MAT223 AYRIK MATEMATİK

Gezgin Satıcı Problemi
9. Bölüm

Doç. Dr. Emrah Akyar

Anadolu Üniversitesi
Fen Fakültesi Matematik Bölümü, ESKİŞEHİR

2011–2012 Güz Dönemi

En iyi ağacı bulma

Soru

n tane şehri olan bir ülke tüm şehirleri birbirine bağlayan bir telefon ağı kurmak istiyor.

- *Her bir şehirden bir diğerine doğrudan hat olmasına gerek yok.*
- *Ancak tüm şehirler birbiri ile bağlantılı olacak.*
  Tekparça!
- *Eğer bir şehirden diğer bir şehre bağlantı varsa, bu şehirler arasında doğrudan bir hat olmasına gerek yok.*
  Döngü bulunmayacak!

- O halde istenen, yukarıdaki özellikleri sağlayan minimal çizge yani bir ağaç.
- Nokta sayısı n olan bir ağacın $n-1$ tane kenarı olduğuna göre sadece $n-1$ tane hat döşemek yeterlidir.

Şehirler arasındaki mesafe, dağlar, göller vb. hatların maliyetlerini etkiliyor. Bu nedenle telefon ağı için hangi ağacın seçildiği önemli.

Soru

Herhangi iki şehir arasındaki hattın maliyeti verildiğinde maliyeti en düşük ağacı nasıl bulabiliriz?

İlk akla gelen yöntem tüm mümkün ağaçları listeleyip, en düşük maliyetli olanı seçmek olabilir. Ancak, bu yöntem ifade edildiği kadar kolay uygulanamayabilir.

Örneğin, sadece 10 şehir için bile Cayley Teoreminden, noktaları adlandırılmış 10^8 tane ağacın var olduğunu biliyoruz. Eğer 20 şehir varsa, bu durumda ağaç sayısı 20^{18} (10^{23} ten fazla) olur.

Bu durumda en düşük maliyetli ağacın bulunması hiç de kolay değil!

Telefon hatlarının şu şekilde döşendiğini kabul edelim:

- Ülke en ucuz hattı döşeyebilecek kadar paraya sahip olduğunda bu hattı döşesin.
- Daha sonra yine en ucuz hattı döşeyebilecek kadar paraya sahip olduğunda bu hattı da döşesin. Böyle devam etsin.
- Ancak, en ucuz hat bir döngü oluşturuyorsa, o hattı döşemesin (biraz daha para biriktirsin).

Böylece döngü bulundurmayan tekparça bir çizge yani, ağaç elde edilir.

Soru

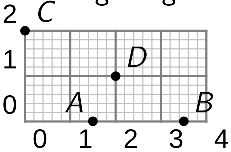
Peki bu şekilde elde edilen ağaç maliyeti en düşük olan ağaç mı?

Başlangıçta ucuz olanları, sonlarda ise pahalıları seçmek daha fazla para harcamaya mı sebep olur?

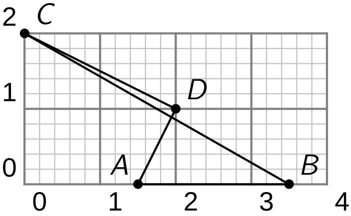
Büyük bir şansla bu yöntemle elde edilen ağaç maliyeti en düşük ağaç olur.

Büyük bir şansla diyoruz. Çünkü, problem biraz daha farklı olsaydı. Örneğin, herhangi iki şehir arasında iki farklı hat olma koşulu istenseydi (hatlardan birisi kesilirse diye).

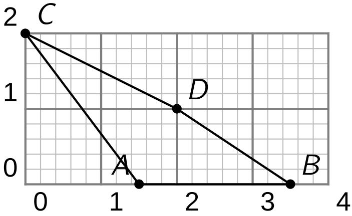
O zaman bu yöntemle elde edilen çizge en ucuz maliyetli çizge olmazdı. Gerçekten de şehirler ve bu şehirler arasındaki hatların maliyetleri aralarındaki uzaklığa bağlı olarak aşağıdaki gibi olsaydı



	B	C	D
A	2	$5/2$	$\sqrt{5}/2$
B		$\sqrt{65}/2$	$\sqrt{13}/2$
C			$\sqrt{5}$



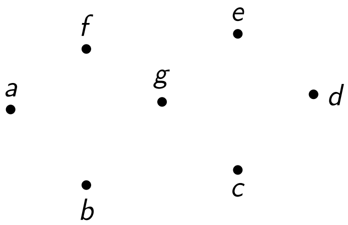
Maliyet ≈ 9.385



Maliyet ≈ 8.538

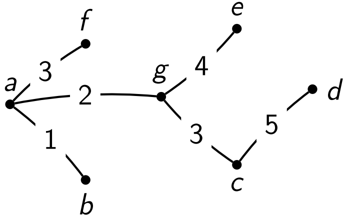
Bir bölgedeki köyler arasına bir sulama kanalı inşa etmek istiyorsunuz. Elbette herhangi iki köy arasında doğrudan bir sulama kanalı inşa etmenize gerek yok. Yani, doğrudan bir hat inşa etmek yerine suyu üçüncü bir köy üzerinden de ulaştırabilirsiniz. Yeter ki, her köye su ulaşsın. Diğer taraftan köyler arasındaki dağlar, ormanlar gibi coğrafi koşullar da inşa edilecek kanalların maliyetine etki ediyor.

Bu durumda en az maliyetle bu sulama sistemini nasıl inşa etmek gerekir?



	a	b	c	d	e	f	g
a	0	1	6	11	8	3	2
b	1	0	4	7	9	5	2
c	6	4	0	5	5	6	3
d	11	7	5	0	5	8	7
e	8	9	5	5	0	5	4
f	3	5	6	8	5	0	6
g	2	2	3	7	4	6	0

	a	b	c	d	e	f	g
a	0	1	6	11	8	3	2
b	1	0	4	7	9	5	2
c	6	4	0	5	5	6	3
d	11	7	5	0	5	8	7
e	8	9	5	5	0	5	4
f	3	5	6	8	5	0	6
g	2	2	3	7	4	6	0

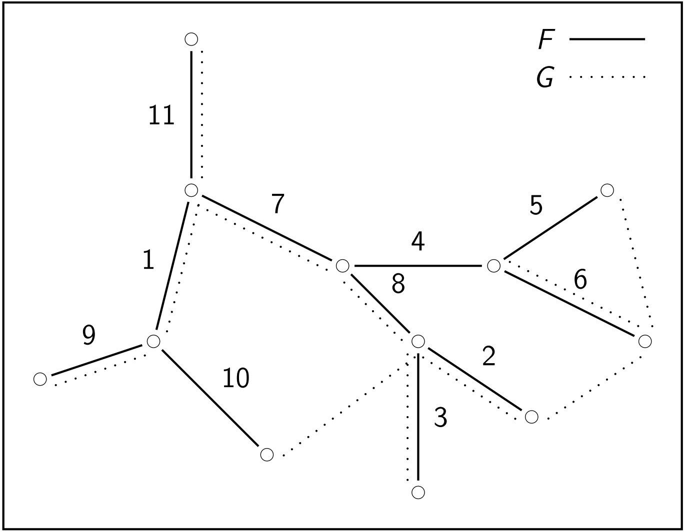


Şimdi tekrar maliyeti en düşük ağacı bulma problemimize geri dönelim ve anlatılan yöntemle bulunan ağacın gerçekten de maliyeti en düşük olan ağaç olduğunu kanıtlayalım.

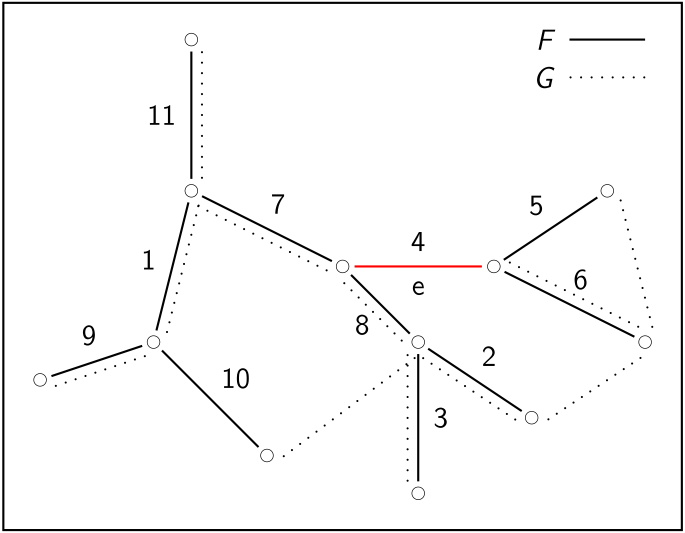
Bu yönteme *Kruskal Algoritması* denir.

Bu yöntemle elde edilen optimal ağaç F olsun. Kanıtlamamız gereken herhangi başka bir ağacın maliyetinin en az F kadar olduğudur.

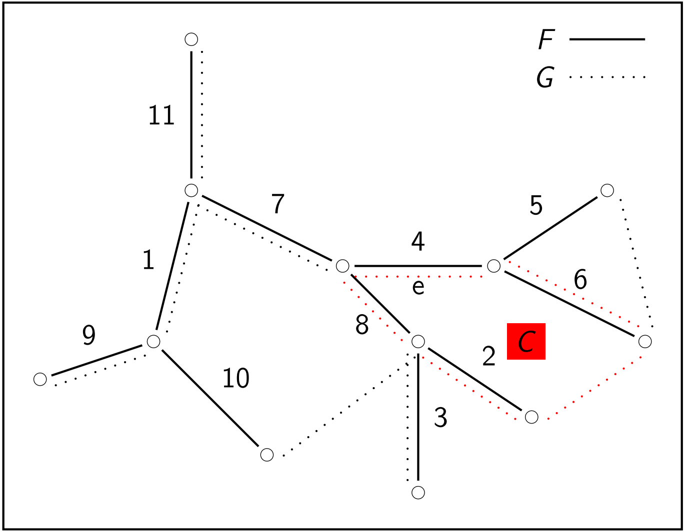
G ağacı, F ağacından farklı herhangi bir ağaç olsun. Şimdi bu G ağacının maliyetinin F ağacının maliyetinden daha az olamayacağını gösterelim (maliyetler aynı olabilir).


F
G
11
7
1
4
5
8
6
9
2
10
3

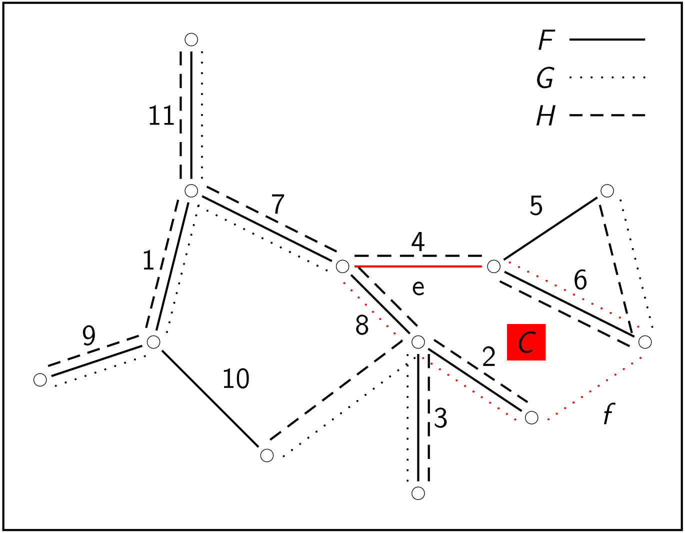
F ağacını oluştururken G de olmayan ilk kenarı e ile gösterelim.



Eğer e kenarını G ye eklersek, G ağacında bir döngü oluşur. Bu döngüye C diyelim.



C döngüsü F ağacında yer almaz. Dolayısıyla, C döngüsünün F de olmayan f gibi bir kenarı vardır. Eğer G ye e yi ekler, f yi çıkarırsak bir başka ağaç elde ederiz. Bu ağacı da H ile gösterelim.



Şimdi H ağacının maliyetinin en fazla G ağacının maliyeti kadar olduğunu gösterelim. Ya da, G ile H nin sadece e ve f kenarları farklı olduğundan e kenarının maliyetinin en fazla f kenarı kadar olduğunu gösterelim:

- Bunun için tersini kabul edelim: f nin maliyeti e nin maliyetinden daha az olsun.
- O zaman şu soru sorulabilir: Neden ülke hatları oluştururken daha ucuz olan f hattını değil de e hattını seçti?
- Bunun tek bir nedeni olabilir: f yi seçince bir C' döngüsü oluşuyordur.
- Fakat e kenarına kadar olan tüm kenarlar G nin de kenarı! Bu durumda C' döngüsü G de olurdu. Ancak, G ağaç olduğundan bu olanaksız.
- Çelişki! O halde varsayım hatalı f nin maliyeti e den daha az olamaz. Dolayısıyla G ağacının maliyeti H ağacının maliyetinden az olamaz.

Şimdi G ağacını H ağacı ile değiştirirsek, F ağacı ile daha çok kenarı ortak olan ve daha az maliyete sahip bir ağaç elde ederiz.

Bu yöntemi tekrar tekrar uygularsak, sonunda F ağacına ulaşırız.

O halde F ağacının maliyeti keyfi G ağacının maliyetinden daha fazla olamaz.

Gezgin Satıcı Problemi

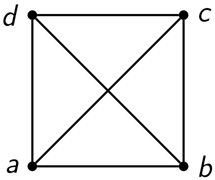
Düzlemde n tane şehir (nokta) ve bu şehirlerin herhangi ikisi arasında doğrudan bir yol olsun. Ayrıca bu yollar ile seyahatlerin maliyetleri de verilmiş olsun. Tüm şehirleri ziyaret edip başladığı noktaya geri dönen en ucuz maliyetli döngüyü arayalım.

Bu problem kombinatoryal optimizasyon teorisinin en önemli problemlerinden birisidir ve *gezgin satıcı problemi* olarak bilinir. Postacıların mektupları dağıtmasından, çöpçülerin çöpleri toplamasına kadar bir çok uygulaması vardır.

Örneğin, bir matkabın bir bilgisayarın ana kartı üzerine delikler açıp tekrar başladığı konuma geri gelmesi gerektiğini düşünelim. Bu deliklerin sayısı binlerce olabilir. Matkabın delik deleceği bir noktadan diğer bir noktaya konumlanması belli bir zaman alacaktır. İşte bu işlem için gereken toplam zamanı minimize etme problemi de gezgin satıcı problemine bir örnek olarak verilebilir.

Soru

Gezgin satıcı problemi ile Hamilton döngüsü arasında nasıl bir bağlantı vardır?



K_4 tam çizgesinde 3 farklı Hamilton Döngüsü vardır.

$$a \to b \to c \to d \to a$$
$$a \to c \to d \to b \to a$$
$$a \to b \to d \to c \to a$$

Bir tam çizge üzerindeki gezgin satıcı probleminin çözümü elbette bir Hamilton döngüsü olur.

Soru

Bir K_n tamçizgesinde kaç farklı Hamilton döngüsü vardır? (Ödev)

n noktalı bir G çizgesi verildiğinde bu çizgenin noktaları arasında şöyle bir uzaklık tanımlayalım:

Komşu noktaların birbirine uzaklığı 1, komşu olmayan iki noktanın birbirine olan uzaklığı da 2 birim olsun.

Bu uzaklık ile verilen n noktalı G çizgesinde bir Hamilton döngüsü varsa, bu döngü aynı zamanda gezgin satıcı probleminin bir çözümü olur ve optimal maliyet n olur.

Çizgede bir Hamilton döngüsü yoksa gezgin satıcı probleminin çözümünün maliyeti en az $n+1$ olacaktır.

Böylece, gezgin satıcı problemini çözecek bir algoritmamız varsa, bu algoritma yardımıyla çizgede bir Hamilton döngüsünün olup olmadığını da söyleyebiliriz.

Gezgin satıcı problemi, optimal ağacı bulma probleminden çok daha zor bir problemdir. Ne yazık ki gezgin satıcı problemini çözmek için Kruskal Algoritması gibi bu ders kapsamında verebileceğimiz basit bir algoritma yoktur.

Elbette literatürde çeşitli algoritmalar ve bu algoritmaların uygulamaları yer almaktadır. Örneğin, 2004 yılında İsveç' in 24978 şehri için gezgin satıcı problemi çözülmüştür (yaklaşık 72500 kilometre). Şu anda rekor 85900 şehir civarındadır (devre tasarımı).

(http://www.tsp.gatech.edu/)

Fakat basit bir algoritmayla en iyi turu bulamasak da en iyi turun maliyetinden en fazla iki kat maliyete sahip turu kolayca bulabiliriz.

Bunun için verilen çizgenin üçgen eşitsizliğini sağladığını kabul edeceğiz. Yani, bir i noktasından j noktasına gitmenin maliyeti $c(ij)$ ile gösterilecek olursa,

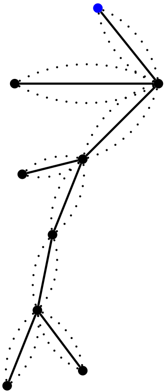
$$c(ij) + c(jk) \geq c(ik)$$

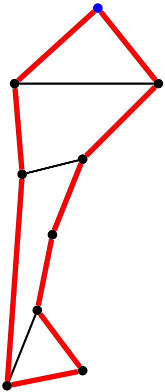
olduğunu kabul edeceğiz (doğrudan i den k ya gitmenin maliyeti j ye uğrayarak k ya gitmenin maliyetinden daha az olsun).

Bu eşitsizlik doğal bir eşitsizlik gibi görünse de bazen hava yolu şirketlerinde aktarmalı uçuşların maliyetleri doğrudan uçuşların maliyetinden daha az olabiliyor.

Algoritmamız şöyle:

- Önce verilen noktaları birleştiren optimal T ağacını bulalım. Bu ağacın maliyetine c diyelim.
- Bu ağacı kullanarak daha önce düzlemsel kod elde etmek için kullanılan yönteme benzer şekilde ağacın etrafında dolaşalım.
- Ancak, bir i noktasından j noktasına giderken, j noktasına daha önce uğramışsak, onu atlayıp daha önce uğramadığımız k noktasına geçelim (kestirmeden gidelim).





Ders kitabındaki çözümlü alıştırmalar 9.2.1 ve 9.2.2 yi inceleyiniz.

Teorem

Üçgen eşitsizliğini sağlayan bir çizgede yukarıdaki yöntemle elde edilen turun maliyeti gezgin satıcı probleminin çözümünün maliyetinin iki katından az olur.

Kanıt.

Açıktır ki T ağacının maliyeti c ise bu ağacın etrafını dolaşmanın maliyeti $2c$ olur. Hatta üçgen eşitsizliğinden ve (varsa) kestirme yolları kullandığımızdan maliyet $2c$ den de az olabilir.

Peki bu yöntemle elde ettiğimiz turun maliyetinin optimal turun maliyeti ile nasıl bir bağlantısı var?

Açıktır ki, optimal ağacın maliyeti, optimal turun maliyetinden daha azdır. Çünkü optimal turun bir kenarını çıkararak bir ağaç elde edebiliriz (hatta bu ağaç bir yol olur). Ancak, bu ağaç optimal olmayabilir. Fakat kesinlikle optimal turdan daha az maliyete sahiptir.

Böylece yukarıdaki yöntemi kullanarak elde ettiğimiz turun maliyeti optimal turun maliyetinin en fazla iki katı olur. □