# MAT223 AYRIK MATEMATİK

## Fibonacci Sayıları
## 4. Bölüm

Doç. Dr. Emrah Akyar

Anadolu Üniversitesi
Fen Fakültesi Matematik Bölümü, ESKİŞEHİR

2011–2012 Güz Dönemi

# Fibonacci'nin Tavşanları

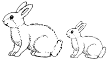
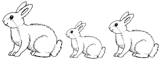
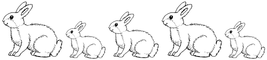
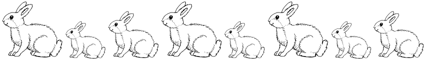
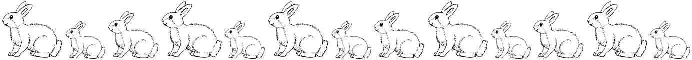
13. yüzyılda İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci aşağıdaki soruyu ortaya atmıştır:

## Leonardo Fibonacci

## Soru

Bir çiftçi tavşan yetiştiriciliği ile uğraşmaktadır. Her bir tavşan iki aylık olduğunda bir yavru vermektedir. Bu yavrular da aynı şekilde iki aylık olduğunda yine yavru vermektedir. Tavşanların hiç ölmediğini düşünür ve erkek tavşanları da göz ardı edersek $n$. ayın sonunda bu çiftçinin kaç tavşanı olacaktır?

$n$ nin küçük değerleri için bu soruya cevap vermek kolaydır.

| $n$ | Tavşanlar | Sayı |
|---|---|---|
| 1 |  | 1 |
| 2 |  | 1 |
| 3 |  | 2 |
| 4 |  | 3 |
| 5 |  | 5 |
| 6 |  | 8 |
| 7 |  | 13 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Aslında tavşanların sayısının herhangi bir ay için nasıl arttığını belirlemek hiç de zor değildir.

- Açıktır ki, bir sonraki ayda doğacak (eklenecek) tavşan sayısı o aydaki en az iki aylık olan tavşanların sayısı kadardır.
- Bir başka ifadeyle, bir sonraki aydaki tavşan sayısını elde etmek için, önceki aydaki tavşanların sayısının eldeki tavşanların sayısına eklenmesi gerekir.
- Böylece her bir aydaki tavşan sayısı

$$1, \quad 1+1=2, \quad 2+1=3, \quad 3+2=5, \quad 5+3=8, \quad 8+5=13, \quad \ldots$$

elde edilir.

Yukarıdaki bağıntıyı formüle etmek için $n$. aydaki tavşan sayısını $F_n$ ile gösterelim. Bu durumda $n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

yazabiliriz.

$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5$ olduğunu zaten gördük. Yukarıdaki formül ile daha fazlasını da hesaplayabiliriz.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040, 1346269, 2178309, 3524578, 5702887, 9227465, 14930352, 24157817, 39088169, 63245986, 102334155, 165580141, 267914296, 433494437, 701408733, 1134903170, 1836311903, 2971215073, 4807526976, 7778742049, 12586269025, 20365011074, 32951280099, 53316291173, 86267571272, 139583862445, 225851433717, 365435296162, 591286729879, 956722026041, 1548008755920, 2504730781961, 4052739537881, 6557470319842, 10610209857723, 17167680177565, 27777890035288, 44945570212853, 72723460248141, 117669030460994, 190392490709135, 308061521170129, 498454011879264, 806515533049393, 1304969544928657, 2111485077978050, 3416454622906707, 5527939700884757, 8944394323791464, 14472334024676221, 23416728348467685, 37889062373143906, 61305790721611591, 99194853094755497, 160500643816367088, 259695496911122585, 420196140727489673, 679891637638612258, 1100087778366101931, 1779979416004714189, 2880067194370816120, 4660046610375530309,. . .

Bu sayılara Fibonacci Sayıları denir.

Eğer

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

alınırsa,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

eşitliği ile birlikte Fibonacci sayıları tek türlü olarak elde edilir. Bu nedenle Fibonacci sayılarının tanımı bu şekilde verilebilir.

Yukarıdaki eşitlik doğrudan $F_n$ sayısını vermek yerine, ilk iki Fibonacci sayısı ile başlayıp, önceki iki Fibonacci sayısı yardımıyla her bir Fibonacci sayısını vermektedir.

Bu şekildeki tanımlamalara yinelemeli (recurrence) tanımlama denir.

## Soru

*$n$ basamaktan oluşan bir merdiveni her seferinde bir ya da iki basamak çıkmak koşuluyla kaç farklı şekilde çıkabilirsiniz?*

Yine $n$ nin bazı küçük değerleri için inceleyelim:

| $n$ | Çıkış şekli | Çıkış sayısı |
|---|---|---|
| 1 | 1 adım | 1 |
| 2 | 1 adım + 1 adım, 2 adım | 2 |
| 3 | 1 adım + 1 adım + 1 adım, 2 adım + 1 adım, 1 adım + 2 adım | 3 |
| 4 | 1+1+1+1, 1+1+2, 1+2+1, 2+1+1, 2+2 | 5 |
| 5 | 1+1+1+1+1, 1+1+1+2, 1+1+2+1, 1+2+1+1, 2+1+1+1, 1+2+2, 2+1+2, 2+2+1 | 8 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

- $n$ basamaklı merdivenin $J_n$ farklı şekilde çıkılabildiğini kabul edelim.
- $J_{n+1}$ sayısını $J_k$ $(1 \leq k \leq n)$ sayılarını kullanarak belirlemeye çalışalım.
- Eğer $n+1$ basamaklı merdiveni *ilk başta bir adım* atarak çıkmaya başlarsak, geriye $n$ basamak kalır ve bu $n$ basamağı $J_n$ farklı şekilde çıkabileceğimizi biliyoruz.
- Eğer merdiveni *ilk başta iki adım* atarak çıkmaya başlarsak, geriye $n-1$ basamak kalır ve bu $n-1$ basamağı da $J_{n-1}$ farklı şekilde çıkabileceğimizi biliyoruz.
- Böylece olası iki durumu da incelemiş olduk. O halde

  $$J_{n+1} = J_n + J_{n-1}$$

  elde edilir.

Elde edilen bu formül ile Fibonacci sayılarını elde etmek için kullanılan formül aynı. Buradan $F_n = J_n$ diyebilir miyiz? Hayır! $2 = F_3 \neq J_3 = 3$. Ancak, $J_n = F_{n+1}$ yazabiliriz.

# Bazı Özdeşlikler

## Soru

*İlk n Fibonacci sayısının toplamı nedir?*

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$$

$$\begin{aligned}
0 &= 0\\
0+1 &= 1\\
0+1+1 &= 2\\
0+1+1+2 &= 4\\
0+1+1+2+3 &= 7\\
0+1+1+2+3+5 &= 12\\
0+1+1+2+3+5+8 &= 20\\
0+1+1+2+3+5+8+13 &= 33
\end{aligned}$$

Tahmini olan?

## Varsayım/Sanı (Conjecture)

$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

## Kanıt.

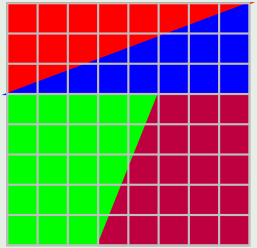
Kanıtı tümevarım yöntemini kullanarak yapalım:

- $n = 0, 1, 2, 3$ için eşitliğin doğru olduğunu yukarıdan biliyoruz.
- $n - 1$ için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim. Yani, $F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} = F_{n+1} - 1$ olsun.
- Bu durumda eşitliğin $n$ için de doğru olduğunu gösterelim.

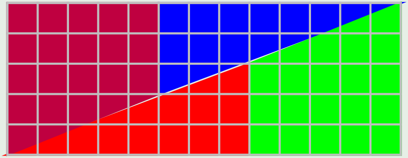
$$\begin{aligned} F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} + F_n &= (F_{n+1} - 1) + F_n \\ &= \underbrace{F_{n+1} + F_n}_{F_{n+2}} - 1 = F_{n+2} - 1 \end{aligned}$$

O halde tümevarım yöntemi gereği her $n$ doğal sayısı için eşitlik doğru

## Alıştırma (Alıştırma 4.2.9)



$8 \times 8 = 64$



$5 \times 13 = 65$

- $64 = 65$?
- Bunun Fibonacci sayıları ile ne ilgisi var?

- Öncelikle biraz hile yaptığımı itiraf edeyim. İlk kareden ikinci şekil elde edilemez.
- Şekilde geçen sayılar 5,8 ve 13 Fibonacci sayılarıdır. $F_5 = 5$, $F_6 = 8$ ve $F_7 = 13$
$$8 \times 8 = 5 \times 13 - 1 \Rightarrow (F_6)^2 = F_5 \times F_7 - 1$$
Peki $F_5, F_6, F_7$ yerine $F_6, F_7, F_8$ için yazarsak?
$$\underbrace{(F_7)^2}_{169} = \underbrace{F_6 \times F_8}_{168}$$

**Alıştırma (Alıştırma 4.2.3-d)**

$$(F_{n+1})^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n$$

olduğunu gösteriniz.

## Kanıt.

Kanıtı yine tümevarım yöntemini kullanarak yapalım:

- $n = 0$ için $(F_1)^2 = 1 = F_0F_2 + (-1)^0 = 1$ ✓
- $n$ için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim. Yani, $(F_{n+1})^2 = F_nF_{n+2} + (-1)^n$ olsun.
- $n + 1$ için de eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. Yukarıdaki eşitliğinin her iki tarafına $F_{n+1}F_{n+2}$ eklersek,

$$\begin{aligned}
(F_{n+1})^2 + F_{n+1}F_{n+2} &= F_nF_{n+2} + (-1)^n + F_{n+1}F_{n+2} \\
F_{n+1}\underbrace{(F_{n+1} + F_{n+2})}_{F_{n+3}} &= F_{n+2}\underbrace{(F_n + F_{n+1})}_{F_{n+2}} + (-1)^n \\
F_{n+1}F_{n+3} &= (F_{n+2})^2 + (-1)^n \\
(F_{n+2})^2 &= F_{n+1}F_{n+3} + (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

O halde tümevarım yöntemi gereği her $n$ doğal sayısı için eşitlik doğrudur. □

Aşağıdaki özdeşliklerin de doğru olduğu yineleme formülü ve/veya tümevarım yöntemi kullanılarak gösterilebilir.

- $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
- $F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + \cdots - F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n-1} - 1$
- $F_0^2 + F_1^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$
- $F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}$
- $\binom{n}{0} F_0 + \binom{n}{1} F_1 + \binom{n}{2} F_2 + \cdots + \binom{n}{n} F_n = F_{2n}$

# Fibonacci Sayıları İçin Bir Formül

**Teorem**

Fibonacci sayıları

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

eşitliğini sağlar.

## Alıştırma 4.3.1.

Kanıtı tümevarım yöntemi ile yapalım:

- $n = 0$ ve $n = 1$ için formülün doğru olduğu açıktır.
- $n - 1$ ($n \geq 2$) için formülün doğru olduğunu kabul edelim (tümevarım hipotezi).
- $n$ için de formülün doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]
\end{aligned}$$

O halde tümevarım yöntemi gereği formül her $n$ doğal sayısı için doğrudur. $\square$

Önce bu formülün nasıl ortaya çıktığına değinelim: Fibonacci sayılarının oldukça hızlı arttığını biliyoruz. Acaba bu sayılar hangi hızla artıyor? Ardışık Fibonacci sayılarının oranlarına bakalım:

$$\frac{1}{1} = 1, \quad \frac{2}{1} = 2, \quad \frac{3}{2} = 1.5, \quad \frac{5}{3} = 1.666666, \quad \frac{8}{5} = 1.600000,$$
$$\frac{13}{8} = 1.625000, \quad \frac{21}{13} = 1.615384615, \quad \frac{34}{21} = 1.619047619,$$
$$\frac{55}{34} = 1.617647059, \quad \frac{89}{55} = 1.618181818, \quad \frac{144}{89} = 1.617977528,$$
$$\frac{233}{144} = 1.618055556, \quad \frac{377}{233} = 1.618025751, \ \ldots$$

İlk birkaç değeri göz ardı edersek ardışık Fibonacci sayılarının oranının 1.618 e çok yakın olduğunu görüyoruz. Bu bize Fibonacci sayılarının geometrik bir dizi olduğunu düşündürebilir.

Acaba Fibonacci sayıları ile aynı yineleme formülüne sahip bir geometrik dizi var mı bakalım.

$G_n$ dizisi $G_n = cq^n$ şeklinde $(c, q \neq 0)$

$$G_{n+1} = G_n + G_{n-1}$$

yineleme formülünü sağlayan bir geometrik dizi olsun. Bu durumda $G_n$ yerine değerini yazarsak,

$$cq^{n+1} = cq^n + cq^{n-1}$$

olur. Gerekli sadeleştirmeyi yaparsak,

$$q^2 = q + 1$$

elde ederiz. Bu denklemi çözersek,

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618034 \text{ ve } q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618034$$

olur.

O halde elimizde Fibonacci sayıları ile aynı yineleme formülüne sahip iki geometrik dizi var:

$$G_n = c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ ve } G'_n = c\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Maalesef her iki dizi de bize Fibonacci sayılarını vermez. Gerçekten de, $n = 0$ için $F_0 = 0$ olmasına karşın $G_0 = G'_0 = c$ olur.

Ancak,

$$G_{n+1} - G'_{n+1} = (G_n + G_{n-1}) - (G'_n + G'_{n-1}) = (G_n - G'_n) + (G_{n-1} - G'_{n-1})$$

olduğundan $G_n - G'_n$ dizisi yineleme formülünü sağlar.
Ayrıca, $G_0 - G'_0 = 0 = F_0$ olur. Üstelik, $G_1 - G'_1 = c\sqrt{5}$ olur.

O halde $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$ seçilirse $G_1 - G'_1 = 1 = F_1$ elde edilir.

Böylece, aynı başlangıç değerlerine ve aynı yineleme formülüne sahip $F_n$ ve $G_n - G'_n$ gibi iki dizi elde edilir. Öyleyse,

$$F_n = G_n - G'_n$$

olur. $G_n$ ve $G'_n$ yerine değerleri yazılırsa başlangıçta verilen formül elde edilir.

Verilen formülle başka çıkarımlar da yapabiliriz:

- $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618034 > 1$ olduğundan $n$ arttığında $G_n$ üstel olarak artar.
- $-1 < q_2 < 0$ olduğundan $n$ artarken $G'_n$ üstel olarak azalır.
- O halde yeterince büyük $n$ sayıları için $F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ alabiliriz.

$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sayısı Altın Oran olarak adlandırılan meşhur sayıdır. Hiç beklenmedik yerlerde bu sayı ile karşılaşmak mümkündür. Örneğin, düzgün bir beşgenin köşegeninin kenarına oranı bu sayıyı verir. Ya da

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}},$$

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}}}$$

$$\vdots$$

# Alıştırmalar

## Alıştırma

Pascal üçgeninin herhangi bir satırının soldan ilk elemanını işaretleyin. Daha sonra bu elemandan bir birim doğuya ve bir birim kuzey-doğuya gidip ulaştığınız elemanı işaretleyin. Pascal üçgeninin dışına çıkana kadar bu işleme devam edip işaretlediğiniz elemanları toplayın. Farklı satırlar için bu işlemi tekrarladığınızda ne tür sayılar elde edersiniz. Bu işlemi formüle edip kanıtlayınız.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
1+4+3 &= 8 &&= F_6 \\
1+5+6+1 &= 13 &&= F_7
\end{aligned}
$$

### Sanı

$$
\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n-k}{k} = F_{n+1}, \quad k = \llbracket n/2 \rrbracket
$$

Tümevarım yöntemi ve Pascal üçgeninin temel özelliği yardımıyla kolayca gösterilebilir.

- $n = 0$ ve $n = 1$ için doğru olduğu açık.
- $n \geq 2$ için doğru olsun.
- $n + 1$ için de doğru olduğunu gösterelim.

Genelliği bozmaksızın $n$ nin tek olduğunu kabul edersek ($n$ çift ise sadece son terimde bir farklılık olacaktır benzer şekilde kanıt yapılabilir),

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n-k}{k} \\
&= 1 + \left[\binom{n-2}{0} + \binom{n-2}{1}\right] + \left[\binom{n-3}{1} + \binom{n-3}{2}\right] + \cdots + \left[\binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k-1}{k}\right] \\
&= \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{n-k-1}{k}\right] + \left[\binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1}\right. \\
&\left. + \binom{n-4}{2} + \cdots + \binom{n-k-1}{k-1}\right] \\
&= F_n + F_{n-1} = F_{n+1}
\end{aligned}$$

olduğundan $n + 1$ içinde doğru dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için eşitlik doğrudur.

## Alıştırma

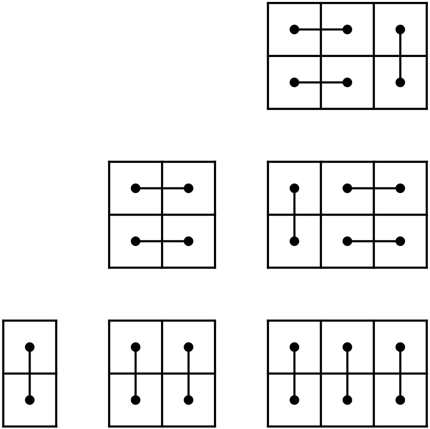
$2 \times n$ boyutlarındaki bir satranç tahtasını domino taşları ile kaç farklı şekilde örtebilirsiniz?

*Domino taşı, dikdörtgen şeklinde, satranç tahtasının iki karesi boyutundadır ve domino taşları satranç tahtası üzerine bir beyaz ve bir siyah kareye denk gelecek şekilde yerleştirilebilir. Ayrıca domino taşları özdeş kabul edilecektir.*

).

$2 \times n$ boyutlarındaki bir satranç tahtasını domino taşları ile $F_{n+1}$ farklı şekilde örtebiliriz. Kanıtı tümevarım ile yapalım:

- Aşağıda görüldüğü gibi $n = 1$ için satranç tahtasını "1", $n = 2$ için "2" ve $n = 3$ için "3" farklı şekilde örtebiliriz.



($n = 4$ için sayının "5" olacağını görünüz.)

- $n$ için mümkün olan tüm farklı örtülüşlerin sayısını $G_n = F_{n+1}$ ile gösterelim.
- $n+1$ için inceleyelim:
  - Eğer ilk adımda domino taşını dikey pozisyonda koyarsak, geriye $n$ sütun kalır ve bunları $G_n$ farklı şekilde örtebiliriz.
  - Eğer ilk adımda domino taşını yatay koyarsak bu durumda geriye $n-1$ sütun kalır ve bunları $G_{n-1}$ farklı şekilde örtebiliriz.

  O halde $n+1$ için $G_{n+1} = G_n + G_{n-1}$ olur.

  O zaman $2 \times n$ boyutlarındaki bir satranç tahtasını domino taşları ile $G_n = F_{n+1}$ farklı şekilde örtebiliriz.

## Alıştırma

$F_n$, $n$. Fibonacci sayısını göstermek üzere,

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$$

özdeşliğini kanıtlayınız.

Kanıtı $m$ üzerinden tümevarım ile yapalım.

- $m = 1$ için $F_{n+1} = F_{n-1}\underbrace{F_1}_{1} + F_n\underbrace{F_2}_{1} = F_{n-1} + F_n$ ✓
- $m = 2$ için

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n-1}\underbrace{F_2}_{1} + F_n\underbrace{F_3}_{2} \\ &= F_{n-1} + 2F_n \\ &= \underbrace{F_{n-1} + F_n}_{F_{n+1}} + F_n \\ &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

olduğundan doğrudur.

- $m = k + 1$ için ifade doğru olsun.
- $m = k + 2$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$F_{n+k} = F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1}$$

ve

$$F_{n+k+1} = F_{n-1}F_{k+1} + F_nF_{k+2}$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak,

$$F_{n+k+2} = F_{n-1}F_{k+2} + F_nF_{k+3}$$

eşitlik $m = k + 2$ için de doğru olur.

O halde tümevarım yöntemi gereği özdeşliğin doğruluğu elde edilir.

## Alıştırma

Her pozitif tam sayının birbirinden farklı Fibonacci sayılarının toplamı olarak yazılabileceğini kanıtlayınız.

- $n = 1, 2, 3$ için doğru olduğu açık.
- $n$ den küçük her tam sayı farklı Fibonacci sayılarının toplamı şeklinde yazılabilsin.
- $n$ sayısının da farklı Fibonacci sayılarının toplamı şeklinde yazılabildiğini gösterelim:
  - $n$ nin kendisi Fibonacci sayısı ise kanıtlanacak bir şey yok.
  - $n$ Fibonacci sayısı olmasın. Bu durumda

$$F_i < n < F_{i+1}$$

olacak şekilde $i$ sayısı vardır. Buradan

$$0 < n - F_i < F_{i+1} - F_i = F_{i-1}$$

olur.

Tümevarım hipotezinden, $n' = n - F_i$ pozitif tam sayısı da farklı Fibonacci sayılarının toplamı olarak yazılabilir.

Ayrıca, $n' < F_{i-1}$ olduğundan bu toplamdaki Fibonacci sayılarının her biri $F_{i-1}$ Fibonacci sayısından daha küçük olacaktır.

Eğer,

$$n' = n - F_i = F_{i_1} + F_{i_2} + \cdots + F_{i_k}, \quad i_j < i - 1, \; j = 1, 2, \ldots, k$$

şeklinde ise

$$n = F_{i_1} + F_{i_2} + \cdots + F_{i_k} + F_i, \quad i_j < i - 1, \; j = 1, 2, \ldots, k$$

olacağından kanıt biter.

## Alıştırma (Alıştırma 4.3.6)

$S = \{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin kaç alt kümesi ardışık iki tam sayı içermez?

Bazı $n$ değerleri için ardışık iki eleman bulundurmayan alt kümelerin sayısını bulalım:

- $n = 0$ ise $S = \emptyset$ olduğundan ardışık iki eleman içermeyen 1 tane alt küme vardır ($\emptyset$).
- $n = 1$ ise ardışık iki eleman bulundurmayan alt kümeler 2 tanedir ($\emptyset$ ve $\{1\}$).
- $n = 2$ ise ardışık iki eleman bulundurmayan alt kümeler 3 tanedir ($\emptyset$, $\{1\}$ ve $\{2\}$).
- $n = 3$ ise ardışık iki eleman bulundurmayan alt küme sayısı 5 olur ($\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 3\}$).
- $n = 4$ ise ardışık iki eleman bulundurmayan alt küme sayısı 8 olur ($\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$).
- $\vdots$

Elde edilen sayılar Fibonacci sayılarıdır.

$S = \{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin ardışık iki eleman içermeyen alt kümelerinin sayısını $A_n$ olsun. Kolay anlaşılabilir olması için önce $n = 4$ iken $S = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin ardışık iki eleman bulundurmayan alt kümelerinin sayısını yani $A_4$ ü hesaplayalım. Bu alt kümeleri aşağıdaki gibi iki gruba ayırabiliriz:

| "4" ü bulunduran ve ardışık eleman içermeyen alt kümeler | "4" ü bulundurmayan ve ardışık elema içermeyen alt kümeler |
|---|---|
| $\underbrace{\{4\},\ \{1,4\},\ \{2,4\}}_{A_2}$ "4" kümelere ait olduğundan "3" ait olmamalı. Bu durumda $\{1, 2\}$ kümesinin ardışık iki sayı içermeyen her bir alt kümesine "4" ü ekliyoruz. Bunların sayısı ise varsayımımızdan $A_2$ olur. | $\underbrace{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,3\}}_{A_3}$ Bu kümeler $\{1, 2, 3\}$ kümesinin ardış iki eleman içermeyen alt kümeleri olu Bunların sayısı da varsayımımız gere $A_3$ olur. |

Böylece

$$A_4 = A_2 + A_3$$

olur.

Yukarıda "4" yerine $n$ alıp, diğer sayıları da $n-1$ ve $n-2$ ile değiştirirsek,

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$$

olur.

$A_0 = 1$ ve $A_1 = 2$ olduğundan $A_n = F_{n+2}$ olur.

## Alıştırma

$n$ digit uzunluğunda ve "1" ile başlayan, "1" ler "1" ler ile, "0" lar "0" lar ile yan yana gelme koşuluyla ("0" ve "1" lerin yalnız kalmasını istemiyoruz!) kaç farklı binary string yazılabilir? Örneğin, $n = 8$ için bazı istenen ve istenmeyen durumlar aşağıda verilmiştir.

| | |
|---|---|
| 11000111 | ✓ |
| 11100111 | ✓ |
| 10001111 | X en baştaki "1" yalnız kalmış. |
| 11011000 | X yalnız bir "0" var |
| 11001000 | X yalnız bir "1" var |
| 00011000 | X "1" ile başlamıyor |

Önce bazı $n$ değerleri için elde edilen binary stringleri yazalım:

| $n$ | Binary String | $A_n$ |
|---|---|---|
| 1 | – | 0 |
| 2 | `11` | 1 |
| 3 | `111` | 1 |
| 4 | `1111, 1100` | 2 |
| 5 | `11111, 11100, 11000` | 3 |
| 6 | `111111, 111100, 111000, 110011, 110000` | 5 |
| 7 | `1111111, 1111100, 1111000, 1110011, 1110000, 1100111, 1100011, 1100000` | 8 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Yukarıdaki tablodan elde edilen sayıların Fibonacci sayıları olduğu görüyoruz.

$n$ karakter uzunluğunda ve verilen koşulları sağlayan binary string sayısının $F_{n+1}$ olduğunu kanıtlayalım.

$n$ karakter uzunluğunda ve verilen koşulları sağlayan farklı binary stringlarin sayısına $A_n$ diyelim. Bu şekildeki binary stringlerin soldan üçüncü digiti için iki durum söz konusudur:

- $\underbrace{11\mathbf{1}xxx\ldots x}_{n \text{ tane}}$
- $\underbrace{11\mathbf{0}0xx\ldots x}_{n \text{ tane}}$

Birinci durumu ele alırsak, soldan ilk digiti attığımızda $n-1$ digitli ve verilen koşulları sağlayan bir binary string elde ederiz ki bunların sayısı $A_{n-1}$ olur.

İkinci durumda yani 3. digit "0" ise bu durumda koşullar gereği 4. digitte "0" olmak zorundadır.

Şimdi, ilk iki digit atılarak elde edilen $n-2$ digit uzunluğunda, "00" ile başlayan ve istenen koşulları sağlayan binary stringleri düşünecek olursak bunların sayısı $n-2$ digit uzunluğunda "11" ile başlayan ve istenen koşulları sağlayan binary stringlerin sayısı ile aynı ve $A_{n-2}$ olur. Yani, "0" lar ile "1" leri değiştirmek bir şey değiştirmez.

O halde bu iki durumu birleştirirsek, $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ olur. Yukarıdaki tablodan $A_2 = 1$ ve $A_3 = 1$ olduğundan $A_n = F_{n+1}$ elde edilir.

## Alıştırma

Sosyal yardım için sırada bekleyen 10 vatandaşa kömür ve gıda yardımı yapılacaktır. Sırada bekleyen ardışık iki kişiye kömür vermemek ve sıradakilere yardımlardan sadece birini vermek koşuluyla bu dağıtım kaç farklı şekilde yapılabilir?

Önce problemi basitleştirip sırada bekleyen 1,2,3,4 ve 5 kişi varken yardımların kaç farklı şekilde dağıtılabileceğini inceleyelim. Gösterimlerde kısalık açısından kömür yardımını K, gıda yardımını G ile gösterelim.

| n | Dağıtımlar | $A_n$ |
|---|---|---|
| 1 | K, G | 2 |
| 2 | KG, GK, GG | 3 |
| 3 | KGK, KGG, GGK, GKG, GGG | 5 |
| 4 | KGKG, KGGK, KGGG, GKGK, GKGG, GGKG, GGGK, GGGG | 8 |
| 5 | KGKGK, KGKGG, KGGKG, KGGGK, KGGGG, GKGKG, GKGGK, GKGGG, GGKGK, GGKGG, GGGKG, GGGGK, GGGGG | 13 |
| $\vdots$ | | $\vdots$ |

Elde edilen sayılar Fibonacci sayılarıdır.

Şimdi sırada $n$ kişi varken dağıtımların sayısını $A_n$ ile gösterelim.

- Buna göre sırada $n$ kişi varken ilk kişiye kömür verildiyse ikinci kişiye gıda verilmek zorunda olduğundan bu şekildeki dağıtımların sayısı $A_{n-2}$ olur.
- Eğer ilk kişiye gıda verilirse ikinci kişiye herhangi bir yardım verilebileceği için bu şekildeki dağıtımların sayısı $A_{n-1}$ olur.

O zaman toplam dağıtım sayısı $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ elde edilir.
Yukarıdaki tablodan $A_1 = 2$ ve $A_2 = 3$ olduğundan $A_n = F_{n+2}$ diyebiliriz.

Böylece istenen cevap $A_{10} = F_{12} = 144$ elde edilir.