MAT223 AYRIK MATEMATİK

Euler Formülü

12. Bölüm

Doç. Dr. Emrah Akyar

Anadolu Üniversitesi
Fen Fakültesi Matematik Bölümü, ESKİŞEHİR

2011–2012 Güz Dönemi

Saldıraya Uğrayan Gezegen

11. Bölümde

> *Düzlemde bazı özel çizgeler çizildiğinde bu çizgeler düzlemi kaç parçaya ayırır?*

gibi çizge kuramının kavramları ile ifade edilen problemleri ele aldık.

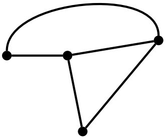
Örneğin, düzlemde çizilen n doğrunun düzlemi kaç bölgeye ayırdığından söz etmiştik. Eğer bu doğruların kesişim noktalarını çizgenin noktaları ve doğru parçalarını da bu noktalar arasındaki kenarlar gibi düşünürsek, bir çizge elde ederiz (yarı doğruları göz ardı ediyoruz).

Bu kesimde düzlemde, kenarları sadece çizgenin noktalarında kesişecek biçimde çizilebilen çizgelerle çalışacağız. Bu tür çizgelere düzlemsel çizge (planar graph) denir. Ayrıca, inceleyeceğimiz çizgeler tekparça olacaktır. Bu tür çizgelerin düzlemde ayırdığı bölgelere *ülkeler* diyelim. Bu durumda ülkelerden biri sınırlı değilken, diğerleri sınırlı olacaktır.

Düzlemsel çizgelerle ilgili önemli sonuçlardan birisi Euler tarafından verilmiştir. Euler, tekparça ve düzlemsel bir çizgenin nokta ve kenar sayısı verildiğinde ülke sayısını veren bir formül ifade etmiştir:

Teorem

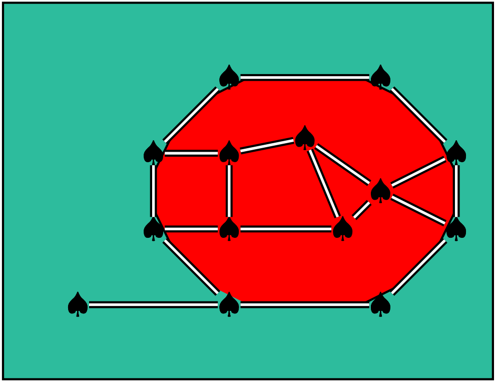
Ülkelerin sayısı + Noktaların sayısı = Kenarların sayısı +2.



- Nokta sayısı: 4
- Kenar sayısı: 5
- Ülke (bölge) sayısı: 3

$$3 + 4 = 5 + 2$$

Kanıtın kolay anlaşılması için küçük bir hikaye ile ilişkilendirelim:



Setler ve gözetleme kuleleri:
14 gözetleme kulesi, 7 bölge (okyanus ile birlikte) ve 19 set.

$$14 + 7 = 19 + 2 \quad \checkmark$$

Verilen tekparça düzlemsel çizge bir tane küçük kıtası bulunan bir gezegendeki deniz seviyesinin altındaki bir bölgenin haritası olsun.

En dışta kalan kısım okyanusu göstersin.

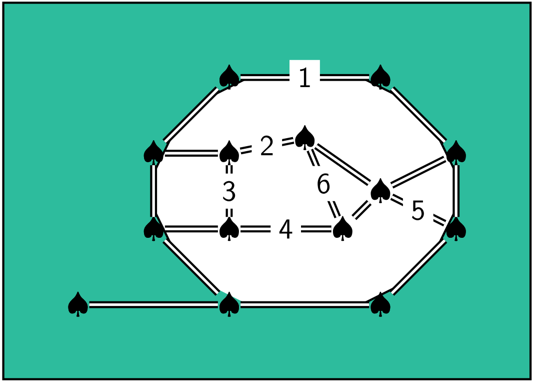
Setler bölgenin okyanusun altında kalmasını engellesin.

Bu setleri çizgenin kenarları olarak görelim.

Çizgenin noktalarını da gözetleme kuleleri olarak düşünelim.

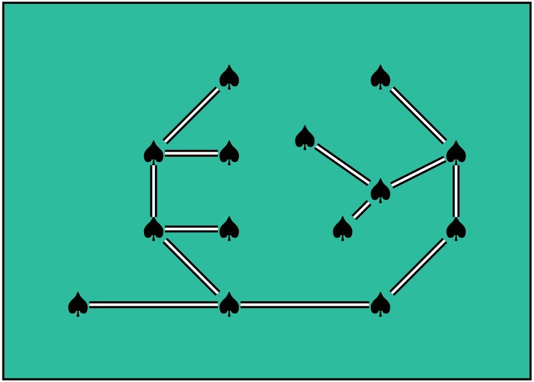
Setler ile sınırlandırılan bölgeler de yaşanan kara parçaları olsun.

- Bir gün düşmanlar (uzaylılar) adaya saldırır.
- Adadakiler kendilerini savunmak için bazı setleri yıkıp, düşmanları deniz suyunda boğmayı düşünürler.
- Ancak, adalarına çok da fazla zarar vermek istemezler. Bu nedenle en az sayıdaki seti yıkmayı planlarlar.
- Bunun için şöyle bir yöntemi uygulamaya karar verirler: Aynı anda sadece bir seti yıkacaklardır ve bir tarafı zaten deniz suyu ile dolu diğer tarafı ise kuru olan baraj öncelikle yıkılacaktır.



6 bölgeyi de doldurmak için 6 set yıkılmalıdır.

Şimdi yıkılan ve sağlam kalan setleri sayalım:
Gözetleme kulelerinin (noktaların) sayısını v, setlerin sayısını (kenarların) e ve okyanusla birlikte bölgelerin sayısını f ile gösterelim. $f - 1$ bölgenin hepsini de suyla doldurmak için $f - 1$ seti yıkmalıyız.



Şimdi de sağlam kalan setleri sayalım:

- Kalan çizge kesinlikle döngü içermez (Tüm bölgeler deniz suyu ile dolduğu için).
- Kalan çizge tekparçadır (Yıkılan tüm setler bir döngünün kenarı olduğu için).

O halde kalan çizge bir *ağaç* olur.

- v noktalı bir ağacın kenar sayısının $v-1$ olduğunu biliyoruz.
- Diğer taraftan $f-1$ set yıkıldı ve $v-1$ set kaldı.
- O zaman tüm kenarların sayısı bu iki sayının toplamı kadardır. Yani $(v-1)+(f-1)=e$ olur. Bu formülü düzenlersek,

$$f+v=e+2$$

Euler formülünü elde ederiz.

Alıştırma (12.1.1)

Herhangi üç köşegeni aynı noktada kesişmeyen bir konveks n–genin köşegenleri bu n–geni kaç parçaya ayırır?

11. Bölümden konveks bir çokgenin köşegenlerinin kesişim noktalarının sayısının $\binom{n}{4}$ olduğunu biliyoruz. Böylece, derecesi 4 olan $\binom{n}{4}$ tane nokta vardır.

Şimdi n–gen in köşe noktalarını düşünelim. Köşe noktaların dereceleri $n-1$ olur. Bir çizgede tüm noktaların dereceleri toplamı kenar sayısının yarısını vereceğinden kenar sayısı

$$e = \frac{1}{2}\left(n \cdot (n-1) + \binom{n}{4} \cdot 4\right)$$

olur.

Euler formülünü kullanırsak, ülkelerin sayısı

$$f + \left(n + \binom{n}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(n \cdot (n-1) + \binom{n}{4} \cdot 4\right) + 2$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} f &= -n - \binom{n}{4} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}}_{\binom{n}{2}} + 2\binom{n}{4} + 2 \\ &= \binom{n}{4} + \binom{n}{2} - n + 2 \end{aligned}$$

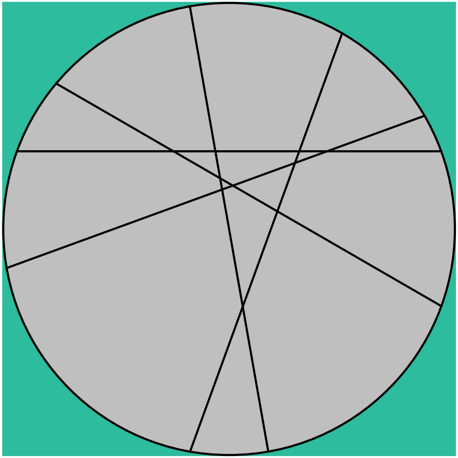
olur. Ancak, en dışardaki ülkeyi saymamalıyız. Buradan cevap,

$$\binom{n}{4} + \binom{4}{2} - n + 1$$

elde edilir.

Alıştırma (12.1.2)

Dairesel bir ada üzerine, ikişer ikişer kesişen ancak, üçü aynı noktada kesişmeyen, deniz kenarından deniz kenarına, düz çizgiler şeklinde n tane baraj inşa edilsin. Adanın kaç parçaya ayrılacağını hesaplayınız.



Yine bölgelerin sayısını f ile gösterelim. Adanın sınırları ile birlikte tüm barajları çizgenin kenarı gibi düşünelim.

- Derecesi 3 olan $2n$ tane nokta vardır (Adanın kenarlarındaki noktalar).
- Derecesi 4 olan noktaların sayısı ise $\binom{n}{2}$ olur (Herhangi iki düz çizgiyi alsak bunlar mutlaka kesişeceği için derecesi 4 olan noktayı elde ederiz).

O halde yine kenarların sayısı dereceler toplamının yarısı olduğundan

$$e = \frac{1}{2}\left[3 \cdot 2n + 4 \cdot \binom{n}{2}\right] = 3n + 2\binom{n}{2}$$

olur. Böylece Euler formülünden

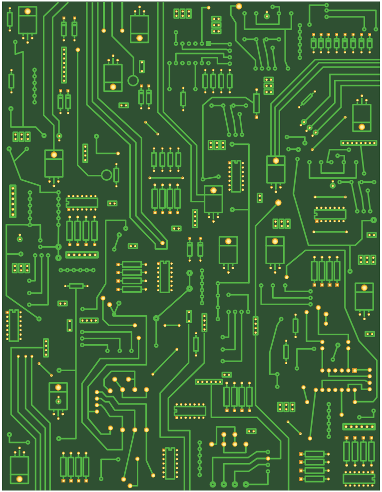
$$f + \underbrace{\left[2n + \binom{n}{2}\right]}_{\text{Noktaların sayısı}} = \underbrace{3n + 2\binom{n}{2}}_{\text{Kenarların sayısı}} + 2$$

elde edilir. f yi yalnız bırakırsak ve okyanusu da çıkarırsak,

$$f = \binom{n}{2} + n + 1$$

Düzlemsel Çizgeler

Dersin başında, kenarları sadece çizgenin noktalarında kesişecek biçimde çizilebilen çizgelere düzlemsel çizge (planar graph) demiştik. Bu tür çizgelerin önemli uygulamaları vardır.



Peki düzlemsel olmayan çizgeler de var mıdır?

Teorem

K_5 tam çizgesi düzlemsel çizge değildir.

Tersine kabul edelim ki, K_5 tamçizgesi düzlemsel çizge olsun.

Yani bu çizgeyi hiçbir kenarı kesişmeyecek şekilde düzlemde çizebildiğimizi kabul edelim.

Bu durumda ülkelerin (bölgelerin) sayısını Euler formülü yardımıyla hesaplayabiliriz:

Çizgenin 5 noktası olduğuna göre ve çizge tam çizge olduğundan $\binom{5}{2} = 10$ kenar vardır.

Buradan ülke sayısı $f + 5 = 10 + 2$ formülünden $f = 7$ çıkar.

Her bir ülkenin en az 3 kenar ile sınırlandırıldığı açıktır. O zaman bu 7 bölgenin her birinin en az 3 kenar ile sınırlandırılabilmesi için en az $\frac{3 \cdot 7}{2} = 10.5$ kenar gereklidir (Bir kenar aynı anda iki ülkenin sınırı olduğu için 2 ye böldük).

Toplam kenar sayısı ise $10 < 10.5$ olduğundan bu mümkün değildir.Çelişki!

O halde varsayımımız hatalı K_5 tam çizgesi düzlemsel olamaz.

Soru

n noktalı düzlemsel bir çizgenin en fazla kaç kenarı olabilir?

Aşağıdaki teorem bu sorunun yanıtını vermektedir.

Teorem

n noktalı düzlemsel bir çizgenin en fazla $3n - 6$ tane kenarı vardır.

Kanıt.

n noktalı düzlemsel çizgenin e tane kenarı, f tane de bölgesi olsun.
O zaman Euler formülünden

$$f + n = e + 2$$

olur.
Diğer taraftan bir bölge en az 3 kenar tarafından belirlenir. Bir başka ifadeyle kenarların sayısı en az $\frac{3f}{2}$ tane olmalıdır.
İki ile bölmemizin nedeni her kenarın iki ayrı bölgenin sınırı olmasıdır.

Buradan $e \geq \frac{3f}{2}$ (kenarların sayısı en az $3f/2$ tanedir) ya da $f \leq \frac{2}{3}e$ olur.

Bu ifadeyi Euler formülünde yazarsak,

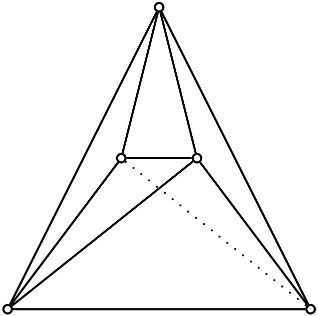
$$e + 2 = f + n \leq \frac{2}{3}e + n \quad \Rightarrow \quad e \leq 3n - 6$$

olur. □

Alıştırma (12.2.1)

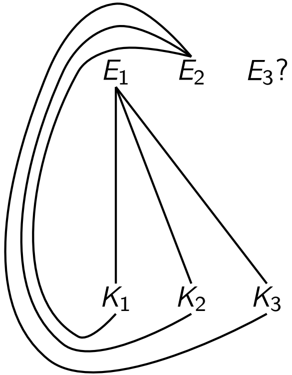
Acaba K_5 tam çizgesinin bir kenarı çıkarılsa kalan çizge düzlemsel olur mu?

Evet!



Alıştırma (12.2.2)

Üç tane ev ve üç tane de su kuyusunun var olduğunu düşünelim. Her evden her bir su kuyusuna birbiri ile kesişmeyen birer yol yapılmak isteniyor. Bunun mümkün olup olmadığını açıklayınız.



Probleme karşılık gelen çizge $K_{3,3}$ iki kümeli tam çizgesidir.

Tanım

$K_{r,s}$ iki kümeli bir çizge olsun ve çizgenin bu iki kümesi $|A| = r$ ve $|B| = s$ olmak üzere A ve B ile gösterilsin. Eğer her $a \in A$ ve her $b \in B$ için ab çizgenin bir kenarı ise $K_{r,s}$ çizgesine iki kümeli tamçizge denir.

$K_{3,3}$ çizgesinin kenar sayısının 9 olduğu açıktır.

Eğer son teoreme dayanarak "6 noktalı bu çizge için $3n - 6 = 3 \cdot 6 - 6 = 12$ ve $9 < 12$ olduğundan bu çizge düzlemsel çizgedir" yani, istenen şekilde yollar çizilebilir derseniz hata yaparsınız.

Son teorem çizge düzlemsel ise kenar sayısının en fazla $3n - 6$ olduğunu ifade etmektedir. (Denk olarak $3n - 6$ dan daha fazla kenarı varsa düzlemsel değildir.)

Kenar sayısı $3n - 6$ dan daha az olan çizgeler için bu teorem yardımıyla bir şey söylenemez.

Sorunun çözümünü K_5 tam çizgesinin düzlemsel olmadığını kanıtladığımız yöntemle yapabiliriz.

Kabul edelim ki, "probleme karşılık gelen 6 noktalı ve 9 kenarlı bu çizge düzlemsel çizge olsun."

O zaman Euler formülü gereği,

$$9 + 2 - 6 = 5$$

tane bölge oluşur. Çizge iki kümeli çizge olduğundan bu çizgedeki tüm bölgeler en az 4 kenar ile sınırlandırılır (Kontrol ediniz!).

Dolayısıyla bu bölgeleri oluşturabilmek için en az $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ tane kenar gereklidir. Oysa, çizgenin 9 kenarı var. Çelişki!

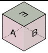
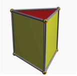
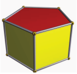
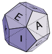
O halde varsayımımız hatalıdır. Probleme karşılık gelen çizge düzlemsel olamaz.

Çok yüzlüler (polyhedra) için Euler Formülü

Artık ülkeleri neden anlamsız görünen f sembolü ile gösterdiğimizi açıklayabiliriz.

f simgesi **f**ace (yüz) sözcüğünün baş harfinden gelmektedir. Euler bu formülü elde ettiği sırada küp, piramit, prizma gibi çok yüzlülerle çalışıyordu.

Şimdi bazı çok yüzlülerin yüzlerini, kenarlarını ve köşe noktalarını sayalım:

	Çok yüzlü	Nokta S.	Kenar S.	Yüz S.
	Küp	8	12	6
	Dört yüzlü (tetrahedron)	4	6	4
	Üçgen prizma	6	9	5
	Beşgen prizma	10	15	7
	Beşgen piramit	6	10	6
	On iki yüzlü (dodecahedron)	20	30	12
	Yirmi yüzlü (icosahedron)	12	30	20

Eğer tablodaki sayılara dikkat edilecek olursa,

$$\text{Yüzlerin sayısı} + \text{ Köşe noktaların sayısı} = \text{Kenarların sayısı} + 2$$

olduğu hemen görülür.

Bu formül Euler formülüne benzemektedir. Sadece noktalar yerine köşe noktaları, ülke yerine de yüz sözcüğü kullanılmıştır.

Formüllerin aynı çıkması tesadüf değildir.

Şimdi bu çok yüzlülerin esnek bir malzemeden yapıldığını düşünelim ve yüzlerinin birinden bir delik açıp şişirelim.

Bu durumda ortaya küreye benzer bir obje çıkar. Ancak, bu her zaman geçerli olmayabilir. Örneğin, bir çerçeve şeklindeki obje şişirilirse küre değil, tor elde edilir.

Şimdi, şişirilince küreye benzeyen çok yüzlüyü delik açtığımız yüzeyinden deliği genişleterek düzleme yayalım. Eğer başlangıçta çok yüzlünün köşe noktalarını ve kenarlarını bir kalem çizersek, düzlemde bir düzlemsel çizge elde ederiz.

Böylece düzlemsel çizgeler için elde edilen Euler formülünün bu tür (deliksiz) çok yüzlüler için de geçerli olduğu ortaya çıkar.