Date ________ Subject تمرین سری اول ترکیبات

فاطمه رشیدی - 610399131

سوال ۱) مجموعه اعداد صحیح را افراز می‌کنیم به دو دسته اعداد زوج و فرد؛ در نهایت خواهیم داشت:

$$\underbrace{m = 2k}_{\to\, k=\frac{m}{2}} \quad (k\in\mathbb{Z}) \to \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor = \lfloor k \rfloor = k = \boxed{\frac{m}{2}} \; *$$

اگر عبارت $\frac{m}{2} - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^m}{4}$ را نیز برای $m=2k$, $k\in\mathbb{Z}$ محاسبه کنیم خواهیم داشت:

$$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = \frac{m}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{m}{2}} \; **$$

$\Leftarrow$ حکم برای اعداد صحیح زوج برقرار است. حال اعداد فرد را بررسی می‌کنیم:

$$m = 2k+1 \; (k\in\mathbb{Z}) \Rightarrow \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

$$k = \frac{m-1}{2}$$

$$= k + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = k = \boxed{\frac{m-1}{2}} \; *$$

حاصل عبارت $\frac{m}{2} - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^m}{4}$ نیز به ازای $m=2k+1$, $k\in\mathbb{Z}$ خواهد بود:

$$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = \frac{m}{2} - \frac{1}{4} + \frac{(-1)}{4} = \frac{m}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{m-1}{2}} \; **$$

$\Leftarrow$ حکم برای اعداد صحیح فرد نیز برقرار است. بنابراین حکم کلی ثابت شد.

- برای قسمت دوم سوال نیز مجموعه $\mathbb{Z}$ را به اعداد زوج و فرد افراز می‌کنیم.

$(k\in\mathbb{Z})$

$$m = 2k \to \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2k}{2} \right\rceil = k = \frac{m}{2} = \frac{m}{2} + \frac{1}{4} - \frac{(-1)^m}{4} \quad (m=2k, k\in\mathbb{Z})$$

$(k\in\mathbb{Z})$

$$m = 2k+1 \to \left\lceil \frac{2k+1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2k}{2} + \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lceil k + \frac{1}{2} \right\rceil = k + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = k+1$$

$$= \frac{m-1}{2} + 1 = \frac{m}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{m}{2} + \frac{1}{2} = \frac{m}{2} + \frac{1}{4} - \frac{(-1)^m}{4} \quad (m=2k+1, k\in\mathbb{Z})$$

$\Leftarrow$ داریم:

$$\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = \frac{m}{2} + \frac{1}{4} - \frac{(-1)^m}{4}$$

Date Subject

فاطمه رشیدی 610399131

سوال 2)

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = n$$
$$\Rightarrow n \leq \sqrt{x} < n+1 \quad \circledast$$
$$\Rightarrow n^2 \leq x < (n+1)^2$$
$$\Rightarrow n^2 \leq \lfloor x \rfloor < (n+1)^2$$
$$\Rightarrow n \leq \sqrt{\lfloor x \rfloor} < n+1$$
$$\Rightarrow \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = n \quad \circledast$$

$$\lceil \sqrt{x} \rceil = m$$
$$\Rightarrow (m-1) < \sqrt{x} \leq m \quad \circledast$$
$$\Rightarrow (m-1)^2 < x \leq m^2$$
$$\Rightarrow (m-1)^2 < \lceil x \rceil \leq m^2$$
$$\Rightarrow (m-1) < \sqrt{\lceil x \rceil} \leq m$$
$$\Rightarrow \lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \rceil = m \quad \circledast$$

در قسمت هایی که با $\circledast$ مشخص شده اند، با شرط بزرگتر یا مساوی بودن با صفر مقادیر موجود در نامساوی ها، عمل به توان رساندن انجام گرفته. همچنین در قسمت هایی که جذر گرفته شده، فقط حالت نوشته شده قابل قبول است زیرا $n \geq 0$ و m و x هستند.

ضمنا چون n و m اعداد صحیح هستند، توابع سقف و کف برای آنها بی تاثیر است به همین خاطر پس از سقف و کف گرفتن در مراحل $\circledast$، تغییری ایجاد نمی شود.

Date ______ Subject ______

فاطمه رشیدی ۹۱۵۳۹۹۱۳۱

سوال 4) برای این چیدمان الگوی مقابل را در نظر می‌گیریم: $\boxed{000}\ \boxed{1111}\ \boxed{\ }$

۰ یا ۱

تعداد جایگشت های اعداد در این الگو با شرط دقیقا ۳ صفر متوالی و دقیقا ۴ یک متوالی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

~~(...)~~ $۳! \times ۲$

اما حالات ($\boxed{1111}\ 0\ \boxed{000}$ / $0\ \boxed{000}\ 0\ \boxed{1111}$ / $\boxed{1111}\ \boxed{000}\ 0$ /

$\boxed{000}\ \boxed{1111}\ 1$ / $0\ 1111$

سوال 4) برای این چیدمان الگوی مقابل را در نظر می‌گیریم: $\boxed{000}\ \boxed{1111}\ \boxed{\ }$

۰ یا ۱

تعداد جایگشت های اعداد در این الگو $3! \times 2$ است اما با شرط توالی دقیقا 4 یک متوالی و 3 صفر متوالی، به $3! \times 2 - 8 = 4$ کاهش می‌یابد.

$0\ \underline{000}\ \underline{1111}$ / $1\ \underline{1111}\ \underline{000}$ / $\underline{000}\ 1\ \underline{1111}$ / $\underline{000}\ 0\ \underline{1111}$ /

$0\ \underline{000}\ \underline{1111}$ / $1\ \underline{1111}\ \underline{000}$ /

$\underline{1111}\ 0\ \underline{000}$ / $\underline{1111}\ 1\ \underline{000}$

سوال 5) الف) تعداد اعضای دامنه بیشتر از برد → صفر تا بع

(هم دامنه کمتره البته)

ب) $1 \times \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n-2} \times 1 = (2)^{n-2}$

ج) $\binom{n-1}{1} = n-1$ → فقط یکی از اعداد کوچکتر از n به یک برود. (دقیقا)