MAT223 AYRIK MATEMATİK

Binom Katsayıları ve Pascal Üçgeni
3. Bölüm

Doç. Dr. Emrah Akyar

Anadolu Üniversitesi
Fen Fakültesi Matematik Bölümü, ESKİŞEHİR

2011–2012 Güz Dönemi

Binom Teoremi

1. Derste $\binom{n}{k}$ sayılarına binom katsayıları denildiğini ifade etmiştik. Şimdi bu adlandırmanın nereden kaynaklandığını açıklayalım.

Aşağıdaki özdeşlikler hepimizin iyi bildiği özdeşliklerdir.

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4
\end{aligned}
$$

Varsayım

Bu eşitliklerin sağ tarafında yer alan katsayılar $\binom{n}{k}$ sayılarıdır.

Gerçekten de,

$$(x+y)^5 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

ifadesinin açılımını düşünelim.

Bu ifadenin açılımında ortaya çıkan terimler, *her bir çarpandaki iki terimden birinin seçilip, birbirleriyle çarpılması ile elde edilir*.

Örneğin, x^2y^3 ü elde etmek için, bu beş çarpanın ikisinden "x" i (dolayısıyla da üçünden "y" yi) seçmemiz gerekir.

Bu beş çarpanın üçünden ise "y" yi $\binom{5}{3}$ farklı şekilde seçebiliriz. O halde ifadenin açılımı

$$(x+y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + \binom{5}{5}y$$

olacaktır.

Binom Teoremi

Bu anlatılan yöntem genelleştirilecek olursa, Binom Teoremi adı verilen aşağıdaki teorem elde edilir.

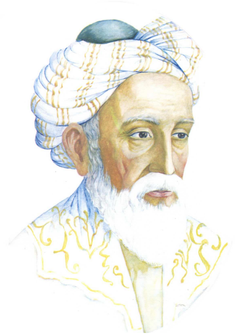
Teorem (Binom Teoremi)

$(x+y)^n$ ifadesinin açılımında $x^{n-k}y^k$ nin katsayısı $\binom{n}{k}$ olur. Bir başka ifadeyle

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k-1}xy^{n-1} \\ &\quad + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\end{aligned}$$

olur.

Bu önemli özdeşlik ünlü Farslı şair, yazar, matematikçi, filozof ve astronom Ömer Hayyam tarafından keşfedilmiştir.



Ömer Hayyam (1044?–1123?)

Sevgili, seninle ben pergel gibiyiz;
İki başımız var, bir tek bedenimiz.
Ne kadar dönersem döneyim çevrende
Er geç baş başa verecek değil miyiz?
Ömer HAYYAM

Binom sözcüğü iki terim içeren ifadeler için kullanılan Yunanca "binome" sözcüğünden gelmektedir.

Şimdi Binom Teoreminin kanıtını verelim (Alıştırma 3.1.1):

Kanıtı *tümevarım yöntemini* kullanarak yapalım.

- $n = 0$ için $(x+y)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{0-k} y^k$ olur.
- $n = 1$ için $(x+y)^1 = (x+y) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k$ olur.
- $n = m$ için eşit geçerli olsun (tümevarım hipotezi).
- $n = m+1$ için eşitliğin geçerli olduğunu gösterelim.

Tümevarım hipotezini kullanırsak,

$$\begin{aligned}(x+y)^{m+1} &= (x+y)(x+y)^m \\ &= (x+y)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k}y^k \\ &= x\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k}y^k + y\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k}y^k\end{aligned}$$

olur. x ve y yi toplamların içine katarsak,

$$(x+y)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k}y^{k+1}$$

elde edilir.

Birinci toplamdan $k = 0$ durumunu ayırırsak,

$$(x+y)^{m+1} = x^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} y^{k+1}$$

olur. İkinci toplamda $k = j - 1$ alırsak,

$$(x+y)^{m+1} = x^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k+1} y^k + \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{j-1} x^{m-j+1} y^j$$

bulunur. İkinci toplamın da son terimini ($j = m + 1$ durumunu) ayırırsak,

$$(x+y)^{m+1} = x^{m+1} + y^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k+1} y^k + \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j-1} x^{m-j+1} y^j$$

elde edilir.

Şimdi iki toplamı birleştirirsek (aslında $x^{m-k+1}y^k$ parantezine alırsak)

$$(x+y)^{m+1} = x^{m+1} + y^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left[\left\{ \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right\} x^{m-k+1} y^k \right]$$

olur. 1. Derste $\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k}$ olduğunu kanıtlamıştık. O halde

$$\begin{aligned} (x+y)^{m+1} &= x^{m+1} + y^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left[\binom{m+1}{k} x^{m-k+1} y^k \right] \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} \left[\binom{m+1}{k} x^{m-k+1} y^k \right] \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız.

Tümevarım yöntemi gereği eşitlik her n doğal sayısı için doğru olacaktır.

Örnek

1. Derste

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

özdeşliğini kanıtlamıştık.

Bu özdeşliği “Binom Teoremini’ kullanarak da kanıtlayabiliriz.

$(x+y)^n$ ifadesinin açılımında $x=y=1$ alınırsa özdeşlik kolayca elde edilir.

Hediyeleri Dağıtmak

Soru

Sınıfça aldığınız n farklı hediyeyi çocuk esirgeme kurumuna gidip buradaki k çocuğa dağıtmak istiyorsunuz.

Hangi çocuğun kaç tane hediye alabileceği kurumun yetkilileri tarafından önceden sizlere bildirilmiş. Bazı çocuklar hediye almayabilir (Hediye sayısı çocuk sayısından az olabilir). Hediye sayısı çocuk sayısından fazla olsa bile bazı çocuklar yine de hediye alamayabilir.

Bu dağıtımı kaç farklı şekilde yapabilirsiniz?

- n : *hediye sayısı*
- k : *çocuk sayısı*
- n_k : k. *çocuğun alacağı hediye sayısı* $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n)$

- **1. Yöntem:** n hediyenin hepsini yanyana dizeriz. Sonra birinci çocuğu çağırır soldan n_1 tane hediye almasını isteriz. Daha sonra (hediye kaldıysa) ikinci çocuğu çağırır soldan n_2 tane hediye almasını isteriz. Bu şekilde devam edilerek k. çocuğu çağırır kalan n_k hediye almasını isteriz. Böylece bütün hediyeler dağıtılmış olur.
  Peki bu işlem kaç farklı şekilde yapılabilir?

  n hediyeyi $n!$ farklı şekilde sıralayabileceğimizi biliyoruz.

  Diğer taraftan da k. çocuğun aldığı n_k hediyenin kendi içinde sırasının değişmesinin bir şeyi değiştirmeyeceği düşünülürse cevap

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

  olur.

- **2. Yöntem:** Önce n tane hediye içerisinden n_1 hediye seçip birinci çocuğa verelim. Sonra kalan $n - n_1$ hediye içerisinden n_2 hediye seçip ikinci çocuğa verelim. Bu şekilde tüm hediyeleri çocuklara dağıtalım. Bu işlemi kaç farklı şekilde yapabiliriz?

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$$
$$=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n-n_1-n_2-\cdots n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\cdots-n_k)!}$$
$$=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Her iki yöntemde de elde edilen sonuç aynıdır.

Anagramlar

Anagram, bir sözcüğün harflerinin değişik sırayla başka sözcükler oluşturmasıdır.

KOMBİNATORİK

KOMİK BARİTON, KİRA ON TOMBİK, ANTİKOR KOMBİ, KİM O KİBAR TON, BİN KOMİK ROTA, BİN MİKRO TOKA, MİKROBİK NOTA, MİKRO BOTANİK, KİRA BİN KOMOT, İKİ BOKTAN ROM

KOMBİNATORİK sözcüğünden kaç farklı anlamlı ya da anlamsız sözcük oluşturulabilir? (Bu sorunun cevabını aslında 1. derste vermiştik. Şimdi hediyelerin dağıtım problemi gibi düşünerek cevap vermeye çalışacağız)

n elemanlı bir sözcükten elde edilecek anagramların sayısını bulmaya çalışalım. Elbette bu sayı sözcük içerisinde yer alan harflerin tekrar sayısına bağımlıdır.

k harften oluşan bir alfabe düşünelim (A,B,C,. . . ,Z). Verilen sözcükte "A" harfi n_1 kez ($n_1 = 0$ olabilir), "B" harfi n_2 kez ve benzer olarak "Z" harfi de n_k kez tekrar etsin. Açıktır ki, $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ olur.
Şimdi verilen sözcük ile bir anagram oluşturmak için "A" harfine n_1 pozisyon, "B" harfi için n_2 pozisyon ve bu şekilde devam edilirse "Z" harfi için de n_k pozisyonun seçilmesi gerekir.

Öyleyse bu problem aslında n farklı hediyenin k tane çocuğa dağılım probleminden başka bir şey değildir.

Önceki bölümde de bu şekildeki farklı dağılımların sayısının

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

olduğunu biliyoruz.

Paranın Dağıtımı

Bu sefer çocuklara hediye yerine para dağıtalım.

Soru

Acaba n tane özdeş madeni 1TL, k tane çocuğa kaç farklı şekilde dağıtılabilir (Bazı çocuklar hiç para almayabilir)?

Örneğin, 10 tane 1TL yi 4 çocuğa kaç farklı şekilde paylaştırabiliriz?

- $\underbrace{\bigcirc}_{\text{1. çocuk}} \mid \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{2. çocuk}} \mid \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{3. çocuk}} \mid \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{4. çocuk}}$
- $\bigcirc\bigcirc \mid \bigcirc \mid \bigcirc\bigcirc\bigcirc \mid \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$
- $\mid \bigcirc\bigcirc \mid \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc \mid \bigcirc$ (1. çocuk para almıyor)
- $\bigcirc\bigcirc\bigcirc \mid\mid \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc \mid \bigcirc\bigcirc\bigcirc$ (2. çocuk para almıyor)
- $\vdots$

O halde 10 adet 1TL nin 4 çocuğa dağıtılması demek

$$\underbrace{\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{10 \text{ tane}} \quad \underbrace{|||}_{3 \text{ tane}}}_{13 \text{ tane}}$$

simgelerinin dizilimi demektir. Bu simgelerin farklı dizilimlerinin sayısının da

$$\frac{(10+4-1)!}{10!(4-1)!} = \binom{10+4-1}{4-1}$$

olduğunu biliyoruz. O halde genelleyecek olursak, n adet 1TL k tane çocuğa

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

farklı biçimde dağıtılabilir.

Soru

Peki her çocuğun en az 1TL alma koşulunu koyarsak, bu durumda n adet 1TL k tane çocuğa kaç farklı biçimde dağıtılır?

Bu sorunun cevabı oldukça kolaydır. Önce her bir çocuğa 1TL veririz ve kalan $n-k$ adet 1TL yi ise k çocuğa az önce verdiğimiz yöntemle dağıtırız. $n-k$ tane 1TL nin ise k tane çocuğa

$$\binom{(n-k)+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$$

farklı şekilde dağıtılabileceğini az önce gördük.

Böylece aşağıdaki teoremleri ifade edebiliriz.

Teorem

n tane özdeş objenin k tane farklı kutuya, her kutuda en az bir obje olacak şekildeki farklı dağılımlarının sayısı

$$\binom{n-1}{k-1}$$

olur.

Teorem

n tane özdeş objenin k tane farklı kutuya farklı dağılımlarının sayısı

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

olur.

Artık Binom Teoreminin genelleştirilmişi olan Multinomial Teoremini verebiliriz.

Teorem (Multinomial Teoremi)

$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$ ifadesinin açılımında $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \ldots x_k^{n_k}$ ifadesinin katsayısı

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \cdots n_k!}$$

olur. Burada $i = 1, 2, \ldots, k$ için $0 \leq n_i < n$ ve $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ dir.

Çoğu zaman

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \cdots n_k!} = \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

gösterimi de kullanılır ve bu sayılara multinomial katsayısı denir.

Kanıt.

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \cdots (x_1 + x_2 + \cdots + x_k)}_{n \text{ tane}}$$

açılımında $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \ldots x_k^{n_k}$ ifadesini elde etmek için sağ taraftaki n tane çarpanın n_1 tanesinden x_1, geriye kalan $n - n_1$ tanesinden x_2 ve böyle devam edilirse geriye kalan $n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1}$ tanesinden x_k nin seçilmesi gerekir.

Bu ise hediyelerin dağıtımında sözünü ettiğimiz ikinci yöntemden başka bir şey değildir.

Böylece kanıt biter. $\square$

Pascal Üçgeni

Blaise Pascal (1623–1662) Fransız matematikçi, fizikçi ve düşünür.

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \; \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \; \binom{2}{1} \; \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \; \binom{3}{1} \; \binom{3}{2} \; \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \; \binom{4}{1} \; \binom{4}{2} \; \binom{4}{3} \; \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \; \binom{5}{1} \; \binom{5}{2} \; \binom{5}{3} \; \binom{5}{4} \; \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \; \binom{6}{1} \; \binom{6}{2} \; \binom{6}{3} \; \binom{6}{4} \; \binom{6}{5} \; \binom{6}{6}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
\end{array}
$$

Pascal Üçgeninin Özdeşlikleri

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

özdeşliğini 1. Derste kanıtlamıştık. Bu özdeşlik yardımıyla

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} \\
&= \binom{n-1}{0} - \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right] \\
&+ \cdots + (-1)^{n-1}\left[\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1}\right] + (-1)^n \binom{n-1}{n-1} = 0
\end{aligned}$$

yani

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

özdeşliği elde edilir.

Yukarıdaki işlemlerden toplam n ye kadar değil de bir k sayısına ($k < n$) devam ettiğinde

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^k \binom{n-1}{k}$$

olacağı kolayca görülür.

Şimdi Pascal üçgeninin ilk bir kaç satırındaki elemanların karelerinin toplamına bakalım:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&\\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&\\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&\\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&\\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&\\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
1^2 &=& 1\\
1^2+1^2 &=& 2\\
1^2+2^2+1^2 &=& 6\\
1^2+3^2+3^2+1^2 &=& 20\\
1^2+4^2+6^2+4^2+1^2 &=& 70\\
\vdots &&
\end{array}
$$

Varsayım: $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n-1}^2+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$

- Açıktır ki, eşitliğin sağ tarafı $2n$ elemanlı bir kümenin n elemanlı alt kümelerinin sayısıdır.
- Ancak eşitliğin sol tarafı çok açık değil! $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ kümesinin $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinden tam olarak k tane eleman içeren n elemanlı alt kümelerin sayısını düşünelim.
- S kümesinin böyle bir alt kümesini seçmek için önce $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinden k tane eleman alır, sonra kalan $n - k$ elemanı ise $\{n + 1, n + 2, \ldots, 2n\}$ kümesinden alırız.
- O halde böyle bir alt küme

$$\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$$

farklı biçimde seçilebilir.
- O zaman eşitliğin sol tarafındaki her bir terim $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ kümesinin $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinden tam olarak $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ tane eleman içeren n elemanlı alt kümelerin sayısıdır. Yani, $2n$ elemanlı S kümesinin n elemanlı tüm alt kümelerinin sayısıdır.

Şimdi de Pascal üçgeninde diagonal toplamlara bakalım:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}
$$

Varsayım

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

Kanıtı k üzerinden tümevarım yöntemini kullanarak yapalım:

- $k = 0$ için $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ olduğundan eşitlik doğrudur. $k = 1$ için $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} = 1 + n + 1 = n + 2 = \binom{n+1+1}{1}$ olduğundan eşitlik doğrudur ($k = 1$ durumunun incelenmesine aslında gerek yoktu).
- k için eşitlik doğru olsun.
- $k + 1$ için de eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

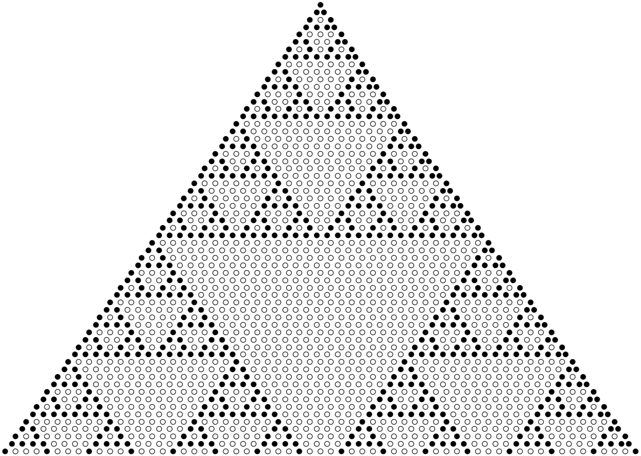
$$\underbrace{\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k}}_{\text{tümevarım hipotezinden } \binom{n+k+1}{k}} + \binom{n+k+1}{k+1}$$

$$= \binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+1}{k+1}$$

$$= \binom{n+k+2}{k+1}$$

O halde tümevarım yöntemi gereği her k için eşitlik doğrudur.

Pascal üçgeninde yer alan tek sayıları "•" çift sayıları ise "○" sembolü ile değiştirirsek



Sierpinski üçgenini elde ederiz.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \longleftrightarrow 11^0 = 1 \\ \longleftrightarrow 11^1 = 11 \\ \longleftrightarrow 11^2 = 121 \\ \longleftrightarrow 11^3 = 1331 \\ \longleftrightarrow 11^4 = 14641 \\ \longleftrightarrow ? \\ \end{array}$$

$$\begin{aligned} 11^3 = (10+1)^3 &= \binom{3}{0}10^3 1^0 + \binom{3}{1}10^2 1^1 + \binom{3}{2}10^1 1^2 + \binom{3}{3}10^0 1^3 \\ &= \binom{3}{0}10^3 \binom{3}{1}10^2 + \binom{3}{2}10^1 + \binom{3}{3}10^0 \\ &= 1 \times 1000 + 3 \times 100 + 3 \times 10 + 1 \end{aligned}$$

Elbette $\binom{n}{k} > 9$ olduğunda yukarıdaki kural geçerli olmayacaktır. Örneğin, $11^5 = 161051 \neq 15101051$.

Kuş Bakışı Pascal Üçgeni

Pascal üçgenine ilk bakışta görünen özellikler aşağıdakilerdir.

- Simetrik!
- n çift ise n. satırda bir tek orta eleman var, n tek ise iki tane eşit orta eleman var.
- Keyfi bir satırda değerler ortaya kadar artıyor, sonra azalıyor.

Bu son özelliği kanıtlayalım.

Pascal üçgeninin n. satırındaki iki ardışık elemanı karşılaştıralım.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &\quad ? \quad \binom{n}{k+1} \\
\frac{n!}{k!(n-k)!} &\quad ? \quad \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
\frac{1}{n-k} &\quad ? \quad \frac{1}{k+1} \\
1 &\quad ? \quad \frac{n-k}{k+1} \\
k+1 &\quad ? \quad n-k \\
2k &\quad ? \quad n-1 \\
k &\quad ? \quad \frac{n-1}{2}
\end{aligned}$$

O halde,

$$k < \frac{n-1}{2} \text{ ise } \binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$$

$$k = \frac{n-1}{2} \text{ ise } \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$$

$$k > \frac{n-1}{2} \text{ ise } \binom{n}{k} > \binom{n}{k+1}$$

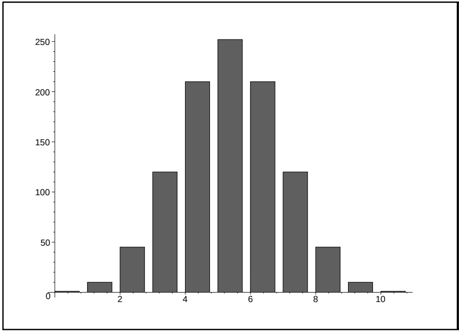
olur.

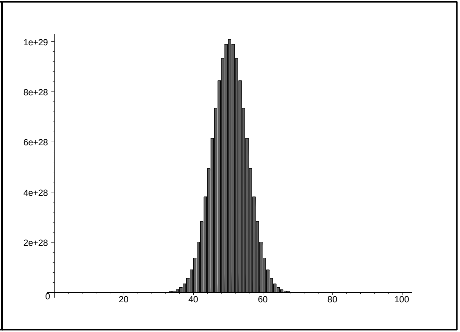
Şimdi Pascal üçgeninin herhangi bir satırındaki ardışık elemanların birbirinden ne kadar farklı olduğunu inceleyelim.

- Soldan ikinci eleman ilk elemanın n katıdır.
- Üçüncü eleman ise ikinci elemanın $\frac{n-1}{2}$ katıdır.
- Genel olarak,

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{k+1}$$

olduğundan $k+1$. eleman k. elemanın $\frac{n-k}{k+1}$ katıdır.





Şekil: $n = 10$ ve $n = 100$ için Pascal üçgeninin n. satırındaki elemanlar için grafikler

Az önceki grafiklerden aşağıdaki yorumlar yapılabilir:

- En büyük sayı, n büyüdükçe çok fazla büyüyor.
- Sayılar ortaya kadar büyüyüp sonra azalmakla kalmıyor, ilk ve son rakamlara göre ciddi anlamda farklı. Örneğin, $n = 100$ için yukarıdaki grafikte sadece $\binom{100}{25}, \binom{100}{26}, \ldots, \binom{100}{75}$ sayılarına karşılık gelen veriler görüntülenebilmiştir.
- n nin farklı değerlerine karşılık elde edilecek grafikler benzerdir.

Bu gözlemlere şimdi daha detaylı bakalım. Bunun için işlemlerde kolaylık olması bakımından n sayısını genelliği bozmaksızın *çift sayı* olarak kabul edeceğiz.

Pascal üçgeninin n. satırındaki en büyük sayının ortadaki eleman $\binom{n}{n/2}$ olduğunu diğer sayıların ise daha küçük olduğunu biliyoruz.
Peki bu sayı ne kadar büyük bir sayı?
Bu sayı için akla gelen ilk üst sınır 2^n olur (Çünkü n. satırdaki tüm sayıların toplamı). O halde

$$\binom{n}{n/2} < 2^n$$

olur.
n. satırdaki en büyük sayı bu satırdaki tüm sayıların aritmetik ortalamasından daha büyük veya eşit olacağından

$$\binom{n}{n/2} > \frac{2^n}{n+1}$$

alt sınırını elde ederiz.

$$\frac{2^n}{n+1} < \binom{n}{n/2} < 2^n$$

değerlendirmesi ne kadar iyi bir değerlendirme? Örneğin, bu değerlendirme yardımıyla $\binom{500}{250}$ sayısının kaç basamaklı olduğunu bulmaya çalışalım.

$$\frac{2^{500}}{501} < \binom{500}{250} < 2^{500}$$

eşitsizliğinin 10 tabanında logaritmasını alırsak,

$$147.815 \approx 500 \log 2 - \log 501 < \log \binom{500}{250} < 500 \log 2 \approx 150.514$$

olur.O halde 1. Dersten sayının basamak sayısının 148 ile 151 arasında olduğunu söyleyebiliriz (gerçekte 150 basamaklı). Oldukça iyi!

$\binom{n}{n/2}$ sayısı için daha iyi bir değerlendirme vermek istiyorsak Stirling formülünü kullanabiliriz.

$$\binom{n}{n/2} = \frac{n!}{(n/2)!(n-n/2)!} = \frac{n!}{(n/2)!(n/2)!}$$

ve

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

olduğundan

$$(n/2)! \sim \sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2}$$

olur. O halde

$$\binom{n}{n/2} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2}\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2}} = \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\pi n\left(\frac{n}{2e}\right)^n} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}2^n$$

olur.

Artık,

- Pascal üçgeninin n. satırındaki en büyük elemanın ortadaki eleman olduğunu iyi biliyoruz.
- Ayrıca bu elemanın ne kadar büyük bir sayı olduğunu da inceledik.
- Hatta ortadaki elemandan sağa ya da sola doğru gidersek sayıların azalacağını da biliyoruz.

Peki bu sayılar hangi hızda azalır?

Pascal üçgeninin 55. satırındaki ilk birkaç eleman:

1, 55, 1485, 26235, 341055, 3478761, 28989675, 202927725, 1217566350, 6358402050, 29248649430,...

Ardışık elemanların oranları:

55., 27., 17.67, 13., 10.20, 8.333, 7., 6., 5.222, 4.600, 4.091, 3.667, 3.308, 3., 2.733, 2.500, 2.294, 2.111, 1.947, 1.800, 1.667, 1.545, 1.435, 1.333, 1.240, 1.154, 1.074, 1., .9310, .8667,...

Sayılar artarken oran azalıyor. Ortadaki elemandan sonra ise oran 1 den küçük olarak azalmaya devam ediyor. Gerçekten de daha önce de hesapladığımız gibi ardışık iki elemanın oranını

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} - 1$$

şeklinde yazarsak, k arttığında bu oranın azalacağını hemen söyleyebiliriz.

Kartal Bakışı Pascal Üçgeni

Bu bölümde de genelliği bozmaksızın yine n sayısının çift olduğunu kabul edeceğiz. Bu durumda pozitif bir m tamsayısı için $n = 2m$ alabiliriz.

Pascal üçgeninin n. satırının ortasında yer alan ve bu satırdaki en büyük sayı olan $\binom{2m}{m}$ sayısı ile bu sayıdan t kadar sağda ya da solda olan binom katsayısını karşılaştırıldığında aşağıdaki formül elde edilir:

$$\frac{\binom{2m}{m}}{\binom{2m}{m-t}} \approx e^{-t^2/m}$$

Bu formül bize yapılan hatanın ne ölçüde olduğunu söylemez. Ancak aşağıdaki değerlendirme oldukça kullanışlıdır.

$$e^{-t^2/(m-t+1)} \leq \frac{\binom{2m}{m}}{\binom{2m}{m-t}} \leq e^{-t^2/(m-t)}$$

Daha iyi değerlendirmeler de verilebilir.

Alıştırmalar

Alıştırma

7 sorunun bulunduğu bir sınav kağıdı her soru beş ve beşin tam katları ile puanlanacak olursa kaç farklı şekilde puanlandırılabilir? (*Her soru mutlaka puanlandırılmalıdır ve sınav 100 üzerinden değerlendirilecektir.*)

Her bir 5 puanı bir obje olarak düşünecek olursak soru, 20 $(100/5 = 20)$ özdeş objenin 7 kutuya her kutuya en az 1 obje gelecek şekilde dağılımı problemine dönüşür. Bu sayının da

$$\binom{20-1}{7-1} = 27\,132$$

olduğunu biliyoruz.

Alıştırma

Farklı 6 kutuya 8 top, ilk iki kutuda *toplamda en fazla 4* top olmak koşuluyla

1. toplar özdeş iken,
2. toplar birbirinden farklı iken

kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?

- *Tam olarak* k $(0 \leq k \leq 8)$ tane özdeş top ilk iki kutuya

$$\binom{k+2-1}{2-1} = \binom{k+1}{1}$$

farklı şekilde, geriye kalan $8-k$ top ise diğer 4 kutuya

$$\binom{(8-k)+4-1}{4-1} = \binom{11-k}{3}$$

farklı şekilde yerleştirildiğinden, ilk iki kutuda tam olarak k tane top olacak şekilde 8 özdeş top 6 kutuya

$$\binom{k+1}{1}\binom{11-k}{3}$$

farklı şekilde yerleştirilebilir. Buna göre $k = 0, 1, 2, 3, 4$ durumları için

$$\sum_{k=0}^{4} \binom{k+1}{1}\binom{11-k}{3} = 1\,056$$

elde edilir.

- Yine ilk iki kutuda toplamda en fazla k ayırt edilebilir top için hesaplayalım.

  Bunun için ilk iki kutuda hangi (ayırdedilebilir/özdeş olmayan) k topun bulunacağını belirlemeliyiz. Bu sayı ise

$$\underbrace{\binom{8}{k}}_{\text{ilk iki kutu için 8 toptan k tanesi}} \cdot \underbrace{2^k}_{\text{k topun her birisi için iki durum söz konusu (1. kutu, 2. kutu)}}$$

  olur.

  Geriye kalan $8-k$ özdeş olmayan top ise kalan 4 kutuya

$$4^{8-k}$$

  farklı şekilde yerleştirilecektir.

O halde ilk iki kutuda toplamda tam olarak k özdeş olmayan top bulunacak şekilde 8 top,

$$\binom{8}{k} 2^k 4^{8-k}$$

farklı şekilde 6 kutuya yerleştirilebilir.

Yine $k = 0, 1, 2, 3, 4$ durumlarını ayrı ayrı toplarsak, sonuç

$$\sum_{k=0}^{4} \binom{8}{k} 2^k 4^{8-k} = 1\,531\,904$$

bulunur.

Alıştırma

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ denkleminin

$$2 \leq x_1 \leq 6, \quad -2 \leq x_2 \leq 1, \quad 0 \leq x_3 \leq 6, \quad 3 \leq x_4 \leq 8$$

koşulları altında tamsayılar kümesinde kaç farklı çözümü vardır?

$y_1 = x_1 - 2$, $y_2 = x_2 + 2$, $y_3 = x_3$, ve $y_4 = x_4 - 3$ değişken değişimi yaparsak problem

$$0 \leq y_1 \leq 4, \quad 0 \leq y_2 \leq 3, \quad 0 \leq y_3 \leq 6, \quad 0 \leq y_4 \leq 5$$

koşulları altında

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 12$$

denkleminin tamsayılar kümesindeki çözümlerinin sayısını bulma problemine dönüşür.

Denklemin negatif olmayan tüm çözümlerinin kümesini S ile gösterecek olursak,

$$|S| = \binom{12+4-1}{4-1} = \binom{15}{3} = 455$$

olur.
c_1 ile $y_1 \geq 5$ koşulunu, c_2 ile $y_2 \geq 4$ koşulunu, c_3 ile $y_3 \geq 7$ koşulunu ve c_4 ile ise $y_4 \geq 6$ koşulunu sağlayan çözümleri gösterelim.

Bu durumda

$$\begin{aligned}
|c_1| &= \tbinom{(12-5)+4-1}{4-1} = \tbinom{10}{3} = 120\\
|c_2| &= \tbinom{(12-4)+4-1}{4-1} = \tbinom{11}{3} = 165\\
|c_3| &= \tbinom{(12-7)+4-1}{4-1} = \tbinom{8}{3} = 56\\
|c_4| &= \tbinom{(12-6)+4-1}{4-1} = \tbinom{9}{3} = 84
\end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
|c_1 c_2| &= \binom{(12-9)+4-1}{4-1} = \binom{6}{3} = 20 \\
|c_1 c_3| &= \binom{(12-12)+4-1}{4-1} = \binom{3}{3} = 1 \\
|c_1 c_4| &= \binom{(12-11)+4-1}{4-1} = \binom{4}{3} = 4 \\
|c_2 c_3| &= \binom{(12-11)+4-1}{4-1} = \binom{4}{3} = 4 \\
|c_2 c_4| &= \binom{(12-10)+4-1}{4-1} = \binom{5}{3} = 10 \\
|c_3 c_4| &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak

$$|c_1 c_2 c_3| = |c_1 c_2 c_4| = |c_2 c_3 c_4| = |c_1 c_2 c_3 c_4| = 0$$

olur. O halde İçerme–Dışlama prensibinden,

$$\begin{aligned}
|\overline{c_1 c_2 c_3 c_4}| &= |S| - (|c_1| + |c_2| + |c_3| + |c_4|) + \\
&\quad (|c_1 c_2| + |c_1 c_3| + |c_1 c_4| + |c_2 c_3| + |c_2 c_4| + |c_3 c_4|) \\
&= 455 - (120 + 165 + 56 + 84) + (20 + 1 + 4 + 4 + 10) = 69
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Alıştırma

$(2w - x + 3y + z - 2)^{12}$ ifadesinin açılımında

1. Kaç terim vardır?
2. $w^2x^2y^2z^2$ teriminin katsayısı nedir?

Multinomial Teoreminden

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

olduğunu biliyoruz.

Buna göre,

1. Terim sayısını bulmak için $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 12$ denkleminin çözümlerinin sayısını bulmalıyız. Bu sayının ise

$$\binom{12+5-1}{5-1} = \binom{16}{4} = 1820$$

olduğunu biliyoruz.

2. Yukarıdaki formülden $w^2x^2y^2z^2$ teriminin katsayısını

$$\binom{12}{2,2,2,2,4}(2)^2(-1)^2(3)^2(1)^2(-2)^4 = 718\,502\,400$$

elde ederiz.