Nurunnisa Fathanah Dz. S. B.
D121211002
Metode Komputasi Numerik Kelas A

1. Berikan satu contoh persamaan diferensial biasa dan satu contoh persamaan diferensial parsial.
   a. Persamaan Diferensial Biasa
   Hukum Pendinginan Newton (*Newton's Law of Cooling*)
   $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s)$
   Keterangan:
   k = konstanta
   T = suhu objek
   T_s = suhu sekitar
   b. Persamaan Diferensial Parsial
   Persamaan Gelombang (*Wave Equation*)
   $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
   Dengan $c^2 = \frac{T}{\rho}$
   Ket:
   T = tegangan pada tali
   ρ = massa/satuan panjang tali

2. Jelaskan solusi dari persamaan tersebut (variabel bebasnya)
   a. Persamaan Diferensial Biasa - *Newton's Law of Cooling*
   Dalam persamaan tersebut, T merupakan suhu benda pada waktu t, dT/dt adalah laju perubahan suhu terhadap waktu, k adalah koefisien pendinginan yang bergantung pada sifat termal benda, dan T_s adalah suhu sekitar.

   $$\int_{T_f}^{T_0} \frac{dT}{(T - T_s)} = \int -k * dt$$

   $$\Rightarrow \ln \frac{(T_f - T_s)}{T_0 - T_s} = -kt$$

   $$\Rightarrow \frac{(T_f - T_s)}{T_0 - T_s} = e^{-kt}$$

   $$\Rightarrow T_f - T_s = (T_0 - T_s)e^{-kt}$$

   $$\therefore T_f = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$$

   atau

   $$T(t) = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$$

   Dimana waktu 't' adalah variabel bebasnya / independent variable.

b. Persamaan Diferensial Parsial

1) Persamaan gelombang satu dimensi memodelkan tali getar 2 dimensi yang diregangkan dan dijepit pada titik ujungnya (dengan x = 0 dan x = L).
2) Kondisi awal (*initial condition)*

   $u(x, 0) \ = \ f(x),$ $\qquad u_t(x,\ 0) \ \equiv \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) \ = \ g(x),$ $\qquad$ untuk x ϵ $[0, L]$.
3) Kondisi batas Dirichlet (*Dirichlet boundary condition*) $u(0,\ t)$ = u(L, t) = 0, untuk semua t $\geq$ 0.
4) Solusi untuk $u(x,\ t)$ dalam bentuk $u(x,\ t)\ =\ F(x)G(t)$.
5) Subtitusikan ke dalam persamaan gelombang satu dimensi sehingga:

   $$\frac{1}{c^2G(t)}\frac{d^2G}{dt^2} \ = \ \frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2}$$

   Karena ruas kiri merupakan fungsi dari t saja dan ruas kanan merupakan fungsi dari x saja, dan karena x dan t saling bebas, kedua suku harus sama dengan suatu konstanta k.
6) Memasukkan kondisi batas memberikan solusi dari bentuk:

   $$u_n(x,\ t) \ = \ [a_n \cos{(c\, n\, \frac{\pi t}{L})} \ + b_n \sin{(c\, n\, \frac{\pi t}{L})}] \sin{(n\, \frac{\pi x}{L})},$$

   Untuk n = 1, 2, …, di mana $k \ = \ -\ (\frac{n\pi}{L})^2$, dan a_n's dan b_n's merupakan konstanta sembarang (*arbitrary constant).*
7) Fungsi $u_n(x,\ t)$ disebut mode normal dari tali bergetar (*vibrating string)*. Lalu mode normal ke-n memiliki n-1 simpul, yang merupakan titik-titik di mana tali tidak bergetar.
8) Solusi umum untuk persamaan gelombang satu dimensi dengan kondisi batas *Dirichlet* adalah kombinasi linier dari mode normal tali bergetar, yaitu

   $$\begin{aligned} u(x,\ t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x,\ t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\left(c\, n\, \frac{\pi t}{L}\right) + B_n \sin{(c\, n\, \frac{\pi t}{L})}\right] \sin(n\, \frac{\pi x}{L}), \end{aligned}$$

   di mana $A_n = C_n a_n$ dan $B_n = C_n b_n$
9) Koefisien ekspansi tersebut ditemukan dengan memasukkan kondisi awal.
10) Karena $u_n(x,\ 0)$ dan $\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,\ 0)$ proporsional dengan $\sin(n\, \frac{\pi x}{L})$, memasukkan kondisi awal sama dengan menemukan ekspansi ortogonal dari fungsi f(x) dan g(x) pada {sin $(n\, \frac{\pi x}{L})$, n = 1, 2, …}.
11) Jadi, dengan $U_n(x) \ = \ \sin(n\, \frac{\pi x}{L}),$

    $$A_n \ = \frac{\langle u(x,0), U_n\rangle}{||U_n(x)||^2} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin(n\, \frac{\pi x}{L})\, dx\,,$$

    $$B_n \ = \frac{L}{c\, n\, \pi}\frac{\langle u_t(x,0), U_n(x)\rangle}{||U_n(x)||^2} = \frac{2}{L}\int_0^L \frac{L}{c\, n\, \pi} g(x) \sin(n\, \frac{\pi x}{L})\, dx$$

Dimana x dan t adalah variabel bebasnya / independent variable.

3. Jelaskan bagaimana persamaan tersebut digunakan/diaplikasikan di dunia nyata.
    a. Persamaan Diferensial Biasa - *Newton's Law of Cooling*
       Aplikasi hukum pendinginan Newton di dunia nyata:
       1) Perancangan Sistem Elektronik: Desain sistem elektronik seperti komputer, server, dan peralatan elektronik lainnya menggunakan hukum pendinginan Newton. Dalam kasus ini, hukum ini membantu menghitung jumlah panas yang ditransfer dari komponen elektronik yang menghasilkan panas ke lingkungan sekitarnya. Hal ini sangat penting untuk menghindari overheating dan menjaga suhu yang aman agar perangkat dapat bekerja dengan baik.
       2) Ilmu Kesehatan: Hukum Pendinginan Newton juga berperan dalam ilmu kesehatan, terutama dalam perawatan pasien demam atau hipotermia. Penggunaan hukum ini membantu menghitung kecepatan perubahan suhu tubuh pasien dan memperkirakan waktu yang dibutuhkan untuk mencapai suhu yang diinginkan baik dengan pemanasan eksternal maupun pendinginan.
       3) Estimasi Waktu Kematian: Hukum pendinginan Newton dapat digunakan untuk memperkirakan waktu dengan mengukur suhu tubuh korban setelah kematian dan mempertimbangkan suhu lingkungan, kelembaban, dan ventilasi.
       4) Perancangan Kendaraan: Hukum pendinginan Newton diterapkan dalam perancangan kendaraan, seperti mobil dan pesawat terbang. Dalam konteks ini, hukum ini digunakan untuk memperkirakan transfer panas dari mesin dan sistem pendingin ke lingkungan. Hal ini membantu dalam menentukan ukuran dan efisiensi radiator, kipas pendingin, dan sistem lainnya untuk menjaga suhu yang optimal di dalam mesin kendaraan.

    b. Persamaan Diferensial Parsial - *Wave Equation*
       Aplikasi persamaan gelombang di dunia nyata:
       1) Komunikasi dan Telekomunikasi: Persamaan gelombang digunakan untuk memodelkan dan menganalisis sistem komunikasi dan telekomunikasi, yang mencakup pengiriman data, gambar, dan sinyal suara melalui gelombang elektromagnetik. Pemodelan propagasi gelombang radio, analisis kualitas saluran komunikasi, pemetaan jaringan telekomunikasi, dan desain antena adalah beberapa contohnya.
       2) Akustik Bangunan: Analisis akustik bangunan menggunakan persamaan gelombang. Ini mencakup perancangan ruangan yang memiliki akustik yang baik, penyerapan suara, dan isolasi suara. Persamaan gelombang dalam situasi seperti ini dapat digunakan untuk memprediksi propagasi dan pembiasan suara di dalam ruangan serta untuk mengoptimalkan desain bangunan untuk tujuan akustik.
       3) Pemodelan Bencana Alam: Untuk memodelkan penyebaran gelombang seismik dan tsunami, persamaan gelombang digunakan dalam studi bencana alam seperti gempa bumi, tsunami, dan letusan gunung berapi. Ini membantu memprediksi distribusi energi seismik, mengidentifikasi daerah risiko, dan memahami bagaimana gelombang bergerak melalui lapisan bumi.

4) Bidang Kedokteran: Dalam bidang kedokteran, persamaan gelombang digunakan untuk menggambarkan gelombang suara tubuh manusia, seperti yang dilakukan dalam ultrasonografi. Ini memungkinkan pencitraan organ internal, diagnostic penyakit, dan instruksi prosedur medis.