Valores e Vetores Próprios

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A **Folha Prática 5**

---

1. Determine os valores próprios e vetores próprios de cada uma das seguintes matrizes. Averigue se a matriz é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique uma sua matriz diagonalizante, bem como a matriz diagonal correspondente.

   (a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

   (d) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$; (e) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

2. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$
   (a) Mostre que 1 é um valor próprio de A e determine o subespaço próprio de A associado ao 1.
   (b) Verifique se A é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique uma matriz diagonal D semelhante a A.

3. Seja A uma matriz $n \times n$. Mostre que A é singular se e só se 0 é um valor próprio de A.

4. Mostre que A e A^T possuem os mesmos valores próprios.

5. Seja A uma matriz $n \times n$ e λ um valor próprio de A. Mostre que
   (a) λ^k é um valor próprio de A^k, para $k \in \mathbb{N}$;
   (b) $\frac{1}{\lambda}$ é um valor próprio de A^{-1}, caso A seja invertível.

6. Se A e B são matrizes invertíveis, mostre que AB e BA são matrizes semelhantes.

7. Se A é diagonalizável, mostre que
   (a) A^T é diagonalizável;
   (b) A^k é diagonalizável, para $k \in \mathbb{N}$;
   (c) A^{-1} é diagonalizável, caso A seja invertível.

8. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$
   (a) Determine os valores próprios e subespaços próprios de A.
   (b) Verifique que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.
   (c) Calcule A^5, utilizando o facto de A ser diagonalizável.

9. Determine os valores dos parâmetros reais a e b para os quais $(1, 1)$ é um vetor próprio da matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$$
   e 0 é um valor próprio de A.

10. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ k & k+1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule o polinómio característico de A, assim como os seus valores próprios.

(b) Determine os subespaços próprios de A.

(c) Indique, justificando, os valores do parâmetro real k para os quais A é diagonalizável.

(d) Para os valores de k obtidos na alínea anterior, determine uma matriz diagonal D e uma matriz não singular P tal que $A = PDP^{-1}$.

(e) Para $k = -1$, determine A^{2012}.

11. Dada A uma matriz 4×4, sejam X, Y, Z, W vetores não nulos de $\mathbb{R}^4$, tais que $AX = AY = 0$, $AZ = Z$ e $AW = -W$. Suponha que $\{X, Y\}$ é linearmente independente.

(a) Indique o polinómio caraterístico de A e os valores próprios de A.

(b) Indique, justificando, se A é diagonalizável e se existe uma base de $\mathbb{R}^4$ constituída por vetores próprios de A.

12. Seja A uma matriz quadrada de ordem n e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ os seus valores próprios. Mostre que $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

13. Diagonalize as matrizes simétricas seguintes através de uma matriz diagonalizante ortogonal:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

14. Considere a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que 9 é um valor próprio de A.

(b) Diagonalize A através de uma matriz diagonalizante ortogonal.

15. Seja A uma matriz simétrica 3×3 com valores próprios 1 e -3, tal que $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$ são vetores próprios de A associados ao valor próprio 1 e $(0, -1, 1)$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio -3.

(a) Determine o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 1.

(b) Justifique que A é diagonalizável e determine a matriz A.

16. Classifique as formas quadráticas usando o critério de Sylvester.

(a) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^T AX$, onde $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

(b) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^T AX$, onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(c) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^T AX$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

(d) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^T AX$, onde $A = \begin{bmatrix} -10 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.