# MAT223 AYRIK MATEMATİK

## Geometride Kombinatorik
## 11. Bölüm

Doç. Dr. Emrah Akyar

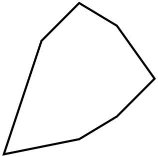
Anadolu Üniversitesi
Fen Fakültesi Matematik Bölümü, ESKİŞEHİR

2011–2012 Güz Dönemi

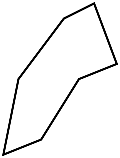
# Köşegenlerin Arakesiti

Geometri ve Kombinatoriğin birbiri ile bağlantısı nedir?

Kombinatoryal yöntemler yardımıyla çözülen birçok geometri sorusu olduğu gibi, kombinatoryal problemler de geometri yardımıyla çözülebilir.

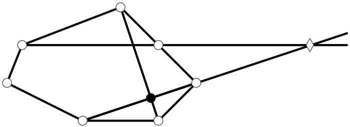


Konveks (Tüm iç açıları 180° küçük)



Konveks değil

$n$ köşesi olan konveks bir çokgeni ele alalım:

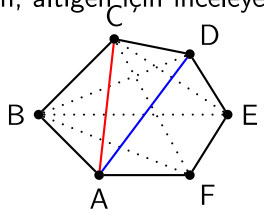


**Soru**

*Bu çokgenin köşegenleri kaç farklı noktada kesişir?*

*Köşeleri kesişim noktası olarak almıyoruz ve çokgenin dışında kesişen köşegenleri saymıyoruz.*

İlk akla gelen yöntem her bir köşegenin üzerindeki kesişim noktalarını sayıp, toplamak olacaktır. Örneğin, altıgen için inceleyecek olursak,




İki tip köşegen var:

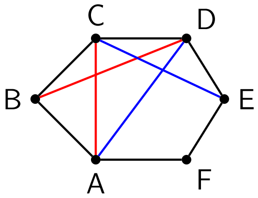
*AC* köşegeni gibi Bu köşegenden 6 tane olduğundan ve her biri 3 kesişim noktası bulundurduğundan $6 \times 3 = 18$ kesişim noktası

*AD* köşegeni gibi Bu köşegenden 3 tane olduğundan ve her birinin üzerinde 4 kesişim noktası olduğundan $3 \times 4 = 12$ kesişim noktası

Bu iki sayıyı toplarsak, $12 + 18 = 30$ olur. Ancak, her noktayı iki kez saydık. O halde cevap $30/2 = 15$ olur.

Bu yöntem herhangi bir $n$ sayısı için genelleştirilmeye uygun değil!

Bir başka yöntem:




Köşegenlerin kesişim noktalarını köşegenlerin uç noktaları ile adlandıralım. Örneğin, $AC$ ve $BD$ köşegenlerinin kesişim noktasını $ABCD$ ile $AD$ ve $CE$ köşegenlerinin kesişim noktasını ise $ACDE$ ile adlandıralım.

Bu adlandırma ile farklı kesişim noktaları farklı adlandırmalara sahip olur. Ayrıca, farklı 4 harf ile yapılan her adlandırma da bize bir kesişim noktası verir.

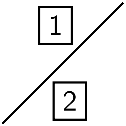
Yani kesişim noktaları ile 4 harf kullanılarak yapılan adlandırmalar arasında birebir bir eşleme vardır.

$n$ farklı harften 4 harf $\binom{n}{4}$ farklı şekilde seçilebileceğinden kesişim noktalarının sayısı $\binom{n}{4}$ bulunur.

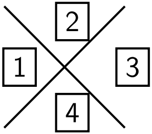
# Bölgelerin Sayısı

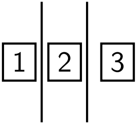
## Soru

*Düzleme çizilen n farklı doğru düzlemi kaç bölgeye ayırır?*




$n = 1$ ise 2 bölge

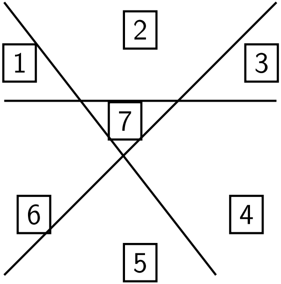


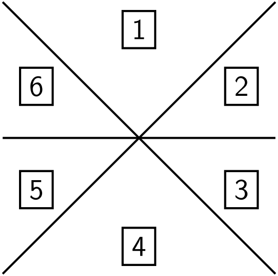

$n = 2$ ise 4 ya da 3 bölge

## $n = 3$ ise

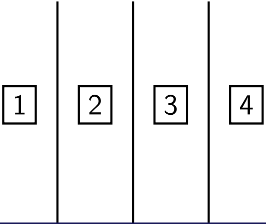
Doğrular aynı noktada kesişmiyorsa,




Üçü aynı noktada kesişiyorsa,



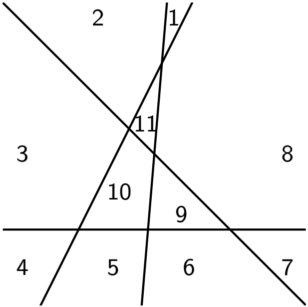

Üçü paralel ise,



## Uyarı

Bundan sonra herhangi ikisi paralel olmayan ve herhangi üçü aynı noktada kesişmeyen doğrularla ilgileneceğiz.

Buna göre $n = 4$ ise,



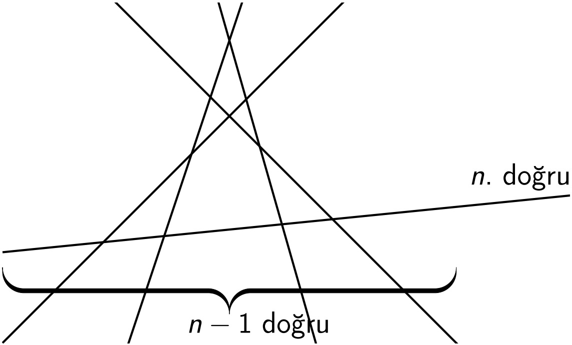

11 bölge elde edilir.

Tüm bu değerleri bir tabloda toplayacak olursak,

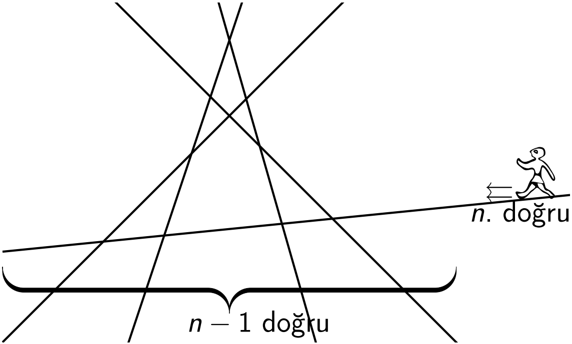
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Bölge Sayısı | 1 | 2 | 4 | 7 | 11 | ? |

## İddia

Düzlemde herhangi ikisi paralel olmayan ve herhangi üçü aynı noktada kesişmeyen $n-1$ doğru bulunsun. Yeni bir doğru daha çizersek (yine herhangi iki doğru paralel olmayacak ve herhangi üçü aynı noktada kesişmeyecek şekilde) doğruların belirlediği bölgelerin sayısı $n$ kadar artar.




- $n-1$ doğru varken yeni bir doğru daha çizelim.
- Bu yeni çizilen doğru geçtiği her bölgeyi iki parçaya ayıracaktır. O halde yeni eklenen bölge sayısı bu yeni çizilen doğrunun kestiği bölge sayısı kadar olacaktır.
- Yeni çizilen doğru kaç bölgeyi keser?




Yeni çizilen doğrunun kaç bölge ile kesiştiğini bulalım: Doğrunun üzerinde çok uzaklardan başlayarak yürüdüğümüzü düşünelim. Karşılaştığımız bir doğrunun üzerinden atlayınca yeni bir bölgeye ulaşmış oluruz. Bu doğrulardan $n-1$ tane olduğuna göre $n-1$ tane bölgeden geçeceğiz demektir. İlk başladığımız bölgeyi de hesaba katarsak, toplam $n$ bölge görmüş oluruz.

Böylece artık başlangıçta sorduğumuz sorunun cevabını, yani bölge sayısını verebiliriz: 0 doğru için 1 bölgemizin olduğunu düşünürsek, bölge sayısına her seferinde $1, 2, 3, \ldots, n$ bölge ekleneceğine göre cevap

$$1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

olur. Bu sonucu bir teorem şeklinde ifade edelim.

**Teorem**

Herhangi ikisi paralel olmayan ve herhangi üçü aynı noktada kesişmeyen $n$ farklı doğru düzlemi

$$1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

bölgeye ayırır.

## Kanıt.

Tümevarım yöntemi ve yukarıda anlatılanlar yardımıyla kanıtı kolayca yapabiliriz.

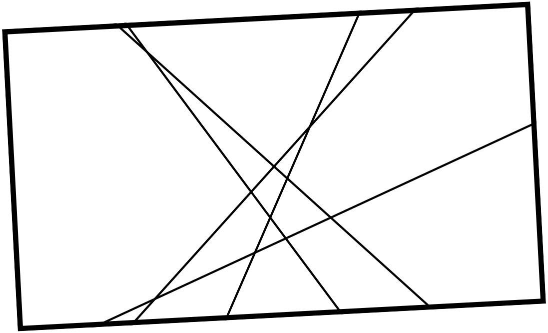
- $n = 1$ için doğru olduğu açık.
- $n - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim.
- $n > 1$ için de doğru olduğunu kanıtlayalım. Doğrulardan bir tanesini çıkaralım. Bu durumda tümevarım hipotezinden $1 + (n-1)n/2$ tane bölge vardır. Şimdi çıkardığımız doğruyu tekrar eklersek, eklenen doğru bu bölgelerden $n$ tanesi ikişer bölgeye ayıracaktır. Yani $n$ bölge daha gelecektir (yukarıda yazılanları tekrar okuyunuz). Böylece toplam bölge sayısı

$$1 + \frac{(n-1)n}{2} + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

olur.

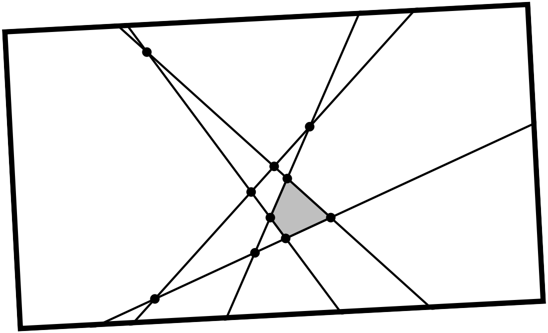
□

**Bir başka kanıt daha verelim:**



$n$ tane doğrunun doğruların tüm kesişim noktalarını içine alacak genişlikte bir yazı tahtasına çizildiğini düşünelim ve doğrulardan hiç birisinin yatay olmadığını kabul edelim (aksi halde tahtayı biraz döndürebiliriz).

Ayrıca, yazı tahtasının, tüm doğruların tahtanın alt kenarı ile kesişecek kadar geniş olduğunu kabul edelim. Son olarak, yazı tahtasının sol alt köşesinin biraz daha aşağıda olduğunu varsayalım (tahtayı sağdan biraz yukarı kaldırıyoruz).



Tahtanın üzerindeki her bir bölgenin yere en yakın olduğu noktayı ele alalım. Tüm bölgeler sınırlı ve doğrular yere paralel olmadığından her bölgenin bu şekilde bir tek noktası vardır.

Yere en yakın nokta ya iki doğrunun kesişim noktası, ya bir doğru ile tahtanın alt kısmının kesişim noktası, ya da tahtanın sol alt köşesi olabilir. Ayrıca, her nokta sadece bir tek bölge için yere en yakın nokta olabilir. O halde bu tür noktaları sayarsak tüm bölgelerin sayısını da bulmuş oluruz.

$$\underbrace{1}_{\text{sol alt köşe}} + \underbrace{n}_{\text{alttaki noktalar}} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\text{iki doğrunun arakesiti}} = 1 + n + \frac{n!}{(n-2)!2!} = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

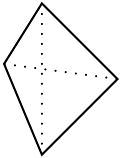
# Mutlu Son Problemi

Mutlu Son Problemi (Happy End Problem): Bu problem György Szekeres ile Ester Klein' in evliliğine yol açtığı için Paul Erdös tarafından bu şekilde adlandırılmıştır.

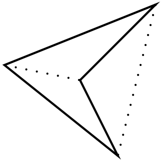
## İddia

Düzlemde herhangi üçü aynı doğru üzerinde olmayan keyfi beş nokta verildiğinde bu noktalardan konveks dörtgen elde edilecek şekilde dört nokta seçilebilir.

Eğer bir dörtgenin köşegenleri dörtgenin içinde kesişiyorsa bu dörtgene konveks dörtgen diyeceğiz.



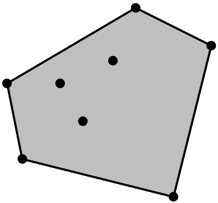
Konveks



Konveks değil

# Konveks Zarf

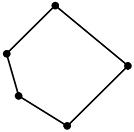
Düzlemde $n$ tane nokta verilmiş olsun. Bu noktaları düzleme çakılmış birer çivi gibi düşünelim ve bu çivilerin etrafını bir lastik bant ile çevirelim. Bu durumda aşağıdaki şekildeki gibi konveks bir çokgen elde ederiz. Bu konveks çokgene verilen noktaların konveks zarfı denir.



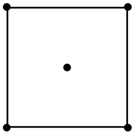
Verilen 8 noktanın konveks zarfı

Şimdi verilen iddianın doğruluğunu araştıralım. Beş nokta verildiğinde bu beş noktanın konveks zarfı

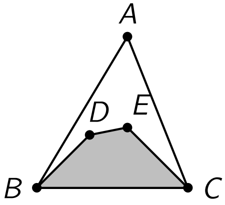
Beşgen olabilir. Bu durumda hangi dört nokta seçilirse seçilsin bir dörtgen elde edilir ve iddia doğru olur.



Dörtgen olabilir. O zaman bu dörtgen istenen dörtgen olarak seçilebilir yine iddia doğru olur.



Üçgen olabilir. Bu üçgenin köşelerini yanda olduğu gibi $A$, $B$ ve $C$ harfleri ile gösterelim. Diğer iki nokta ise üçgenin içinde yer almak zorundadır bu noktaları da $D$ ve $E$ ile gösterelim. $D$ ve $E$ noktalarından geçen doğru üçgeni iki noktada kesecektir (genelliği bozmaksızın üçgenin $AB$ ve $AC$ kenarlarını kestiğini kabul edelim) dolayısıyla $B$, $C$, $D$ ve $E$ noktaları bir konveks dörtgen oluşturur. İddia yine doğrudur.



Konveks dörtgen oluşturmak için beş noktanın yeterli olduğunu gördük. Peki konveks beşgen için durum nedir?

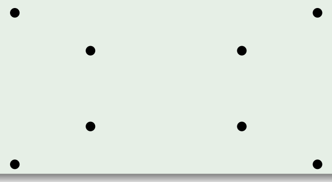
### İddia

Düzlemde herhangi üçü aynı doğru üzerinde olmayan dokuz nokta verildiğinde bu noktalardan konveks beşgen oluşturacak şekilde beş nokta seçilebilir.

Kanıt: Ödev!

### Alıştırma (11.3.1)

Yukarıdaki iddianın 8 nokta için doğru olamayabileceğine bir örnek veriniz.



Acaba konveks altıgen için en az kaç noktaya ihtiyaç vardır?

Herhangi üçü aynı doğru üzerinde olmayan 16 noktanın konveks altıgen oluşturmayabileceği gösterilmiştir. Ancak, 17 nokta ile buna bir ters örnek verilememiştir (aslında 17 noktadan her zaman konveks altıgen oluşturacak şekilde 6 nokta seçilebilir).

Bu durumda akla şu soru gelebilir:

**Soru**

*Düzlemde herhangi üçü aynı doğru üzerinde olmayan en az kaç nokta konveks n–gen oluşturmayı garanti eder?*

Şimdiye kadar ki bilgilerimizi bir tabloda toplarsak,

| $n$–gen | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| Gereken nokta sayısının bir eksiği | 1 | 2 | 4 | 8 | 16? |
| | $\times 2$ | $\times 2$ | $\times 2$ | $\times 2$ | |

### Sanı

Düzlemde herhangi üçü aynı doğru üzerinde olmayan $2^{n-2}$ nokta konveks $n$–gen oluşturmayı garantilemez.

### Soru

*Peki $2^{n-2}$ noktanın bir fazlası garantiler mi?*

Bu sorunun cevabı halen bilinmiyor.