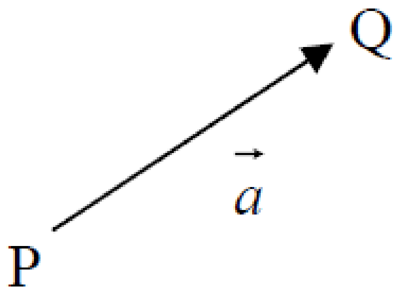
Vektor

A Definisi Vektor :

Vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah.

Vektor $\overrightarrow{PQ}$ mempunyai titik pangkal P dan titik ujung Q.



B. Beberapa pengertian vektor :

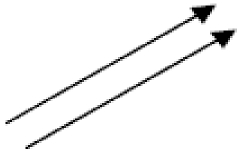
1. Vektor posisi adalah suatu vektor yang titik awalnya di 0.

   Jika A(x,y,z) maka $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dan $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2. Vektor satuan adalah suatu vektor panjangnya satu.
   Vektor arah sumbu x, sumbu y dan sumbu z berturut-turut adalah :

   $$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Vektor posisi adalah suatu vektor yang titik awalnya di 0.
   Dua buah vector dikatakan sama jika kedua vektor itu mempunyai besar dan arah yang sama.



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{matrix}$$

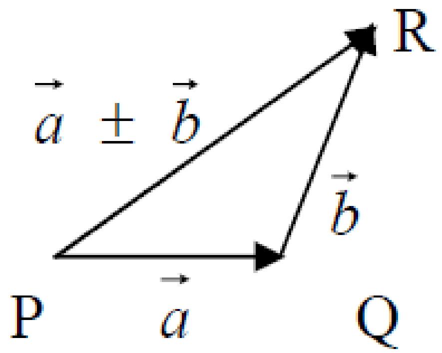
C. Operasi Vektor

1. Penjumlahan dan pengurangan vektor

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$$

untuk penjumlahan :

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$



2. Perkalian skalar dengan vektor

$$\mathrm{k}\,\vec{a} = \mathrm{k}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

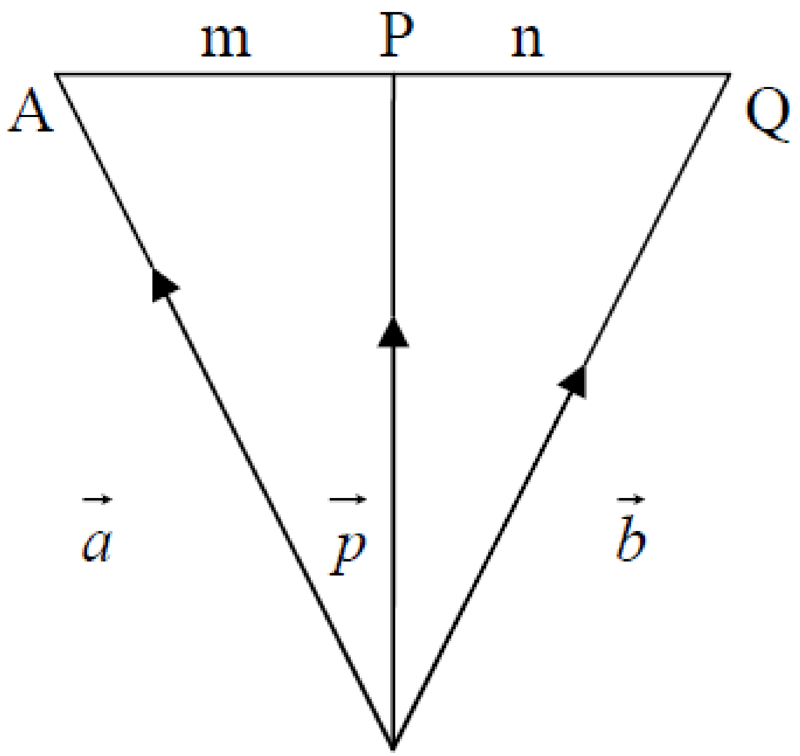
3. Besar atau panjang vektor

a. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$

b. Jika P (a_1, a_2, a_3) dan Q (b_1, b_2, b_3) maka

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(b_1 - a_1) \; + (b_2 - a_2) \; + (b_3 - a_3)}$$

4. Perbandingan

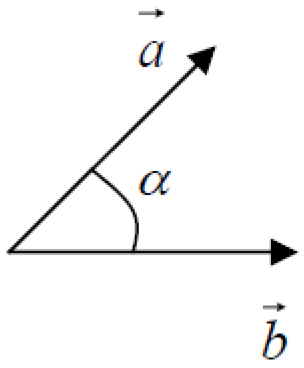


$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$

$\vec{a}$, $\vec{p}$ dan $\vec{b}$ adalah vektor-vektor posisi dari titik A, B dan P

D. Perkalian Skalar dua Vektor

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\alpha$$



α menyatakan sudut yang dibentuk oleh vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$

Jika $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ maka

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

E. Besar sudut antara dua Vektor

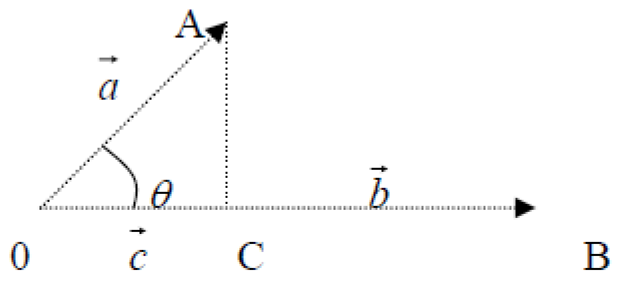
$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

$$= \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}.\sqrt{b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + b_3^{\ 2}}} \qquad ;0 \le \alpha \le 180^0$$

F. Proyeksi Ortogonal suatu vektor pada vektor :

Salah satu kegunaan dari perkalian scalar adalah untuk menentukan proyeksi ortogonal dari suatu vektor pada vector lain

1. Proyeksi skalar ortogonal



$$|\overrightarrow{OC}| = |\vec{c}| = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$$ → Proyeksi skalar ortogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

Proyeksi skalar juga disebut panjang proyeksi

2. Proyeksi vektor ortogonal

Proyeksi vektor ortogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah :

$$|\vec{c}| = \left(\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) . \vec{b}$$

Proyeksi vektor juga disebut vector poyeksi

G. Rumus-rumus tambahan :

1. $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{a^2+b^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha}$

$= \sqrt{2(a^2+b^2)-|\vec{a}-\vec{b}|^2} \quad \rightarrow \quad |\vec{a}-\vec{b}|^2 = a^2+b^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$

2. $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{a^2+b^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha}$

$= \sqrt{2(a^2+b^2)-|\vec{a}+\vec{b}|^2} \quad \rightarrow \quad |\vec{a}-\vec{b}|^2 = a^2+b^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$

3. $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha+2|\vec{a}||\vec{c}|\cos\beta+2|\vec{b}||\vec{c}|\cos\gamma}$

Contoh soal :

1. Jika vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Vektor $2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c} = \ldots\ldots$

Jawab :

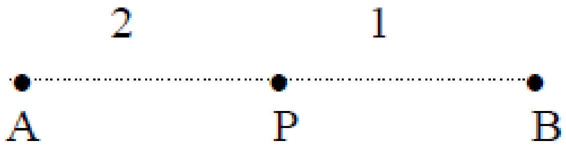
$$2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2. Diketahui titik A(-1,5,2) dan B(5,-4,17), jika titik P membagi AB sehingga AP:PB = 2:1, maka vektor posisi titik P adalah :

Jawab:



Pakai rumus perbandingan : $\vec{p} = \dfrac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{2+1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 17 \end{pmatrix}}{3} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 34 \end{pmatrix}}{3} = \frac{\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 36 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Cara lain :

AP : PB = 2 : 1

$$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \text{AP} = 2\ \text{PB}$$

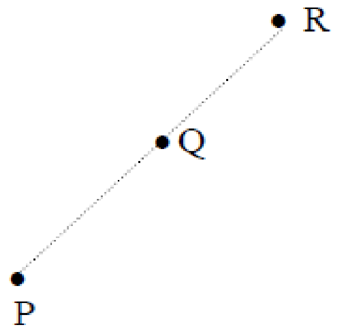
p- a = 2 (b-p)
p-a = 2b – 2p

p+2p = a+2b
3p = a + 2b

$$\mathbf{p} = \frac{a+2b}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{sama dengan cara pertama}$$

3 Titik P(3,2,-1), Q(1,-2,1) dan R(7,p-1,-5) segaris untuk nilai p =

Jawab:



$\overrightarrow{PR} = k\ \overrightarrow{PQ}$

$\vec{r} - \vec{p} = k\,(\vec{q} - \vec{p})$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ p-1 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = k\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ p-3 \\ -4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 4 = -2k \rightarrow k = \frac{4}{-2} = -2$$

$\Leftrightarrow$ p -3 = -4 k

p-3 = -4 x.-2

p-3 = 8

p = 8+3 = 11

jadi p = 11

4. Diketahui titik-titik A(2,-1,4), B(1,0,3) dan C (2,0,3). Cosinus sudut antara $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$ adalah :

Jawab:

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\,.\,|\overrightarrow{AC}|\,.\,\text{Cos}\ \alpha$$

$$\text{Cos}\ \alpha = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\text{Cos}\ \alpha = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = \frac{\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}.\sqrt{0+1^2+(-1)^2}} = \frac{0+1+1}{\sqrt{3}.\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}\,.\,\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{2}{6}\sqrt{6} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

5. Diketahui $|\vec{a}| = \sqrt{3}$; $|\vec{b}| = 1$ dan $|\vec{a} - \vec{b}| = 1$

Berapa panjang vector $|\vec{a} + \vec{b}| =$

Jawab:

Gunakan rumus berikut :

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha}$$

$$= \sqrt{2(a^2 + b^2) - |\vec{a} - \vec{b}|^2}$$

Diketahui :

$a^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$; $b^2 = 1$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 1$

Masukkan ke dalam rumus :

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2(a^2 + b^2) - |\vec{a} - \vec{b}|^2}$$

$$= \sqrt{2(3+1) - 1} = \sqrt{2x4 - 1}$$

$$= \sqrt{7}$$

6 Panjang proyeksi ortogonal vector

$\vec{a}$ = - $\sqrt{3}$ i + p j + k pada vector

$\vec{b}$ = - $\sqrt{3}$ i + 2 j + pk adalah $\frac{3}{2}$, maka nilai p adalah :

Jawab :

Gunakan rumus : $|\overrightarrow{OC}| = |\vec{c}| = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$ → Proyeksi skalar ortogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

$$|\vec{c}| = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ p \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 2 \\ p \end{pmatrix}}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 2^2 + p^2}} = \frac{3+2p+p}{\sqrt{3+4+p^2}} = \frac{3+3p}{\sqrt{7+p^2}} = \frac{3}{2}$$

$\Leftrightarrow$ 2 (3+3p) = 3 $\sqrt{7+p^2}$

$\Leftrightarrow$ 6(1+p) = 3 $\sqrt{7+p^2}$

$\Leftrightarrow$ 2 (1+p) = $\sqrt{7+p^2}$

$\Leftrightarrow$ $(2+2p)^2 = (\sqrt{7+p^2})^2$

$\Leftrightarrow$ 4+8p+4 p^2 = 7+ p^2

$\Leftrightarrow$ 8p + 3 p^2 -3 = 0

$\Leftrightarrow$ (3p - 1) (p + 3) = 0

3p-1 = 0

3p = 1

p = $\frac{1}{3}$ $\rightarrow$ (i)

p+3 = 0

p = -3 $\rightarrow$ (ii) Tidak memenuhi

Jadi nilai p adalah $\frac{1}{3}$

7 Diketahui vector $\vec{a} = 2i - 4j - 6k$ dan $\vec{b} = 2i - 2j + 4k$
Proyeksi vector ortogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah…

Jawab:

Rumus proyeksi vektor ortogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah :

$$|\vec{c}| = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) . \vec{b}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \; ; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{24}$$
$$|\vec{b}|^2 = 24$$

masukkan ke dalam rumus :

$$|\vec{c}| = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right) . \vec{b} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}}{24} . \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{4+8-24}{24} . \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-12}{24} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

= -i + j – 2k