MAT223 AYRIK MATEMATİK

Kombinatoryal Yöntemler
2. Bölüm

Doç. Dr. Emrah Akyar

Anadolu Üniversitesi
Fen Fakültesi Matematik Bölümü, ESKİŞEHİR

2011–2012 Güz Dönemi

Tümevarım Yöntemi

Soru

İlk n tek sayının toplamı nedir?

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \\
1+3 &= 4 \\
1+3+5 &= 9 \\
1+3+5+7 &= 16 \\
1+3+5+7+9 &= 25 \\
1+3+5+7+9+11 &= 36 \\
1+3+5+7+9+11+13 &= 49 \\
1+3+5+7+9+11+13+15 &= 64 \\
1+3+5+7+9+11+13+15+17 &= 81 \\
1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 &= 100
\end{aligned}
$$

Yukarıdaki tablodan sezgisel olarak ilk n tek sayının toplamının n^2 olacağını söyleyebiliriz (hatta ilk 10 tek tam sayı için bu kesin doğrudur diyebiliriz).

Peki her n sayısı için bunun doğru olacağından nasıl emin olabiliriz? Bu iddiayı nasıl kanıtlayabiliriz?

n. tek sayı $2n-1$ olduğuna göre

$$1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2$$

olduğunu göstermek istiyoruz.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 3) + (2n - 1) = n^2$$

ifadesinde son terimi ayıracak olursak,

$$[1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 3)] + (2n - 1) = n^2$$

olur. Köşeli parantez içindeki terimlerin toplamı ilk $n - 1$ tek sayının toplamı olduğundan bu toplam $(n - 1)^2$ olur. Buradan

$$(n - 1)^2 + (2n - 1) = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2$$

elde edilir.

Hemen itiraz etmeyin!

Evet, kanıtı yaparken kanıtlamak istediğimiz sonucu kullanmış gibi gözüksek de tam olarak böyle olmadı.

Aslında yapılan şey eğer kanıtlamak istediğimiz ifade $n-1$ için doğru ise n içinde doğru olduğunu göstermektir.

O zaman n için iddianın doğru olduğunu göstermek için $n=1$ için doğru olduğunu göstermeliyiz (ilk slaytta gösterdik), $n=2$ için ve $n=3$ için yine doğru olduğunu gördük.
Yukarıdan, $n=3$ doğru olması $n=4$ için doğru olmasını gerektirecek, $n=4$ için doğru olması $n=5$ için doğru olmasını gerektirecek bu şekilde devam edersek her n için doğru olduğu sonucuna ulaşırız.

Bu kanıt yöntemine tümevarım/(matematiksel) indüksiyon yöntemi denir.

Doğal sayıların bir özelliğini kanıtlamak için:

a. 1 bu özelliğe sahiptir.

b. $n-1$ bu özelliğe sahip ise n de bu özelliğe sahiptir $(n > 1)$.

ifadelerinin doğru olduğu kanıtlanmalıdır.

Tümevarım yöntemi (a) ve (b) doğru ise tüm doğal sayıların istenen özelliğe sahip olduğunu söyler.

Tümevarım yöntemi ile kanıt yapılırken,

- Ifadenin $n = 1$ için doğru olduğu gösterilerek başlanmalıdır. Ancak bazı durumlarda $n = 1$ yerine $n = 0$ ya da $n = 2$ ile başlamak gerekebilir. Örneğin, "$n > 1$ için $n!$ çift sayıdır" ifadesi kanıtlanırken $n = 2$ ile başlanmalıdır.
- Daha sonra ifadedeki n yerine $n - 1$ yazıldığında ifadenin doğru olduğu kabul edilir. (Tümevarım Hipotezi).
- Son olarak bunlar kullanılarak n için doğru olduğu gösterilir.

İlk n doğal sayının toplamı $\dfrac{n(n+1)}{2}$ dir.

Kanıt (Tümevarım Yöntemi):

- $n=1$ için $\frac{1(1+1)}{2}=1$ olduğundan doğru ✓
  $n=2$ için $\frac{2(2+1)}{2}=3$ olduğundan doğru ✓
- $n-1$ için doğru olsun. Yani,

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$$

olsun.

- n için de doğru olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} \underbrace{[1+2+3+\cdots+(n-1)]}_{\frac{(n-1)n}{2}}+n &= \frac{(n-1)n}{2}+n \\ &= \frac{(n-1)n+2n}{2} \\ &= \frac{n^2-n+2n}{2}=\frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

O halde her n doğal sayısı için doğrudur.

Kanıt (Geometrik):

Aşağıdaki içi dolu noktaların sayısı bize ilk n doğal sayının toplamını verecektir. Bu içi dolu noktaların sayısını bulmak için şekli dikdörtgene

$$n \text{ tane}\left\{\begin{array}{cccccc} \bullet & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \circ \end{array}\right. \atop \underbrace{\hphantom{\bullet\quad\circ\quad\circ\quad\circ\quad\circ\quad\circ}}_{n+1 \text{ tane}}$$

tamamlayalım.

Dikdörtgenin alanı $n(n+1)$ olur. İçi dolu olan noktalar bunun yarısı olduğundan içi dolu noktaların sayısı $\dfrac{n(n+1)}{2}$ olur.

Kanıt (Gauss):

$$1+2+3+\cdots+998+999+1000$$

$$\underbrace{\underbrace{1+1000}_{1001}\qquad\underbrace{2+999}_{1001}\qquad\underbrace{3+998}_{1001}\qquad\dots}_{500\text{ tane }1001}$$

Genel olarak;

$$\frac{n}{2}\text{ tane }(n+1)\;\Rightarrow\;\frac{n}{2}(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}$$

1. Derste "n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısının 2^n" olduğunu çeşitli şekillerde kanıtlamıştık.

Şimdi tümevarım yöntemi ile bir kanıt daha verelim:

- $n = 0$ için ifadenin doğru olduğunu biliyoruz (*Boş kümenin bir alt kümesi var*).
- $n > 0$ olmak üzere bu ifadenin $n - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim (tümevarım hipotezi).
- Şimdi bunlardan yararlanarak n için de doğru olduğunu gösterelim:

- S kümesi n elemanlı bir küme olsun. S kümesinin alt kümelerinin sayısını bulmak istiyoruz.
- S kümesinden bir elemanını çıkaralım ve bunu a ile gösterelim. Geriye a yı bulundurmayan $n-1$ elemanlı bir küme kalır. Bu kümeyi de S' ile gösterelim.
- $n-1$ elemanlı S' kümesinin hiçbir alt kümesinde a yoktur ve bu alt kümelerin sayısı tümevarım hipotezinden 2^{n-1} olur.
- Şimdi S kümesinin a yı bulunduran alt kümelerinin sayısını bulalım: S' kümesinin her alt kümesine a yı eklersek S nin a yı bulunduran alt kümelerini elde ederiz. Yani, S nin a yı bulundurmayan alt kümelerinin sayısı ile a yı bulunduran alt kümelerinin sayısı aynıdır (Aralarında birebir eşleme var). O halde

$$\underbrace{2^{n-1}}_{\text{a yı bulunduranların sayısı}} + \underbrace{2^{n-1}}_{\text{a yı bulundurmayanların sayısı}} = \underbrace{2^{n}}_{\text{Tüm alt kümelerin sayısı}}$$

olur.

İddia!

Her n doğal sayısı için $n(n+1)$ tek sayıdır.

Kanıt.

- $n-1$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani, $(n-1)n$ tek sayı olsun.
- n için doğru olduğunu gösterelim:

$$n(n+1) = \underbrace{\underbrace{(n-1)n}_{\text{Tümevarım hipotezinden tek}} + \underbrace{2n}_{\text{çift}}}_{\text{Tek sayı ile çift sayının toplamı TEK!}}$$

$\square$

Elbette DOĞRU DEĞİL! Nerede hata yaptık?

Tümevarım yöntemiyle kanıt yaparken başlangıç değerlerine dikkat etmek çok önemlidir!

$n = 1$ için iddianın doğruluğu incelenseydi. Doğru olmadığı hemen görülecekti.

İddia!

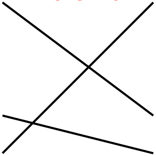
Düzlemde herhangi ikisi birbirine paralel olmayan n farklı doğru tek bir noktada kesişir.

Kanıt:

- $n = 1$ için doğru. $n = 2$ için doğru (çünkü doğrular paralel değil.)
- $n - 1$ için doğru olsun (tümevarım hipotezi).
- n için de doğru olduğunu gösterelim:

- $L = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ldots, \ell_n\}$ herhangi ikisi birbirine paralel olmayan n farklı doğrunun kümesi olsun.
- ℓ_3 ü kümeden çıkarırsak $n-1$ elemanlı bir küme elde ederiz ve tümevarım hipotezinden tüm bu doğrular P gibi tek bir noktada kesişir. Dolayısıyla ℓ_1 ve ℓ_2 de P noktasında kesişir.
- ℓ_3 ü yerine koyup bu defa ℓ_4 ü kümeden çıkarırsak yine kalan $n-1$ doğru P' gibi bir noktada kesişecektir. Dolayısıyla ℓ_1 ve ℓ_2 de P' noktasında kesişir.
- O halde $P = P'$ olur. Böylece tüm doğruların P gibi tek bir noktada kesişmesi gerekir.

Elbette DOĞRU DEĞİL!



Nerede hata yaptık?

Yukarıda kullanılan yaklaşım çok komik sonuçlar da doğurabilir:

İddia!

Bütün atlar aynı renktir.

Kanıt.

- $n = 1$ için doğru!
- $n - 1$ için doğru olsun. Yani $n - 1$ atın hepsi aynı renk olsun.
- Şimdi ifadenin n için de doğru olduğunu gösterelim:
  n tane atın oluşturduğu küme $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ olsun. a_1 i kümeden çıkarırsak geriye kalan $n - 1$ at tümevarım hipotezinden aynı renk olmalıdır. Aynı durum $a_2, a_3, \ldots, a_n$ de kümeden çıkarıldığında geçerlidir.

O halde tüm atlar aynı renktir :-) $\square$

Sayıların Tahmini ve Karşılaştırılması

Soru

100! *sayısı kaç basamaklıdır?*

Bu soruyu cevaplamadan önce bazı sayıları karşılaştıralım:

$\binom{n}{1} = n$	$\binom{n}{2}$
2	1
3	3
4	6

$n \geq 4$ için $n = \binom{n}{1} < \binom{n}{2}$ olur. Üstelik,

$$\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{1}} = \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{1!(n-1)!}{n!} = \frac{n-1}{2}$$

olduğundan $n \to \infty$ için $\dfrac{\binom{n}{2}}{n} \to \infty$ olur.

Soru

n^2 mi büyüktür yoksa 2^n mi? (Elbette n nin kaç olduğu önemli!)

$$\begin{aligned}
n = 1 &\quad\Rightarrow\quad 1^2 < 2^1\\
n = 2 &\quad\Rightarrow\quad 2^2 = 2^2\\
n = 3 &\quad\Rightarrow\quad 3^2 > 2^3\\
n = 4 &\quad\Rightarrow\quad 4^2 = 2^4\\
n = 5 &\quad\Rightarrow\quad 5^2 < 2^5
\end{aligned}$$

Yine, $n \to \infty$ için $\dfrac{2^n}{n^2} \to \infty$ olur.

Tekrar ilk sorumuza geri dönelim ve 100! i yaklaşık olarak belirlemeye çalışalım.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 \qquad \text{(Etkisiz eleman.)}$$

Diğer tüm çarpanları 2 gibi düşünsek,

$$n! \geq \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n-1 \text{ tane}} = 2^{n-1}$$

olur. Eğer diğer çarpanları n gibi düşünürsek bu sefer

$$n! \leq \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{n-1 \text{ tane}} = n^{n-1}$$

olur. Buradan

$$2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}$$

şeklinde *çok kötü* bir sınırlandırma elde edilir.
(Gerçekten de $n = 10$ için $2^9 = 512 \leq n! \leq 10^9$ olur.)

Daha iyi bir değerlendirme verebilir miyiz?

Soru

$n!$ mi yoksa 2^n mi daha büyüktür?

n	2^n	$n!$
1	2^1	$> 1!$
2	2^2	$> 2!$
3	2^3	$> 3!$
4	2^4	$< 4!$
5	2^5	$< 5!$

Tümevarım yöntemi yardımıyla $n \geq 4$ için $n! > 2^n$ olduğu hemen gösterilebilir (Alıştırma).

Stirling Formülü

Aşağıdaki teorem ile $n!$ için oldukça iyi bir değerlendirme verilmektedir.

Teorem

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Burada $\sim$ sembolünün anlamı,

$$n \to \infty \text{ için } \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \to 1$$

şeklindedir.

O halde Stirling formülünü kullanırsak başlangıçta sorduğumuz sorunun yanıtını verebiliriz:

$$100! \sim \left(\frac{100}{e}\right)^{100} \sqrt{200\pi}$$

ifadesinin her iki tarafının 10 tabanında logaritmasını alırsak,

$$\begin{aligned} \log(100!) &\sim 100\log\left(\frac{100}{e}\right) + \log 10 + \log\sqrt{2\pi} \\ &\approx 157,969 \end{aligned}$$

olur.

1. dersten yukarıdaki sayının tam değerinin bir fazlasının basamak sayısına eşit olduğunu biliyoruz.

O halde 100! yaklaşık 158 basamaklıdır (Gerçek değer de 158 dir).

İçerme–Dışlama Prensibi

Soru

- 40 kişilik bir sınıf
- 18 Beatles
- 16 Rolling Stones
- 12 Elvis Presley
- 7 Beatles + Rolling Stones
- 5 Beatles + Elvis Presley
- 3 Rolling Stones + Elvis Presley
- 2 Hepsi

Sınıftaki kaç öğrencinin yukarıdaki rock gruplarından birine ait bir albümü *yoktur*?

$$\underbrace{18}_{\text{Beatles}} + \underbrace{16}_{\text{Rolling Stones}} + \underbrace{12}_{\text{Elvis Presley}} = 46$$

$$\underbrace{40}_{\text{Sınıf Mevcudu}} \quad -46 = -6 \qquad \text{Hata var!}$$

Aynı anda her iki grubun albümüne sahip olanlar var. Bu kişileri birden fazla kez çıkartmış olduk. O halde tekrar eklemeliyiz.

$$40 - (18 + 16 + 12) + (7 + 5 + 3) = 9$$

Peki bu sayı doğru mu? Bu sefer de her üç grubun albümüne sahip olanları fazladan eklemiş olduk. Bu kişilerin sayısını tekrar çıkartmalıyız.

$$40 \color{red}{-} (18 + 16 + 12) \color{red}{+} (7 + 5 + 3) \color{red}{-} 2 = 7$$

Teorem

- S keyfi bir küme ve $|S| = n$ olsun.
- c_i $(1 \leq i \leq t)$ S kümesinin bazı elemanlarının sağladığı bir koşul olsun ve S kümesinin c_i koşulunu sağlayan elemanlarının sayısı $|c_i|$ ile gösterilsin.
- Benzer şekilde $|c_i c_j|$ ile S kümesinin hem c_i hem de c_j koşulunu sağlayan elemanlarının sayısını gösterelim.
- Son olarak $|\overline{c_i}|$ ile S kümesinin c_i koşulunu sağlamayan elemanlarının sayısını, $|\overline{c_i c_j}|$ ise hem c_i hem de c_j koşulunu sağlamayan elemanların sayısını göstersin.

Bu durumda

$$\begin{aligned} |\overline{c_1}\,\overline{c_2}\cdots\overline{c_t}| &= |S| - \sum_{1\leq i\leq t} |c_i| + \sum_{1\leq i\leq j\leq t} |c_i c_j| - \sum_{1\leq i\leq j\leq k\leq t} |c_i c_j c_k| \\ &\quad + \cdots + (-1)^t |c_1 c_2 \cdots c_t| \end{aligned}$$

olur.

Ya da açık olarak yazarsak,

$$
\begin{aligned}
|\overline{c_1}\,\overline{c_2}\cdots\overline{c_t}| &= |S| - \left(|c_1| + |c_2| + \cdots + |c_t|\right) \\
&\quad + \left(|c_1 c_2| + |c_1 c_3| + \cdots + |c_1 c_t| + \cdots + |c_{t-1} c_t|\right) \\
&\quad - \left(|c_1 c_2 c_3| + |c_1 c_2 c_4| + \cdots + |c_{t-2} c_{t-1} c_t|\right) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (-1)^t |c_1 c_2 \cdots c_t|
\end{aligned}
$$

olur.

Örnek

$1 \leq n \leq 100$ için $2, 3$ ya da 5 ile bölünmeyen n lerin sayısı nedir? Burada

- $S = \{1, 2, \ldots, 100\}$ ve $|S| = 100$ olur.
- c_1: n sayısı 2 ile bölünebilir. c_2: n sayısı 3 ile bölünebilir. c_3: n sayısı 5 ile bölünebilir.

$$|c_1| = 50,\ |c_2| = \left[\!\left[\frac{100}{3}\right]\!\right] = 33,\ |c_3| = \left[\!\left[\frac{100}{5}\right]\!\right] = 20,\ |c_1c_2| = \left[\!\left[\frac{100}{2\cdot 3}\right]\!\right] = 16,$$

$$|c_1c_3| = \left[\!\left[\frac{100}{2\cdot 5}\right]\!\right] = 10,\ |c_2c_3| = \left[\!\left[\frac{100}{3\cdot 5}\right]\!\right] = 6 \text{ ve } |c_1c_2c_3| = \left[\!\left[\frac{100}{2\cdot 3\cdot 5}\right]\!\right] = 3$$

olur. Buradan cevap

$$|\bar{c_1}\bar{c_2}\bar{c_3}| = 100 - (50 + 33 + 20) + (16 + 10 + 6) - 3$$

bulunur.

Güvercin Yuvası İlkesi

Soru

Acaba İstanbulda yaşayan ve aynı sayıda saç teline sahip olan iki kişi var mıdır?

Bilimsel araştırmalara göre hiç kimsenin 500 000 den daha fazla saç teli olamaz.

İstanbul'un nüfusunun ise 10 milyondan fazla olduğunu biliyoruz.

Kabul edelim ki İstanbul'da aynı sayıda saç teline sahip iki kişi olmasın. Bu durumda

- 0 tane saç teline sahip en fazla 1 kişi vardır.
- 1 tane saç teline sahip en fazla 1 kişi vardır.
- $\vdots$
- 500 000 tane saç teline sahip en fazla 1 kişi vardır.

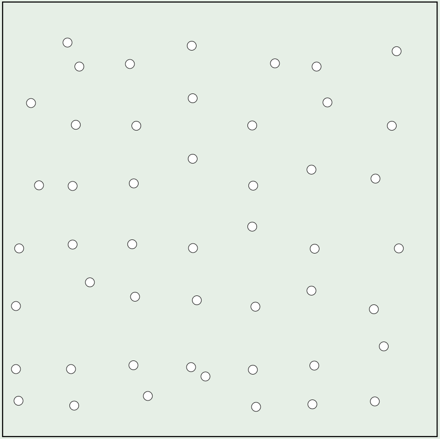
Peki İstanbulda yaşayan 500 001. kişi ne olacak?

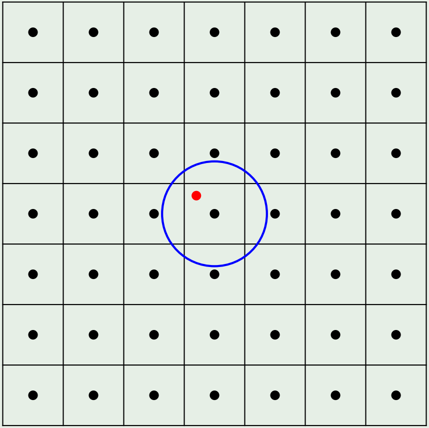
Güvercin Yuvası İlkesi (Pigeonhole Principle)

Eğer elimizde n tane kutu ve bu kutulara koymak için n den fazla objemiz varsa en az bir kutuya birden fazla obje koymak gerekir.

Örnek

Kare şeklindeki bir dart tahtasına 50 atış yapılsın (Hepsi de tahtaya isabet etsin). Eğer karenin bir kenarı 70cm ise aralarındaki mesafe 15cm den daha az olan en az iki atış vardır. Kanıtlayınız.





Doğum Günü Problemi

"İddiaya varım bu sınıfta doğum günü aynı gün olan iki kişi vardır" dersem ne dersiniz?

Sakın hemen doğum günü için 366 farklı gün olduğunu fakat sınıftaki öğrenci sayısının 367 olmadığını bu durumda iddiayı kazanmamın neredeyse mümkün olmadığını söylemeyin.

Şimdi size yeterli öğrenci sayısı ile kazanma ihtimalimin oldukça yüksek olduğunu göstereceğim.

50 öğrencinin bulunduğu bir sınıfta öğrenciler, yoklama listesinde isimlerinin yanına doğum günlerini yazacak olursa,

$$\underbrace{366 \cdot 366 \cdot 366 \cdots 366}_{50 \text{ tane}} = 366^{50}$$

farklı liste oluşturulabilir.

Peki bu 366^{50} farklı listenin kaçında hoca kaybeder?

Birinci öğrenci listeye mümkün 366 günden herhangi birini yazdığında hocanın kaybetmesi için ikinci öğrencinin kalan 365 günden birini, üçüncü öğrencinin geriye kalan 364 günden birini, bu şekilde devam edilirse ellinci öğrencinin de geriye kalan 317 günden birini yazması gerekir. Bu şekilde oluşturulan listelerle hoca kaybedecektir ve bu listelerin sayısı

$$366 \cdot 365 \cdots 317$$

olur.

O halde hocanın kaybetme olasılığı

$$\frac{366 \cdot 365 \cdots 317}{366^{50}} \approx 0,02992$$

bulunur :-)

Şimdi problemi genelleyelim: n mümkün doğum günü ve k öğrenci için

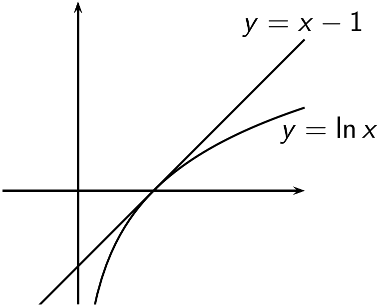
$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$

sayısını yaklaşık olarak hesaplayalım.
Önce $x > 0$ için

$$\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1 \tag{1}$$

olduğunu gösterelim.

Eşitsizliğin sağ tarafının doğru olduğunu aşağıdaki grafikten görebilirsiniz.



Eşitsizliğin sol tarafının geçerli olduğu ise sağ taraf kullanılarak,

$$\ln x = -\ln\frac{1}{x} \geq -\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{x-1}{x}$$

şeklinde gösterilir.

Hesaplamak istediğimiz kesrin tersini alıp çarpanlara ayıralım:

$$\frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} = \frac{n}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdots\frac{n}{n-k+1}$$

Her iki tarafın doğal logaritmasını alırsak,

$$\ln\left(\frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}\right) = \ln\frac{n}{n}+\ln\frac{n}{n-1}+\ln\frac{n}{n-2}+\cdots+\ln\frac{n}{n-k+1}$$

buluruz.
(1) eşitsizliğinin sol tarafını kullanarak $j = 1, 2, \ldots, (k-1)$ için

$$\ln\left(\frac{n}{n-j}\right) \geq \frac{\frac{n}{n-j}-1}{\frac{n}{n-j}} = \frac{j}{n}$$

yazabiliriz.

O halde

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}\right) &\geq \frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{k-1}{n} \\
&= \frac{1}{n}(1+2+\cdots+(k-1)) \\
&= \frac{k(k-1)}{2n}
\end{aligned}$$

alt sınırını elde ederiz.

Benzer şekilde (1) eşitsizliğinin sağ tarafını kullanarak, $j = 1, 2, \ldots, (k-1)$ için

$$\ln\left(\frac{n}{n-j}\right) \le \frac{n}{n-j} - 1 = \frac{j}{n-j}$$

yazabiliriz.

Ayrıca,

$$\frac{j}{n-j} \le \frac{j}{n-k+1}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}\right) &\le \frac{1}{n-k+1} + \frac{2}{n-k+1} + \cdots + \frac{k-1}{n-k+1} \\
&= \frac{1}{n-k+1}\left(1 + 2 + \cdots + (k-1)\right) \\
&= \frac{k(k-1)}{2(n-k+1)}
\end{aligned}$$

üst sınırını elde ederiz.

Böylece

$$\frac{k(k-1)}{2n} \leq \ln\left(\frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}\right) \leq \frac{k(k-1)}{2(n-k+1)}$$

olur.

Eksponansiyel alırsak,

$$e^{\frac{k(k-1)}{2n}} \leq \frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} \leq e^{\frac{k(k-1)}{2(n-k+1)}}$$

elde ederiz.
Bu ifadeyi $n = 366$ ve $k = 50$ için yazarsak,

$$e^{\frac{50\cdot 49}{2\cdot 366}} \leq \frac{366^{50}}{366\cdot 365\cdots 317} \leq e^{\frac{50\cdot 49}{2\cdot(366-50+1)}}$$

ya da yaklaşık olarak,

$$28.41719830 \leq \frac{366^{50}}{366\cdot 365\cdots 317} \leq 47.67243327$$

olur.

Kesri tekrar ters çevirecek olursak

$$0.02097648329 \leq \frac{366 \cdot 365 \cdots 317}{366^{50}} \leq 0.03518995748$$

buluruz.

O halde 50 kişilik bir sınıfta hocanın kaybetme olasılığı %3 den daha azdır.

Aşağıdaki tabloda bazı öğrenci sayıları için hocanın kaybetme ihtimalleri verilmiştir.

5	10	15	20	25	30	35	40
0.972	0.883	0.747	0.589	0.432	0.294	0.186	0.109

45	50	55	60	65	70	75
0.059	0.029	0.0139	0.005	0.002	0.000858	0.0002

Alıştırmalar

Alıştırma

S,I,N,A,V,Ç,O,K,G,Ü,Z,E,L harflerinin tüm farklı dizilimlerinden kaç tanesinde SINAV, ÇOK ya da GÜZEL sözcüklerini görürüz?

S,I,N,A,V,Ç,O,K,G,Ü,Z,E,L harflerinin tüm farklı dizilimlerinin kümesini S ile gösterelim. Açıktır ki $|S| = 13!$ olur.

S nin SINAV kelimesini bulunduran dizilimlerin kümesini c_1, ÇOK sözcüğünü bulunduran dizilimlerin kümesini c_2 ve GÜZEL sözcüğünü bulunduran dizilimlerin kümesini c_3 ile gösterelim.

$|c_1|$ i hesaplamak için SINAV sözcüğünü tek bir harf gibi düşünüp $\boxed{\text{SINAV}}$,Ç,O,K,G,Ü,Z,E,L harflerinin dizilimini hesaplamalıyız. Buradan $|c_1| = 9!$ olur.

Benzer şekilde $|c_2| = 11!$ ve $|c_3| = 9!$ olur.

Ayrıca, $|c_1 c_2| = 7!$, $|c_1 c_3| = 5!$, $|c_2 c_3| = 7!$ ve $|c_1 c_2 c_3| = 3!$ olur.

İçerme–dışlama prensibinden

$$|\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3| = |S| - (|c_1| + |c_2| + |c_3|) + (|c_1 c_2| + |c_1 c_3| + |c_2 c_3|) - |c_1 c_2 c_3|$$

olduğunu biliyoruz. Bizden $|S| - |\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3|$ istendiğinden

$$\begin{aligned} |S| - |\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3| &= (|c_1| + |c_2| + |c_3|) - (|c_1 c_2| + |c_1 c_3| + |c_2 c_3|) + |c_1 c_2 c_3| \\ &= 9! + 11! + 9! - (7! + 5! + 7!) + 3! \\ &= 40\,632\,366 \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma

Dört evli çift yuvarlak bir masa etrafında eşler yanyana gelmeme koşuluyla kaç farklı şekilde oturabilir? (*Biri diğerinin döndürülmesiyle elde edilen oturuş düzenleri aynı kabul edilecektir.*)

Her bir i. evli çiftin ($i = 1, 2, 3, 4$) *yanyana gelme* koşulunu c_i ile gösterirsek,

$$|c_1| = |c_2| = |c_3| = |c_4| = 2 \cdot (7-1)!$$

olur.

(Çifti bir kişi gibi düşünürsek, bu çift ve geri kalan 6 kişi yuvarlak masa etrafına (7-1)! farklı şekilde oturabilirler. Ayrıca, çiftler kendi aralarında da yer değiştirebilirler.)

Benzer şekilde $1 \leq i < j \leq 4$ için i. ve j. çiftleri birer kişi gibi düşünerek,

$$|c_i\, c_j| = 2^2 \cdot (6-1)!$$

olur.
O halde yine benzer olarak,

$$|c_1\, c_2\, c_3| = |c_1\, c_2\, c_4| = |c_1\, c_3\, c_4| = |c_2\, c_3\, c_4| = 2^3 \cdot (5-1)!$$

ve

$$|c_1\, c_2\, c_3\, c_4| = 2^4 \cdot (4-1)!$$

bulunur.

S kümesi bu 8 kişinin masa etrafında tüm farklı oturma şekillerini gösterecek olursa, $|S| = (8-1)!$ olur.

O halde içerme–dışlama (inclusion-exclusion) prensibini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
|\overline{c_1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}\,\overline{c_4}| &= |S| - (|c_1| + |c_2| + |c_3| + |c_4|) \\
&\quad + (|c_1 c_2| + |c_1 c_3| + |c_1 c_4| + |c_2 c_3| + |c_2 c_4| + |c_3 c_4|) \\
&\quad - (|c_1 c_2 c_3| + |c_1 c_2 c_4| + |c_1 c_3 c_4| + |c_2 c_3 c_4|) \\
&\quad + (|c_1 c_2 c_3 c_4|) \\
&= 7! - 8 \cdot 6! + 6 \cdot 2^2 \cdot 5! - 4 \cdot 2^3 \cdot 4! + 2^4 \cdot 3! \\
&= 1488
\end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma

En büyük elemanı 9 olan 5 pozitif tam sayının oluşturduğu küme S ile gösterilsin. S nin elemanları toplamı aynı olan en az iki alt kümesi vardır kanıtlayınız.

S nin $1 \leq |A| \leq 3$ şeklindeki alt kümelerini ele alalım. S, kümesi 5 elemanlı olduğuna göre bu koşulu sağlayan A alt kümelerinin sayısı:

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 5 + 10 + 10 = 25 \quad \text{Güvercinler!}$$

olur. S nin bir A alt kümesinin elemanlarının toplamını S_A ile gösterecek olursak, S nin en büyük elemanı 9 olduğundan A nın da en büyük elemanı 9 olabilir. Buna göre,

$$1 \leq S_A \leq 9 + 8 + 7 = 24 \quad \text{Güvercin yuvaları!}$$

eşitliği doğrudur. O halde *güvercin yuvası ilkesine* göre S nin elemanları toplamı aynı olan en az iki alt kümesi vardır.

Alıştırma

$X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinden $Y = \{1, 2, 3\}$ kümesine kaç farklı örten fonksiyon tanımlanabilir?

- X kümesinden Y kümesine bir fonksiyon, X kümesinin her elemanını Y kümesinin tek bir elemanı ile ilişkilendiren bir kuraldır.
- X kümesinden Y kümesine tanımlı tüm fonksiyonların kümesini S ile gösterirsek, $|S| = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$ olur.
- Y kümesinin her elemanı X kümesindeki en az bir elemanın görüntüsü ise fonksiyona örten fonksiyon denir.

- X kümesinden $Y \backslash \{1\}$, $Y \backslash \{2\}$ ve $Y \backslash \{3\}$ kümelerine tanımlanabilecek tüm fonksiyonların kümelerini sırasıyla c_1, c_2 ve c_3 ile gösterelim.
- $|c_1| = |c_2| = |c_3| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ olur.
- $\overline{c_1}$ ise X kümesinden Y kümesine tanımlı ve "1" in görüntü kümesinde bulunduğu fonksiyonların kümesini göstersin. Benzer şekilde, $\overline{c_2}$ ve $\overline{c_3}$ ise sırasıyla "2" ve "3" ü görüntü kümesinde bulunduran fonksiyonların kümesi olsun.
- Soruda istenen $|\overline{c_1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}|$ sayısıdır.
- $|c_1 c_2|$ sayısı X kümesinden $\{3\}$ kümesine tanımlı tüm fonksiyonların sayısı, $|c_1 c_3|$ sayısı X kümesinden $\{2\}$ kümesine tanımlı tüm fonksiyonların sayısı ve $|c_2 c_3|$ X kümesinden $\{1\}$ kümesine tanımlı tüm fonksiyonların sayısı olacağından $|c_1 c_2| = |c_1 c_3| = |c_2 c_3| = 1^5 = 1$ olur.
- Son olarak $|c_1 c_2 c_3|$ ise X kümesinden $\emptyset$ ye tanımlı fonksiyonların sayısı olacağından $|c_1 c_2 c_3| = 0$ dır.

O halde içerme–dışlama prensibinden,

$$\begin{aligned}|\overline{c_1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}| &= |S| - (|c_1| + |c_2| + |c_3|) + (|c_1 c_2| + |c_1 c_3| + |c_2 c_3|) - |c_1 c_2 c_3| \\ &= 243 - (32 + 32 + 32) + (1 + 1 + 1) - 0 \\ &= 150\end{aligned}$$

sonucuna varılır.

Alıştırma

$\{1, 2, \ldots, 3n\}$ kümesinden seçilen $n+1$ sayı içinde her zaman aralarındaki fark en fazla 2 olan iki tam sayı vardır. Kanıtlayınız.

Verilen $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ kümesini

$$\underbrace{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \ldots, \{3n-2, 3n-1, 3n\}}_{n \text{ tane}}$$

şeklinde n parçaya ayıralım.

Seçeceğimiz $n+1$ sayıdan en az iki tanesini her zaman bu alt kümelerin birisinden seçmeliyiz (Güvercin yuvası ilkesi).

Bu alt kümeler içindeki sayılar arasındaki fark en fazla iki olduğundan kanıt tamamlanmış olur.

Alıştırma

$X = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ kümesinin 6 elemanlı her alt kümesinde toplamları 10 olan iki elemanın var olduğunu kanıtlayınız.

X in 6 elemanlı bir alt kümesini oluşturmak için,

$$\{1, 9\},\ \{2, 8\},\ \{3, 7\},\ \{4, 6\},\ \{5\}$$

kümelerinden birer eleman aldıktan sonra geriye kalan 1 eleman yine bu kümelerin birinden seçilmek durumundadır.

Yani, yukarıda verilen ve elemanları toplamları 10 olan iki elemanlı kümelerin en az birinden iki eleman seçilmesi zorunludur.

O halde X kümesinin 6 elemanlı her alt kümesinin toplamları 10 olacak şekilde en az iki elemanı vardır.
Burada X in 6 elemanlı alt kümeleri güvercin, yukarıda sıralanan alt kümeler ise güvercin yuvası olarak düşünülüp güvercin yuvası ilkesinin uygulandığına dikkat ediniz.