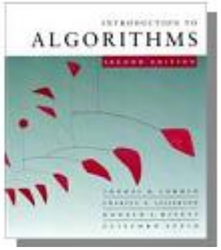
3.Hafta
Master Teorem ve Böl-Fethet Metodu

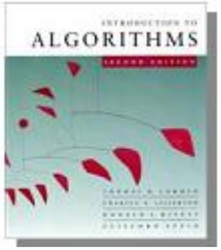


Ana Metod (The Master Method)

- Ana method aşağıda belirtilen yapıdaki yinelemelere uygulanır:
- ***$T(n) = aT(n/b) + f(n)$*** , burada ***$a \geq 1$***, ***$b > 1$***, ve ***f*** asimptotik olarak pozitiftir.

- *T(n)* bir algoritmanın çalışma süresidir.
  - ***n/b*** boyutunda ***a*** tane alt problem recursive olarak çözülür ve her biri ***T(n/b)*** süresindedir.
  - ***f(n)*** problemin bölünmesi ve sonuçların birleştirilmesi için geçen süredir.
  - **Örnek:** Merge-sort için $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$ yazılabilir.

Ana Metod (The Master Method)
Üç yaygın uygulama



$f(n)$'i $n^{\log_b a}$ ile karşılaştırın:

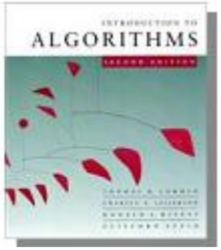
1. $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ $\varepsilon > 0$ sabiti durumunda;
   - $f(n)$ polinomsal olarak $n^{\log_b a}$ göre daha yavaş büyür(n^{ε} faktörü oranında).

   Çözüm: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.

2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$ $k \geq 0$ sabiti durumunda;
   - $f(n)$ ve $n^{\log_b a}$ benzer oranlarda büyürler.

   Çözüm: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$.

Ana Metod (The Master Method)
Üç yaygın uygulama

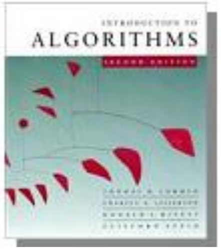


$f(n)$'i $n^{\log_b a}$ ile karşılaştırın:

3. $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ $\varepsilon > 0$ sabiti durumunda;
   - $f(n)$ polinomsal olarak $n^{\log_b a}$ 'ye göre daha hızlı büyür (n^{ε} faktörü oranında),

ve $f(n)$, ***düzenlilik koşulunu*** $af(n/b) \le cf(n)$ durumunda, $c < 1$ olmak kaydıyla karşılar.

Çözüm: $T(n) = \Theta(f(n))$.



Örnekler

Ör. $T(n) = 4T(n/2) + n$

$a = 4,\ b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2;\ f(n) = n.$

Durum 1: $f(n) = O(n^{2-\varepsilon})$ $\varepsilon = 1$ için.

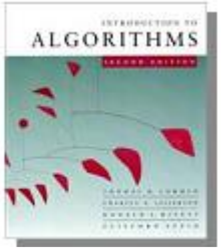
$\therefore\ T(n) = \Theta(n^2).$

Ör. $T(n) = 4T(n/2) + n^2$

$a = 4,\ b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2;\ f(n) = n^2.$

Durum 2: $f(n) = \Theta(n^2 \lg^0 n)$, yani, $k = 0$.

$\therefore\ T(n) = \Theta(n^2 \lg n).$



Örnekler

Ör. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$

$a = 4,\ b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2;\ f(n) = n^3.$

Durum 3: $f(n) = \Omega(n^{2+\varepsilon})$ $\varepsilon = 1$ için

ve $4(n/2)^3 \le cn^3$ (düz. koş.) $c = 1/2$ için

$\therefore\ T(n) = \Theta(n^3).$

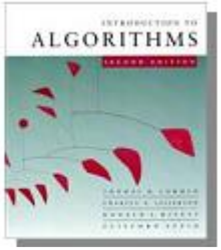
Ör. $T(n) = 4T(n/2) + n^2/\lg n$

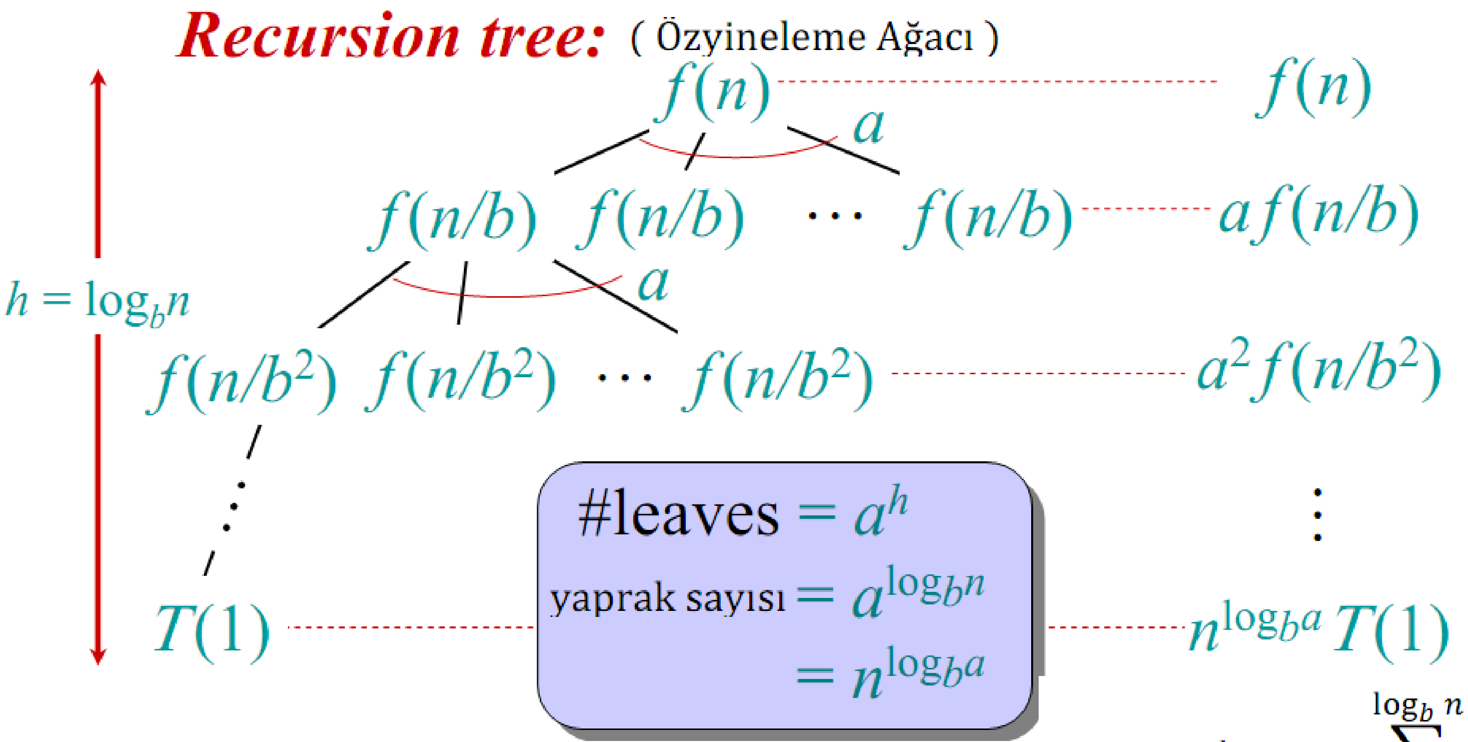
$a = 4,\ b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2;\ f(n) = n^2/\lg n.$

Ana metod geçerli değil. Özellikle,

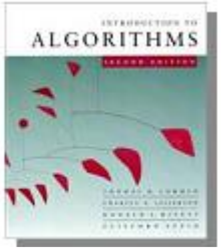
$\varepsilon > 0$ olan sabitler için $n^{\varepsilon} = \omega(\lg n)$ elde edilir.

Master teoremdeki düşünce



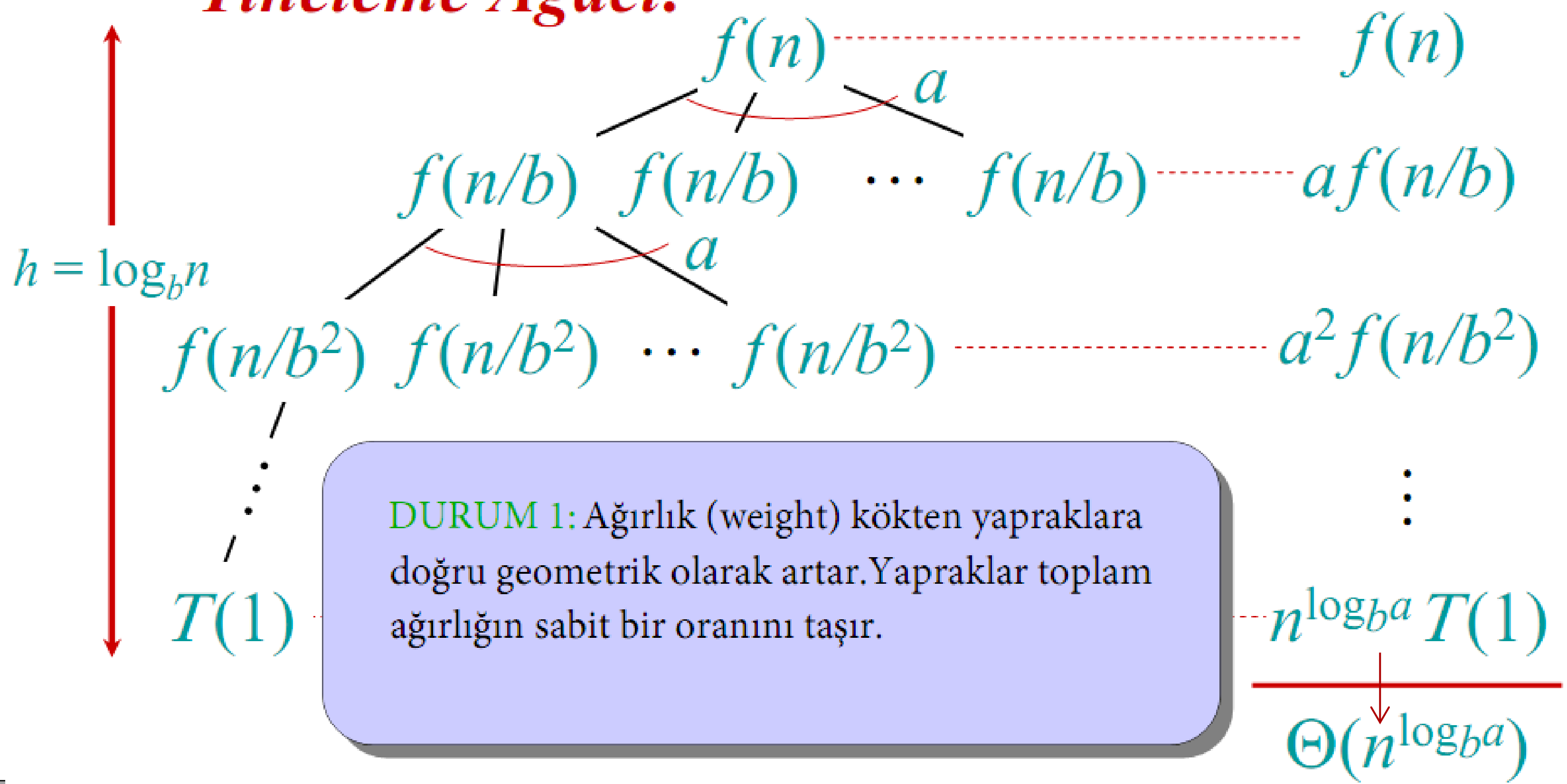


$$T(n) = n^{\log_b a} + \sum_{j=0}^{\log_b n} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)$$



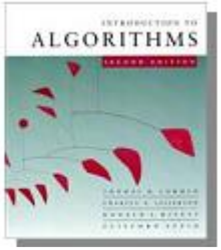
Master teoremdeki düşünce

Yineleme Ağacı:

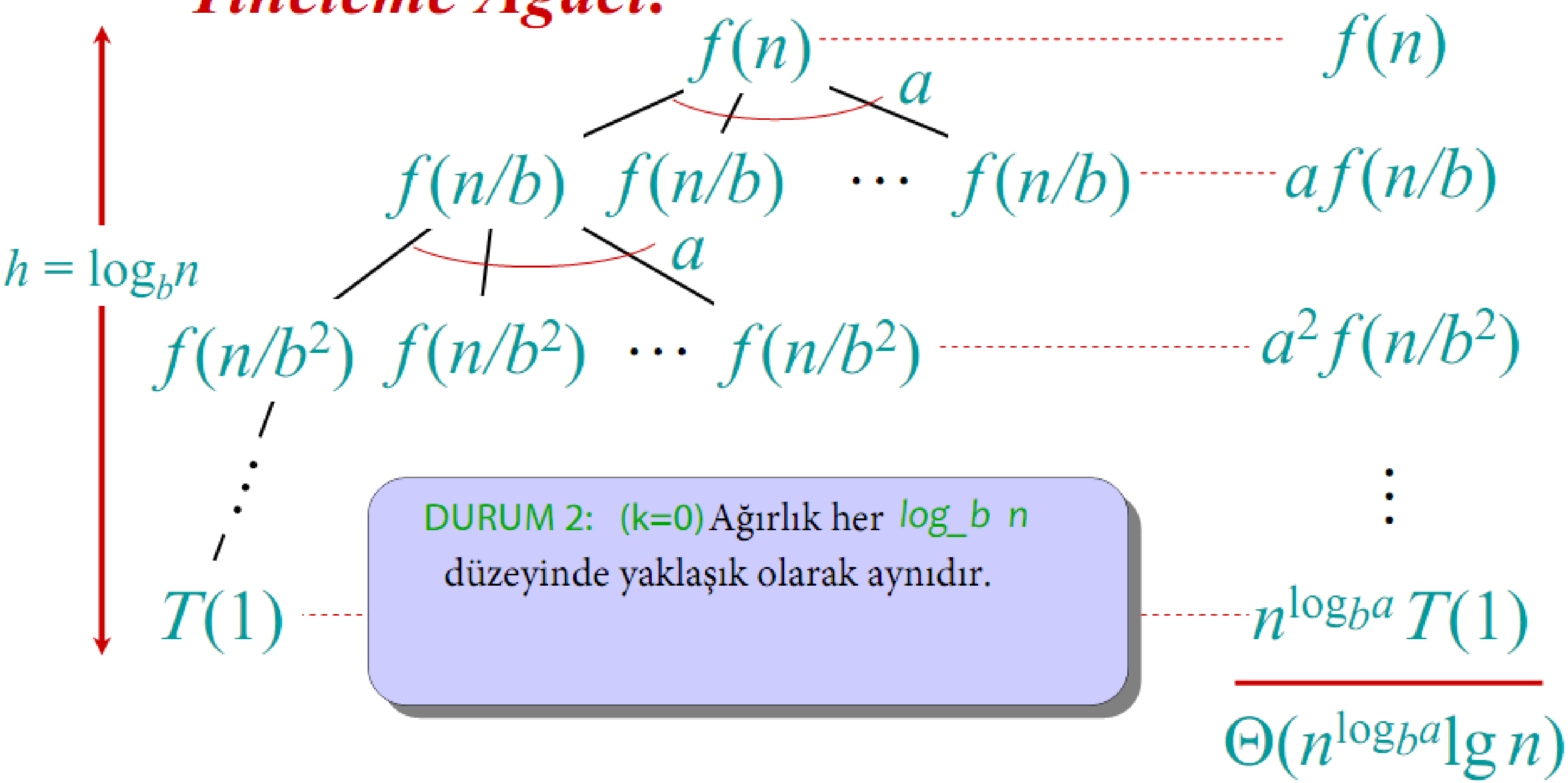


DURUM 1: Ağırlık (weight) kökten yapraklara doğru geometrik olarak artar. Yapraklar toplam ağırlığın sabit bir oranını taşır.

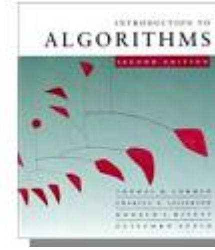
Master teoremdeki düşünce



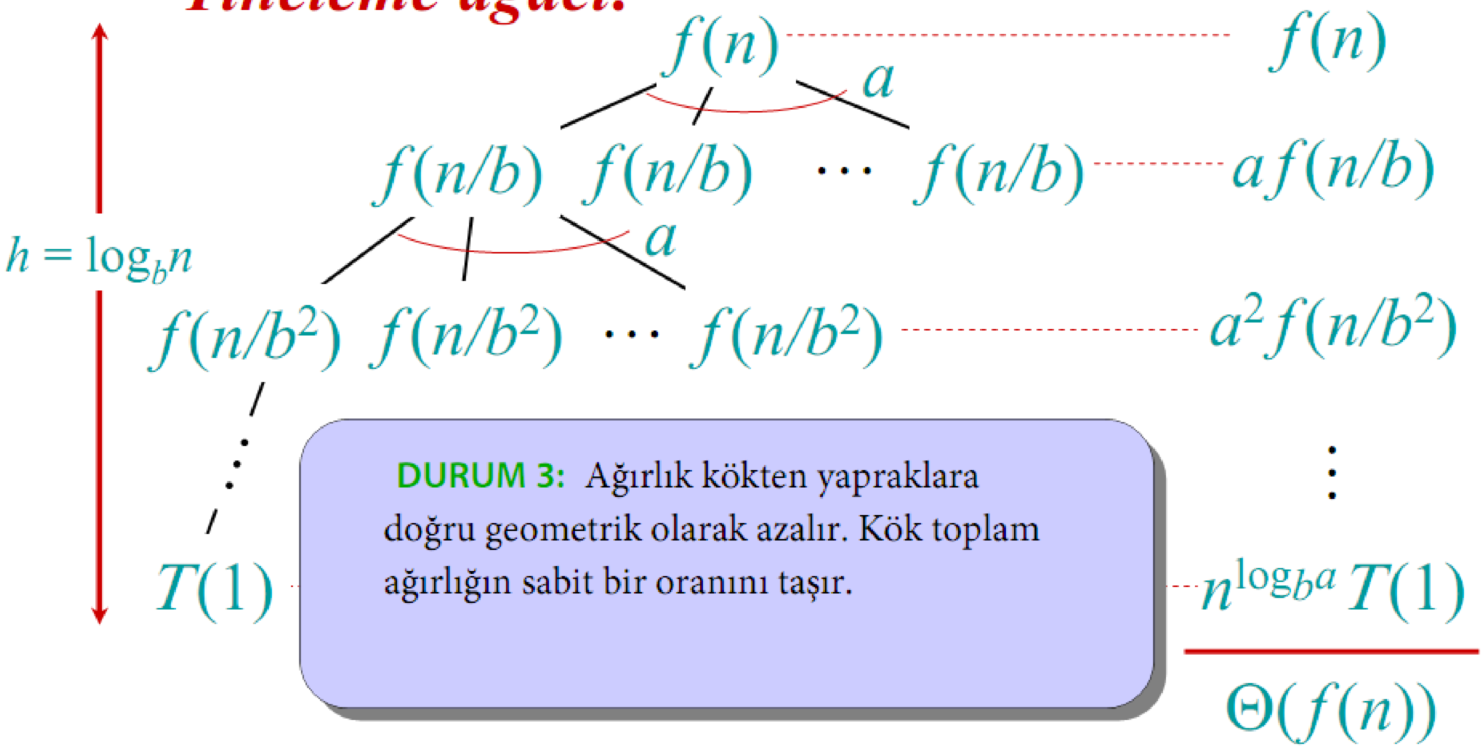
Yineleme Ağacı:



Master teoremdeki düşünce

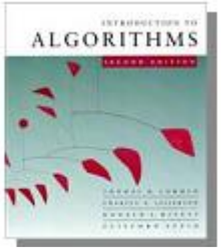


Yineleme ağacı:



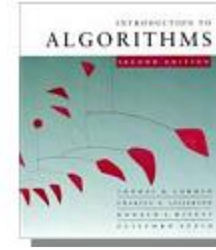
DURUM 3: Ağırlık kökten yapraklara doğru geometrik olarak azalır. Kök toplam ağırlığın sabit bir oranını taşır.

Master teoremi ispat



- **Durum 2:** Eğer $f(n) = \theta\left(n^{log_b a}\right), ise\ T(n) = \theta\left(n^{log_b a} log n\right)$
- **İspat:** Eğer $f(n) = \theta\left(n^{log_b a}\right), o\ zaman\ f(n) \le cn^{log_b a}\ olur$

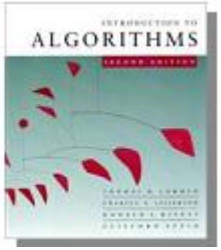
- $T(n) = n^{log_b a} + \sum_{j=0}^{log_b n} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)$
- $\le\ n^{log_b a} + c\sum_{j=0}^{log_b n} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{log_b a}$
- $=\ n^{log_b a} + cn^{log_b a} \sum_{\boxed{j=0}}^{log_b n} a^j \left(\frac{1}{b^{log_b a}}\right)^j$ a
- $=\ n^{log_b a} + cn^{log_b a} \sum_{j=0}^{log_b n} 1 = n^{log_b a} + cn^{log_b a} log_b n$
- $\le cn^{log_b a} \log n$
- Bu yüzden, $f(n) = \theta\left(n^{log_b a}\right)\ ise\ T(n) = O\left(n^{log_b a} log n\right)$ dir.
- Durum 1 ve Durum 3 te benzerdir.



Master teoremi

- **Örnek:** $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n, n \geq 3\ ve\ T(1) = 1$ ise çalışma zamanını bulunuz?
- **Çözüm:** a=9, b=3, $f(n) = n$ ve $n^{log_b a} = n^{log_3 9} = \theta(n^2)$
- **Durum 1:** $f(n) = O(n^{log_3 9 - \varepsilon})$, $\varepsilon = 1$ için
- $T(n) = \theta(n^{log_3 9}) = \theta(n^2)$

Master teoremi



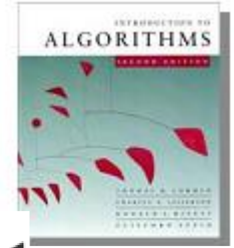
- **Örnek:** $T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1, n \geq 3 \; ve \; T(2) = 1$ ise çalışma zamanını bulunuz?

- **Çözüm:** a=1, b=3/2 , $f(n) = 1$ ve

$$n^{log_b a} = n^{log_{3/2} 1} = \theta(n^0)$$

- **Durum 2:** $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n) \quad k \geq 0$

$$T(n) = \theta(logn)$$



Master teoremi

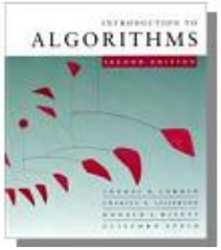
- **Örnek:** $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn, n \geq 4 \; ve \; T(1) = 1$ ise çalışma zamanını bulunuz?

- **Çözüm:** a=3, b=4 , $f(n) = nlogn$ ve

$$n^{log_b a} = n^{log_4 3} = O(n^{0.793})$$

- **Durum 3:** $f(n) = \Omega(n^{log_4 3+\varepsilon})$, burada $\varepsilon \approx 0.2$ için düzenlilik koşulu, *a*f(n/b)≤c*f(n),* büyük *n* değerleri ve *c<1* olmak koşuluyla
- *3(n/4)log(n/4) ≤ (3/4) nlogn, c=3/4<1* için

$T(n) = \theta(nlogn)$

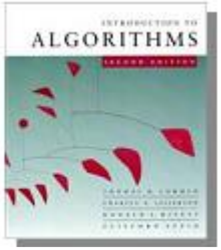


Master teoremi ispat

- **Örnek**: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + nlogn$ için master-metot durumları uygulanmaz?
- Burada *a=2, b=2,* $n^{log_b a} = n^{log_2 2} = O(n)\ ve\ f(n) = nlogn$ dir.
- *f(n),* polinomsal olarak $n^{log_b a}$ göre hızlı büyüdüğünden **Durum 3** uygulanır.
- Büyüme oranı, asimptotik olarak çok büyük olmasına rağmen polinomsal olarak çok ta büyük değildir.
- Büyüme oranı ***f(n)/*** $\boldsymbol{n^{log_b a}}$***=(n logn)/n=logn'*** dir. Bu oran herhangi bir pozitif ε sabiti için n^{ε}' den asimptotik olarak azdır.
- Sonuç olarak çözüm Durum2 ve Durum3 arasına düşer.

Ana metot uygulanamaz

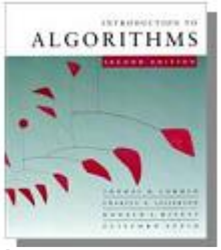
Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



- **Doğrusal Yineleme (Rekürans) Bağıntısı**
- Bir yinelemeli bağıntıda t_n, dizinin önceki terimlerinin katlarının toplamına eşitse doğrusal (lineer) dır. ($t_n \rightarrow$ T(n))
  - $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$ doğrusal
  - $t_n = t_{n-1} + t^2_{n-2}$ doğrusal değildir, t^2_{n-2} önceki terimin katı değildir.

- **Homojen Yineleme (Rekürans) Bağıntısı**:
- t_n sadece önceki terimlerin katlarına bağlı ise homojen (türdeş) olarak adlandırılır.
  - $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$ homojen
  - $t_n = 2t_{n-1} + 1$ homojen değildir. "+1" terimi t_j katı değildir.

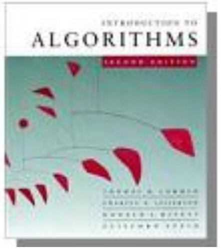
Karakteristik denklemler kullanarak özyinelemeleri çözme



- Yinelemeli bağıntıdaki terimlerin katsayıları sabit ise; sabit katsayılı homojen doğrusal yineleme formu aşağıdaki gibidir.

$$c_0 t_n + c_1 t_{n-1} + \ldots + c_k t_{n-k} = 0$$

- Burada,
  - t_i : özyinelemeli bağıntının değerlerini,
  - c_i : sabit katsayılı terimlerini ifade eder.
    - c_i ,reel sayılardır ve $c_i \neq 0$.
  - k : ise özyinelemeli bağıntının derecesidir.



Karakteristik denklemler kullanarak özyinelemeleri çözme

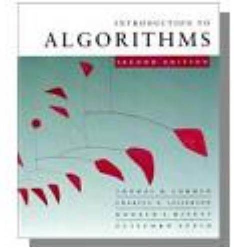
- Doğrusal özyinelemelerde t_{i+j}, t_i^2 şeklinde terimler bulunmaz.
- Öz yineleme homojendir, çünkü t_i nin doğrusal kombinasyonundan dolayı *0 (sıfır)*' a eşittir.
- Bu öz yinelemeler ***k*** başlangıç koşullarını içerir.

$$t_n=c_0 \quad t_1=c_1 \quad \ldots \quad t_k=c_k$$

- Fibonacci dizisi için özyineleme
  - $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$, $\rightarrow$ $f_n-f_{n-1}-f_{n-2}= 0$,

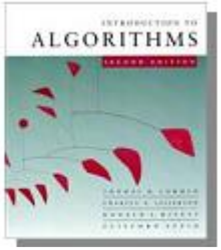
    burada **k=2, c_0=1 ve c_1= c_2= -1** *dir.*

Karakteristik denklemler kullanarak özyinelemeleri çözme



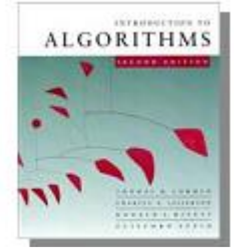
- Sabit katsayılı homojen doğrusal yineleme bağıntılarını çözmek için basit bir yöntem vardır. Bu yöntem;
  - ***k*** bir sabit olmak üzere, $t_k = x^k$;
  - $t_n=c_1t_{n-1}+c_2t_{n-2}+\ldots+c_kt_{n-k}$' nın bir çözümü kabul edilir ve bağıntıda yerine konulursa
  - $x^n = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_kx^{n-k}$ elde edilir. Burada, ***x*** bilinmeyen bir sabit ve $x \neq 0$ dır.
- Bu ifadenin her iki yanını x^{n-k} ile bölersek:
  - $x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_k = 0$ bulunur ve derecesi ***k*** olan ve genelde k adet kökü olan bu polinoma yineleme bağıntısının **karakteristik denklemi** (characteristic equation) adı verilir. Bu denklemin kökü birden fazla veya karmaşık olabilir.

Karakteristik denklemler kullanarak özyinelemeleri çözme



- İşlem Adımları
- **Adım 1**
  - $x^2 - c_1 x - c_2 = 0$ karakteristik denklemi için
  - İkinci dereceden bir denklem olduğundan karakteristik kökleri r_1 ve r_2 olup
  - $x_{1,2} = \frac{c_1 \pm \sqrt{(c_1)^2 + 4c_2}}{2}$
- **Adım 2**
  - **Durum 1:** Köklerin hiç biri aynı değilse
  - $\boldsymbol{t_n = c_1 x_1{}^n + c_2 x_2{}^n}$
  - **Durum 2:** Köklerde aynı olan değer var ise $(x_1 = x_2)$
  - $\boldsymbol{t_n = c_1 x_0{}^n + c_2 x_1{}^n + +c_3 n x_1{}^n}$

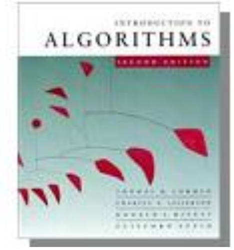
Karakteristik denklemler kullanarak özyinelemeleri çözme



- **Adım 3**
  - Bir önceki adımda elde edilen denklemlere ilk koşulları uygulayınız.
  - Durum I: Kökler eşit değil
  - $t_0 = c_1 {x_1}^0 + c_2 {x_2}^0 = c_1 + c_2$
  - $t_1 = c_1 {x_1}^1 + c_2 {x_2}^1 = c_1 x_1 + c_2 x_2$
  - Durum 2: Kökler eşit ($x_2 = x_1 = x_0$)
  - $t_0 = c_1 {x_0}^0 + c_2 . 0 . {x_0}^0 = c_1$
  - $t_1 = c_1 {x_0}^1 + c_2 . 1 . {x_0}^1 = (c_1 + c_2) x_0$
- **Adım 4**
  - c_1, c_2'yi bulunuz
- **Adım 5**

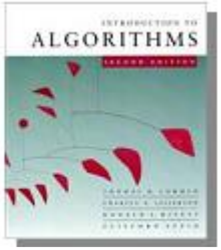
  t_n için genel çözümü yaz

Karakteristik denklemler kullanarak özyinelemeleri çözme



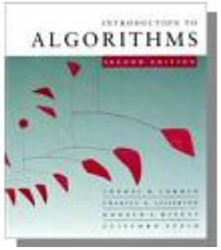
- **Örnek:** İlk koşullar $t_0 = 2$ ve $t_1 = 7$ olarak verildiğine göre
- $t_n = t_{n-1} + 2t_{n-2}$ yinelemeli bağıntıyı çözünüz
- Karakteristik denklem: $x^2 - x - 2 = 0$
- Kökler $x_1 = 2$ ve $x_2 = -1$, kökler eşit değil. Durum 1'i kullanılacak.
- $t_n = c_1 2^n + c_2(-1)^n$
- $t_0 = 2 = c_1 + c_2$, $t_1 = 7 = c_1.2 + c_2.(-1)$
- $c_1 = 3$ *ve* $c_2 = -1$ olarak bulunur.
- Bu değerleri yerine yazarsak
- $t_n = 3.2^n + (-1).(-1)^n = 3.2^n - (-1)^n$ olarak bulunur.
- $t_n \in \theta(2^n)$

Karakteristik denklemler kullanarak özyinelemeleri çözme

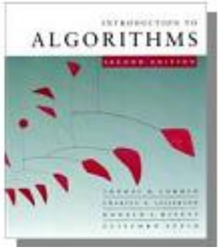


- **Örnek:** İlk koşullar $t_0 = 0$ ve $t_1 = 1$ ve $n \geq 2$ olarak verildiğine göre
- $t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0$ için yinelemeli bağıntıyı çözünüz
- Karakteristik denklem: $x^2 - 3x - 4 = 0$
- Kökler $x_1 = -1$ ve $x_2 = 4$, kökler eşit değil. Durum 1'i kullanılacak.
- $t_n = c_1(-1)^n + c_2 4^n$
- $t_0 = 0 = c_1 + c_2$, $t_1 = 1 = c_1.(-1) + 4c_2$
- $c_1 = -1/5$ *ve* $c_2 = 1/5$ olarak bulunur.
- Bu değerleri yerine yazarsak
- $t_n = 1/5[4^n - (-1)^n]$ olarak bulunur.
- $t_n \in \theta(4^n)$

Karakteristik denklemler kullanarak özyinelemeleri çözme



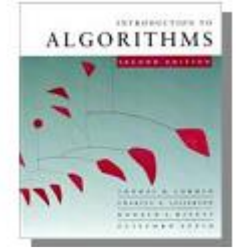
- **Örnek:** Fibonacci özyinelemeli bağıntı
- $t_0 = 0$ ve $t_1 = 1$ ve $n \geq 2$ olarak verildiğine göre
- $t_n - t_{n-1} - t_{n-2} = 0$ için yinelemeli bağıntıyı çözünüz
- Karakteristik denklem: $x^2 - x - 1 = 0$
- Kökler $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, kökler eşit değil. ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, altın oran)
- Durum 1'i kullanılacak. $t_n = c_1 (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2 (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$
- $t_n(0) = 0 = c_1 + c_2$, $t_1 = 1 = c_1 . \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
- $c_1 = 1/\sqrt{5}$ *ve* $c_2 = -1/\sqrt{5}$ olarak bulunur.
- Bu değerleri yerine yazarsak
- $t_n = 1/\sqrt{5}[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n]$ olarak bulunur ve sonuç olarak
- $t_n \in \theta(\left((1+\sqrt{5})/2\right)^n)$



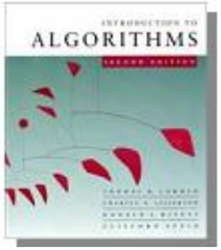
Karakteristik denklemler kullanarak özyinelemeleri çözme

- **Örnek:** $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 2$ve $n \geq 3$ olarak verildiğine göre
- $t_n = 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3}$ için yinelemeli bağıntıyı çözünüz
- Karakteristik denklem: $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$, veya $(x-1)(x-2)^2$
- Kökler $x_1 = 1$, ve $x_2 = x_3 = 2$, (iki kök eşit). Eşit kökler bulunduğundan Durum 2 kullanılacak
- $t_n = c_1(1)^n + c_2(2)^n + c_3 n(2)^n$
- Başlangıç şartlarına göre;
- $c_1 + c_2 = 0; (n = 0)$,
- $c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 1; (n = 1)$,
- $c_1 + 4c_2 + 8c_3 = 2; (n = 2)$,
- $c_1 = -2$, $c_2 = 2$ ve $c_3 = -1/2$ olarak bulunur.
- Bu değerleri yerine yazarsak
- $t_n = 2^{n+1} - n2^{n-1} - 2$ olarak bulunur.

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



- **Homojen Olmayan Yineleme Bağıntıları**
- t_n sadece önceki terimlerin katlarına bağlı değil ise homojen olmayan bağıntı olarak adlandırılır.
  - $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$ homojen
  - $t_n = 2t_{n-1} + 1$ homojen değildir. "+1" terimi t_j katı değildir.
- Yinelemeli bağıntıların genel formu $c_0t_n+c_1t_{n-1}+\ldots+c_kt_{n-k}=f(n)$ şeklinde ifade edilir. f(n) =0 eşit ise homojen, sıfırdan farklı ise homojen olmayan yinelemeli bağıntıdır.
- $f(n) = b^n p(n)$
- şeklinde ifade edilirse *b* sıfırdan farklı bir sabiti *p(n)* ise *d.* dereceden *n* nin bir polinomudur.



Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme

- **Örnek:** Aşağıda verilen reküransı çözünüz
- t_n - $2t_{n-1} = 3^n$ burada b=3, p(n)^d=1 ve polinom derecesi d=0’ dır.

- İlk olarak her iki tarafı 3 ile çarpalım:

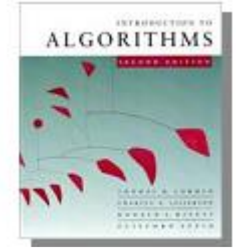
  $$3t_n - 6t_{n-1} = 3^{n+1}$$

- Eğer n, n+1 ile yer değiştirirsek:

  $t_{n+1} - 2t_n = 3^{n+1}$ denklemini elde ederiz.

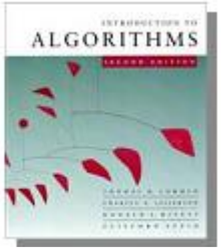
- Her iki denklemi bir birinden çıkarırsak yeni denklem
- $t_{n+1} - 5t_n + 6t_{n-1} = 0$ olur.

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



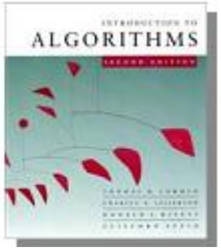
- Homojen durumda olduğu gibi çözüm yaparsak karakteristik denklem
- $x^2-5x+6=0, \quad \rightarrow \quad (x-2)(x-3)=0$
- Dikkat edilecek olursa (x-2) değeri orijinal rekürans ta sol tarafı, x-3 ise sağ taraftaki polinomu ifade etmekte. Buna göre karakteristik denklemin basit genel formunu aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:
- $(c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots + c_k)(x-b)^{d+1} = 0,$
- burada *d,* p(n) polinomunun derecesidir. Bu denklem elde edildikten sonra homojen durumunda olduğu gibi çözüm yapılır.

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



- **Örnek:** Aşağıda verilen Hanoi Kulesi problemine ait reküransı çözünüz
- $t_n = 2t_{n-1} + 1;\ n \geq 1$ ve $t_0 = 0$;
- Burada b=1 p(n)=1 ve polinom derecesi 0 dır.
- Karakteristik denklem: (x-2)(x-1)=0 olur.
- $t_n = c_1 1^n + c_2 2^n,\ t_0 = c_1 + c_2 = 0,\ t_1 = 2t_0 + 1 = 1\ ise$
- $t_1 = c_1 1 + 2c_2 = 1$ olur. $c_1 = -1, c_2 = 1$ bulunur
- $t_n = 2^n - 1$ elde ederiz. Sonuç olarak ;
- $t_n \in \theta(2^n)$ olur.

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme

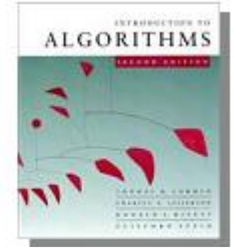


- $c_0t_n+c_1t_{n-1}+\ldots+c_kt_{n-k}=b^np(n)$ homojen olmayan denklemler için verilen basit genel formu daha da genelleştirirsek

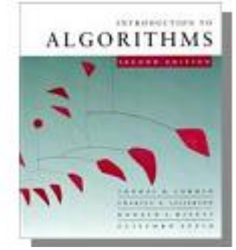
- $c_0t_n+c_1t_{n-1}+\ldots+c_kt_{n-k}=b_1^np_1(n)+b_2^np_2(n)+\ldots$ formunu elde ederiz. Buna göre karakteristik denklem:

- $\boldsymbol{(c_0 x^k +c_1 x^{k-1} +c_2 x^{k-2} +\ldots+c_k)(x-b_1)^{d+1} (x-b_2)^{d+2} \ldots=0,}$

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



- **Örnek:** $n \geq 1$ ve $t_0=0$ başlangıç şartları için $t_n = 2t_{n-1} + n + 2^n$ problemine ait reküransı çözünüz
- $t_n - 2t_{n-1} = n + 2^n$, *burada* $b_1=1$, $p_1(n)=n$, $b_2=2$, $p_2(n)=1$, $d_1=1, d_2=0$, n polinom derecesidir.
- Karakteristik denklem: $(x-2)(x-1)^2(x-2)=0$ olur. Kökler, 1, 1, 2, 2 dir.
- Buna göre genel çözüm $t_n = c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 2^n + c_4 n 2^n$
- $t_1 = 0 + 1 + 2^1 = 3, t_2 = 12, t_3 = 35$
- $n = 0 \; için \;\; c_1 + c_3 = 0,$
- $n = 1 \; için \;\; c_1 + c_2 + 2c_3 + 2c_4 = 3,$
- $n = 2 \; için \;\; c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 8c_4 = 12,$
- $n = 3 \; için \;\; c_1 + 3c_2 + 8c_3 + 24c_4 = 35,$
- $t_n = -2 - n + 2^{n+1} + n2^n$ elde ederiz. Sonuç olarak ;
- $t_n \in \theta(n2^n)$ olur.



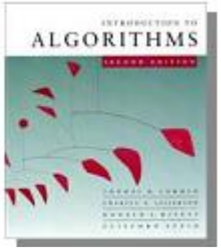
Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme

- Çözüm yolu: Gaus yok etme yöntemi
- 2,3 ve 4. satırdan 1. satırı çıkar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \\ 35 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 7 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \\ 35 \end{bmatrix}$$

- 2. satırı 2 ile çarp 3. satırdan çıkar, 2.satırı 3 ile çarp 4. satırdan çıkar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 7 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \\ 35 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 26 \end{bmatrix}$$



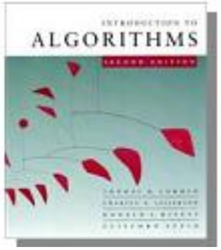
Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme

- Çözüm yolu: Gaus yok etme yöntemi
- 3. satırı 4 ile çarp 4. satırdan çıkar.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 26 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

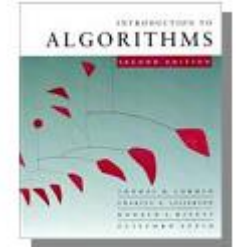
- 2. satırı 2 ile çarp 3. satırdan çıkar, 2.satırı 3 ile çarp 4. satırdan çıkar
- $c_4 = 1, c_3 = 2, c_2 = -1, c_1 = -2$ olur.
- $T(n) = -2 - n + 2^{n+2} + n2^n$
- $T(n) \in \theta(n2^n)$

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



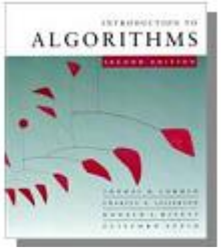
- **Değişkenlerin Değişimi:**
- T(n) şeklinde verilen bir yinelemeyi değişkenlerin değişimi ile t_k şeklinde yeni bir yineleme yazılabilir.
- **Örnek:** 2 nin kuvveti şeklinde verilen n için aşağıda verilen yinelemeyi çözünüz.
- T(n)=4T(n/2)+n, n>1
- n, değerini 2^k (burada k=log n dir) ile yer değiştirirsek $T(2^k)=4T(2^{k-1})+2^k$, elde ederiz.
- Eğer $t_k = T(2^k) = T(n)$ ise bunu , $t_k = 4t_{k-1} + 2^k$ şeklinde yazabiliriz. Yeni yinelemeyi çözersek (x-4)(x-2)=0 karakteristik denklemini elde ederiz.
- $t_k = c_1 4^k + c_2 2^k$
- *k* yerine *n* değerini yazarsak,
- $T(n) = c_1 n^2 + c_2 n$ buluruz. $T(n) \in O(n^2)$

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



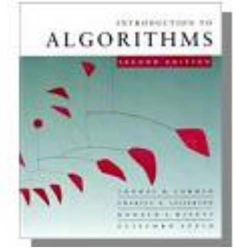
- **Örnek:** 2 nin kuvveti şeklinde verilen n için aşağıda verilen yinelemeyi çözünüz. T(n)= 2T(n/2)+nlogn, n>1
- n, değerini 2^k (burada k=logn dir) ile yer değiştirirsek $T(2^k)=2T(2^{k-1})+k2^k$, elde ederiz.
- Eğer $t_k=T(2^k)=T(n)$ ise bunu , $t_k=2t_{k-1}+k2^k$ şeklinde yazabiliriz. Yeni yinelemeyi çözersek: ($t_k-2t_{k-1}=k2^k$, burada b=2, p(k)=k ve d=1 olduğundan)
- $(x-2)^3=0$ karakteristik denklemini elde ederiz ve
- $t_k=c_1 2^k+c_2 k 2^k + c_3 k^2 2^k$
- *k* yerine *n* değerini yazarsak,
- $T(n)=c_1 n+c_2 nlogn+c_3 nlog^2 n$ buluruz.
- $T(n) \in O(nlog^2 n)$

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



- **Örnek:** 2 nin kuvveti şeklinde verilen n için aşağıda verilen yinelemeyi çözünüz. T(n)= 3T(n/2)+cn (c bir sabittir ve n = 2^k >1
- n, değerini 2^k (burada k=logn' dir) ile yer değiştirirsek $T(2^k)=3T(2^{k-1})+ c2^k$, elde ederiz.
- Eğer t_k =T(2^k) =T(n) ise bunu , $t_k=3t_{k-1}+ c2^k$ şeklinde yazabiliriz. Yeni yinelemeyi çözersek: ($t_k-3t_{k-1}= c2^k$, burada b=2, p(k)=c ve d=0 olduğundan) (x-3)(x-2)=0 karakteristik denklemini elde ederiz ve
- $t_k = c_1 3^k + c_2 2^k$
- *k* yerine *n* değerini yazarsak,
- $T(n) = c_1 3^{logn} + c_2 n, (a^{logb} = b^{loga}\ olduğundan)$
- $T(n) = c_1 n^{log3} + c_2 n$ buluruz.
- $T(n) \in O(n^{log3})$

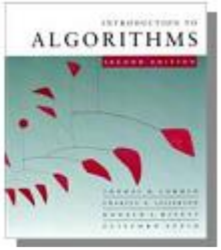
Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



- **Aralık dönüşümleri (Range Transformations):** Yinelemelerin çözümünde değişkenlerin değişimi yerine bazen aralık dönüşümü kullanmak daha faydalı olabilir.

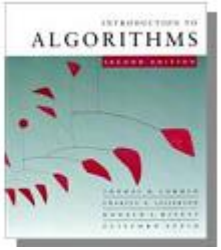
- **Örnek:** $T(n)= nT(n/2)^2$, $n>1$, $T(1)=6$
- n, değerini 2^k (burada k=logn dir) ile yer değiştirirsek $T(2^k)=2^kT(2^{k-1})^2$, elde ederiz.
- $t_k = T(2^k) = T(n)$ ise, $t_k = 2^k t^2_{k-1}$, $k>0$ için $t_0 = 6$
- İlk bakışta gördüğümüz tekniklerin hiç biri bu yineleme için uygulanamaz çünkü hem doğrusal değil, hem de katsayılardan biri sabit değildir.
- Aralık dönüşümü yapmak için $V_k = \log t_k$ koyarak yeni bir yineleme oluşturulur.

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme

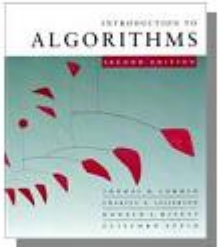


- V_k =k+2V$_{k-1}$, k>0 için başlangıç şartları V_0=log6=log2*3=1+log3
- V_k =k+2V$_{k-1}$ için karakteristik denklem (x-2)(x-1)^2=0 ve
- $V_k = c_1 2^k + c_2 1^k + c_3 k 1^k$
- V_k =k+2V$_{k-1}$ denkleminden V_0=1+log3, V_1=3+2log3, V_2=8+4log3 bulunur ve $V_k = c_1 2^k + c_2 1^k + c_3 k 1^k$
- $V_0 = 1 + log3 = c_1 + c_2$
- $V_1 = 3 + 2log3 = 2c_1 + c_2 + c_3$
- $V_2 = 8 + 4log3 = 4c_1 + c_2 + 4c_3$
- $c_1 = 3 + log3, c_2 = -2, c_3 = -1$
- $V_k = (3 + log3)2^k - k - 2$

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



- Sonunda $t_k = 2^{Vk}$
- $2^{Vk} = 2^{(3+log3)*2^k - k - 2} \rightarrow t_k = 2^{(3+log3)*2^k - k - 2}$
- *k* yerine *n* değerini yazarsak,
- $T(n) = 2^{(3+log3)*n - logn - 2} \rightarrow T(n) = 2^{3n + nlog3}/(2^{logn} * 2^2)$
- $T(n) = 2^{3n-2} * \frac{3^{nlog2}}{n} = 2^{3n-2} * \frac{3^n}{n}$
- $T(n) = (2^{3n-2}3^n)/n$
- $T(n) \in O(2^{3n}3^n)$



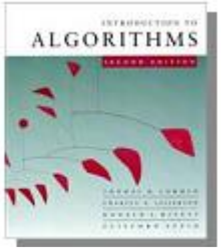
Böl-ve-Fethet (Divide & Conquer)

- Böl ve fethet tekniğiyle algoritma tasarımı:
  - Problem kendisine benzer küçük boyutlu alt problemlere bölünür. Alt problemler çözülür ve bulunan çözümler birleştirilir.
    - **Divide:** Problem iki veya daha fazla alt problemlere bölünür.
    - **Conquer:** Alt problemleri özyinelemeli olarak çözüp, onları fethet.
    - **Combine:** Alt problem çözümlerini birleştir.

Merge Sort (Birleştirme sıralaması) Algoritması

- **1. Böl:** Eğer **S** en az iki elemana sahipse (**S** sıfır veya bir elemana sahipse hiçbir işlem yapılmaz), bütün elemanlar **S** 'e n alınır ve S_1 ve S_2 adlı iki alana yerleştirilir, her biri **S** dizisinin yarısına sahiptir, (örn. S_1 ilk $\lceil n/2 \rceil$ elemana ve S_2 ise ikinci $\lfloor n/2 \rfloor$ elemana sahiptir).
- **2. Fethet:** S_1 ve S_2 Merge Sort kullanılarak sıralanır.
- **3. Birleştir:** S_1 and S_2 içindeki sıralı elemanlar tekrar **S** içerisine tek bir sıralı dizi oluşturacak şekilde aktarılır.

Birleştirme sıralaması



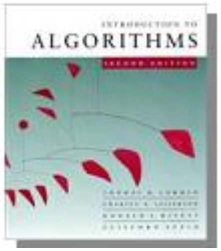
- 1. Bölmek: Kolay.
- 2. Hükmetmek: 2 alt dizilimi özyinelemeli sıralama.
- 3. Birleştirmek: Doğrusal-zamanda birleştirme.

$$T(n) = 2\,T(n/2) + \Theta(n)$$

altproblem sayısı

altproblem boyutu

bölme ve birleştirme işi



Master teoremi (hatırlatma)

$$T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$$

DURUM 1: $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, sabit $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.

DURUM 2: $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$, sabit $k \geq 0$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$.

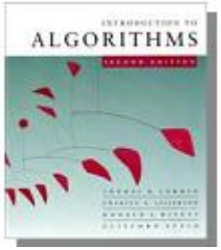
DURUM 3: $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$, sabit $\varepsilon > 0$, ve düzenleyici koşul (regularity condition).

$\Rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$.

Birleştirme sıralaması: $a = 2$, $b = 2 \;\Rightarrow\; n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$

$\Rightarrow$ DURUM 2 $(k = 0) \;\Rightarrow\; T(n) = \Theta(n \lg n)$.

İkili arama (Binary Search)



- Sıralı dizilimin bir elemanını bulma:

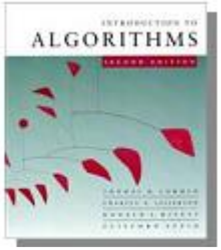
INPUT: A[1..n] – sıralı (azalmayan) integer sayı dizisi, *s* – aranan integer sayı.
OUTPUT: *j* bulunan sayının indeksi A[*j*] = *s*. *NIL*, if ∀*j* (1≤*j*≤*n*): A[*j*] ≠ *s*

```
Binary-search(A, p, r, s):
   if p = r then
      if A[p] = s then return p
      else return NIL
   q←⌊(p+r)/2⌋
   ret ← Binary-search(A, p, q, s)
   if ret = NIL then
      return Binary-search(A, q+1, r, s)
   else return ret
```

- 1. Böl: Orta elemanı belirle.
- 2. Hükmet: 1 alt dizilimde özyinelemeli arama yap.
- 3. Birleştir: Kolay.
- Örnek: 9' u bul.

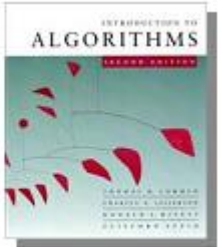
3	5	7	8	9	12	15

İkili arama (Binary Search)



3	5	7	8	9	12	15
3	5	7	8	9	12	15
3	5	7	8	9	12	15
3	5	7	8	9	12	15
3	5	7	8	9	12	15

İkili arama için yineleme



$$T(n) = 1\,T(n/2) + \Theta(1)$$

altproblem sayısı

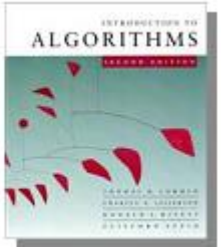
altproblem boyutu

bölme ve birleştime işi

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 1} = n^0 = 1 \Rightarrow \text{DURUM } 2\ (k = 0)$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(\lg n)\,.$$

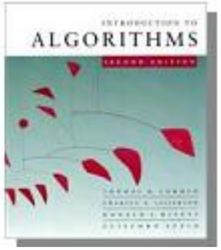
Bir sayının üstellenmesi



- **Problem:** a^n 'yi $n \in N$ iken hesaplama.
- **Saf (Naive) algorithm:** $\Theta(n)$.
- **Böl-ve-fethet algoritması:**

$$a^n = \begin{cases} a^{n/2} \cdot a^{n/2} & n \text{ çift sayıysa;} \\ a^{(n-1)/2} \cdot a^{(n-1)/2} \cdot a & n \text{ tek sayıysa.} \end{cases}$$

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(1) \Rightarrow T(n) = \Theta(\lg n) .$$



Fibonacci sayıları

Özyinelemeli tanım:

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{eğer } n = 0; \\ 1 & \text{eğer } n = 1; \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{eğer } n \geq 2 \text{ ise.} \end{cases}$$

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad \cdots$$

Saf özyinelemeli algoritma: $\Omega(\phi^n)$

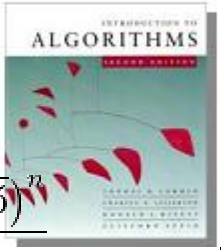
(üstel zaman), buradaki $\phi = (1+\sqrt{5})/2$

altın oran'dır (***golden ratio***).

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803\,39887\cdots$$

$$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \varphi = -\frac{1}{\varphi} \approx -0.61803\,39887$$

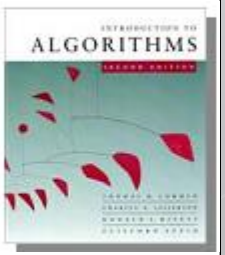
Fibonacci sayılarını hesaplama



$$F_n = F(n) = \begin{cases} 0 & n = 0; \\ 1 & n = 1; \\ F(n-1) + F(n-2) & n > 1. \end{cases} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - (\varphi - \sqrt{5})^n}{\sqrt{5}}$$

- **Aşağıdan yukarıya algortiması:**
  - **F_0, F_1, F_2, ..., F_n**'i sırayla, her sayı iki öncekinin toplamı olacak şekilde hesaplayın.
  - Yürütüm süresi: **Θ(n).**
- **Saf özyinelemeli kare alma (Naive recursive squaring) algortiması:**
- $F_n = \varphi^n/\sqrt{5}$ yakın tamsayı yuvarlaması.
- **Özyinelemeli kare alma algortiması: Θ(lg n)** zamanı.
- Bu yöntem güvenilir değildir, çünkü yüzer-nokta aritmetiği yuvarlama hatalarına gebedir.

Özyineleme ile kare alma (Recursive squaring)



Teorem: $\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n.$

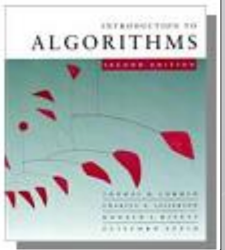
Algoritma: Özyineleme ile kare alma.

Süre = $\Theta(\lg n)$.

Teoremin ispatı. (n 'de tümevarım)

Taban ($n = 1$): $\begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^1$

Özyineleme ile kare alma (Recursive squaring)



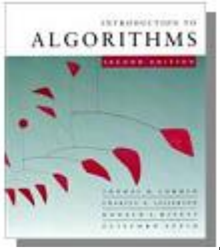
Tümevarım adımı ($n \geq 2$):

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n} \qquad \blacksquare$$

Matrislerde çarpma



Girdi: $= [a_{ij}],\ B = [b_{ij}].$

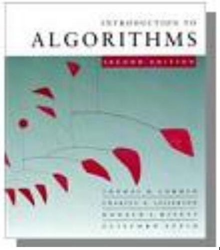
Çıktı: $C = [c_{ij}] = A \cdot B.$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Matrislerde çarpma
Standart algoritma



$\textbf{for } i \leftarrow 1 \textbf{ to } n$ *(i 1'den n'ye kadar)*

$\quad \textbf{do for } j \leftarrow 1 \textbf{ to } n$ *(j 1'den n'ye kadar)*

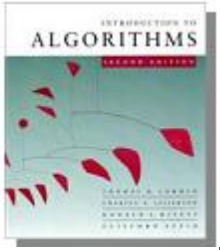
$\qquad \textbf{do } c_{ij} \leftarrow 0$

$\qquad\quad \textbf{for } k \leftarrow 1 \textbf{ to } n$

$\qquad\qquad \textbf{do } c_{ij} \leftarrow c_{ij} + a_{ik} \cdot b_{kj}$

Koşma süresi $= \Theta(n^3)$

Böl-ve-fethet algoritması



FİKİR:

$n \times n$ matris = $(n/2)\times(n/2)$ altmatrisin 2×2 matrisi:

$$\left[\begin{array}{c|c} r & s \\ \hline t & u \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} e & f \\ \hline g & h \end{array}\right]$$

$$C \quad = \quad A \quad \cdot \quad B$$

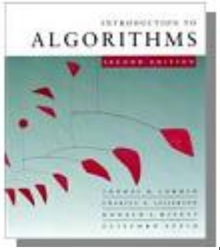
$$\left.\begin{aligned} r &= ae + bg \\ s &= af + bh \\ t &= ce + dh \\ u &= cf + dg \end{aligned}\right\}$$

recursive (özyinelemeli)

8 çarpma $(n/2)\times(n/2)$ altmatriste,

4 toplama $(n/2)\times(n/2)$ altmatriste.

Böl-ve-Fethet algoritmasının çözümlemesi



$$T(n) = 8\,T(n/2) + \Theta(n^2)$$

altmatris sayısı

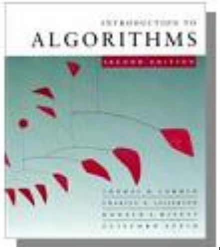
altmatris boyutu

altmatrisleri toplama işi

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 8} = n^3 \;\Rightarrow\; \text{DURUM 1} \;\Rightarrow\; T(n) = \Theta(n^3)$$

Sıradan algoritmadan daha iyi değil.

Strassen'in fikri



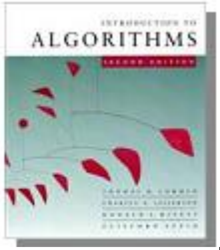
- **2×2** matrisleri yalnız **7** özyinelemeli çarpmayla çöz.

$$
\begin{aligned}
P_1 &= a \cdot (f - h) \\
P_2 &= (a + b) \cdot h \\
P_3 &= (c + d) \cdot e \\
P_4 &= d \cdot (g - e) \\
P_5 &= (a + d) \cdot (e + h) \\
P_6 &= (b - d) \cdot (g + h) \\
P_7 &= (a - c) \cdot (e + f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r &= P_5 + P_4 - P_2 + P_6 \\
s &= P_1 + P_2 \\
t &= P_3 + P_4 \\
u &= P_5 + P_1 - P_3 - P_7
\end{aligned}
$$

7 çarp., 18 topl. /çıkar.
Not: Çarpma işleminde **sırabağımsızlık yok!**

Strassen'in fikri

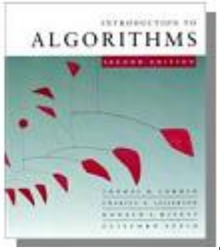


- **2×2** matrisleri yalnız **7** özyinelemeli çarpmayla çöz.

$$
\begin{aligned}
P_1 &= a \cdot (f - h) \\
P_2 &= (a + b) \cdot h \\
P_3 &= (c + d) \cdot e \\
P_4 &= d \cdot (g - e) \\
P_5 &= (a + d) \cdot (e + h) \\
P_6 &= (b - d) \cdot (g + h) \\
P_7 &= (a - c) \cdot (e + f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r &= P_5 + P_4 - P_2 + P_6 \\
&= (a + d)(e + h) \\
&\quad + d(g - e) - (a + b)h \\
&\quad + (b - d)(g + h) \\
&= ae + ah + de + dh \\
&\quad + dg - de - ah - bh \\
&\quad + bg + bh - dg - dh \\
&= ae + bg
\end{aligned}
$$

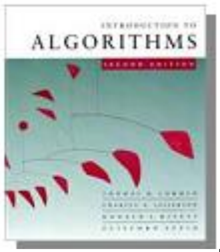
Strassen’in algoritması



- **1. Böl: A** ve **B**'yi **(n/2)×(n/2)** altmatrislere böl. **+** ve **–** kullanarak çarpılabilecek terimler oluştur. ($\mathbf{\Theta(n^2)}$)
- **2. Fethet: (n/2)×(n/2)** altmatrislerde özyinelemeli **7** çarpma yap ($\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$, **…**$\mathbf{P_7}$.)
- **3. Birleştir: +** ve **–** kullanarak **(n/2)×(n/2)** altmatrislerde **C** 'yi oluştur. ($\mathbf{\Theta(n^2)}$)

$$T(n) = 7\,T(n/2) + \Theta(n^2)$$

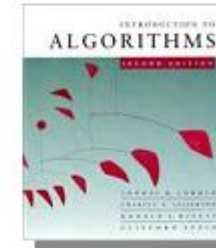
Strassen’in algoritması



$$T(n) = 7\,T(n/2) + \Theta(n^2)$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 7} \approx n^{2.81} \Rightarrow \text{DURUM 1} \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\lg 7})$$

- **2.81** değeri **3**' den çok küçük görünmeyebilir ama, fark üstelde olduğu için, yürütüm süresine etkisi kayda değerdir. Aslında, **$n \geq 32$** değerlerinde Strassen’in algoritması günün makinelerinde normal algoritmadan daha hızlı çalışır. Bugünün en iyi değeri (teorik merak açısından): **$\Theta(n^{2.376\ldots})$**

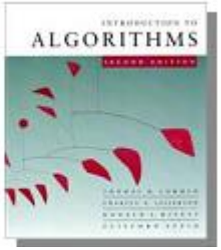


Böl ve Fethet
VLSI (Very Large Scale Integration) yerleşimi
(Çok Büyük Çapta Tümleşim)

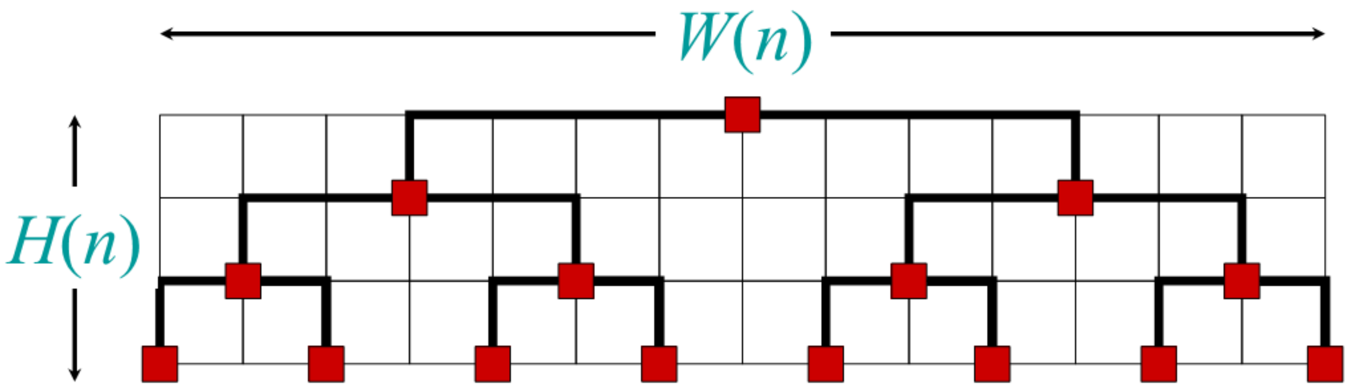
- Bilgisayar çipleri yada yongaları bildiğiniz gibi çok büyük çapta tümleşim kullanırlar.
- Elimizde bir devre olduğunu düşünelim ve bu devrenin de bir ikili ağaç olduğunu kabul edelim. Ama şimdilik bu devrenin bir kısmını ele alalım ama siz bunu tüm devre kabul edin.

- **Problem:** **n** yaprağı olan tam bir ikili ağacı en az alan kullanarak bir ızgaraya gömmek.

VLSI (Very Large Scale Integration) yerleşimi (Çok Büyük Çapta Tümleşim)



- **Problem: n** yaprağı olan tam bir ikili ağacı en az alan kullanarak bir ızgaraya gömmek.

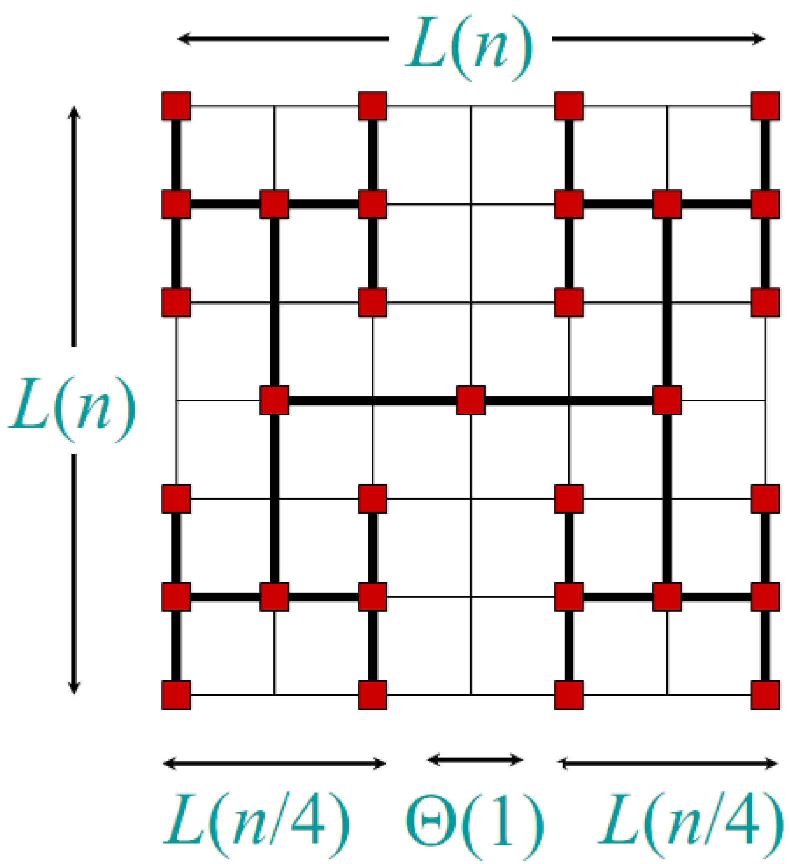


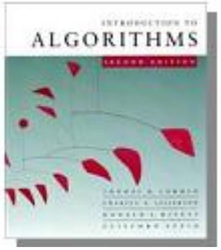
$$H(n) = H(n/2) + \Theta(1) = \Theta(\lg n)$$

$$W(n) = 2W(n/2) + \Theta(1) = \Theta(n)$$

$$\text{Alan} = \Theta(n \lg n)$$

H-ağacını gömme

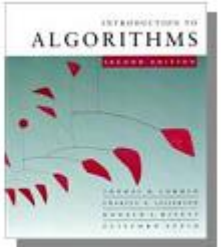




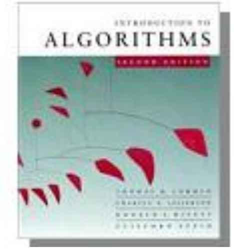
$$
\begin{aligned}
L(n) &= 2L(n/4) + \Theta(1) \\
&= \Theta(\sqrt{n})
\end{aligned}
$$

$$\text{Alan} = \Theta(n)$$

Sonuç

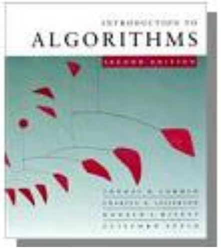


- Böl ve Fethet algoritma tasarımının güçlü tekniklerinden sadece biridir.
- Böl ve Fethet algoritmaları yinelemeler ve Ana (Master) metot kullanarak çözümlenebilir.
- Böl ve Fethet stratejisi genellikle verimli algoritmalara götürür.



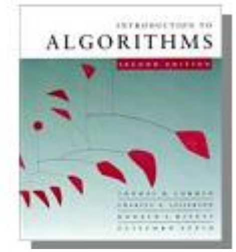
Sorular

- 1.T(n)=3T($\sqrt{2n}$)+2 tekrarlı bağıntısını çözünüz.
- 2. T(n)=3T($\lfloor n/5 \rfloor$)+n tekrarlı bağıntısının çözümünü iteratif yolla gerçekleştiriniz. Bu bağıntının Özyineleme ağacı nedir?
- 3. Özyineleme ağacını kullanarak T(n)=T(n/3)+T(2n/3)+n bağıntısının çözümünü elde ediniz.
- 4. $b \geq 1$ bir sabit olmak üzere T(n)=T(n/b)+T(b)+n tekrarlı bağıntısının Özyineleme ağacını elde ediniz ve bu bağıntının çözümü nedir?
- 5. $0<a<1$ sabit olmak üzere T(n)=T(an)+T((1-a)n)+n tekrarlı bağıntısının Özdevinim ağacını elde ediniz ve asimptotik davranışı hakkında bilgi veriniz.



Sorular

- 6. Master yöntemindeki düzenlilik şartının fiziksel anlamı nedir?
- 7. Master yöntemini kullanarak aşağıdaki tekrarlı bağıntıları çözünüz.
  - $T(n)=3T(n/3)+n$
  - $T(n)=3T(n/3)+n^2$
  - $T(n)=3T(n/3)+n^3$
  - $T(n)=3T(n/3)+n^k$
- 8. Aşağıdaki tekrarlı bağıntı verilmiş olsun.
  - $T(n)=2T(n/3)+\lg(n)$
  - a) İteratif yöntem ile bu bağıntının mertebesini (çalışma zamanını) elde ediniz.
  - b) Master yöntemi ile bu bağıntının mertebesini (çalışma zamanını) elde ediniz.



Sorular

- 9. Aşağıdaki tekrarlı bağıntıları karakteristik denklem ve üreten fonksiyon yöntemleri ile çözünüz.
  - a) $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$, $a_1=36$ ve $a_0=0$
  - b) $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}+2^{n-1}+2.3^n$, $a_1=29$ ve $a_0=9$
  - c) $a_n=a_{n-2}+4n$, $a_1=4$ ve $a_0=1$
  - d) $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}+3.2^{2n-1}$, $a_1=12$ ve $a_0=0$
- 10. Master teoremini kullanarak aşağıdaki bağıntının mertebesini (çalışma zamanını) elde ediniz.
  - $T(n)=16T(n/4)+O(n^2)$
- 11. $f(n)=n^2+4n\log n+900$ ve $g(n)=n^2+45\log n+h(n)$ fonksiyonları verilmiştir ve h(n) lineer olan bir polinomdur. f(n) ile g(n) arasındaki asimptotik ilişki nedir? f(n) ve g(n) arasındaki asimptotik ilişkiyi belirlerken h(n) polinomuna ihtiyaç var mıdır? Hangi durumlarda ihtiyaç duyulur veya duyulmaz?

4.Hafta

Sıralama Algoritmaları

Çabuk Sıralama, Rastgele Algoritmalar