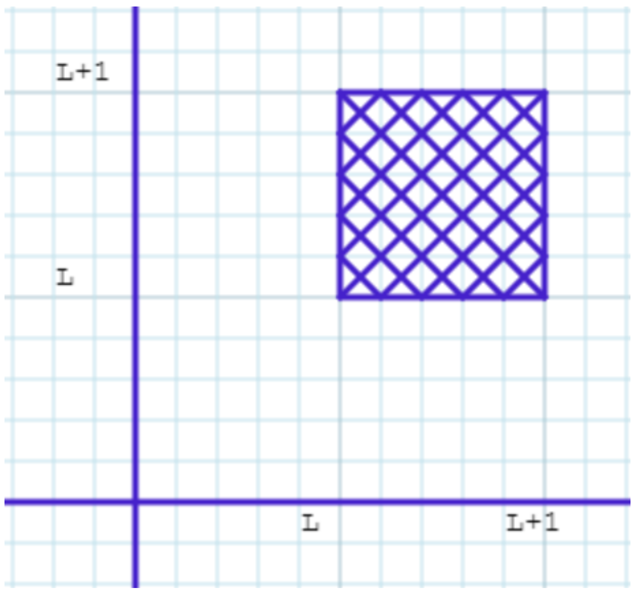
$$a_{11}(p) = E_q\{\alpha_{11}(p,q)\} - M \;,\; a_{12}(p) = E_q\{\alpha_{12}(p,q)\} - M$$
$$a_{21}(p) = E_q\{\alpha_{21}(p,q)\} + M \;,\; a_{12}(p) = E_q\{\alpha_{22}(p,q)\}$$

$$b_{11}(q) = E_p\{\beta_{11}(p,q)\} - M \;,\; b_{12}(q) = E_p\{\beta_{12}(p,q)\} + M$$
$$b_{21}(q) = E_p\{\beta_{21}(p,q)\} - M \;,\; b_{22}(q) = E_p\{\beta_{22}(p,q)\}$$

با توجه به این توضیحات و با توجه به این‌که **p** و **q** دارای توزیع یکنواخت و مستقل روی بازه **[L, L+1]** هستند، برای هر مقدار مشخص از **L** می‌توان نوشت:

$$f_{pq}(p,q) = \begin{cases} 1 \,;\, (p,q) \in D(L) \\ 0 \,;\, (p,q) \notin D(L) \end{cases}$$

که در آن $D(L)$ به صورت زیر است:



شکل ۱۹: محدوده ***D(L)***

طبیعتا محاسبه هرکدام از توابع $a_{ij}(p)$ و $b_{ij}(q)$ نیازمند محاسبه یک انتگرال ساده بوده و برای نمونه تنها یک مورد ارائه خواهد شد. بقیه موارد هفتگانه، به طور مشابه محاسبه خواهند شد.

$$a_{11}(p) = E_q\{\alpha_{11}(p,q)\} - M$$

$$= \int_{q=L}^{q=L+1} \frac{(p-L)}{(p-L)+(q-L)} dq - M$$

$$= (p-L) ln\left(\frac{p-L+1}{p-L}\right) - M$$

اکنون با تعریف دو نماد جدید به صورت زیر:

S_i: بازی بازیگر i

S_i^*: تصمیم بهینه‌ی بازیگر i

می‌توان گفت:

اگر بازیگر ۱، A بازی کند، تصمیم بهینه برای بازیگر ۲:

$$S_1 = A \quad \Rightarrow \quad S_2^* = \begin{cases} A & if: \; b_{11} > b_{12} \\ N & if: \; b_{11} < b_{12} \end{cases}$$

اگر بازیگر ۱، N بازی کند، تصمیم بهینه برای بازیگر ۲:

$$S_1 = N \quad \Rightarrow \quad S_2^* = \begin{cases} A & if: \; b_{21} > b_{22} \\ N & if: \; b_{21} < b_{22} \end{cases}$$

اگر بازیگر ۲، A بازی کند، تصمیم بهینه برای بازیگر ۱:

$$S_2 = A \quad \Rightarrow \quad S_1^* = \begin{cases} A & if: \; a_{11} > a_{21} \\ N & if: \; a_{11} < a_{21} \end{cases}$$

اگر بازیگر ۲، N بازی کند، تصمیم بهینه برای بازیگر ۱:

$$S_2 = N \quad \Rightarrow \quad S_1^* = \begin{cases} A & if: \; a_{12} > a_{22} \\ N & if: \; a_{12} < a_{22} \end{cases}$$

با کمک نامساوی‌های بالا، تعادل نش بازی را به ازای **M**ها و **L** های مختلف محاسبه می‌کنیم. یعنی جایی که هر دو بازیگر، تصمیم بهینه‌ی خود را نسبت به بازی احتمالی رقیب، بازی کنند. با کمک نمادهای فوق، دنبال ارضاشدن همزمان دو رابطه‌ی زیر هستیم:

$$S_1 = S_1^* \quad , \quad S_2 = S_2^*$$

به دلیل ظاهر شدن تابع لگاریتم و پیچیدگی‌های ریاضی که حاصل می‌شود، از این جا به بعد را به کمک شبیه‌سازی پیش برده و از ارائه تحلیل ریاضی صرف نظر می‌کنیم.

در هر یک از شکل‌های 21 تا 29، یک ناحیه آبی رنگ، یک ناحیه زرد رنگ، یک ناحیه صورتی رنگ و یک ناحیه قرمز رنگ ممکن است مشاهده شود. ناحیه آبی مجموعه تمام **(p, q)** هایی را نشان می‌دهد که به ازای آن‌ها تعادل نش بازی بیزی تنها **(N, N)** است.

	A	N
A		
N		

ناحیه زرد رنگ مجموعه تمام **(p, q)** هایی را نشان می‌دهد که به ازای آنها تعادل نش بازی بیزی یا تنها **(A, N)** است و یا تنها **(N, A)** است.

	A	N
A		
N		

یا

	A	N
A		
N		

ناحیه صورتی رنگ، مجموعه تمام **(p, q)** هایی است که به ازای آن‌ها، تعادل نش بازی هم **(A, N)** و هم **(N, A)** یعنی:

	A	N
A		
N		

و ناحیه قرمز رنگ، مجموعه تمام **(p, q)** هایی است که به ازای آن‌ها تعادل نش بازی تنها **(A, A)** است. یعنی:

	A	N
A		
N		

شبیه سازی‌ها نشان می‌دهد که حالت دیگری برای تعادل نش، وجود ندارد.

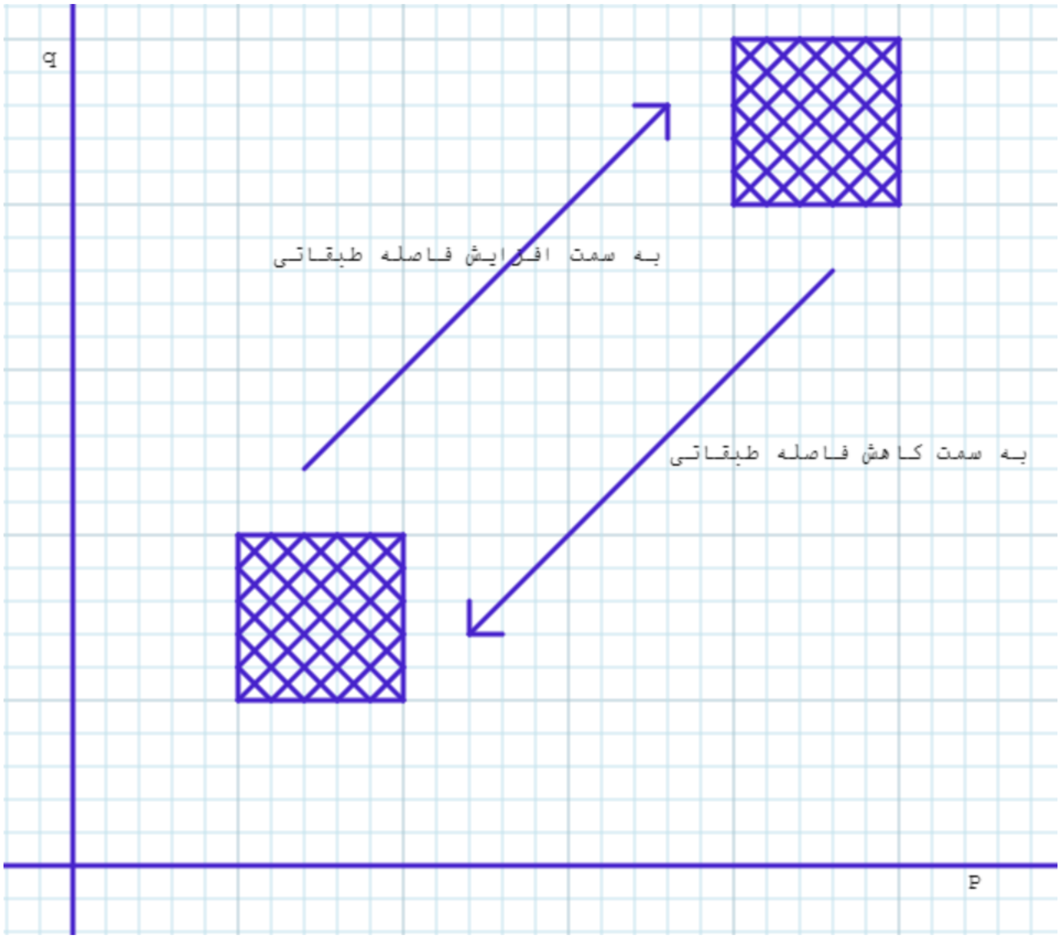
ضمنا منظور از «احتمال حمله»، این است که در پروفایل استراتژی تعادل نش، حداقل یک **A** وجود داشته باشد. یعنی مجموع احتمال بودن در هر یک از سه خانه زیر:

	A	N
A		
N		

نتایج جالبی از شبیه‌سازی‌ها بدست آمد. مشاهده کردیم که وقتی مقدار کوچکی باشد، $(M \to 0)$، مستقل از نحوه توزیع ثروت در جامعه (اختلاف طبقاتی)، همیشه انگیزه حمله وجود دارد. به ازای مقادیر متوسط از جریمه، مقادیر حدود ۰.۱ تا حدود ۰.۳، در **L** های کوچک که اختلاف طبقاتی زیاد است، انگیزه حمله وجود ندارد. اما اگر **L** رفته رفته زیاد شود و اختلاف طبقاتی کاهش یابد، به طور پیوسته احتمال و انگیزه نیز زیاد می‌شود تا جایی که در بعضی نقاط، هر دو بازیگر انگیزه حمله داشته و نواحی قرمز رنگ حاصل می‌شوند. نتیجه جالب دیگر این که اگر مقدار جریمه را از یک مقدار آستانه بیشتر در نظر بگیریم، مقادیر جریمه بزرگ تر از حدود ۰.۳، مستقل از اینکه توزیع ثروت در جامعه چگونه باشد (یعنی مستقل از **L**)، انگیزه حمله برای هر دو بازیگر به صفر می‌رسد.

توجه داریم که در متن مقاله فرضیاتی ارائه شده بود که با این نگرشِ معقول و منطقی، سازگار نبود. در آن‌جا اگر مقدار جریمه را زیاد می‌کردیم، الزاما منجر به گزینش استراتژی عدم حمله نمی‌شد. هر چند که آن نتیجه تحت فرضیاتی که گفته شده بود موجه بنظر می‌رسید، اما ما نیز در قالب فرضیات جدید و نگاه متفاوتی که به بازی داشتیم، نتیجه‌ای به‌دست آوردیم که با شهود و تجربه انطباق بسیار خوبی دارد.

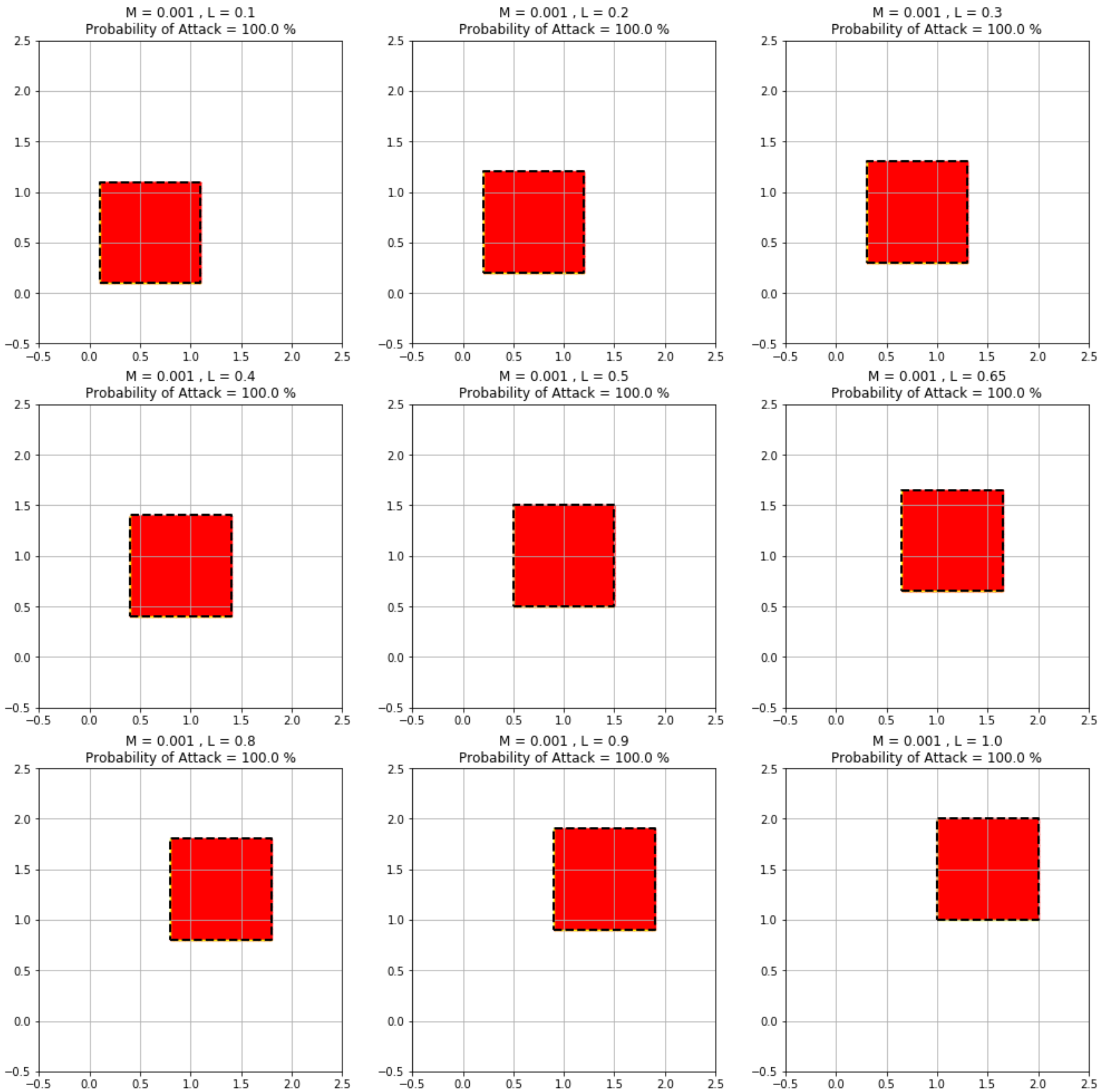
در شکل‌ها مربع‌هایی را می‌بینیم که در واقع همان ناحیه $D(L)$ ، از گوشه‌ی جنوب‌غربی به گوشه‌ی شمال شرقی حرکت می‌کند. پس می‌توان گفت:



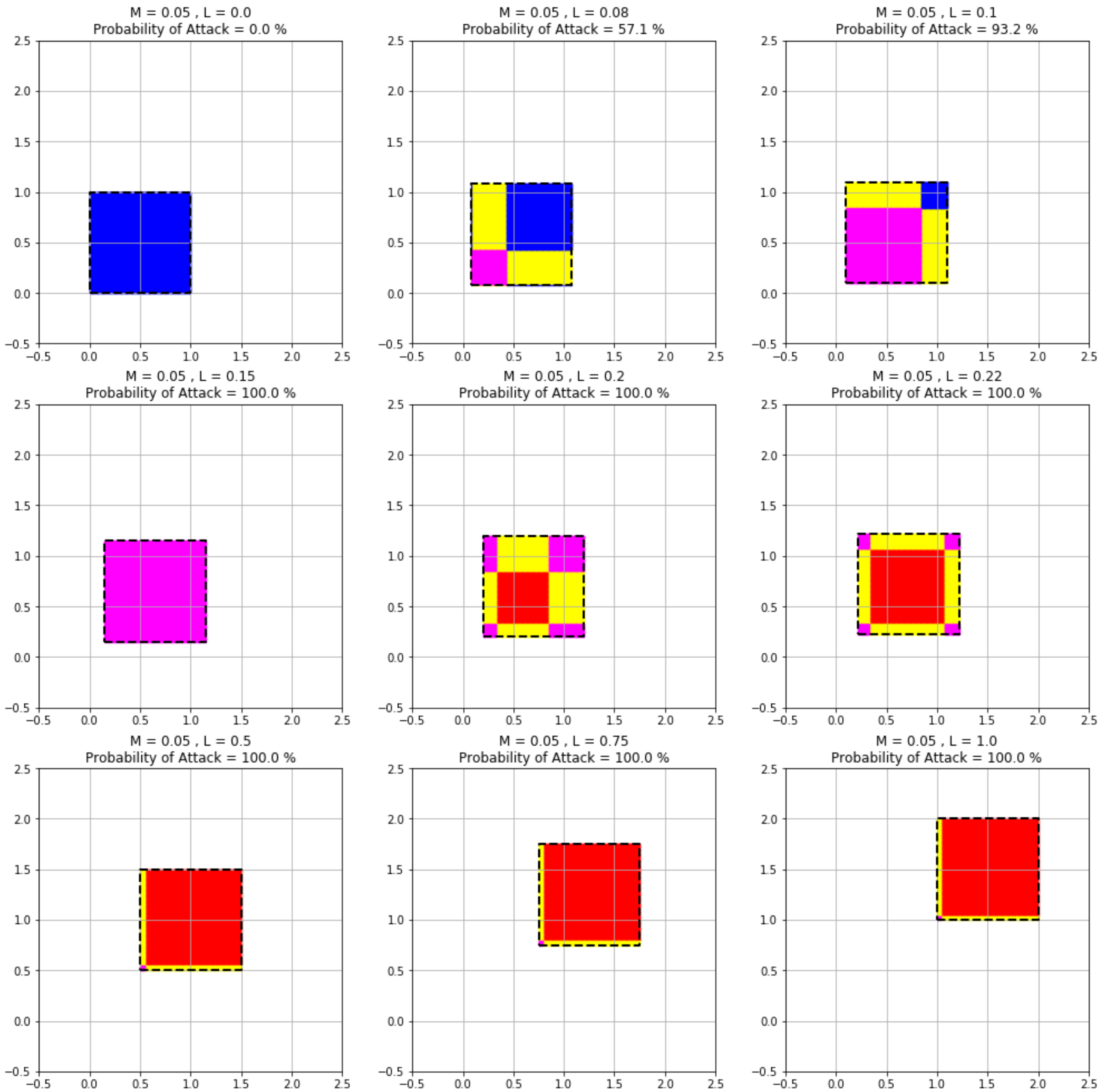
شکل ۲۰

در تمامی نمودارها، محور افقی همان **p** یا توان نرمالیزه شده‌ی استخر ۱ و محور عمودی همان **q** یا همان توان نرمالیزه شده‌ی استخر ۲ است.

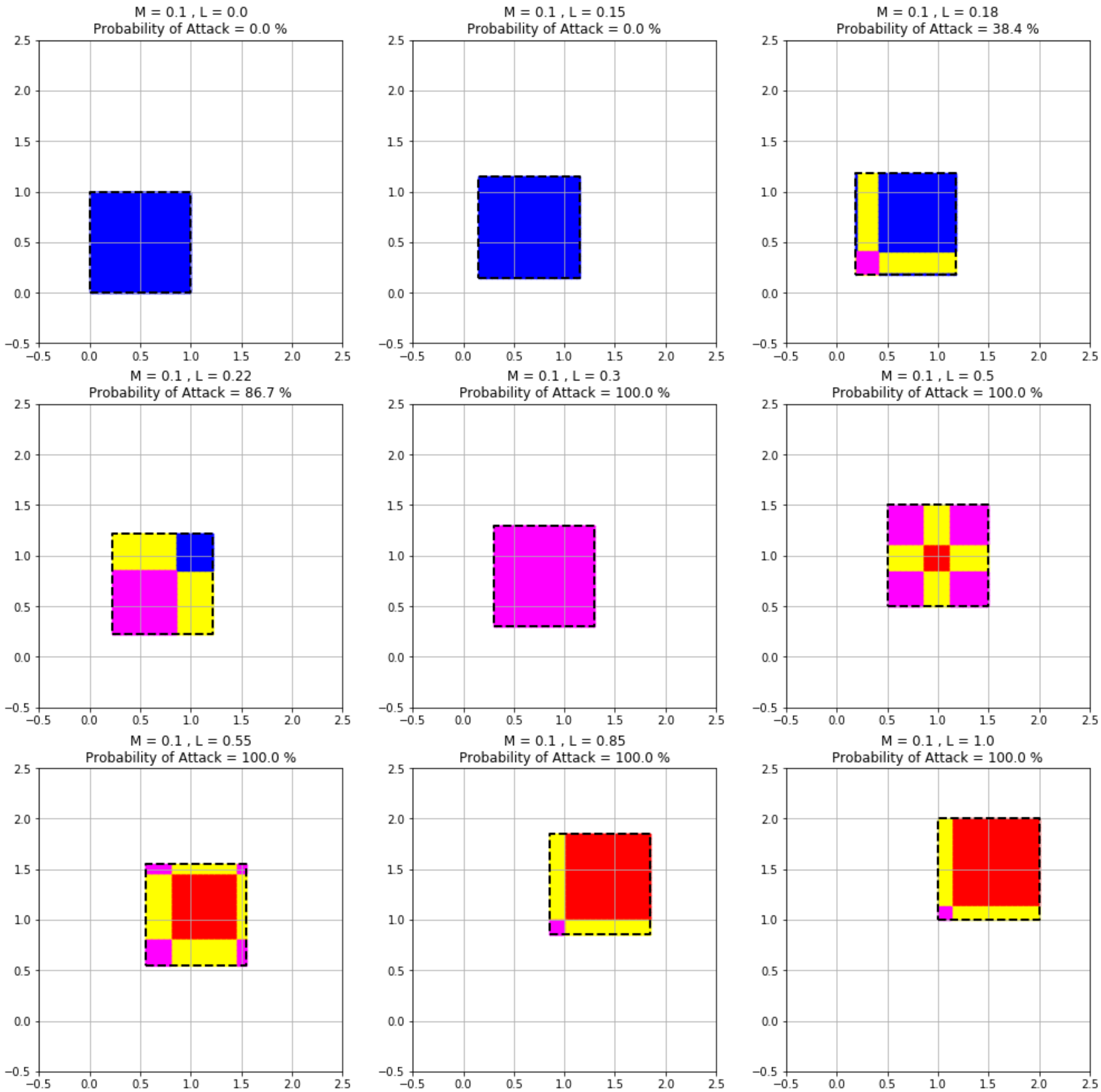
تقارنی که بازی نسبت به بازیگر ۱و ۲ دارد در تمامی نمودارها پدیدار شده است، به این نحو که همه شکل‌ها نسبت به خط **y = x** متقارن هستند. در پایان و برای تکمیل بحث‌ها و نتیجه‌گیری‌ها، یک نمودار ارائه شده که درآن، احتمال حمله (توسط یک یا دو بازیگر) برحسب مقدار **M** (متوسط جریمه) و **L** نشان داده شده است.
هرمقدار احتمال برای حمله متناظر با یک رنگ خاص است که آن نیز قابل مشاهده است. به وضوح دیده می‌شود که جریمه‌های بیش از حدود ۰.۳ باعث شده تا هیچ بازیگری به دیگری حمله نکند.


M = 0.001 , L = 0.1
Probability of Attack = 100.0 %
M = 0.001 , L = 0.2
Probability of Attack = 100.0 %
M = 0.001 , L = 0.3
Probability of Attack = 100.0 %
M = 0.001 , L = 0.4
Probability of Attack = 100.0 %
M = 0.001 , L = 0.5
Probability of Attack = 100.0 %
M = 0.001 , L = 0.65
Probability of Attack = 100.0 %
M = 0.001 , L = 0.8
Probability of Attack = 100.0 %
M = 0.001 , L = 0.9
Probability of Attack = 100.0 %
M = 0.001 , L = 1.0
Probability of Attack = 100.0 %

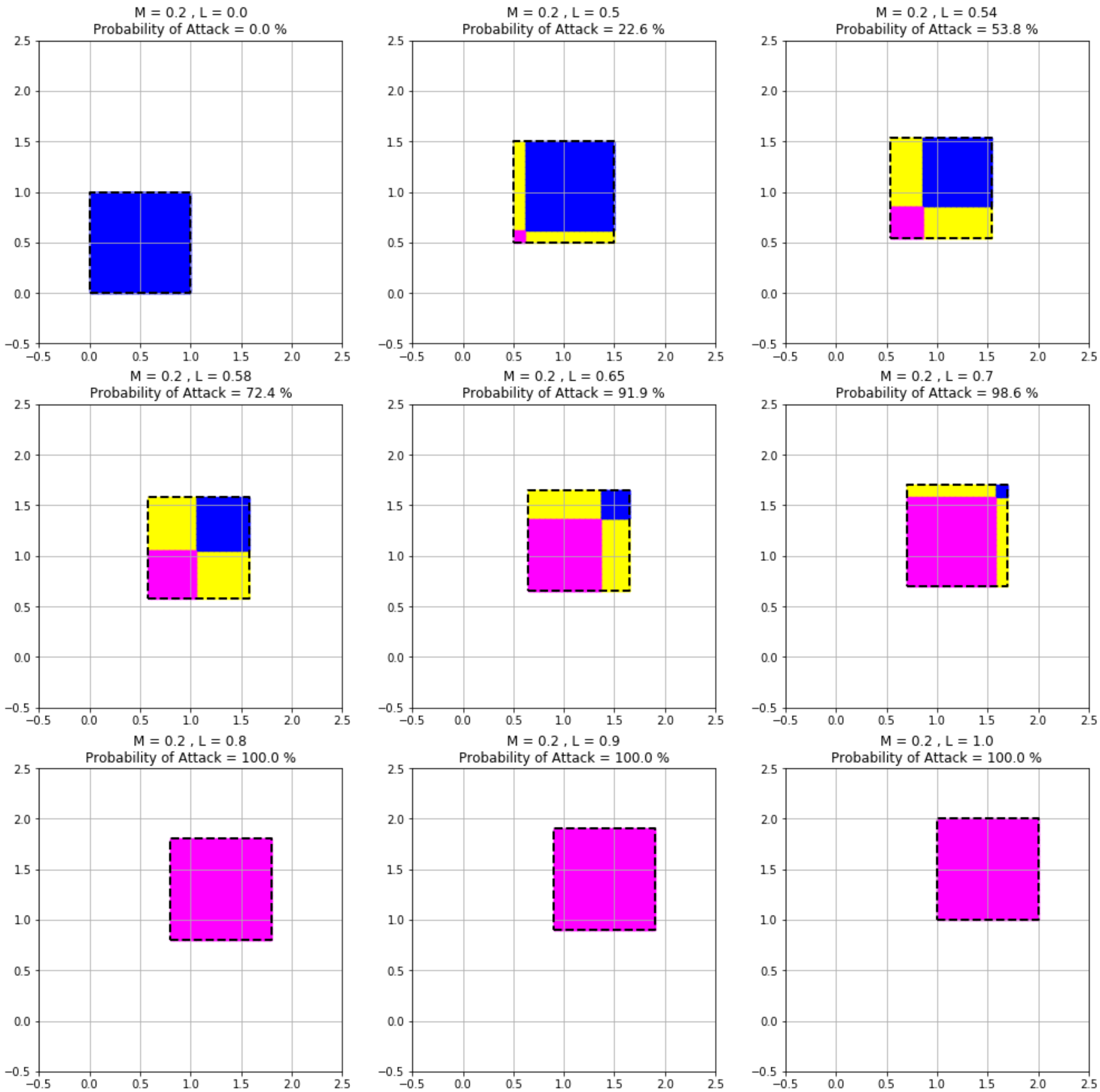
شکل ۲۱


M = 0.05 , L = 0.0
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.05 , L = 0.08
Probability of Attack = 57.1 %
M = 0.05 , L = 0.1
Probability of Attack = 93.2 %
M = 0.05 , L = 0.15
Probability of Attack = 100.0 %
M = 0.05 , L = 0.2
Probability of Attack = 100.0 %
M = 0.05 , L = 0.22
Probability of Attack = 100.0 %
M = 0.05 , L = 0.5
Probability of Attack = 100.0 %
M = 0.05 , L = 0.75
Probability of Attack = 100.0 %
M = 0.05 , L = 1.0
Probability of Attack = 100.0 %

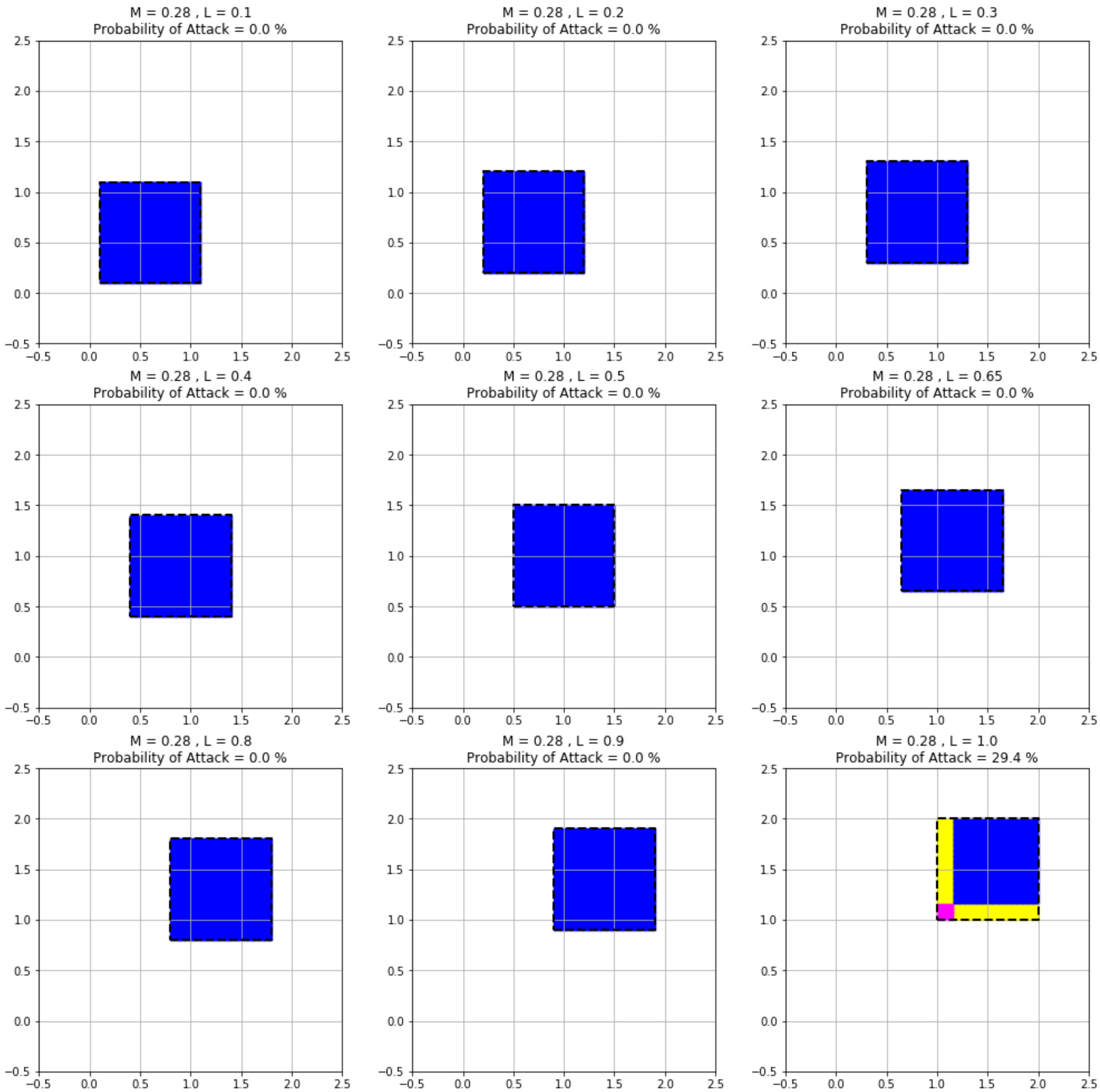
شکل ۲۲


M = 0.1 , L = 0.0
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.1 , L = 0.15
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.1 , L = 0.18
Probability of Attack = 38.4 %
M = 0.1 , L = 0.22
Probability of Attack = 86.7 %
M = 0.1 , L = 0.3
Probability of Attack = 100.0 %
M = 0.1 , L = 0.5
Probability of Attack = 100.0 %
M = 0.1 , L = 0.55
Probability of Attack = 100.0 %
M = 0.1 , L = 0.85
Probability of Attack = 100.0 %
M = 0.1 , L = 1.0
Probability of Attack = 100.0 %

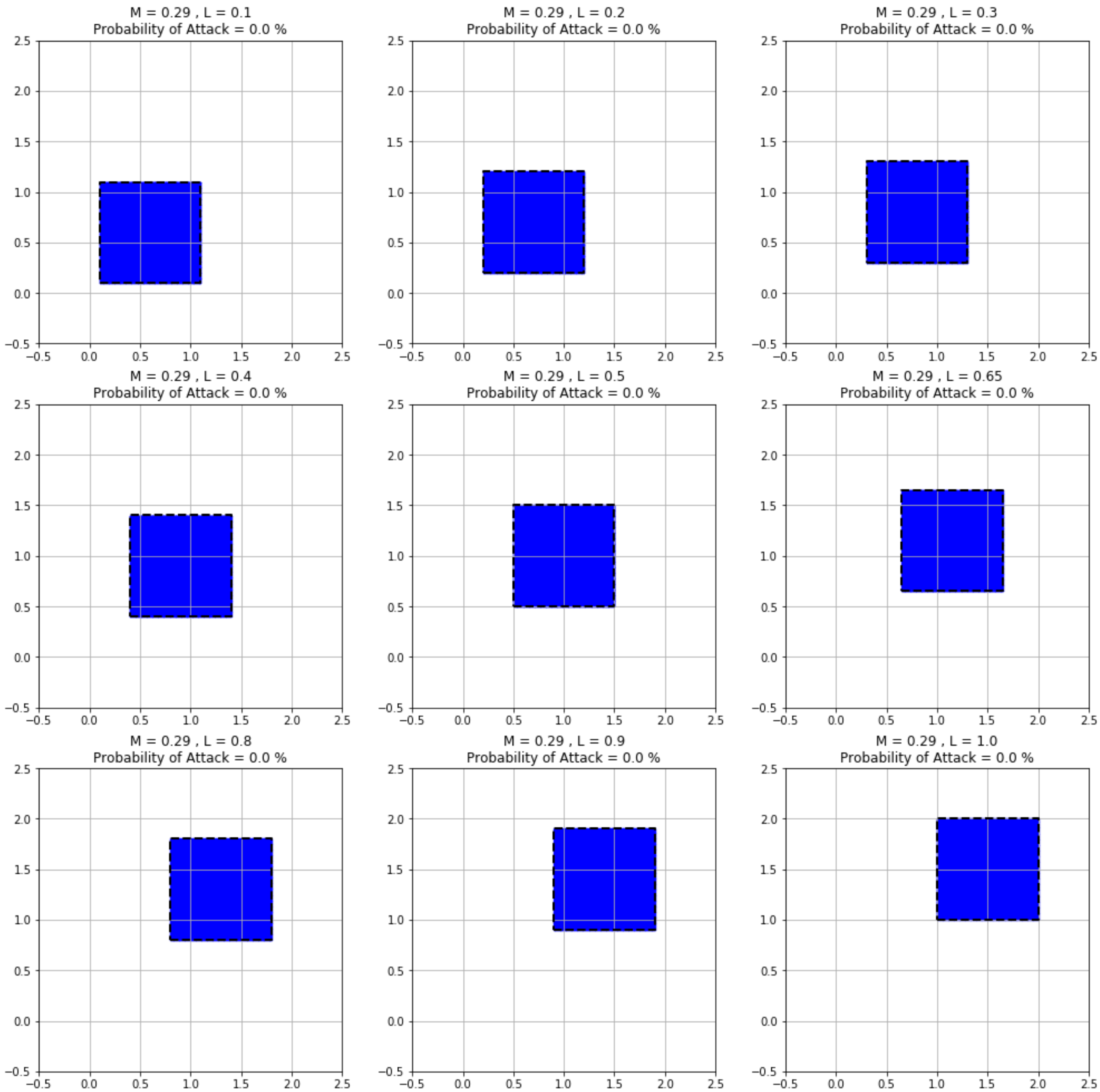
شکل ۲۳


M = 0.2 , L = 0.0
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.2 , L = 0.5
Probability of Attack = 22.6 %
M = 0.2 , L = 0.54
Probability of Attack = 53.8 %
M = 0.2 , L = 0.58
Probability of Attack = 72.4 %
M = 0.2 , L = 0.65
Probability of Attack = 91.9 %
M = 0.2 , L = 0.7
Probability of Attack = 98.6 %
M = 0.2 , L = 0.8
Probability of Attack = 100.0 %
M = 0.2 , L = 0.9
Probability of Attack = 100.0 %
M = 0.2 , L = 1.0
Probability of Attack = 100.0 %

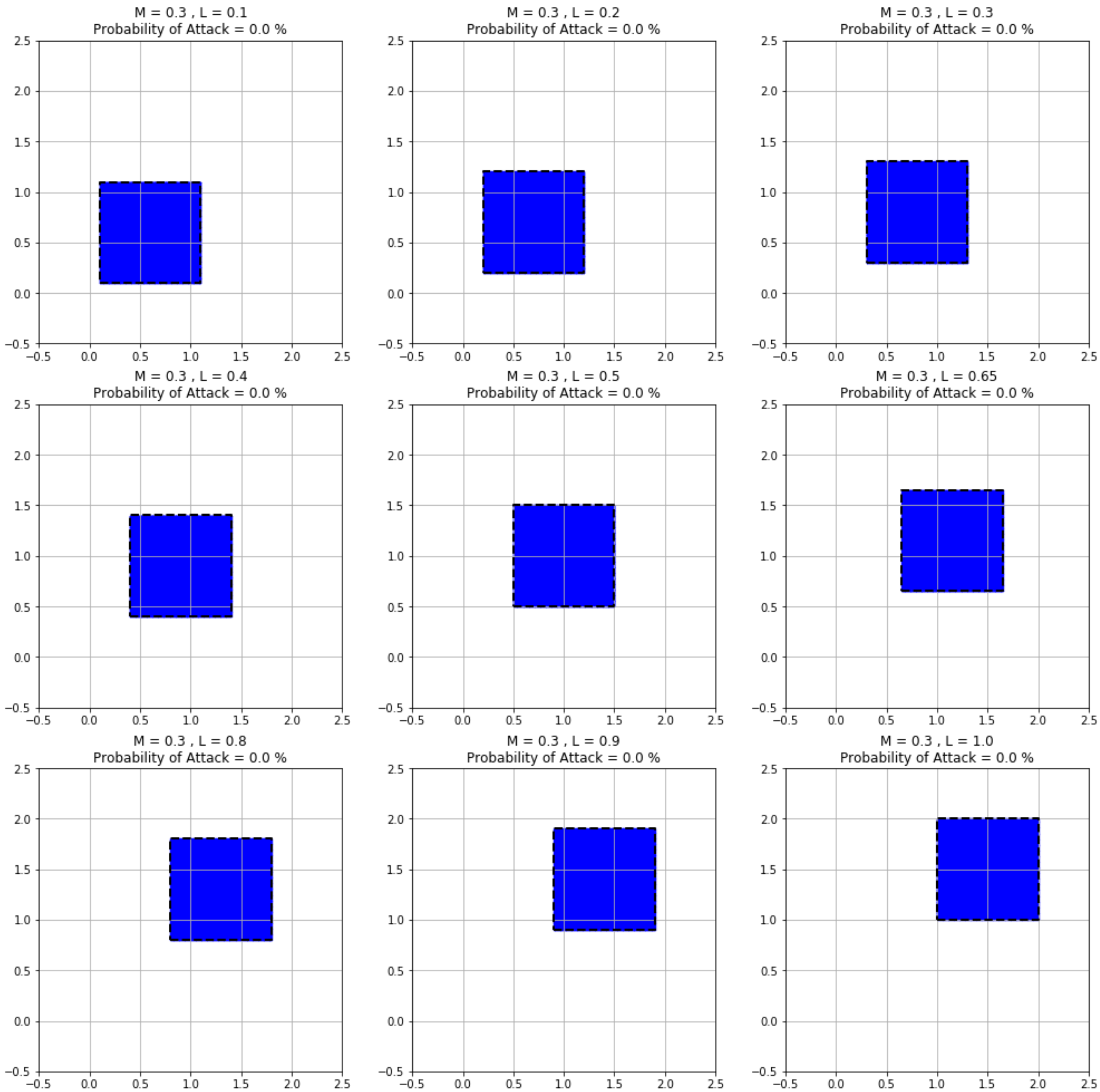
شکل۲۴


M = 0.28 , L = 0.1
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.28 , L = 0.2
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.28 , L = 0.3
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.28 , L = 0.4
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.28 , L = 0.5
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.28 , L = 0.65
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.28 , L = 0.8
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.28 , L = 0.9
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.28 , L = 1.0
Probability of Attack = 29.4 %
−0.5 0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5

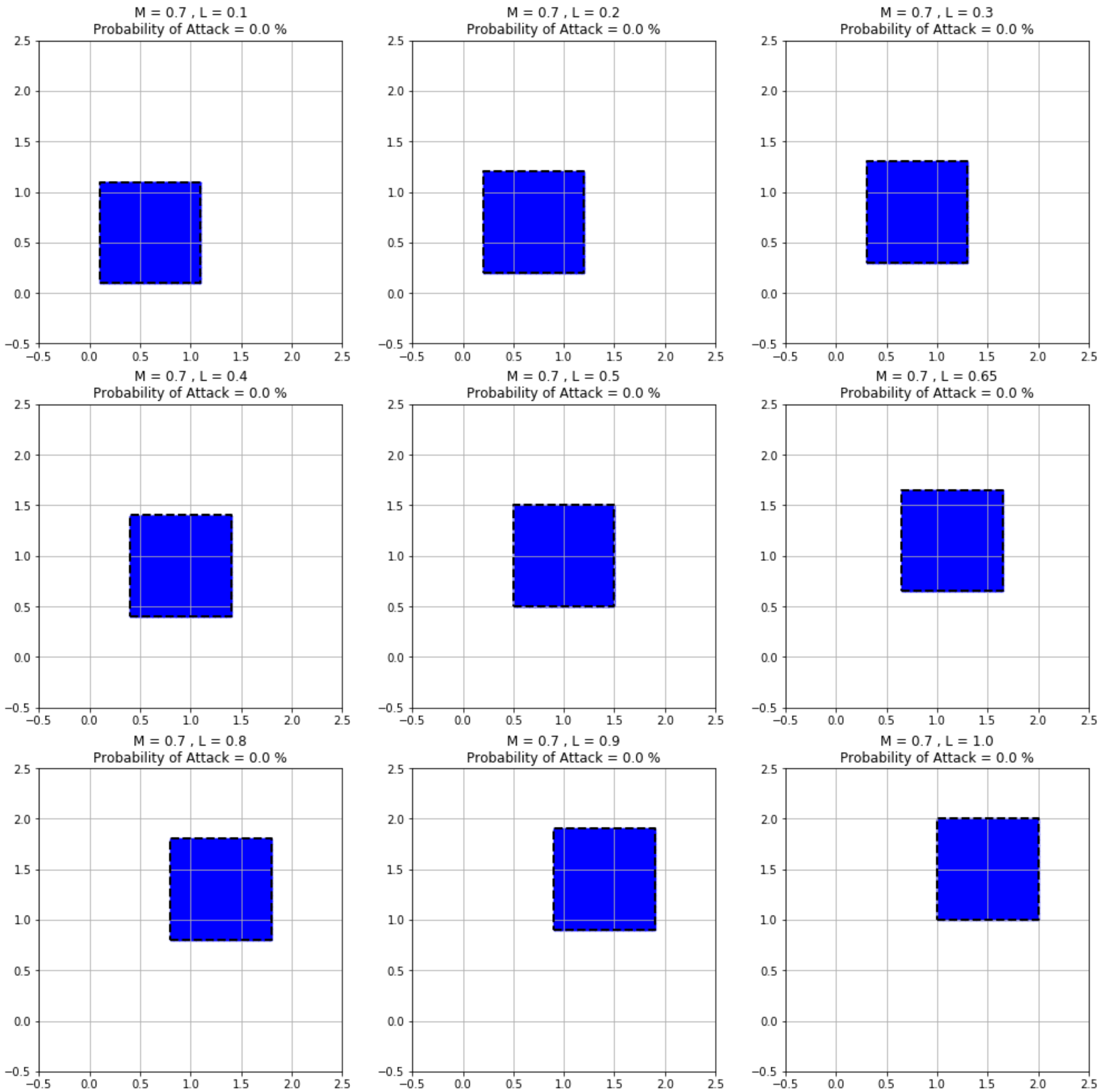
شکل ۲۵


M = 0.29 , L = 0.1
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.29 , L = 0.2
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.29 , L = 0.3
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.29 , L = 0.4
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.29 , L = 0.5
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.29 , L = 0.65
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.29 , L = 0.8
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.29 , L = 0.9
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.29 , L = 1.0
Probability of Attack = 0.0 %
−0.5 0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5

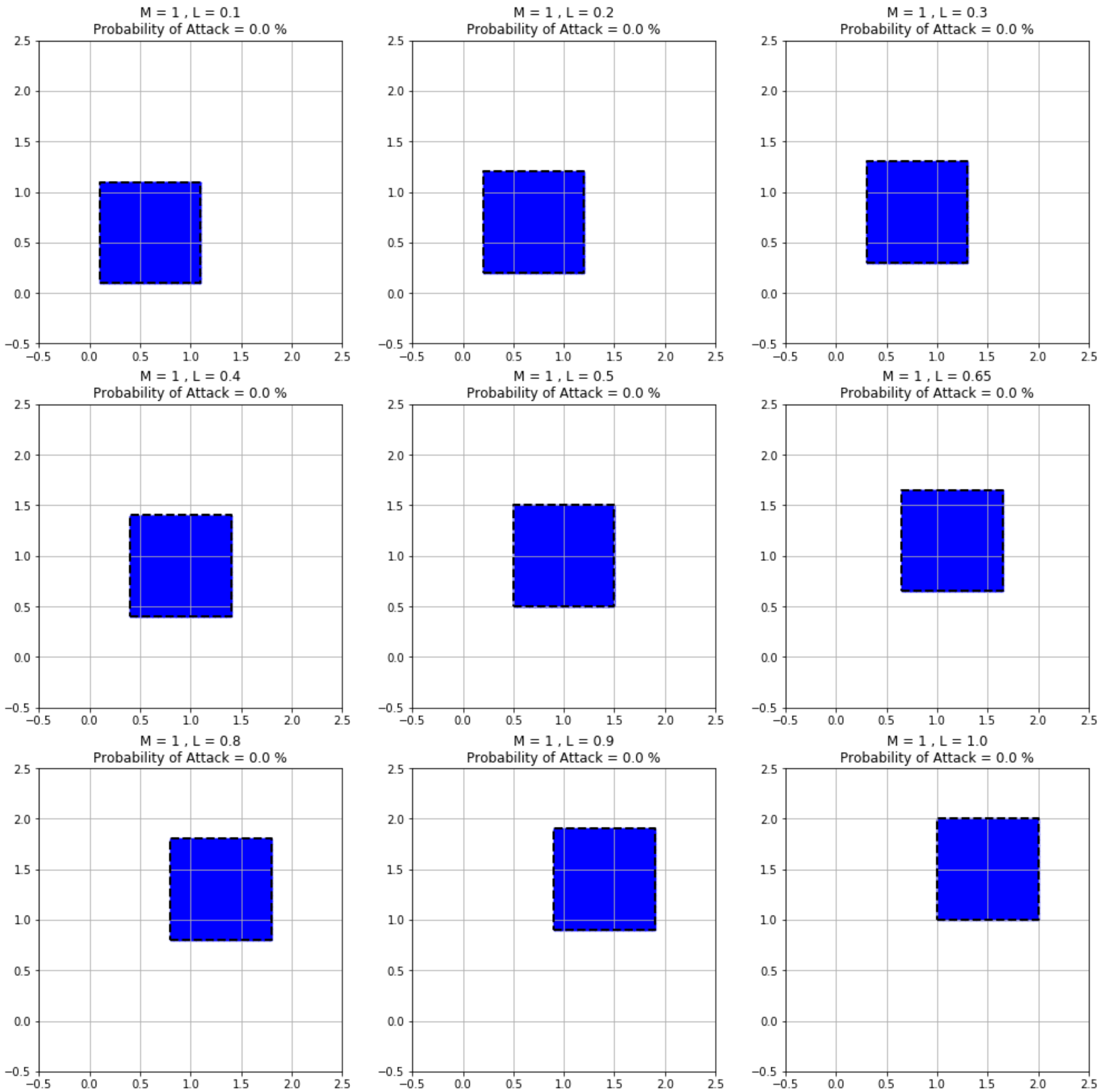
شکل ۲۶


M = 0.3 , L = 0.1
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.3 , L = 0.2
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.3 , L = 0.3
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.3 , L = 0.4
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.3 , L = 0.5
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.3 , L = 0.65
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.3 , L = 0.8
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.3 , L = 0.9
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.3 , L = 1.0
Probability of Attack = 0.0 %

شکل ۲۷


M = 0.7 , L = 0.1
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.7 , L = 0.2
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.7 , L = 0.3
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.7 , L = 0.4
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.7 , L = 0.5
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.7 , L = 0.65
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.7 , L = 0.8
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.7 , L = 0.9
Probability of Attack = 0.0 %
M = 0.7 , L = 1.0
Probability of Attack = 0.0 %
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5

شکل ۲۸


M = 1 , L = 0.1
Probability of Attack = 0.0 %
M = 1 , L = 0.2
Probability of Attack = 0.0 %
M = 1 , L = 0.3
Probability of Attack = 0.0 %
M = 1 , L = 0.4
Probability of Attack = 0.0 %
M = 1 , L = 0.5
Probability of Attack = 0.0 %
M = 1 , L = 0.65
Probability of Attack = 0.0 %
M = 1 , L = 0.8
Probability of Attack = 0.0 %
M = 1 , L = 0.9
Probability of Attack = 0.0 %
M = 1 , L = 1.0
Probability of Attack = 0.0 %

شکل ۲۹

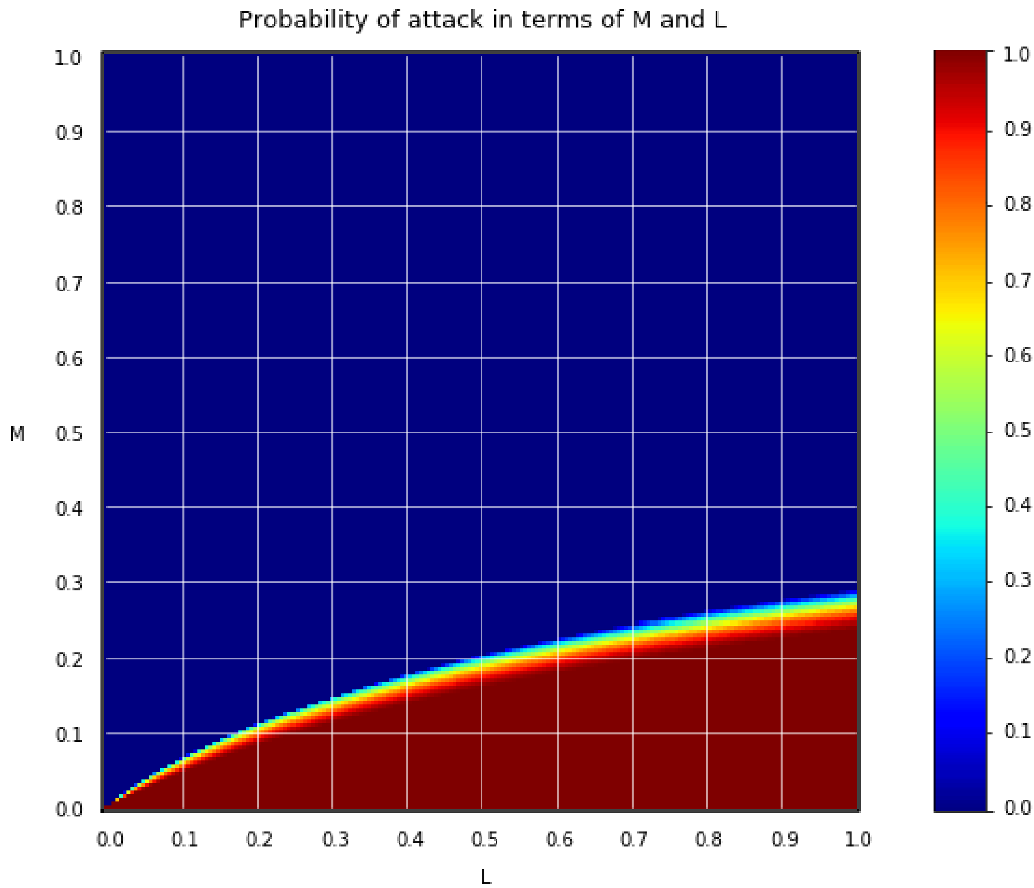
در شکل های ۲۱ تا ۲۹ می‌بینیم که استراتژی تعادل نش، به ازای مقادیر مختلف **M** و **L** چگونه تغییر می‌کند (به کمک رنگ‌های آبی و صورتی و زرد و قرمز که توضیحات آن قبلاً گفته شد).

در شکل ۲۱ که متناظر با مقادیر بسیار کوچک برای جریمه است، به ازای تمام مقادیر ممکن برای **L**، برای هر دو بازیگر انگیزه حمله وجود دارد. یعنی وقتی جریمه کم باشد، همه تمایل به انجام حمله خواهند داشت. در شکل‌های ۲۲ تا ۲۵ که در هر کدام **M** مقدار ثابتی دارد، وقتی **L** کوچک است و فاصله طبقاتی زیاد است، احتمال حمله وجود ندارد(ناحیه آبی رنگ). هر چه **L** زیادتر و فاصله طبقاتی کمتر شود، رفته رفته انگیزه حمله افزایش پیدا می‌کند و ابتدا رنگ زرد، سپس صورتی و در نهایت قرمز، بخش‌های بزرگ و بزرگ‌تری از فضای استراتژی را (منظور همان ناحیه مربع شکل **D(L)** است.) پوشش می‌دهند.

ضمناً شدت حمله را در ناحیه‌های رنگی، به ترتیب به این صورت درنظر می‌گیریم:

رنگ ناحیه	(آبی)	(زرد)	(صورتی)	(قرمز)
شدت حمله	هیچ	کم	متوسط	زیاد
تعداد بازیگران حمله‌کننده *(تعداد بازیگرانی که تصمیم بهینه‌شان، **A** است)*	0	1	2	2

مشاهده می‌شود که در شکل‌های ۲۶ تا ۲۹، مقدار **L** هر چه باشد، همواره با یک فضای استراتژی تماماً آبی رنگ مواجهیم. یعنی مسقل از مقدار فاصله طبقاتی، هیچ گاه هیچ بازیگری حمله نمی‌کند. برای توضیحات بیشتر، شکل زیر را داریم:



شکل ۳۰

شکل ۳۰، در واقع چکیده و خلاصه تمام بحث هایی است که در این ایده تکمیلی بیان شد. احتمال انتخاب استراتژی حمله (چه توسط یک بازیگر، و چه توسط هر دو بازیگر) به صورت تابعی از **M** و **L**، ترسیم شده است. به ازای هر **M** و **L** خاص، هر چه رنگ نقطه‌ی مورد نظر به آبی نزدیکتر باشد، احتمال حمله کمتر و هر چه به قرمز نزدیکتر باشد، احتمال حمله بیشتر است.

نکته‌ای که در *شکل‌های ۲۶ تا ۲۹* مشاهده کردیم، این جا نیز خود را نشان می‌دهد. از روی شکل بالا، واضح است که به ازای جریمه‌های بیش از حدود ۰.۳، مقدار **L** هر چه که باشد، بازی به گونه‌ای خواهد بود که در آن هیچ کدام از بازیگران تمایلی برای حمله ندارند. کاربرد این نتیجه می‌تواند در طراحی قانون برای جامعه باشد. اگر ما نقش قانونگزار را در جامعه بر عهده داشته باشیم و هدف این باشد که انگیزه‌ی حمله را تا حد ممکن کاهش دهیم، کافی است مقدار جریمه را بیشتر یا مساوی با ۰.۳ اعلام کنیم. (البته این مقدار همان طور که قبلا هم گفته شد، تقریبی است و مقدار دقیق آن ۲۹ . ۰ است.)

منابع

[1] I. Eyal, ‘‘The miner’s dilemma,’’ in Proc. IEEE Symp. Security Privacy (SP), San Jose, CA, USA, May 2015, pp. 89–103.

[2] X. Liu, W. Wang, D. Niyato, N. Zhao, and P. Wang, ‘‘Evolutionary game for mining pool selection in blockchain networks,’’ IEEE Wireless Commun. Lett., vol. 7, no. 5, pp. 760–763, Oct. 2018.

[3] Y. Lewenberg, Y. Bachrach, Y. Sompolinsky, A. Zohar, and J. S. Rosenschein, ‘‘Bitcoin mining pools: A cooperative game theoretic analysis,’’ in Proc. Int. Conf. Auto. Agents Multiagent Syst., Istanbul, Turkey, May 2015, pp. 919–927.