MAT223 AYRIK MATEMATİK

Çizgelerde Eşleme
10. Bölüm

Doç. Dr. Emrah Akyar

Anadolu Üniversitesi
Fen Fakültesi Matematik Bölümü, ESKİŞEHİR

2011–2012 Güz Dönemi

Bir Dans Problemi

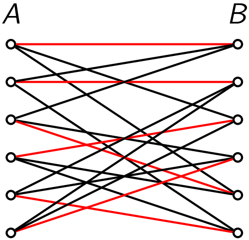
300 öğrencinin katıldığı bir baloda her kız öğrenci tam olarak 50 erkek öğrenciyi ve her erkek öğrenci de tam olarak 50 kız öğrenciyi tanısın (Yine, A kişisi B kişisini tanıyorsa B nin de A yı tanıdığını kabul edeceğiz).

İddia

Tüm öğrenciler aynı anda dans ettiğinde, dans pistinde sadece birbirlerini tanıyan çiftlerin dans etmesi mümkündür.

Tanışıklıktan söz ettiğimize göre daha önce de yaptığımız gibi bu durumu çizgelerle temsil edebiliriz. Düzlemde her öğrenci için bir nokta işaretleyip, (300 nokta) birbirini tanıyan öğrenciler için bu öğrencilere karşılık gelen noktaları bir kenar ile birleştirebiliriz.

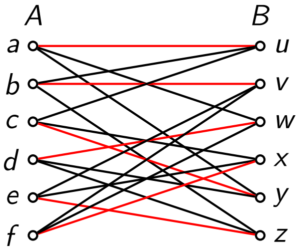
Ancak, bu sefer çizgenin noktalarını, erkekleri temsil eden noktalar ve kızları temsil eden noktalar diye iki kümeye ayırabiliriz. Bu kümeleri sırasıyla A ve B ile gösterirsek aşağıdakine benzer bir çizge elde ederiz.



Bu şekildeki özel çizgelere iki kümeli çizge (bipartite graph) denir. Daha kesin bir tanım aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım

Bir çizgenin noktaları, aynı kümenin herhangi iki noktası arasında kenar olmayacak şekilde A ve B gibi iki kümeye ayrılabiliyorsa, bu tür çizgelere iki kümeli çizge denir.



Yukarıdaki çizgede kırmızı ile işaretlenen kenarlar A ve B kümeleri arasında istenen türde bir eşleme sunar.

Bu tür eşlemeye mükemmel eşleme (perfect matching) denir.

Tanım

Çizgenin *her noktasının*, bir tek kenarın uç noktası olduğu kenarlar kümesine bir mükemmel eşleme denir.

Buna göre $M = \{au, bv, cy, dw, ez, fx\}$ bir mükemmel eşleme olur.

O halde iddiamız bu kavramlarla aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

İddia

300 noktalı, iki kümeli bir çizgede her noktanın derecesi 50 ise bu çizgede bir mükemmel eşleme vardır.

Yukarıda geçen 300 ve 50 sayılarının hiçbir önemi olmadığı açıktır. Önemli olan, tüm noktaların derecelerinin aynı ve sıfırdan farklı olmasıdır.

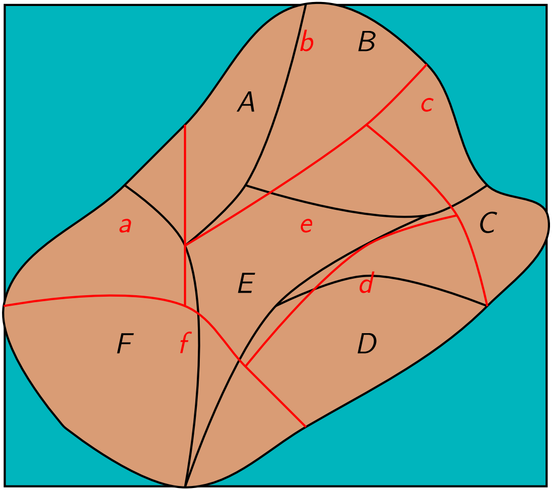
Çizge Kuramı üzerine ilk kitabı yazan, Macar matematikçi D. König tarafından verilen aşağıdaki teorem bu iddianın genelleştirilmesidir.

Teorem

İki kümeli bir çizgenin tüm noktalarının dereceleri aynı ve sıfırdan farklı ise bu çizgede bir mükemmel eşleme vardır.

Bu teoremin kanıtını daha sonraya bırakıyoruz.

Başka Bir Eşleme Problemi



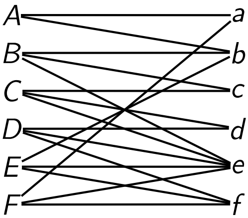
- Ada 600 km^2.
- Adada 6 kabile ve 6 kaplumbağa türü yaşıyor.
- Kabilelerin bölgeleri A, B, C, D, E ve F.
- Kaplumbağaların bölgeleri a, b, c, d, e ve f.
- Her bir bölge 100 km^2.
- Kabilelelerin bölgeleri kesişmiyor.
- Kaplumbağaların bölgeleri kesişmiyor.

Her kabile kendi bölgesinden bir kaplumbağayı totem olarak seçecek. Ancak, kabilelerin seçtikleri kaplumbağaların türlerinin farklı olması gerekiyor.

Soru

Böyle bir seçim mümkün mü?

Ya da



çizgesinde bir mükemmel eşleme var mı?

Önceki Teoreme göre tüm noktaların derecesi aynı olsaydı “evet” diyebilirdik.

Burada bir şey söyleyemeyiz. Acaba çok ağır olan bu koşulu biraz hafifletebilir miyiz?

Acaba

- Bir kabilenin bölgesinde kaplumbağa olmayabilir mi?
  HAYIR! Kaplumbağalar adayı parsellemiş.
- İki kabileye bir kaplumbağa düşebilir mi?
  HAYIR! O zaman bu kaplumbağanın yaşam alanı 200 km^2 olurdu.
- Üç kabileye iki kaplumbağa düşebilir mi?
  HAYIR! O zaman bu iki kaplumbağanın yaşam alanı 300 km^2 olurdu.
- $\vdots$

O halde genelleyecek olursak, k–kabilenin bulunduğu bölgede en az k–kaplumbağa yaşamalı!

Çizge kuramının kavramları ile ifade edecek olursak, Sol tarafta bulunan (A kümesi) herhangi k nokta için sağ tarafta (B kümesi) bu noktalardan en az birisi eşlenen en az k nokta bulunmalıdır.

Çöpçatanlık Problemi

Böylece temel teoremimizi elde etmiş olduk. Şimdi, incelediğimiz her iki problemin de çözümünü veren aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

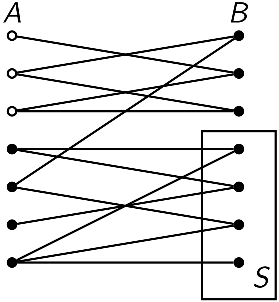
Teorem (Çöpçatanlık Teoremi/The Marriage Theorem)

İki kümeli bir çizgede bir mükemmel eşleme olması için gerek ve yeter koşul $|A| = |B|$ olması ve A kümesinin k elemanlı herhangi bir alt kümesi için B kümesinin her biri bu alt kümenin en az bir noktası ile eşlenen en az k noktasının var olmasıdır.

Açıktır ki, A kümesi ile B kümesi yer değiştirse, bu iki küme arasındaki (varsa) mükemmel eşleme yine bir mükemmel eşleme olmaya devam eder.

Peki ya teoremin koşulları?

Teoremi kanıtlamadan önce A kümesi ile B kümesinin yer değiştirmesinin teoremin koşullarının geçerliliğini değiştirmediğini gösterelim.



- $|A| = |B| = n$ olsun.
- Koşulların soldan sağa sağlandığını kabul edelim. Yani, A nın k elemanlı herhangi bir alt kümesi için B nin herbiri bu alt kümenin en az bir noktası ile eşlenen k tane noktası var olsun.
- Bu durumda teoremin koşullarının sağdan sola da sağlandığını gösterelim.

- B kümesinin k elemanlı keyfi bir alt kümesini seçelim ve S ile gösterelim ($|S| = k$).
- A kümesinin S deki noktalar ile eşlenen noktalarını siyah olarak gösterelim.
- O zaman A kümesinin beyaz noktaları B kümesinin *en fazla* $n - k$ noktası ile eşlenir (bazı beyazlar aynı nokta ile eşlenebilir).
- Teoremin koşulları soldan sağa sağlandığı için beyaz noktaların sayısı en fazla $n - k$ tane olur.
- Öyleyse siyah noktaların sayısı ise *en az* k tanedir.

Böylece teoremin koşulu sağdan sola da sağlanır.

Şimdi Çöpçatanlık Teoreminin kanıtı verelim.

Kısalık açısından, teoremin koşullarını sağlayan çizgelere *güzel çizge* diyelim (Yani, sol ve sağda eşit sayıda noktası olan ve soldaki herhangi k tane nokta sağda en az k tane nokta ile eşlenen çizgelere güzel çizge diyelim).

($\Rightarrow$) Çizgede bir mükemmel eşleme var olsun. Bu durumda çizgenin güzel çizge olduğu açık.

($\Leftarrow$) Çizge güzel çizge olsun. Bu durumda çizgede bir mükemel eşlemenin var olduğunu gösterelim.

Eğer çizgenin sadece iki noktası varsa, çizge güzel çizge olduğundan bu iki nokta birbiri ile eşlenmelidir. Yani, bir mükemmel eşleme vardır.

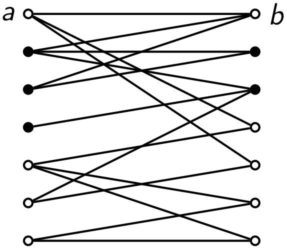
Kanıtı tamamlamak için verilen herhangi bir çizgeyi, iki tane güzel çizgeye ayırıp, daha sonra her bir parçayı yeniden iki parçaya ayırıp, *sadece iki noktası olan* güzel çizgeler elde edinceye devam edeceğiz. Böylece kalan kenarlar bize mükemmel eşlemeyi verir.

Bunun için önce aşağıdaki önermeyi kanıtlamalıyız.

Önerme

İkiden fazla noktası olan iki kümeli güzel çizge, iki tane iki kümeli güzel çizgeye ayrılabilir.

Acaba iki kümeli güzel çizgeyi NASIL her biri iki kümeli güzel çizge olacak şekilde ikiye ayırabiliriz?



Birbirleri ile eşlenen $a \in A$ ve $b \in B$ noktalarını seçsek, sadece bu iki noktadan oluşan çizgeyi birinci güzel çizge, kalan çizgeyi ise ikinci güzel çizge olarak alabilir miyiz?
Sadece iki noktadan oluşan birinci parça güzel çizge olur. Ancak, kalan çizge güzel çizge olmayabilir (yandaki şekilde k siyah nokta $k-1$ siyah nokta ile eşleniyor).

Oysa, parçalamadan önce A nın k noktası B nin en az k noktası ile eşleniyordu. Fakat b noktasını çıkarınca problem oldu.

Şimdi A kümesinin bir S alt kümesindeki noktaların tüm komşu noktalarının kümesini T ile gösterelim.

Şimdi güzel çizgeyi bir başka şekilde iki güzel çizgeye ayıralım:

$S \cup T$ kümesini bu noktaların kenarlarını ile birlikte birinci güzel çizge, kalanları ise ikinci güzel çizge olarak alalım.

Şimdi bu iki parçanın da güzel çizge olduğunu gösterelim.

İlk parçanın güzel olduğunu görmek için sol taraftan keyfi j tane nokta alalım. Başlangıçtaki çizge güzel çizge olduğundan bu j nokta sağda en az j nokta ile eşlenir. O halde T kümesinin tanımından ilk parça güzel olur.

İkinci parçanın güzel çizge olduğunu görmek için ise ikinci parçanın sağ ve sol tarafını yer değiştirmek yeterlidir.

Böylece kanıt tamamlanır.

Şimdi kanıtını ertelediğimiz ilk teoremimizin kanıtını artık verebiliriz.

Kanıt.

Kanıtı yapmak için tüm noktalarının dereceleri sıfırdan farklı ve aynı olan bir çizgenin güzel çizge olduğunu göstermek yeterlidir. Böylece çöpçatanlık teoreminden kanıt biter.

Çizgenin tüm noktalarının dereceleri aynı ve $d > 0$ olsun.

$S \subset A$ keyfi kümesini alalım. S kümesindeki noktaların B kümesindeki komşu noktalarının kümesini T ile gösterelim.

S kümesinden çıkan kenarların sayısı $d|S|$ olur. T kümesindeki her noktanın da derecesi d olduğundan $|T| \geq |S|$ olur. O halde çizge güzel çizgedir. $\square$

Mükemmel Eşlemeyi Nasıl Bulabiliriz?

Önceki bölümde mükemmel eşlemenin var olması için gerekli ve yeterli koşulları verdik. Böylece bir çizge verildiğinde bu çizgede mükemmel eşlemenin olup olmadığını hemen söyleyebiliriz.

Ancak, bu mükemmel eşlemeyi bulma konusunda yardımcı olmaz.

Soru

Peki (varsa) mükemmel eşlemeyi nasıl bulabiliriz?

($|A| = |B|$ olduğunu kabul ediyoruz $|A| \neq |B|$ ise mükemmel eşleme zaten yoktur.)

İlk akla gelen yöntem çizgenin tüm kenarlarının oluşturduğu kümenin her alt kümesinin mükemmel eşleme olup olmadığını kontrol etmek olabilir.

Fakat nokta sayısı çok fazla olduğunda, örneğin 300 nokta varsa $|A| = |B| = 150$ ise ve her noktanın derecesi 50 ise (dans problemi) toplam kenar sayısı $150 \cdot 50 = 7500$ olur. 7500 elemalı bir kümenin alt kümelerinin sayısı $2^{7500} > 10^{2257}$ olur.

İkinci akla gelen yöntem ise A kümesinin elemanlarının B kümesinin elemanları ile tüm mümkün eşlemelerini bulup, bunların mükemmel eşleme olup olmadığını kontrol etmek olabilir.

Yukarıda bahsedilen örnekteki A kümesi ile B kümesi arasında 150! farklı eşleme olabilir. $150! \approx 10^{263}$.

Not

Eşleme Ortak uç noktaları olmayan kenarlar kümesi.

Mükemmel Eşleme Tüm noktaların sadece bir kenarın uç noktası olduğu özel bir eşleme.

Buna göre boş küme, ya da sadece tek bir kenar bir eşlemedir.

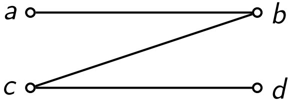
Şimdi boş küme ile başlayıp her seferinde bir eşleme ekleyerek mükemmel eşleme elde etmeye çalışalım.

Greedy Matching

Birbiri ile eşlenen iki noktayı ve bunları birleştiren kenarı alalım. Daha sonra kalan noktalardan yine birbiri ile eşlenen iki noktayı ve bunları birleştiren kenarı alalım. Bu işlemi birbiri ile eşlenmeyen nokta kalıncaya kadar devam edelim.

Eğer şanslıysak birbiri ile eşlenmeyen nokta kalmaz. Yani bir mükemmel eşleme elde ederiz.

Örneğin, aşağıdaki gibi 4 noktalı bir yol alsak (Alıştırma 10.4.1),

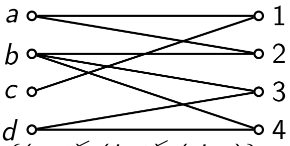


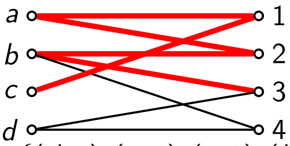
$M = \{ab, cd\}$ kenarlar kümesi bir mükemmel eşleme olur.

Fakat, yukarıda anlatılan yöntemi uygularken önce bc kenarını seçersek, mükemmel eşleme elde edemeyiz.

O halde bu yöntemle elde edilen eşleme mükemmel eşleme değilse, geriye dönüp seçtiğimiz kenarları değiştirmeliyiz (backtracking).

Peki hangi kenarları değiştireceğiz?





$$M = \{\cancel{(a,1)}, \cancel{(b,2)}, (d,4)\}, \quad M' = \{(d,4), (c,1), (a,2), (b,3)\}$$

- Yukarıdaki yöntemle elde edilen ve mükemmel olmayan bir eşlemeyi M ile gösterelim.
- Eşlenmemiş iki noktayı birleştiren ve her bir ikinci kenarı M de olan yolu P ile gösterelim (Bu yola genişletilmiş (augmenting path) yol denir). (Örneğin, yukarıda kırmızı ile gösterilen yol)
- Açıktır ki, tanımı gereği bu şekildeki P yolunun kenar sayısı tek olur.
- Ayrıca, P nin M de olmayan kenarlarının sayısı, M de olan kenarlarlarının sayısından bir fazladır.

Böyle bir P yolu bulunabilirse, P nin M de olan kenarlarını M den silip, M de olmayan kenarlarını ekleyerek yeni bir M' eşlemesi elde ederiz. Bu şekilde elde edilen M' eşlemesinin kenar sayısı M nin kenar sayısından bir fazla olur.

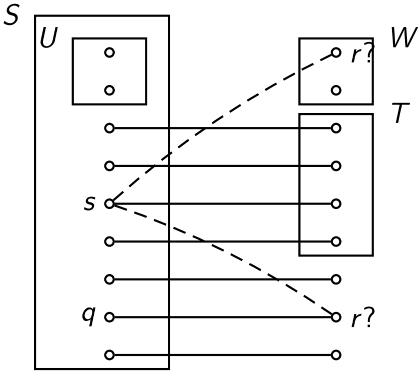
- Peki (varsa) bu genişletilmiş yolu nasıl bulacağız?
- Böyle bir yol yoksa mükemmel eşleme yoktur diyebilir miyiz?

Şimdi A kümesinin eşlenmemiş noktalarının kümesini U ile, B kümesinin eşlenmemiş noktalarının kümesini ise W ile gösterelim.

U kümesinin bir noktasından başlayıp, W kümesinin bir noktasında biten bir genişletilmiş yol inşa etmeye çalışalım.

U kümesinin bir noktasından başlayıp, her ikinci kenarı M de olan ve A kümesinin bir noktasında biten Q yoluna neredeyse genişletilmiş yol diyelim.

Bu durumda Q yolunun kenar sayısı çift olur ve M nin bir kenarı ile biter.



A kümesinde olup neredeyse genişletilmiş yol ile ulaşılabilecek noktaların kümesini S ile gösterelim ve bu S kümesini belirlemeye çalışalım.
U kümesinin her noktasını sıfır uzunluklu nerdeyse genişletilmiş yol olarak düşünebiliriz.
O halde $S = U$ alarak başlayıp, S kümesini adım adım oluşturalım. Her bir adımda S kümesi neredeyse genişletilmiş bir yol ile ulaşılabilecek noktaların kümesi olacak.

B kümesinin S nin noktaları ile eşlenen noktalarının kümesini T ile gösterelim.

U kümesinin noktaları hiçbir nokta ile eşlenmediğinden ve $U \subset S$ olduğundan

$$|S| = |T| + |U|$$

olur.

$s \in S$ noktasını T de olmayan r noktası ile eşleyen bir kenar arıyoruz.

Q bir $u \in U$ noktasından başlayıp, s noktasında biten neredeyse genişletilmiş bir yol olsun. O zaman iki durum söz konusudur:

- $r \in W$ ise yani r eşlenmemiş ise Q yoluna sr kenarını ekleyersek P genişletilmiş yolunu buluruz.
- $r \notin W$ ise r, A nin bir q noktası ile eşlenmiş demektir. O zaman Q neredeyse genişletilmiş yoluna rq ve sr kenarlarını eklersek q da biten bir neredeyse genişletilmiş yol buluruz ve q noktasını S kümesine ekleriz.

O halde S nin bir noktasını T de olmayan bir nokta ile birleştiren bir kenar bulabilirsek ya M yi ya da S yi genişletmiş oluruz.

Böyle devam edecek olursak sonunda M mükemmel eşleme olabilir de olmayabilirde. Ancak, S yi T nin dışındaki bir noktayla eşleyen kenar da yoktur.

Bu durumda mükemmel eşleme yoktur diyebiliriz. Gerçekten de,

$$|T| = |S| - |U| < |S| \quad \Rightarrow |T| < |S|$$

olduğundan mükemmel eşleme yoktur.

Alıştırma

Tüm noktalarının derecesi d olan iki kümeli bir G çizgesinde en az d farklı mükemmel eşlemenin olduğunu gösteriniz.

Soruyu tümevarım yöntemini kullanarak çözebiliriz:

- Tüm noktaların derecesi 1 ise çizgenin tüm kenarlarının kümesinin bir mükemmel eşleme olduğu açıktır.
- Tüm noktaların derecesi $d-1$ ise en az $d-1$ tane mükemmel eşleme var olsun (Tümevarım hipotezi).
- Şimdi tüm noktaların derecesi d olsun. Bu durumda ilk verdiğimiz teoremden en az bir M mükemmel eşlemenin var olduğunu hemen söyleyebiliriz.

  G çizgesinden M deki tüm kenarları silelim. Bu durumda her noktanın derecesinin $d-1$ olduğu yeni bir iki kümeli çizge elde ederiz. Tümevarım hipotezinden bu çizgede en az $d-1$ tane mükemmel eşleme olduğunu biliyoruz. Bu $d-1$ elşeme ile birlikte M yi düşünürsek G çizgesinde en az d tane eşleme elde ederiz.

Alıştırma

Bir $G = (V, E)$ çizgesinin iki kümeli çizge olması için gerek ve yeter koşul G nin kenar sayısı tek olan bir döngü içermemesidir. Gösteriniz.

$(\Rightarrow)$ G iki kümeli bir çizge olsun.

Kabul edelim ki, G çizgesinde $v_1 v_2 v_3 \ldots v_k$, $v_1 \in A$ olacak şekilde tek sayıda kenarı olan bir döngü var olsun ($v_1 \in B$ de seçebilirdik).

İki kümeli çizge tanımından açıktır ki, i tek ise $v_i \in A$, i çift ise $v_i \in B$ olur.

k tek olduğundan $v_k \in A$ olur. Bu durumda v_k ile v_1 arasında bir kenar olması gerekir. Bu ise çizgenin iki kümeli olmasıyla çelişir. O halde tek sayıda kenarı olan bir döngü var olamaz.

($\Leftarrow$) Çizgede tek sayıda kenarı olan bir döngü bulunmasın. Bu durumda G nin iki kümeli olduğunu gösterelim.

G nin u ile v noktaları için bu noktalar arasındaki en kısa yolun uzunluğunu $d(u, v)$ ile gösterelim.

$$A = \{u\} \cup \{v | d(u, v) \text{ çift sayı}\}, \quad B = V - A$$

kümelerini tanımlayalım.

Bu durumda A kümesinin tanımından keyfi $u, v \in A$ için u ile v yi birleştiren bir kenar yoktur. Benzer şekilde $u', v' \in B$ için yine bu noktaları birleştiren bir kenar yoktur.

O halde çizge iki kümeli bir çizge olur.