Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo I-C **2024/2025**

Ficha de Exercícios 3

Integrais impróprios e Transformadas de Laplace

1. Determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ e, em caso de convergência, indique o seu valor.

Resolução: Uma vez que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_e^t \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{t\to+\infty}\Big[\ln|\ln x|\Big]_e^t = \lim_{t\to+\infty}\Big(\ln|\ln t| - \ln|\ln e|\Big) = +\infty$$

podemos concluir que o integral dado é divergente.

2. Determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx$ e, em caso de convergência, indique o seu valor.

Resolução:

Vamos estudar o seguinte limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t xe^{-x}dx.$$

Usando o método de integração por partes podemos concluir que

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C, \qquad C\in\mathbb{R}$$

logo

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t xe^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}\Big[-xe^{-x} - e^{-x}\Big]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left(-te^{-t} - e^{-t} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$$

pois

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-te^{-t}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{t}{e^t}\right) = 0.$$

Portanto, podemos concluir que o integral dado é convergente e

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \frac{2}{e}.$$

3. Determine a natureza dos integrais impróprios seguintes e, em caso de convergência, calcule o seu valor.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{5}{4+x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \cos(3x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{(4-x)^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$ (j) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \ln x\,dx$ (k) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}(\ln x)^3\,dx$ (l) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{4}{1+(x+1)^2}\,dx$

(m) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$ (n) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4+x^2}\,dx$.

4. Estude a natureza dos integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2^x dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-st}dt \quad (s>0)$ (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}e^{\alpha t}dt \quad (s>\alpha)$

5. Verifique que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos(\alpha t)dt = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$ onde $\alpha\in\mathbb{R}$ e $s\in\mathbb{R}^+$.

6. Estude, utilizando o Critério de Comparação ou Critério do Limite, a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x}{e^{2x}-1}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{5x^2-3}{x^8+x-1}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{x^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+e^x)}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{2x^{\frac{5}{3}}}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{(2+x^2)^2}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-x\operatorname{sen} x}{x^3}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3x^2-2}{x^3+2x+1}\,dx$ (j) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(3x-1)}{1+x^6}\,dx$ (k) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x}\,dx$ (l) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$

7. Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\sin\sqrt{x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos(3x)}{x^2+2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{-1}{x^3+1}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{x^3+3x}{2+x^2}\,dx$.

8. Seja $f(x)=\begin{cases} m & \text{se } |x|\le 2 \\ 0 & \text{se } |x|>2 \end{cases}$. Determine m de modo a que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

9. Para cada uma das funções seguintes, determine a Transformada de Laplace de f, $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$:

(a) $f(t) = 2\operatorname{sen}(3t) + t - 5e^{-t}$

(b) $f(t) = e^{-t}\operatorname{senh}(5t)$

(c) $f(t) = e^{2t}\cos(5t)$

(d) $f(t) = te^{3t}$

(e) $f(t) = t\cosh(t)$

(f) $f(t) = \pi - 5e^{-t}t^{10}$

(g) $f(t) = (3t-1)\operatorname{sen} t$

(h) $f(t) = (1 - H_\pi(t))\,\mathrm{sen}\,t$
(i) $f(t) = (t-2)^2 e^{2(t-2)} H_2(t)$.

10. Para cada uma das funções seguintes, determine $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$:

(a) $F(s) = \dfrac{2s}{s^2-9}$
(b) $F(s) = \dfrac{4}{s^7}$
(c) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+6s+9}$
(d) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+s-2}$
(e) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+6}$
(f) $F(s) = \dfrac{3s-1}{s^2-4s+13}$

11. Usando Transformadas de Laplace, calcule o valor dos seguintes integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{10}\, e^{-2t} dt$;
(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3t} t\,\mathrm{sen}\,t\,dt$.

12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sabendo que $f'(t) + 2f(t) = e^t$ e que $f(0) = 2$, determine a expressão de $f(t)$.

Exercícios de revisão

13. Determine a natureza do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\mathrm{arctg}\,x}\,dx$$

calculando o seu valor caso seja convergente.

14. Determine a natureza e, em caso de convergência, calcule o valor:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x (4-x)\,dx.$$

15. Seja $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$.

(a) Determine a primitiva de f que se anula no ponto $x = e$.
(b) Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$.

16. Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1 - 2\cos^5 x}{\sqrt{2+e^x}}\,dx$
(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x\ln(x+1)}\,dx$
(c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \mathrm{arcsen}\,\frac{1}{x}\,dx$
(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\cos(2x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$

17. (a) Mostre que o integral impróprio $\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ é convergente e indique o seu valor.

    (b) Estude a natureza do integral impróprio $\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}\cos^2(x)\,dx$ sem recorrer à definição.

18. Determine:

    (a) $\mathcal{L}\{e^{-3t}\,\mathrm{sen}\,(2t)\}$

    (b) $\mathcal{L}\{(t-2+e^{-2t})\cos(4t)\}$

    (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-1}{s^2-4s+6}\right\}$

    (d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s}{(s-1)(s^2+2s+5)}\right\}$.

19. Usando Transformada de Laplace, determine o valor do integral impróprio $\int_0^{+\infty} t\,\cos(t)e^{2t}\,dt$.

20. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sabendo que $f''(t)-f'(t)=2e^t$ e que $f(0)=f'(0)=0$, determine a expressão de $f(t)$.

Soluções:

1. Resolvido

2. Resolvido

3. (a) $\frac{5\pi}{4}$
   (b) Divergente
   (c) $\frac{1}{2}$
   (d) Divergente
   (e) π
   (f) $-\frac{1}{2}$
   (g) 2
   (h) Divergente
   (i) 0
   (j) Divergente
   (k) Divergente
   (l) 3π
   (m) $1-e^{-\frac{\pi}{2}}$
   (n) $\frac{\pi}{4}$

4. (a) 2π
   (b) Divergente
   (c) $\dfrac{1}{s^2}$
   (d) $\dfrac{1}{s-\alpha}$

5. —

6. (a) Convergente
   (b) Convergente
   (c) Convergente
   (d) Divergente
   (e) Convergente
   (f) Divergente
   (g) Convergente
   (h) Convergente
   (i) Divergente
   (j) Convergente
   (k) Divergente
   (l) Convergente

7. (a) Convergente
   (b) Convergente
   (c) Convergente
   (d) Convergente
   (e) Divergente
   (f) Convergente
   (g) Convergente
   (h) Divergente

8. $m = \dfrac{1}{4}$

9.

   (a) $\dfrac{6}{s^2+9} + \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{5}{s+1}\,, \quad s > 0;$

   (b) $\dfrac{5}{(s+1)^2 - 25}\,, \quad s >;$

   (c) $\dfrac{s-2}{(s-2)^2+25}\,, \quad s > 2;$

   (d) $\dfrac{1}{(s-3)^2}\,, \quad s > 3;$

   (e) $\dfrac{s^2+1}{(s^2-1)^2}\,, \quad s > 1;$

   (f) $\dfrac{\pi}{s} - \dfrac{5 \cdot 10!}{(s+1)^{11}}\,, \quad s > 0;$

   (g) $\dfrac{6s}{(s^2+1)^2} - \dfrac{1}{s^2+1}\,, \quad s > 0;$

   (h) $\dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\,, \quad s > 0;$

   (i) $e^{-2s}\dfrac{2}{(s-2)^3}\,, \quad s > 2.$

10.

(a) $2\cosh(3t) = e^{3t} + e^{-3t}, \quad t \geq 0;$

(b) $\dfrac{t^6}{180}, \quad t \geq 0;$

(c) $t\, e^{-3t}, \quad t \geq 0;$

(d) $\dfrac{1}{3}e^t - \dfrac{1}{3}e^{-2t}, \quad t \geq 0;$

(e) $\dfrac{e^{-2t}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t), \quad t \geq 0;$

(f) $e^{2t}\Big(3\cos(3t) + \dfrac{5}{3}\operatorname{sen}(3t)\Big), \quad t \geq 0.$

11. (a) $\dfrac{10!}{2^{11}}$; (b) $\dfrac{3}{50}$.

12. $f(t) = \dfrac{1}{3}e^t + \dfrac{5}{3}e^{-2t}$.

13. O integral dado é convergente e o seu valor é $\ln 2$.

14. O integral dado é convergente e o seu valor é 5.

15. (a) $F(x) = 2\sqrt{\ln x} - 2$.
   (b) O integral dado é divergente.

16. (a) Convergente.
   (b) Divergente.
   (c) Divergente.
   (d) Convergente.

17. (a) O integral dado é convergente e o seu valor é $\frac{1}{2e}$.
   (b) O integral dado é convergente (Sugestão: Usar o Critério de Comparação e a alínea anterior).

18.

(a) $\dfrac{2}{s^2 + 6s + 13}, \quad s > -3;$

(b) $\dfrac{s^2 - 16}{(s^2 + 16)^2} - \dfrac{2s}{s^2 + 16} + \dfrac{s + 2}{(s + 2)^2 + 16}, \quad s > 0;$

(c) $e^{2t}\left(2\cos(\sqrt{2}\,t) + \dfrac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,t)\right), \quad t \geq 0.$

(d) $\dfrac{1}{4}\,e^t - \dfrac{1}{4}\,e^{-t}\cos(2t) + \dfrac{3}{4}\,e^{-t}\operatorname{sen}(2t), \quad t \geq 0.$

19. $\frac{3}{25}$.

20. $f(t) = 2(1 - e^t + te^t)$.